



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5519

Berechnung von turbulenten Auftriebs- strömungen mit dem $k-\epsilon-\overline{T'^2}$ -Turbulenzmodell

M. Bunk, C. Hoelle, J. U. Knebel, U. Müller

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Februar 1995

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 5519

**Berechnung von turbulenten
Auftriebsströmungen
mit dem $k - \varepsilon - \overline{T'^2}$ -Turbulenzmodell**

M. Bunk, C. Hoelle, J. U. Knebel, U. Müller

Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik
Projekt Nukleare Sicherheitsforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1995

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

Berechnung von turbulenten Auftriebsströmungen mit dem $k - \varepsilon - \overline{T'^2}$ -Turbulenzmodell

Zusammenfassung

Das $k-\varepsilon$ -Turbulenzmodell beschreibt die meisten turbulenten Strömungsphänomene zufriedenstellend, solange keine richtungsabhängigen Einflüsse wie Auftrieb vorhanden sind. Zur Berechnung von turbulenten Auftriebsströmungen wird das in dem Finite-Differenzen-Programm GENMIX implementierte $k-\varepsilon$ -Turbulenzmodell durch Einführung einer zusätzlichen Transportgleichung für die turbulenten Temperaturschwankungen ergänzt. Man erhält das $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell, mit dem die turbulenten Wärmeströme genauer wiedergegeben werden können. Die Nachrechnung eines Luft-Experiments zeigt die mit diesem Modell erreichbaren Verbesserungen. Durch einen Vergleich mit den in der Teststrecke TEFLU durchgeführten Natrium-Experimenten wird der Einfluß der in dem Modell auftretenden empirischen Konstanten bei der Simulation von Strömungen in Fluiden mit niedriger Prandtl-Zahl untersucht.

Calculation of turbulent buoyant flows with the $k - \varepsilon - \overline{T'^2}$ turbulence model

Abstract

The $k-\varepsilon$ turbulence model describes most turbulent flow phenomena satisfactorily as far as there are no direction-dependencies present like buoyancy effects. For calculating turbulent buoyant flows an additional transport equation for the turbulent temperature fluctuations will be added to the $k-\varepsilon$ turbulence model implemented in the finite difference scheme GENMIX. We get the $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ model which describes the turbulent transport of heat more accurately. The numerical simulation of an air experiment shows the attainable improvements. For the simulation of flows in low Prandtl number fluids, the influence of the empirical constants in the model is discussed by comparing calculated and measured results from the TEFLU sodium experiments.

Zusammenfassung / Abstract

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Symbole

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung.....	1
1.2	Kennzeichen turbulenter Strömungen.....	1
1.3	Luftfreistrahler von George et al.	4
2	Grundgleichungen	5
2.1	Zeitlich gemittelte Grundgleichungen.....	6
2.2	Transportgleichungen für Reynoldssche Spannungen und Wärmeströme.....	7
2.3	k - ϵ - Turbulenzmodell.....	9
2.3.1	Prinzip der Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität.....	10
2.4	Grenzschichtapproximation für vertikale Auftriebsstrahlen.....	11
2.5	Modellierte Gleichungen für zweidimensionale Grenzschichtströmungen.....	12
3	Das Programm GENMIX	15
3.1	Differenzenverfahren von Patankar und Spalding.....	15
3.2	x- ω -Koordinatensystem.....	15
3.3	Fortschreitende Integration.....	19
3.4	Tri-Diagonal-Matrix-Algorithmus (TDMA).....	20
4	Luftfreistrahler nach George et al.	21
4.1	Daten des Experiments / Anfangs- und Randbedingungen für die Simulation.....	21
4.2	Ergebnisse für das Standard-k- ϵ -Turbulenzmodell.....	23
5	Algebraisches Spannungs-/Fluß-Modell	26
5.1	Modellierung der Reynoldsschen Spannungen und Wärmeströme.....	26
5.2	Vereinfachung für Scherschichten im lokalen Gleichgewicht.....	29
5.3	Algebraische Beziehungen für vertikale Auftriebsströmungen.....	29
5.4	Ergebnisse für das Algebraische Spannungs-/Fluß-Modell.....	31
6	Transportgleichung für die turbulenten Temperaturschwankungen	32
6.1	Herleitung der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen.....	33
7	Natrium-Experimente von Knebel	41
7.1	Daten des Experiments / Anfangs- und Randbedingungen für die Simulation.....	41
7.2	Fluide mit niedrigen Prandtl-Zahlen.....	45
7.2.1	Variation der turbulenten Prandtl-Zahl.....	45
7.2.2	Variation des Dissipationsterms ϵT	46
7.2.3	Variation der turbulenten Prandtl-Zahl für die Temperaturschwankungen.....	46
7.2.4	Variation der Parameter.....	47
7.3	Ergebnisse der Simulationsrechnungen.....	47
7.3.1	Turbulente Prandtl-Zahl.....	47
7.3.2	Dissipationsterm in der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen.....	50
7.3.3	Turbulente Diffusion der Temperaturschwankungen.....	56
7.4	Vergleich der einzelnen Modelle.....	57
7.5.1	Geschwindigkeitsprofile.....	57
7.4.2	Profile für die Temperaturschwankungen.....	60
7.4.3	Profile der mittleren Temperatur.....	62
8	Zusammenfassung	65
9	Literaturverzeichnis	67

Verzeichnis der Symbole

a, b, c, d	1/m	Koeffizienten in der allgemeinen Transportgleichung (x - ω -System)
A_i, B_i, C_i, D_i	1, 1, [Φ], 1	Koeffizienten in numerisch integrierter Differentialgleichung
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$	1	empirische Konstanten in ε -Transportgleichung
C_1, C_2, C_3	1	empirische Konstanten (Algebraisches Spannungs-/Fluß-Modell)
C_{1T}, C_{2T}, C_{3T}	1	empirische Konstante (Algebraisches Spannungs-/Fluß-Modell)
$C_\varepsilon, C_s, C_{TT}$	1	empirische Konstanten zur Bildung von $\overline{\sigma_k}, \overline{\sigma_\varepsilon}, \overline{\sigma_{T'^2}}$
$C_{T'}$	1	empirische Konstante zur Bildung von $\overline{T'^2}, \varepsilon_T$
C_μ	1	empirische Konstante zur Bildung von ν_t
D	m	Düsendurchmesser
g	m/s ²	Erdbeschleunigung
g_i	m/s ²	Erdbeschleunigung in x_i -Richtung
G	m ² /s ³	Produktion von k durch Auftrieb
G_{ij}	m ² /s ³	Produktion von $\overline{u_i' u_j'}$ durch Auftrieb
G_{iT}	m/s ² K	Produktion von $\overline{u_i' T'}$ durch Auftrieb
G^*	1	Korrekturterm für achsensymmetrische Freistrahlen
k	m ² /s	kinetische Energie der Turbulenz
L	m	Lauflänge der Grenzschicht
p	N/m ²	Druck
p_0	N/m ²	hydrostatischer Druck
P	m ² /s ³	Produktion von k durch Schubspannungen
P_{ij}	m ² /s ³	Produktion von $\overline{u_i' u_j'}$ durch Schubspannungen
P_{iT}	m/s ² K	Produktion von $\overline{u_i' T'}$ durch mittlere Geschwindigkeitsgradienten
P_i, Q_i	1, [Φ]	Koeffizienten in der implementierten GENMIX-Transportgleichung
$r_I \dot{m}_I'', r_E \dot{m}_E''$	kg/s m ³	Massenfluß über innere, äußere Grenze
r/D	1	dimensionslose Koordinate
Re_D	1	Reynolds-Zahl am Düsenaustritt
S_Φ	[Φ]/s	Quell-/Senkenterm in Φ -Transportgleichung
t	s	Zeit
t_1, t_2	s	Grenzen des Mittelungszeit-Intervalls
T	K	Temperatur
$\overline{T'^2}$	K ²	Varianz der turbulenten Temperaturschwankungen
u, v, w	m/s	Geschwindigkeiten in x -, r -, φ -Richtung
$\overline{u_c}$	m/s	Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse
$\Delta \overline{u}$	m/s	Differenz zwischen $\overline{u_c}$ und Außengeschwindigkeit
$\overline{u_i' u_j'}$	m ² /s ²	turbulente Spannung in Tensorkoordinaten
$\overline{u_i' T'}$	m/s K	turbulenter Wärmestrom in Tensorkoordinaten
$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$	m ² /s ²	turbulente Normalspannungen
$\overline{u' T'}$	m/s K	turbulenter Wärmestrom in Hauptströmungsrichtung
$\overline{u' v'}$	m ² /s ²	turbulente Schubspannung

$\overline{\Delta u_0}, \overline{\Delta T_0}$	m/s, K	Geschwindigkeits- und Temperaturerhöhung am Düsenaustritt
$\overline{v'T'}$	m/s K	turbulenter Wärmestrom quer zur Hauptströmungsrichtung
x, r, φ	m, m, 1	Zylinderkoordinaten
x, y, z	m	kartesische Koordinaten
x_t	1	dimensionsloser Umschlagpunkt laminar/turbulent
x/D	1	dimensionsloser Abstand von der Düse
Δx	m	numerischer Vorwärtsschritt
Δy	m	Querausdehnung des Strahls
α	1/K	volumetrischer thermischer Ausdehnungskoeffizient
δ_{ij}	1	Kronecker-Symbol
δ	m	Grenzschichtdicke
ε	m ² /s ³	Dissipationsrate von k
ε_T	K ² /s	Dissipationsrate von $\overline{T'^2}$
Φ	[Φ]	beliebige Strömungsgröße
Γ	m ² /s	molekulare Diffusivität
Γ_t	m ² /s	Wirbeldiffusivität
Γ_Φ	m ² /s	Diffusionskoeffizient von Φ
ν_t	m ² /s	Wirbelviskosität
ρ	kg/m ³	Dichte
ρ_0	kg/m ³	Dichte bei Referenztemperatur
σ_t	1	turbulente Prandtl-Zahl
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma_{T'^2}$	1	turbulente Prandtl-Zahl für $k, \varepsilon, \overline{T'^2}$
ν, μ	m ² /s	molekulare kinematische, dynamische Viskosität
ψ	m ² /s	Stromfunktion
ψ_E, ψ_I	1	Wert der Stromfunktion am äußeren/inneren Rand des Rechengebiets
ω_v		Variable zur Beschreibung des Algebr. Spannungs-/Fluß-Modells

Indices:

N	Natrium
L	Luft
D	bezogen auf Düsendurchmesser
c	"centerline", Wert auf der Symmetrieachse
a	Wert in der Anströmung
0	Wert am Düsenaustritt
i, j, k	Koordinaten in Tensorschreibweise

Sonstige Zeichen:

∂	Symbol für partielle Ableitung
$\bar{\quad}$	zeitlich gemittelte Größe
$'$	zeitliche Schwankung

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, das am Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik (IATF) im Kernforschungszentrum Karlsruhe (KfK) bereits erfolgreich eingesetzte Computerprogramm GENMIX so zu erweitern, daß die physikalischen Effekte turbulenter Strömungen möglichst real wiedergegeben werden.

Um dies zu erreichen, wurde das vorhandene Programm bereits mehrfach erweitert. Zum einen wurde die allgemeine Auftriebserweiterung zur Berechnung auftriebsbehafteter Strömungen in das Standard- k - ε -Turbulenzmodell eingeführt [Kneb-89], zum anderen wurde das Programm durch Einführen algebraischer Beziehungen für die turbulenten Korrelationen [Hoel-93] verbessert. In dieser Arbeit wird auf die Merkmale der jeweils implementierten Erweiterung eingegangen und versucht, durch Einführung einer Transportgleichung für die Temperaturschwankungen T^2 eine weitere Verbesserung zu erzielen. Durch einen Vergleich mit Meßwerten von George et al. [GeAT-77] und Knebel [Kneb-93] wird gezeigt, daß durch die zusätzliche Transportgleichung die physikalischen Effekte besser reproduziert werden als durch die ursprünglich vorhandenen algebraischen Beziehungen.

Zudem wird auf die Problematik bei der Berechnung von Fluiden mit sehr niedrigen Prandtl-Zahlen eingegangen. Besonders die Schwierigkeiten bei der Berechnung von Strömungen in flüssigem Natrium werden untersucht und entsprechende Verbesserungsvorschläge erarbeitet.

1.2 Kennzeichen turbulenter Strömungen

Laminare Strömungsprobleme können oft so vereinfacht werden, daß sich analytische Lösungen finden lassen. Wesentlich schwieriger ist dies bei turbulenten Strömungen. Wegen der Komplexität turbulenter Probleme lassen sich nur in den wenigsten Fällen analytische Lösungen angeben.

Um zu verstehen, warum Turbulenz so schwer mathematisch zu erfassen ist, soll zuerst der Unterschied zwischen laminaren und turbulenten Strömungen erläutert werden.

Turbulente Strömungen sind sehr unregelmäßig. Die Größen turbulenter Strömungen, zum Beispiel Geschwindigkeit oder Temperatur, unterliegen starken Variationen nach Ort und Zeit. Laminare Strömungen hingegen verlaufen geordnet. Turbulente Strömungen sind immer dreidimensional und instationär. Abbildung (1.1) zeigt eine laminare, stationäre und eindimensionale Poiseuille-Strömung zwischen zwei ebenen Platten.

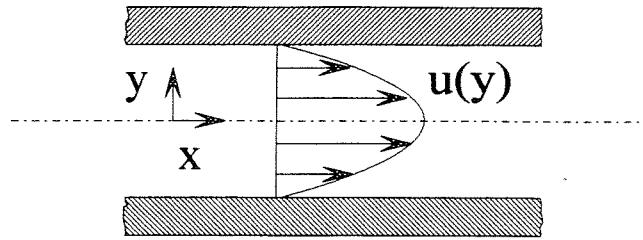


Abbildung (1.1): Poiseuille-Strömung zwischen zwei ebenen Platten

Die auftretenden Gleichungen vereinfachen sich wesentlich, so daß ohne Weiteres eine analytische Lösung für die Geschwindigkeit angegeben werden kann.

Eine turbulente Strömung zwischen zwei ebenen Platten ist dagegen dreidimensional und instationär, auch wenn eine konstante mittlere Geschwindigkeit vorliegt.

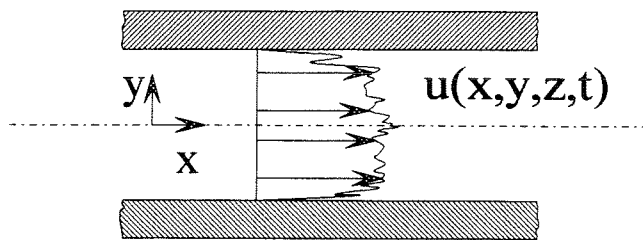


Abbildung (1.2): Turbulente Strömung zwischen zwei ebenen Platten

Ein weiterer wichtiger Unterschied liegt in der Struktur der Turbulenz. Turbulente Strömungen sind Wirbelströmungen. Die Bewegung teilt sich auf verschieden große Elemente, sogenannte Turbulenzballen auf. Die großen Turbulenzballen entziehen der Hauptströmung Energie. Ihre Größe wird durch die Geometrie des Problems begrenzt. In den kleinsten turbulenten Elementen wird diese Energie dissipiert, d.h. durch viskose Kräfte in innere Energie des Fluids umgewandelt. Ohne Energiezufuhr zerfällt deshalb eine turbulente Bewegung sehr schnell. Zunächst soll der Mechanismus der Dissipation näher untersucht und zwei Begriffe diskutiert werden, die für die Dissipation eine wichtige Rolle spielen:

- Wirbelfadenstreckung: Turbulente Strömungen setzen sich aus verschiedenen großen Wirbelfäden zusammen. Ein einzelner Wirbelfaden ist in Abbildung (1.3) dargestellt. Er dreht sich um die x_3 -Achse. Seine Wirbelstärke ist definiert als $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$.

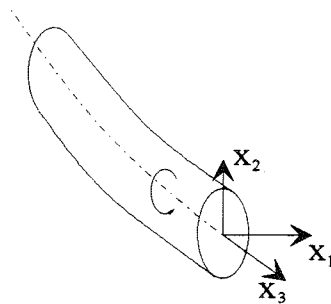


Abbildung (1.3): Wirbelfaden in einer turbulenten Strömung

Ändert sich nun u_3 in x_3 -Richtung, $\partial u_3 / \partial x_3 > 0$, so wird der Wirbelfaden in x_3 -Richtung gestreckt und sein Querschnitt verringert sich.

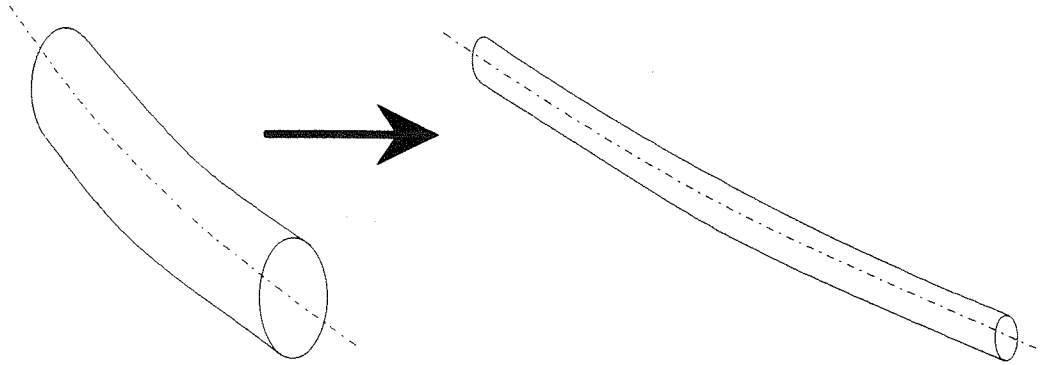


Abbildung (1.4): Veränderung eines Wirbelfadens durch Wirbelfadenstreckung

Wegen der Drehimpulserhaltung muß bei kleineren Radien die Rotationsgeschwindigkeit zunehmen. Aus einem großen Wirbelfaden mit geringer Rotationsgeschwindigkeit entwickelt sich ein kleiner Wirbelfaden mit sehr hoher Rotationsgeschwindigkeit.

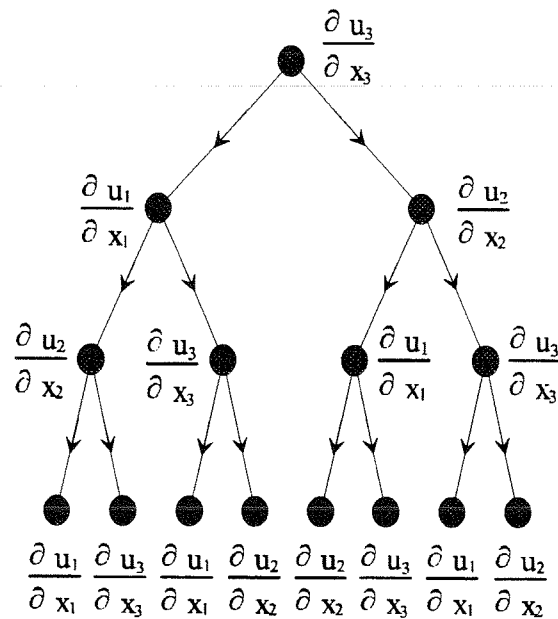


Abbildung (1.5): Energiekaskade - Einfluß der Geschwindigkeitsänderungen

- Energiekaskade: Die oben beschriebene Streckung in x_3 -Richtung erhöht die Geschwindigkeitskomponenten in u_1 - und u_2 -Richtung. Daraus resultiert wieder eine Wirbelfadenstreckung anderer Elemente. Es entstehen noch kleinere Elemente mit noch höherer Rotationsgeschwindigkeit. Dieser Mechanismus wiederholt sich solange, bis die Geschwindigkeitsgradienten so groß werden, daß viskose Kräfte den Mechanismus dämpfen. Die kinetische Energie der kleinsten Elemente wird dann in innere Energie des Strömungsmediums dissipiert. Abbildung (1.5) faßt den Vorgang zusammen. Geschwindigkeitsänderungen in einer Richtung erzeugen jeweils Geschwindigkeitsänderungen in den beiden anderen Richtungen.

In Strömungen mit einer ausgezeichneten Hauptströmungsrichtung sind die größten Wirbelelemente richtungsabhängig, denn sie werden durch Geschwindigkeitsschwankungen der Hauptströmung gestreckt. Die Wirbelfadenstreckung erfolgt so, daß nach einigen Schritten die Wirbelfäden in allen 3 Raumrichtungen gleichmäßig gestreckt sind und keine Vorzugsrichtung mehr besitzen. Dies wird als "lokale Isotropie" bezeichnet.

1.3 Luftfreistrahler von George et al.

Ein Beispiel für turbulente Strömungen ist der Luftfreistrahler von George et al. [GeAT-77]. George, Alpert & Tamanini führen Experimente an einem vertikalen, achsensymmetrischen Auftriebsstrahl durch. Die Einzelheiten sind in Abbildung (1.6) dargestellt.

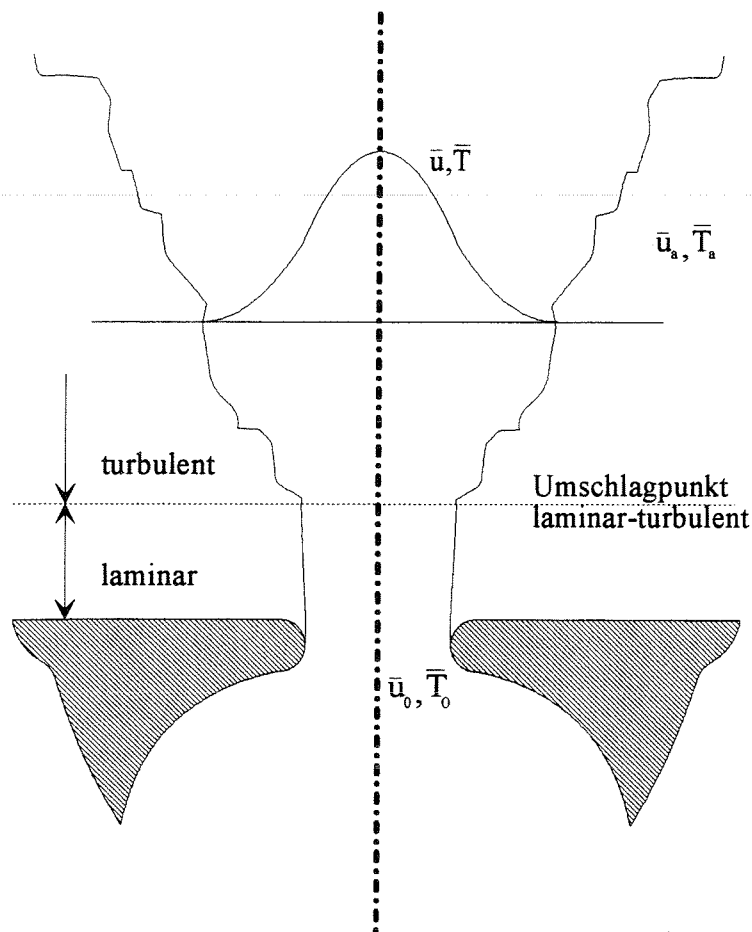


Abbildung (1.6): Luftfreistrahler von George et al.

Es handelt sich um einen heißen Luftfreistrahler in eine homogene, kalte Umgebung. Die anfangs laminare Strömung schlägt in eine turbulente Strömung um. Ab diesem Punkt werden die Berechnungen starten.

2 Grundgleichungen

Aus der Bilanz an einem Kontrollvolumen erhält man die zur Beschreibung der Strömung notwendigen Gleichungen.

Sie sind im folgenden in Tensornotation geschrieben. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Kommt in einem Term ein Index doppelt vor, so wird über diesen Index summiert.

Die Kontinuitätsgleichung läßt sich somit verkürzen auf

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.1)$$

Die Impulsgleichung

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{Druckterm}} + \underbrace{\rho g_i}_{\text{Auftriebsterm}} \quad (2.2)$$

und die Wärmetransportgleichung (ohne Quellen und Senken)

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{u_j \frac{\partial T}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\Gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{Diffusion}} \quad (2.3)$$

bilden zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ein geschlossenes System von fünf Differentialgleichungen. Nach Festlegung geeigneter Anfangs- und Randbedingungen lassen sich somit laminare Strömungsprobleme numerisch, zum Teil auch analytisch lösen.

Für turbulente Strömungen treten neue Probleme auf, die nicht ohne weiteres gelöst werden können. Die Größe der turbulenten Elemente einer Wirbelkaskade liegt in einem Intervall, welches drei Zehnerpotenzen umfasst. Um die Wirbelkaskade bis zu den kleinsten turbulenten Elementen in allen drei Raumrichtungen aufzulösen, sind mindestens 10^9 Gitterpunkte notwendig. Zusätzlich erfordert die hohe Rotationsgeschwindigkeit der gestreckten Wirbelfäden eine sehr feine zeitliche Diskretisierung. Die Lösung der zeitabhängigen Gleichungen stellt extreme Anforderungen an die Größe des Arbeitsspeichers und die Rechengeschwindigkeit des Computers. Zur Zeit gibt es keinen Computer, der technisch in der Lage ist, akzeptable Rechenzeiten zur Lösung der zeitabhängigen Gleichungen zu liefern.

Zudem sind die Kosten so hoch, daß auch wirtschaftliche Aspekte Grenzen bei der Lösung der exakten Gleichungen setzen.

Abhilfe schafft die Einführung von statistischen Turbulenzmodellen, auf die in den folgenden Kapiteln näher eingegangen wird.

2.1 Zeitlich gemittelte Grundgleichungen

In der Praxis sind oft nur die zeitlich gemittelten Größen für Temperatur und Geschwindigkeit von Interesse, deshalb wird die turbulente Strömung statistisch betrachtet. In der Reynoldsschen Beschreibung turbulenter Strömungen werden die instationären turbulenten Größen in einen zeitunabhängigen Mittelwert und einen zeitabhängigen Schwankungswert zerlegt.

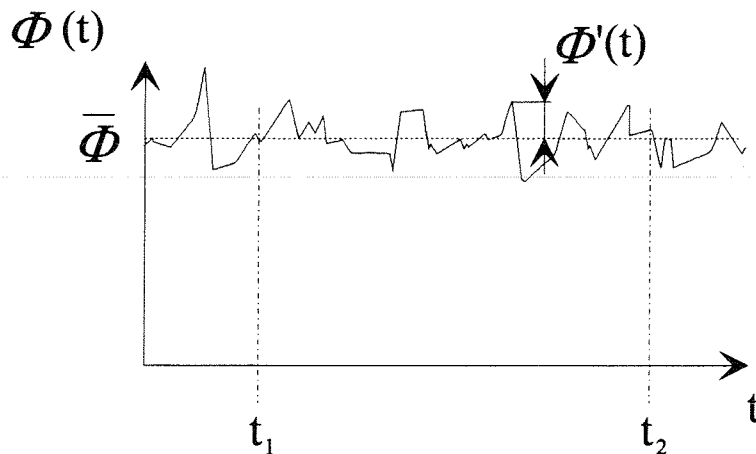


Abbildung (2.1): Mittelwertbildung einer turbulenten Größe $\Phi(t)$

Den Mittelwert dieser Größe erhält man nach der Vorschrift

$$\bar{\Phi} = \lim_{(t_2-t_1) \rightarrow \infty} \frac{1}{(t_2-t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt. \quad (2.4)$$

Im folgenden werden die gemittelten Werte mit einem Mittelungsstrich, die Schwankungswerte mit einem Apostroph gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(x, y, z) + u_i'(x, y, z, t); & T &= \bar{T}(x, y, z) + T'(x, y, z, t) \\ p &= \bar{p}(x, y, z) + p'(x, y, z, t); & \rho &= \bar{\rho}(x, y, z) + \rho'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Unter Berücksichtigung der obigen Beziehungen und anschließender zeitlicher Mittelung der Gleichungen für die Geschwindigkeiten u_i und für die Temperatur T ergibt sich ein neuer Satz zeitlich gemittelter Grundgleichungen. Dieses neue System aus

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

Impulsgleichung

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \underbrace{\bar{u}_i' u_j'}_{?} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + g_i \quad (2.7)$$

und Wärmetransportgleichung

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \underbrace{\bar{u}_i' T'}_{?} \right) \quad (2.8)$$

ist zeitunabhängig, wodurch es leichter wird, zu einer Lösung zu kommen. In dem Gleichungssystem erscheinen bisher unbekannte Korrelationen $\bar{u}_i' u_j'$ und $\bar{u}_i' T'$. Sie werden Reynoldssche Spannungen bzw. Reynoldssche Wärmeströme genannt, da sie einen zusätzlichen Impuls- bzw. Wärmeaustausch durch die turbulente Bewegung des Fluids darstellen.

Um zu einem geschlossenen Gleichungssystem zu kommen, werden zusätzliche Transportgleichungen für die unbekanntenen Korrelationen formuliert.

2.2 Transportgleichungen für Reynoldssche Spannungen und Wärmeströme

Hoelle [Hoel-93] beschreibt, wie sich aus den zeitabhängigen und den zeitlich gemittelten Gleichungen die exakten Transportgleichungen herleiten lassen.

Für die Reynoldsschen Spannungen erhält man

$$\begin{aligned}
 \overline{u_k \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k}} = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\left[\overline{u_i' u_j' u_k'} + \frac{p'}{\rho} (\delta_{jk} u_i' + \delta_{ik} u_j') - \nu \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k} \right]}_{\text{Diffusion}} \\
 & - \underbrace{\left[\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right]}_{\text{Produktion durch Schubspannungen}} - \underbrace{\alpha \left[\overline{g_i u_j' T'} + \overline{g_j u_i' T'} \right]}_{\text{Produktion durch Auftrieb}} \\
 & + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right]}_{\text{Druck-Scher-Korrelation "pressure-strain"}} - 2 \nu \underbrace{\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} \right]}_{\text{Dissipation } \varepsilon_{ij}} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol und ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

In der Transportgleichung für die Reynoldsschen Spannungen treten wie in den vorherigen Gleichungen konvektive und diffusive Glieder auf. Bei den Quell- und Senkengliedern tritt ein neues Glied auf, welches in den bisherigen Gleichungen nicht auftritt. Das "pressure-strain"-Glied, auch Umverteilungsglied genannt, gleicht die Geschwindigkeitskomponenten u_1 , u_2 und u_3 untereinander an. Für die Schubspannungen ($i \neq j$) stellt es einen Senkenterm dar, sodaß letztendlich nur noch Normalspannungen bestehen bleiben. Als Folge wird die Anisotropie der Turbulenz abgebaut, wie bereits bei der Beschreibung der Energiekaskade erläutert wurde.

Die Transportgleichung für die Reynoldsschen Wärmeströme lautet:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\overline{u_j \frac{\partial u_i' T'}{\partial x_j}}}_{\text{Konvektion}} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left[\overline{u_i' u_j' T'} + \frac{1}{\rho} \delta_{ij} \overline{p' T'} - \Gamma \frac{\partial \overline{u_i' T'}}{\partial x_j} \right]}_{\text{Diffusion}} \\
 & - \underbrace{\left[\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \overline{u_j' T'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right]}_{\text{Produktion durch Hauptströmungsfeld}} - \underbrace{\alpha g_i \overline{T'^2}}_{\text{Produktion durch Auftrieb}} \\
 & + \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}}}_{\text{Druck-Temperaturgradient-Korrelation "pressure-scrambling"}} - \underbrace{(\Gamma + \nu) \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right]}_{\text{viskose Vernichtung}} \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Wie bei der Gleichung für die Reynoldsschen Spannungen tritt auch bei den Reynoldsschen Wärmeströmen ein Glied auf, welches eine Korrelation zwischen Druckschwankungen und Schwankungen des Temperaturgradienten enthält. Das "pressure-scrambling"-Glied ist deshalb das Gegenstück zum "pressure-strain"-Glied. Es reduziert die turbulenten Wärmeflüsse und stellt das Hauptsenkenglied in dieser Gleichung dar.

Es ist offensichtlich, daß sich durch Herleitung weiterer Differentialgleichungen keine Schließungsbedingung für das Gleichungssystem ergibt, denn sowohl in den Diffusions- und Dissipationstermen als auch in den "pressure-strain"- und "pressure-scrambling"-Gliedern treten höhere Korrelationen auf. Rodi [Rodi-85] äußert sich zu dem Problem wie folgt:

"Es ist nicht möglich, auf diese Weise zu einem lösbaeren Gleichungssystem zu kommen, und zwar deshalb nicht, weil man die Information, die man durch die Mittelung verloren hat, nicht durch mathematische Manipulationen wiedergewinnen kann."

2.3 $k - \varepsilon$ - Turbulenzmodell

Um zu einem geschlossenen Gleichungssystem zu kommen, werden Modellannahmen für die unbekanntenen Korrelationen gemacht und ein sogenanntes Turbulenzmodell eingeführt.

Die kinetische Energie der Turbulenz k ist definiert als die Summe der turbulenten Normalspannungen $\overline{u_i' u_i'}$.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}). \quad (2.12)$$

Durch Summation der entsprechenden Transportgleichungen erhält man die Transportgleichung für k :

$$\underbrace{\overline{u_i} \frac{\partial k}{\partial x_i}}_{\text{Konvektion}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j' \left(\frac{u_i' u_i'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right)} \right]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{v \frac{\partial k}{\partial x_j}}_{\text{Dissipationsrate } \varepsilon} - \underbrace{\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{Spannungsproduktion}} - \underbrace{\alpha g_i \overline{u_i' T'}}_{\text{Auftriebsproduktion}} \quad (2.13)$$

Zusätzlich zu k bildet die Dissipationsrate der kinetischen Energie der Turbulenz ε die Grundlage für das k - ε -Turbulenzmodell. Während \sqrt{k} den Geschwindigkeitsmaßstab des Turbulenzmodells darstellt, bildet $k\sqrt{k}/\varepsilon$ den Längenmaßstab. k/ε kann somit zu einem Zeitmaßstab kombiniert werden. Für die Dissipationsrate ε soll auch eine Transportgleichung gelöst werden. Zur Herleitung dieser Gleichung siehe Rodi [Rodi-85]

$$\underbrace{\overline{u_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}}_{\text{Konvektion}} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{\overline{v u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}}_{\text{Diffusion}} + 2 \frac{v}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right]$$

$$- 2 \underbrace{v \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}}_{\text{Produktion durch Wirbelfadenstrecken}} - \underbrace{2 v^2 \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_k}}_{\text{viskose Vernichtung}} \quad (2.14).$$

Hier wurden bereits für hohe Reynolds-Zahlen Vereinfachungen getroffen. Der Produktionsterm vereinfacht sich bei lokaler Isotropie zur Produktion durch gegenseitiges Strecken der Wirbelfäden.

2.3.1 Prinzip der Wirbelviskosität und Wirbeldiffusivität

Mit den oben eingeführten Gleichungen lassen sich Beziehungen für die unbekanntes Korrelationen modellieren. Für die Reynoldsschen Spannungen wird ein Gradientenansatz eingeführt. Analog zum Newtonschen Schubspannungsansatz für laminare Strömungen werden die Reynoldsspannungen $\overline{u_i' u_j'}$ dem Gradienten der mittleren Geschwindigkeit proportional gesetzt. Aufgrund der Summenkonvention muß für die Normalspannungen ($i=j$) ein Korrekturterm hinzugefügt werden.

$$\overline{u_i' u_j'} = -\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.15)$$

ν_t wird als Wirbelviskosität bezeichnet. Sie ist keine Stoffgröße, sondern hängt von der Turbulenzstruktur ab. Nach Harlow & Nakajama [HaNa-67] wird sie modelliert als

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.16)$$

Für die Wärmeströme $\overline{u_i' T'}$ gilt analog dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung

$$\overline{u_i' T'} = -\Gamma_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad (2.17)$$

Γ_t wird als Wirbeldiffusivität bezeichnet und ist ebenso wie ν_t keine Stoffgröße, sondern hängt von der Struktur der Turbulenz ab.

Im Standard k - ε -Turbulenzmodell werden ν_t und Γ_t einander proportional gesetzt, da der Wärmeaustausch maßgeblich von der Dynamik der Strömung beeinflusst wird. Als Proportionalitätskonstante dient die turbulente Prandtl-Zahl σ_t ,

$$\sigma_t = \frac{\nu_t}{\Gamma_t} \quad (2.18)$$

2.4 Grenzschichtapproximation für vertikale Auftriebsstrahlen

Im weiteren sollen nur vertikale Auftriebsstrahlen betrachtet werden. Um die Gleichungen zu vereinfachen, wird die Grenzschichtapproximation eingeführt.

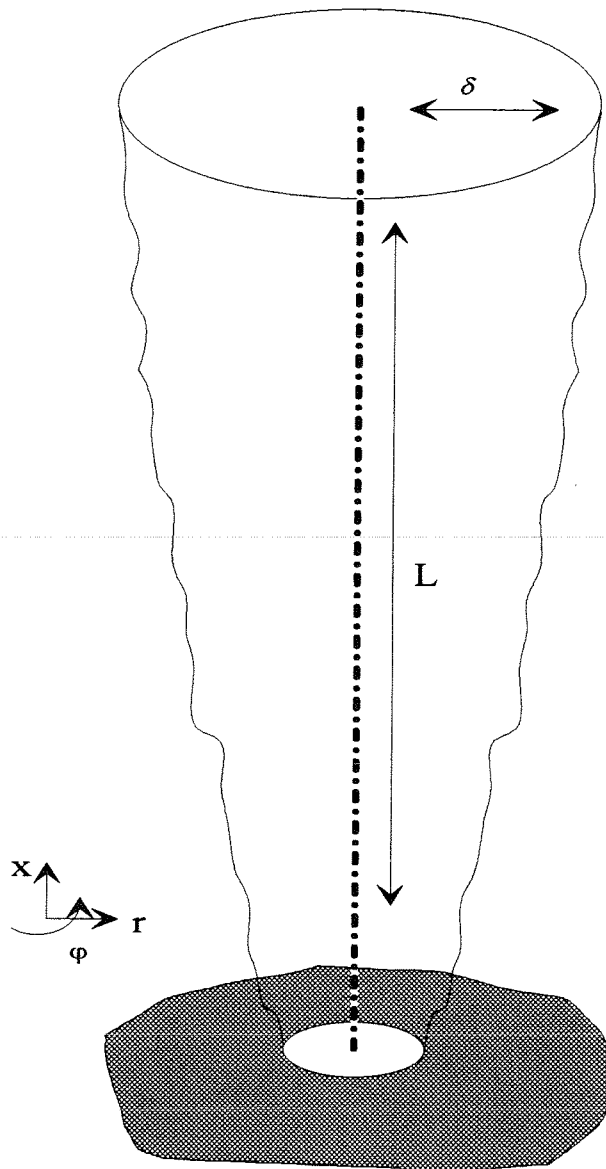


Abbildung (2.2): Grenzschichtströmung

Die Strömung sei zweidimensional, d.h. Ableitungen in z- bzw. φ -Richtung fallen heraus

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (2.19)$$

Die Hauptströmungsrichtung sei die x -Richtung. Die Strömung breitet sich weitaus stärker in dieser Richtung aus als quer dazu. Daraus folgt, daß die Querausdehnung wesentlich kleiner ist als die Ausdehnung in Hauptströmungsrichtung. Dies bedeutet, daß die Grenzschichtdicke δ klein gegenüber der Ausdehnung L in Hauptströmungsrichtung ist

$$\delta \ll L. \quad (2.20)$$

Eine Größenordnungsabschätzung der Kontinuitätsgleichung liefert

$$\frac{\bar{v}}{\delta} \propto \frac{\bar{u}}{L} \Rightarrow \bar{v} \ll \bar{u}. \quad (2.21)$$

Eine weitere Überlegung läßt den Schluß zu, daß die Änderungen in Querrichtung sehr viel größer sind als diejenigen in Hauptströmungsrichtung.

$$\frac{\partial}{\partial x} \propto \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \propto \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.22)$$

Molekulare und turbulente Diffusion sind nur in Querrichtung zugelassen.

Aufgrund der Grenzschichtapproximation wird die laterale Druckvariation vernachlässigt und für den Druckgradienten in der Bewegungsgleichung der hydrostatische Druckgradient der ruhenden Umgebung gesetzt:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = -\frac{dp_0}{dx_i} = -\rho_0 g_i \quad . \quad (2.23)$$

Mit Hilfe dieser Annahmen erhält man eine stark vereinfachte Impulsgleichung. Es sei noch betont, daß es sich hier nicht um eine Boussinesq-Approximation handelt, bei welcher die Temperaturabhängigkeit der Dichte nur durch das Auftriebsglied $\frac{\rho(T,p)-\rho_0}{\rho_0} g_i$ berücksichtigt wird

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) + \frac{\rho(T,p)-\rho_0}{\rho(T,p)} g_i \quad (2.24)$$

Die Dichte $\rho(T,p)$ wird aus der Zustandsgleichung für perfekte Gase ermittelt.

2.5 Modellierte Gleichungen für zweidimensionale Grenzschichtströmungen

Mit den oben erläuterten Vereinfachungen ergibt sich ein neues Gleichungssystem, welches wiederum nicht geschlossen ist. Die Modellansätze des k - ε -Modells liefern die noch fehlenden Beziehungen, und man erhält ein geschlossenes Gleichungssystem zur Lösung zweidimensionaler Grenzschichtströmungen. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich ab hier auf achsensymmetrische, vertikale Probleme. Die Gleichungen in Polarkoordinaten lauten dann:

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{v}) = 0, \quad (2.25)$$

Impulsgleichung

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - r \overline{u' v'} \right) - \frac{(\rho(p,T)-\rho_0)}{\rho(p,T)} g \quad , \quad (2.26)$$

Wärmetransportgleichung

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} - r \overline{v' T'} \right), \quad (2.27)$$

Transportgleichung für die kinetische Energie der Turbulenz k

$$\overline{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) - \underbrace{\overline{u' v' \frac{\partial u}{\partial r}}}_P - \underbrace{\alpha g \overline{u' T'}}_G - \varepsilon, \quad (2.28)$$

Transportgleichung für die Dissipationsrate ε

$$\overline{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon^2}{k} \left(C_{\varepsilon 1} \frac{P+G}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right). \quad (2.29)$$

P ist das Produktionsglied, welches kinetische Energie der Hauptströmung in kinetische Energie der Turbulenz überführt. G wird als Auftriebsglied bezeichnet. Es überführt potentielle Energie des Systems in kinetische Energie der Turbulenz.

Die hierbei auftretenden unbekanntenen Korrelationen $\overline{u' v'}$, $\overline{u' T'}$ und $\overline{v' T'}$ werden mit dem beschriebenen Prinzip der Wirbelviskosität/-diffusivität modelliert.

$$\begin{aligned} \overline{u' v'} &= \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} & \nu_t &= C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \\ \overline{u' T'} &= \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \\ \overline{v' T'} &= \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Das Modell enthält mehrere empirische Konstanten. Diese wurden im Vergleich mit Messungen und einer Computeroptimierung ermittelt. Rodi [Rodi-85] gibt für die Konstanten die Standard-Werte nach Tabelle (2.1) an.

C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_t
0.09	1.0	1.3	1.43	1.92	0.6

Tabelle (2.1): Standard-Konstanten nach Rodi [Rodi-85]

Für achsensymmetrische Freistrahlen ist an zwei Konstanten eine Korrektur erforderlich. Rodi [Rodi-85] gibt für die Konstanten C_μ und $C_{\varepsilon 2}$ folgende empirischen Korrekturfunktionen an

$$C_\mu = (0.09 - 0.04 G) \frac{f\left(\frac{\bar{P}}{\varepsilon}\right)}{0.09} \quad \text{mit } G = \left[\frac{\Delta y}{2\Delta u} \right] \left[\frac{d\bar{u}_c}{dx} - \left| \frac{d\bar{u}_c}{dx} \right| \right]^{0.2} \quad (2.31)$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.92 - 0.067 G$$

Hierbei ist Δy die Querausdehnung des Strahls, \bar{u}_c die Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse und $\Delta \bar{u}$ die Differenz zwischen Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse und Außengeschwindigkeit $\bar{u}_c - \bar{u}_0$.

3 Das Programm GENMIX

Die Diffusion in x-Richtung wird aufgrund der Grenzschichtapproximation vernachlässigt, erste und zweite Ableitungen in x-Richtung verschwinden. Dies bedeutet, daß Störungen in dieser Richtung ausschließlich auf konvektivem Wege transportiert werden und sich nur stromab auswirken können. Das stromaufwärts herrschende Strömungsfeld wird dadurch nicht beeinflusst. Aus den anfangs elliptischen werden parabolische Differentialgleichungen.

Zur Lösung des Gleichungssystems wird eine erweiterte Version des am Imperial College in London entwickelten Computerprogramms GENMIX auf einer Rechenanlage vom Typ IBM 3090 verwendet.

3.1 Differenzenverfahren von Patankar und Spalding

Das Programm GENMIX basiert auf einem von Patankar und Spalding [PaSp-70] entwickelten impliziten Differenzenverfahren, das mit der Methode der fortschreitenden Integration arbeitet. Die Besonderheit des Verfahrens liegt darin, daß sich das Koordinatensystem selbständig an die Strömung anpaßt. Somit ist es möglich, das Problem sehr effizient zu lösen.

Alle auftretenden Differentialgleichungen haben die gleiche Form,

$$\underbrace{u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial r}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{S_{\phi}}_{\text{Quellen/Senken}} \quad (3.1)$$

Zur Lösung der Gleichungen kann deshalb ein einheitliches Verfahren verwendet werden.

3.2 x - ω -Koordinatensystem

Zunächst ist es erforderlich, die Geometrie des Strömungsgebietes zu diskretisieren.

Das von Patankar und Spalding [PaSp-70] verwendete Koordinatensystem definiert als Querkoordinate eine dimensionslose Stromfunktion

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (3.2)$$

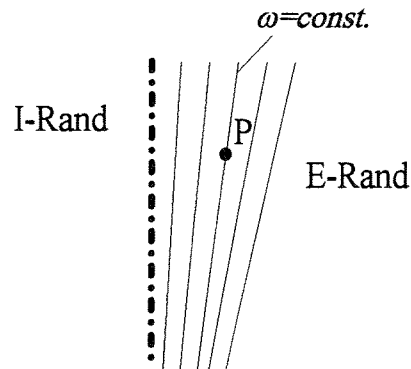


Abbildung (3.1): Dimensionslose Stromfunktion ω

ω ist dabei das Verhältnis der zwischen einem Punkt P und der inneren Grenze fließenden Masse zu der gesamten zwischen innerer und äußerer Grenze fließenden Masse.

Unter Berücksichtigung der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial r} = r \rho \bar{u} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (3.3)$$

für die Stromfunktion ψ und bei Vernachlässigung des konvektiven Terms in radialer Richtung lassen sich die vorkommenden Differentialgleichungen auf eine einheitliche Form bringen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(r^2 \rho \bar{u} \Gamma_{\Phi, \text{eff}} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\rho \bar{u}} S_{\Phi}, \quad (3.4)$$

wobei Φ jeweils für eine der Größen \bar{u} , \bar{T} , k , ε oder \bar{T}^2 stehen kann.

Für die Transformation in das neue x - ω -Koordinatensystem müssen die partiellen Ableitungen $(\partial/\partial x)_{\psi=\text{const}}$ durch Ableitungen der Form $(\partial/\partial x)_{\omega=\text{const}}$ ersetzt werden.

Nach Patankar und Spalding [PaSp-70] gilt folgende Rechenregel :

"Die Änderung eine Variable von A nach C muß gleich der Änderung von A nach B plus der Änderung von B nach C sein."

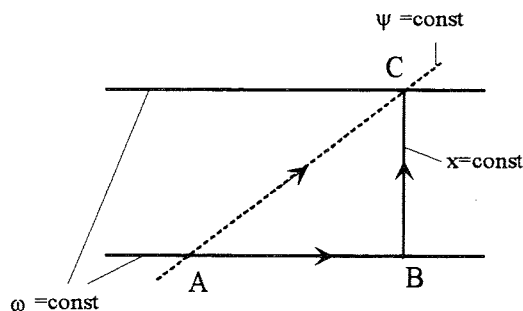


Abbildung (3.2): Transformation der partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{\psi=\text{const}} = \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{\omega=\text{const}} + \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_{x=\text{const}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial X}\right)_{\psi=\text{const}} \quad (3.5)$$

Aus $\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I}$ erhält man die Beziehung

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial X}\right)_{\psi=\text{const}} = -\frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[\frac{\partial \psi_I}{\partial X} + \omega \frac{\partial}{\partial X} (\psi_E - \psi_I) \right], \quad (3.6)$$

oder eingesetzt in Gleichung (3.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{\psi=\text{const}} = \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)_{\omega=\text{const}} - \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_{x=\text{const}} \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left[\frac{\partial \psi_I}{\partial X} + \omega \frac{\partial}{\partial X} (\psi_E - \psi_I) \right] \quad (3.7)$$

Für die partielle Ableitung $\left(\frac{\partial \psi}{\partial \omega}\right)_{x=\text{const}}$ erhält man unter Berücksichtigung von

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \psi}\right)_{x=\text{const}} = \frac{1}{\psi_E - \psi_I}. \quad (3.8)$$

einen neuen Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial}{\partial \psi}\right)_{x=\text{const}} = \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)_{x=\text{const}}. \quad (3.9)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.4) ergibt sich die neue Transportgleichung in x - ω -Koordinaten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} + (a+b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d, \quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned}
a &\equiv \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial \psi_I}{\partial x} = \frac{r_I \dot{m}_I''}{\psi_E - \psi_I}, \\
b &\equiv \frac{1}{\psi_E - \psi_I} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_E - \psi_I) = \frac{r_E \dot{m}_E'' - r_I \dot{m}_I''}{\psi_E - \psi_I}, \\
c &\equiv \frac{r^2 \rho \bar{u} \Gamma_{eff}}{(\psi_E - \psi_I)^2}, \\
d &\equiv \frac{S_\phi}{\rho u}.
\end{aligned}$$

(3.11)

Zur Berechnung der Grenzen des Rechengebiets dienen die Massenflüsse $r_I \dot{m}_I''$ und $r_E \dot{m}_E''$ über die innere bzw. äußere Grenze.

Für achsensymmetrische Probleme ist die innere Grenze die Symmetrieachse. Dort ist der Massenfluß $r_I \dot{m}_I'' = 0$.

Hieraus ergeben sich für die Koeffizienten in der Transportgleichung neue Beziehungen

$$\begin{aligned}
a &\equiv 0 & b &\equiv \frac{r_E \dot{m}_E''}{\psi_E} \\
c &\equiv \frac{r^2 \rho \bar{u} \Gamma_{eff}}{\psi_E^2} & d &\equiv \frac{S_\phi}{\rho u}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Zudem verschwinden außerhalb der Grenzschicht die konvektiven und diffusiven Terme, da die Ableitung $\partial \Phi / \partial \omega$ zu Null wird

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = d. \tag{3.12}$$

Hieraus folgt die Gleichung zur Bestimmung der äußeren Grenze

$$(a + b\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right)^{-1}. \tag{3.13}$$

3.3 Fortschreitende Integration

Aufgrund der Grenzschichtapproximation und der daraus resultierenden parabolischen Gleichungen wird zur Lösung des Gleichungssystems das Prinzip der fortschreitenden Integration verwendet. Da sich Störungen nur stromab auswirken können, werden neben den Werten an den seitlichen Rändern nur die Anfangsprofile für die entsprechenden Größen am Einlauf vorgegeben. Daraus werden Schritt für Schritt die restlichen Werte des Feldes berechnet. An der stromab liegenden Grenze des Rechengebiets dürfen keine Werte vorgegeben werden, denn diese werden ebenfalls errechnet.

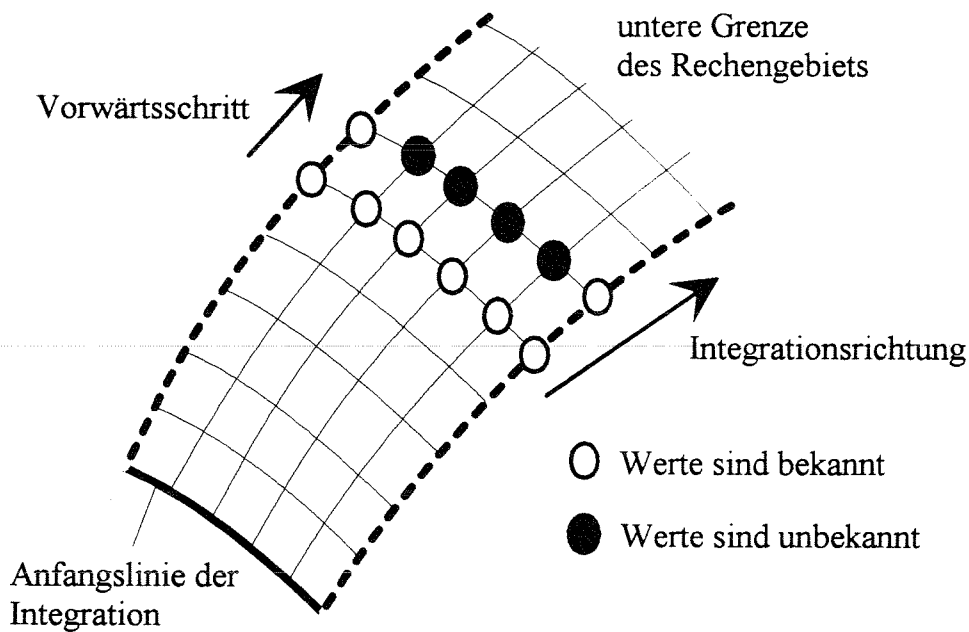


Abbildung (3.3): Fortschreitende Integration

Mit diesem Verfahren muß nur die zuletzt berechnete und die momentan zu berechnende Linie des Stromfeldes im Arbeitsspeicher gehalten werden. Das System von Differentialgleichungen kann so mit relativ geringem Aufwand gelöst werden.

Es wird ein implizites Verfahren benutzt, welches hinsichtlich des Vorwärtsschrittes Δx keinen Stabilitätsbeschränkungen unterliegt.

3.4 Tri-Diagonal-Matrix-Algorithmus (TDMA)

Durch Integration der Differentialgleichungen für Φ über ein Kontrollvolumen entstehen Gleichungen in der Form

$$D_i \Phi_{i,D} = A_i \Phi_{i+1,D} + B_i \Phi_{i-1,D} + C_i \quad (3.14)$$

Die Koeffizienten A_i , B_i , C_i und D_i sind nur noch abhängig von den schon bekannten Werten auf der vorhergehenden, stromaufwärts liegenden Linie.

Man erhält ein Gleichungssystem mit einer tridiagonalen Koeffizientenmatrix. Dies vereinfacht die Lösung erheblich, da keine aufwendige Matrixinversion notwendig ist. Gleichung (3.14) kann noch weiter umgeformt werden und man erhält die im Programm implementierte Form

$$\Phi_i = P_i \Phi_{i+1} + Q_i \quad (3.15)$$

Da die Werte an den Rändern vorgegeben sind, ist die Gleichung für alle Φ_i rekursiv lösbar.

Mit dem gewählten Verfahren steigt die Rechenzeit linear mit der Anzahl der Gitterpunkte an.

4 Luftfreistrahler nach George et al.

Um die Leistungsfähigkeit des hergeleiteten Turbulenzmodells zu testen, soll das schon in Kapitel 1 beschriebene Experiment von George et al. [GeAT-77] nachgerechnet werden. Dieses Experiment wurde bereits von Tamanini [Tama-77] nachgerechnet.

4.1 Daten des Experiments / Anfangs- und Randbedingungen für die Simulation

Für die numerische Simulation werden am Düsenaustritt konstante Werte für \overline{T}_0 und \overline{u}_0 angenommen.

Die Temperatur der heißen Luft ist

$$\overline{T}_0 = 573K,$$

die Geschwindigkeit am Strahlaustritt ist

$$\overline{u}_0 = 0.674 \frac{m}{s}.$$

Der Düsendurchmesser beträgt

$$D = 0.0635m.$$

Die Umgebung sei in Ruhe und somit frei von Turbulenz. Deshalb gilt

$$\overline{T}_s = 302K, \quad \overline{u}_s = k = \varepsilon = 0.$$

Da es sich um ein achsensymmetrisches Problem handelt, werden die Ableitungen auf der Symmetrieachse zu Null

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Die Reynolds-Zahl am Düsenaustritt beträgt

$$Re_D = \frac{\overline{u_0} D}{\nu} = 920,$$

d.h. es liegt dort eine laminare Strömung vor. Mit wachsender Lauflänge findet ein Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung statt. Dieser Umschlag kann mit dem k - ε -Turbulenzmodell aufgrund der Grenzschichtvereinfachung nicht simuliert werden. Tamanini [Tama-77] benutzt eine Vorgehensweise, die auch hier benutzt werden soll. Die Rechnung bis zum Umschlagpunkt, den Tamanini mit $x_t = x/D = 1.57$ angibt, erfolgt laminar. Erst ab hier kommt das k - ε -Turbulenzmodell zum Einsatz. Durch die laminare Rechnung am Anfang werden die Eingabeprofile für Geschwindigkeit und Temperatur, die für die anschließende turbulente Simulation vorgegeben werden müssen. Für die Anfangsprofile der turbulenten Größen k und ε werden folgende Beziehungen eingesetzt:

$$k = 10^{-4} \overline{u}^2(x_t, r) \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{D/2} \quad (4.2)$$

Für die späteren Rechnungen mit den erweiterten Turbulenzmodellen wird eine Anfangsbedingung für die turbulenten Temperaturschwankungen benötigt:

$$\overline{T'^2} = 10^{-4} (\overline{T_0} - \overline{T}(x_t, r)) (\overline{T}(x_t, r) - \overline{T_a}) \quad (4.3)$$

x_t ist die Stelle des laminar-turbulenten Umschlags. Auf die Temperaturschwankungen $\overline{T'^2}$ wird später noch eingegangen. Sie seien hier nur der Vollständigkeit halber dargestellt.

4.2 Ergebnisse für das Standard- k - ε -Turbulenzmodell

Wie schon erwähnt, handelt es sich um ein achsensymmetrisches Problem. Die Darstellung der Ergebnisse beschränkt sich deshalb auf eine Hälfte der Profile. Zudem ist zu beachten, daß für die Abszisse die dimensionslose Koordinate r/D verwendet wird. Für den Abstand von der Düse wird der dimensionslose Abstand x/D benutzt.

Die Diskussion der Rechenergebnisse wird hier auf den Abstand $x/D=16$ beschränkt.

Die Diagramme (4.1) und (4.2) zeigen die berechneten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile im Vergleich zu einem Glockenkurvenfit durch die Meßwerte von George et al.

Es ist zu erkennen, daß die Rechnung sowohl für die Geschwindigkeit als auch für die Temperatur eine starke Überhöhung der Profile auf der Symmetrieachse ergibt. Am Strahlrand hingegen ergeben sich zu geringe Werte im Vergleich zur Messung. Die durch den Auftrieb zusätzlich erzeugte Turbulenz und die daraus resultierende erhöhte turbulente Diffusion von Geschwindigkeit und Temperatur in radialer Richtung werden unzureichend modelliert.

Aus der Gleichung für die kinetische Energie der Turbulenz k ist zu ersehen, daß durch den Term $\alpha g u' T$ die durch den Auftrieb zusätzlich produzierte Turbulenz beschrieben wird. Der physikalische Charakter der Grenzschichtströmung läßt erwarten, daß wegen $(\partial/\partial x \ll \partial/\partial y)$

das modellierte Glied $\overline{u' T} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial T}{\partial x}$ nur von geringer Größe ist. In Wirklichkeit liegen weit

größere axiale Reynoldssche Wärmeströme vor als die Rechnung ergibt.

Um die radiale Diffusion zu erhöhen, können die empirischen Konstanten des Modells an das vorliegende Problem angepasst werden. Dies bedeutet aber, daß für jedes Problem ein spezieller Satz von Konstanten benötigt wird, was dem Wunsch nach einem möglichst universellen Turbulenzmodell widerspricht.

Die Diagramme (4.3) und (4.4) zeigen den Einfluß der in dem Transportkoeffizienten ν_t enthaltenen Konstanten C_μ auf die Profile für Geschwindigkeit und Temperatur.

Es ist offensichtlich, daß sich für jedes Strömungsproblem ein spezieller Satz Konstanten finden läßt. Im weiteren soll mit den Standardkonstanten nach Tabelle (2.1) gerechnet und versucht werden, das Turbulenzmodell auf andere Art und Weise zu verbessern.

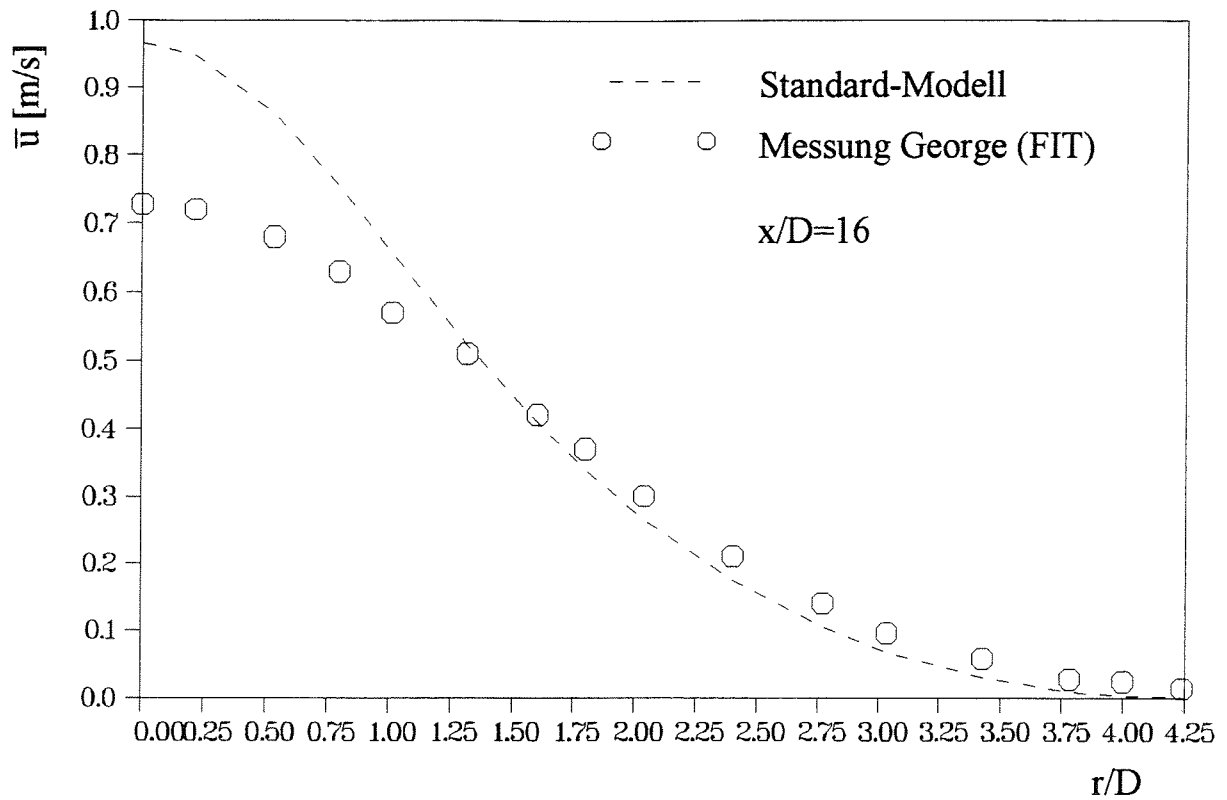


Diagramm (4.1): Geschwindigkeitsprofil Luftfreistrahler von George et al.

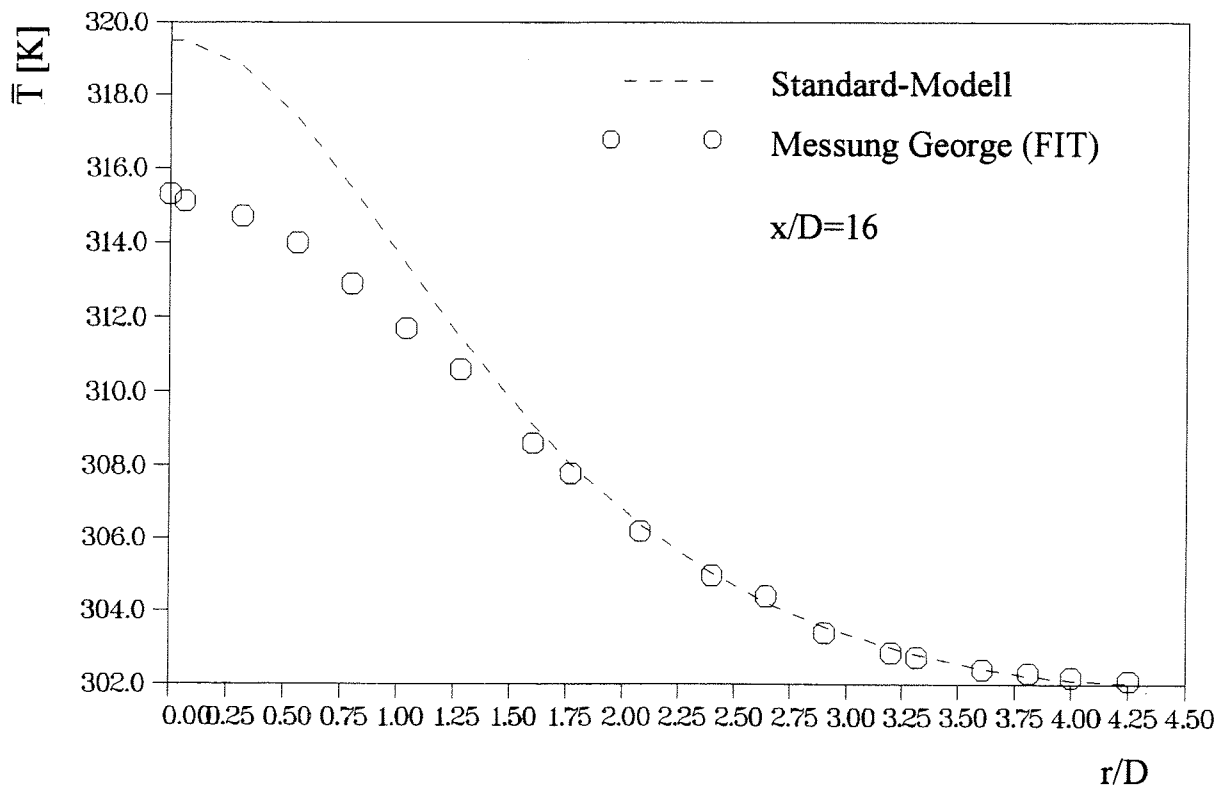


Diagramm (4.2): Temperaturprofil Luftfreistrahler von George et al.

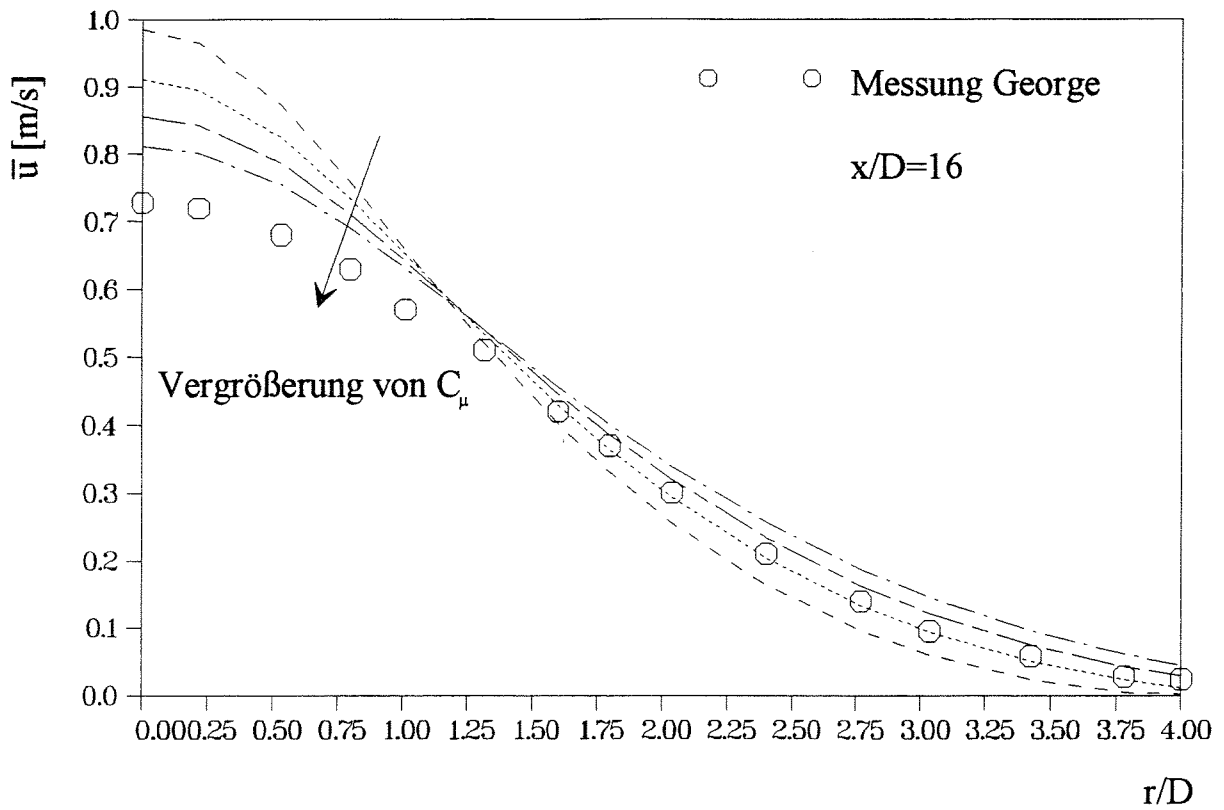


Diagramm (4.3): Geschwindigkeitsprofil - Variation von C_μ

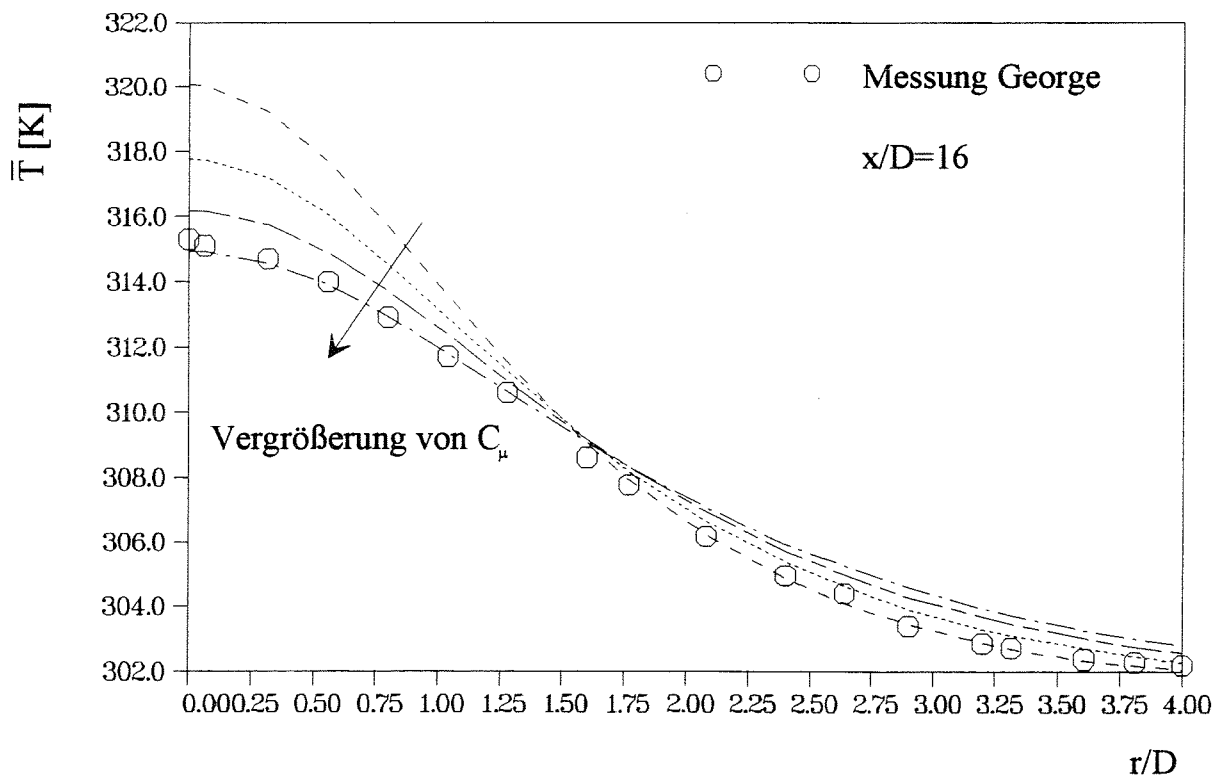


Diagramm (4.4): Temperaturprofil - Variation von C_μ

5 Algebraisches Spannungs-/Fluß-Modell

Wie gezeigt, eignet sich das bisherige Modell nicht, um auftriebsbehaftete Strömungen numerisch zu simulieren. Der Schwachpunkt liegt in der Modellierung der turbulenten Glieder $\overline{u_i' u_j'}$ und $\overline{u_i' T}$.

Eine einheitliche Modellierung der turbulenten Austauschglieder über die Wirbelviskosität/-diffusivität stellt eine zu grobe Vereinfachung dar. Der Auftriebseinfluß wird beim Prinzip der Wirbelviskosität/-diffusivität weder durch ν_t noch durch σ_t berücksichtigt. Es soll deshalb versucht werden, aus den Transportgleichungen für $\overline{u_i' u_j'}$ und $\overline{u_i' T}$ neue algebraische Beziehungen für diese Größen abzuleiten.

5.1 Modellierung der Reynoldsschen Spannungen und Wärmeströme

Um aus den Transportgleichungen der turbulenten Spannungen und Wärmeströme algebraische Beziehungen zu formulieren, müssen die differentialen Konvektions- und Diffusionsterme durch geeignete nicht-differentiale Ausdrücke approximiert werden.

Rodi [Rodi-86] geht von der Annahme aus, daß die zeitliche und räumliche Änderung von $\overline{u_i' u_j'}/k$ klein gegenüber der Änderung von $\overline{u_i' u_j'}$ selbst ist. Es verhalten sich demnach die Differenzen von Konvektions- und Diffusionsgliedern in beiden Gleichungen wie die Größen selbst.

$$\frac{(\text{Konvektion-Diffusion})_{\overline{u_i' u_j'}}}{(\text{Konvektion-Diffusion})_k} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \quad (5.1)$$

Unter Berücksichtigung der k -Gleichung (2.13) ergibt sich daraus den Ausdruck

$$(\text{Konvektion-Diffusion})_{\overline{u_i' u_j'}} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} (\text{Konvektion-Diffusion})_k = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} (P + G + \varepsilon) \quad (5.2)$$

Wird diese Beziehung für Konvektion und Diffusion in die Transportgleichung für $\overline{u_i' u_j'}$ eingesetzt und die Annahmen berücksichtigt, die Hossain [Hoss-80] für die Dissipation und das "pressure strain"-Glied macht, so erhält man eine algebraische Beziehung für die turbulenten Schubspannungen.

Sie lautet

$$\overline{u_i' u_j'} = k \left[\frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1-C_2) \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + (1-C_3) \left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right)}{C_1 + \frac{P+G}{\varepsilon} - 1} \right] . \quad (5.3)$$

P_{ij} ist die Spannungsproduktion in der $\overline{u_i' u_j'}$ -Transportgleichung

$$P_{ij} = - \left[\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right] , \quad (5.4)$$

P die Spannungsproduktion in der k -Transportgleichung

$$P = - \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} , \quad (5.5)$$

G_{ij} die Auftriebsproduktion in der $\overline{u_i' u_j'}$ -Transportgleichung

$$G_{ij} = - \alpha \left[\overline{g_i u_j' T} + \overline{g_j u_i' T} \right] , \quad (5.6)$$

und G die Auftriebsproduktion in der k -Transportgleichung

$$G = - \alpha \overline{g_i u_i' T} . \quad (5.7)$$

Das in GENMIX implementierte Modell enthält keine Wandkorrektur. Sie führt zu komplizierteren Ausdrücken, die für die hier durchgeführten Berechnungen nicht benötigt werden, da nur freie Scherschichtströmungen untersucht werden sollen. Die Anpassung an Probleme mit Wandeinfluß ist aber prinzipiell möglich. Hossain [Hoss-80] beschreibt eine entsprechende Erweiterung des Modells.

Für die Reynoldsschen Wärmeströme $\overline{u_i' T}$ existiert ein ähnlicher Ansatz, der von Hossain näher beschrieben wird.

Für die turbulenten Wärmeströme erhält man

$$(\text{Konvektion-Diffusion})_{\overline{u_i' T}} = \frac{1}{2} \frac{\overline{u_i' T}}{k} (P + G + \varepsilon) \quad (5.8)$$

und daraus die algebraischen Beziehungen für $\overline{u_i' T}$

$$\overline{u_i' T} = \frac{\frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + (1 - C_{2T}) P_{iT} + (1 - C_{3T}) G_{iT} \right]}{C_{IT} + \frac{1}{2} \left[\frac{P + G}{\varepsilon} - 1 \right]} \quad (5.9)$$

P_{iT} ist die Produktion von $\overline{u_i' T}$ durch mittlere Geschwindigkeitsgradienten

$$P_{iT} = -\overline{u_k' T} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \quad (5.10)$$

G_{iT} die Produktion von $\overline{u_i' T}$ durch Auftriebseffekte

$$G_{iT} = -\alpha g_i \overline{T^2} \quad (5.11)$$

In dem Ausdruck für G_{iT} tritt das Quadrat der Temperaturschwankungen $\overline{T^2}$ auf. Zunächst wird eine algebraische Beziehung nach Hossain [Hoss-80] verwendet

$$\overline{T^2} = C_T \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i' T} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad (5.12)$$

später wird für $\overline{T^2}$ eine Transportgleichung gelöst werden.

Die neu ermittelten algebraischen Beziehungen enthalten keine neuen Unbekannten. Die beim Standard-k-ε-Modell über den isotropen Ansatz der Wirbelviskosität/-diffusivität modellierten Reynoldsschen Größen $\overline{u_i' u_j'}$ und $\overline{u_i' T}$ werden jetzt durch nichtisotrope algebraische Beziehungen approximiert. Richtungsabhängige Einflüsse wie z.B. der Auftrieb lassen sich weit besser simulieren.

5.2 Vereinfachung für Scherschichten im lokalen Gleichgewicht

Bei vielen Strömungen, wie z.B. dünnen Scherschichten, gilt die Annahme eines lokalen Gleichgewichts zwischen Produktion und Dissipation von kinetischer Energie der Turbulenz k . In den algebraischen Beziehungen wird

$$P + G = \varepsilon \quad (5.13)$$

gesetzt und somit nach Gleichung (5.2) und (5.8) Konvektion und Diffusion in den Transportgleichungen für $\overline{u_i' u_j'}$ und $\overline{u_i' T}$ vernachlässigt.

Rodi [Rodi-86] schlägt diese Vorgehensweise für Strömungen vor, bei denen sich die Turbulenz so langsam entwickelt, daß die Vernachlässigung sämtlicher differentialer Glieder keinen großen Fehler mit sich bringt.

Diese Arbeit beschränkt sich deshalb auf die von Hossain [Hoss-80] als Modell II beschriebenen vereinfachten algebraischen Beziehungen für die bisher unbekanntes Turbulenzkorrelationen.

5.3 Algebraische Beziehungen für vertikale Auftriebsströmungen

Zur Berechnung achsensymmetrischer Auftriebsströmungen steht nun ein System nacheinander lösbarer Gleichungen zu Verfügung. Unter Berücksichtigung der bereits beschriebenen Grenzschichtapproximation und Einführung von Zylinderkoordinaten erhält man folgende Gleichungen:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \quad (5.14)$$

$$\overline{v'T} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \quad (5.15)$$

$$-\overline{u'T} = \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} + (1 - C_{2T}) \overline{v'T} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} - (1 - C_{3T}) \alpha g \overline{T^2} \right) \quad (5.16)$$

$$\overline{T^2} = -C_T \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'T} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \quad (5.17)$$

$$\nu_t = \omega_v \frac{\overline{v'^2} k^2}{k \varepsilon} \quad (5.18)$$

$$\sigma_t = \omega_v C_{1T} \quad (5.19)$$

$$\omega_v = \frac{1-C_2}{C_1} \left(1 + \frac{1-C_3}{1-C_2} \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\varepsilon} \alpha g \frac{\partial \overline{T} / \partial r}{\partial \overline{u} / \partial r} \right) \quad (5.20)$$

$$\frac{\overline{v'^2}}{k} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1-C_2}{C_1} \right) = \text{const.} \quad (5.21)$$

Die Modellierung von $\overline{u'v'}$ und $\overline{v'T}$ erfolgt auf den ersten Blick wie beim Standard-Modell. Die Wirbelviskosität wird jedoch nicht mehr mit der Konstanten C_μ gebildet, sondern mit Hilfe einer Funktion $C_\mu = C_\mu(\text{Auftrieb}) = \omega_v \cdot \overline{v'^2} / k$.

Für vertikale Strömungen ist $\overline{v'^2} / k$ konstant. ω_v enthält die Temperatur- und Geschwindigkeitsgradienten und somit den Auftriebseinfluß. Analog zu ν_t wird auch bei der turbulenten Prandtl-Zahl σ_t der Auftriebseinfluß über die Variable ω_v berücksichtigt. Für $\overline{v'T}$, den turbulenten Wärmestrom in radialer Richtung, entfällt ω_v wieder. $\overline{v'T}$ verläuft senkrecht zum Schwerkraftvektor und ist deshalb nicht von Auftriebseinflüssen abhängig.

Die Diffusionskoeffizienten in den Gleichungen für k und ε werden analog zur Wärmetransportgleichung modelliert. Aus Wirbelviskosität und einer Prandtl-Zahl für die entsprechende Größe wird der Quotient gebildet.

Für die einzelnen Größen ergeben sich daraus folgende Beziehungen:

Die Prandtl-Zahlen für k und ε erhält man aus:

$$\sigma_k = \frac{\omega_v}{C_s} ; \quad \sigma_\varepsilon = \frac{\omega_v}{C_\varepsilon} \quad (5.22); (5.23)$$

5.4 Ergebnisse für das Algebraische Spannungs-/Fluß-Modell

In den Diagrammen (5.1) und (5.2) sind die Rechenergebnisse für das Standard-Modell und das Algebraische Spannungs-/Fluß-Modell im Vergleich zu den Meßwerten von George et al. dargestellt.

Die Überhöhung auf der Symmetrieachse, die sich mit dem Standard-Modell ergibt, wird durch die Einführung der neuen algebraischen Beziehungen für die turbulenten Größen korrigiert. Am Strahlrand liegen die Werte des Algebraische Spannungs-/Fluß-Modells etwas oberhalb des von George verwendeten Fits. Die nicht dargestellten Meßwerte von George liegen am Rand ebenfalls oberhalb des von ihm gewählten Glockenkurvenfits.

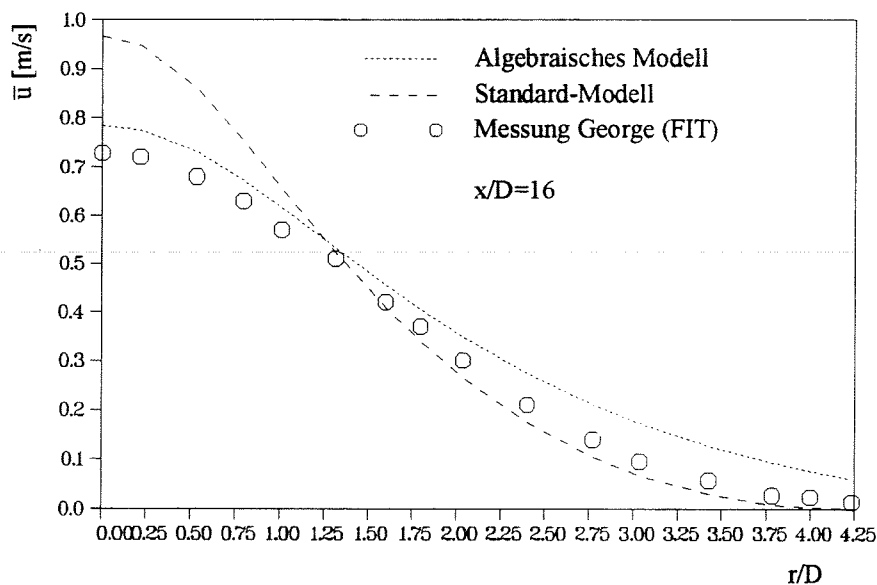


Diagramm (5.1): Geschwindigkeitsprofile Luftfreistrahls von George et al.

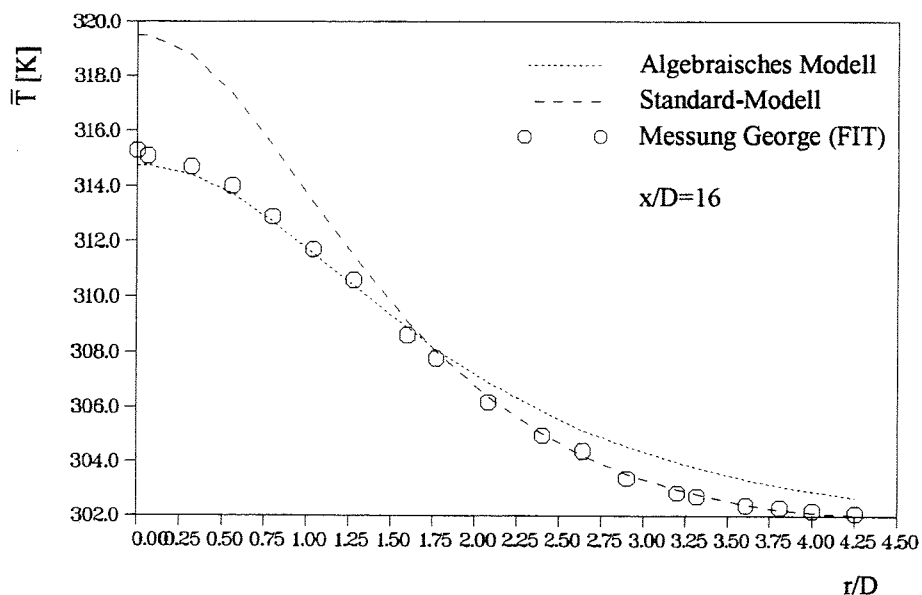


Diagramm (5.2): Temperaturprofile Luftfreistrahls von George et al.

6 Transportgleichung für die turbulenten Temperaturschwankungen

Diagramm (6.1) zeigt den mit dem Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell berechneten Verlauf der Temperaturschwankungen $\overline{T'^2}$ im Vergleich zu den Meßwerten von George et al.

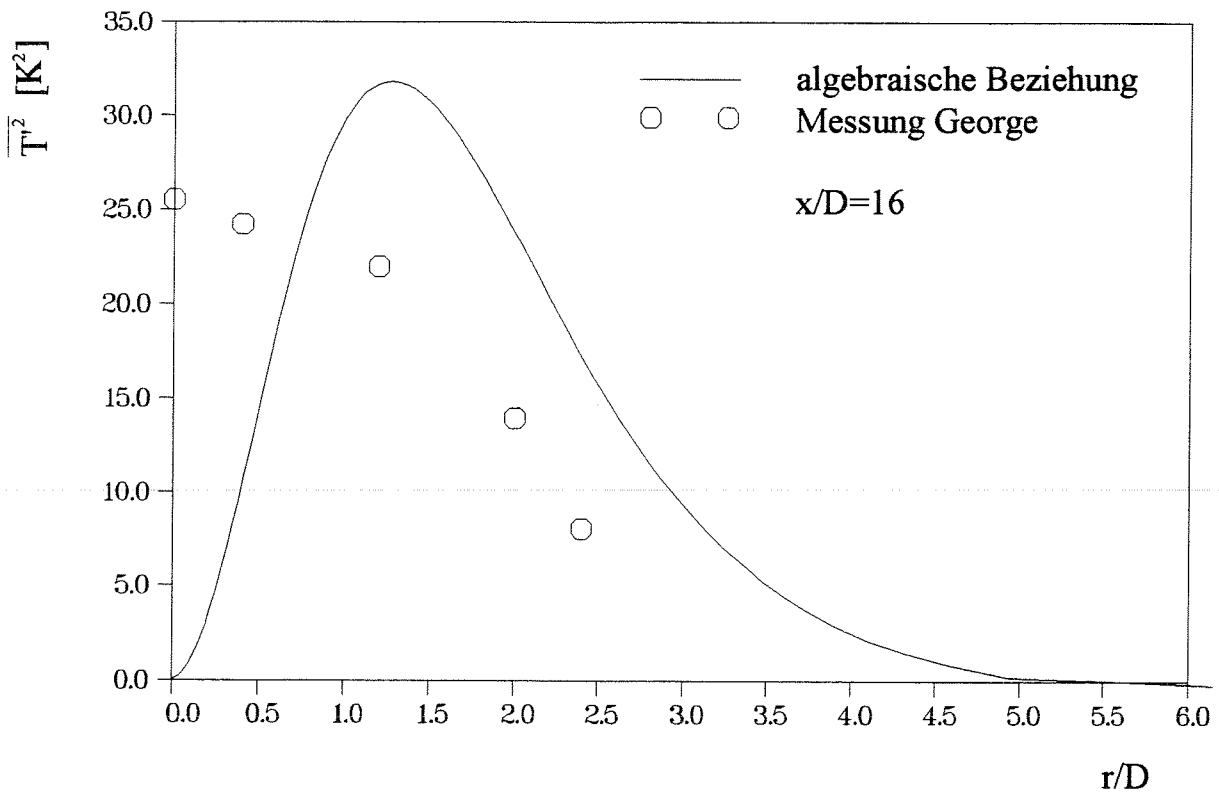


Diagramm (6.1): Profil der Temperaturschwankungen - Luftfreistrahler von George et al.

Die errechnete Kurve stimmt mit den Meßwerten weder qualitativ noch quantitativ überein. Keines der charakteristischen Merkmale für die Temperaturschwankungen läßt sich mit dem Modellansatz (5.12) ermitteln. Weder die Lage des Maximums noch die Form der Kurven stimmen für Messung und Rechnung überein. Um die Temperaturschwankungen physikalisch richtig zu simulieren, soll nun der algebraische Ansatz für die Temperaturschwankungen durch eine Transportgleichung ersetzt werden.

6.1 Herleitung der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen

Zur Herleitung der Transportgleichung sind drei Schritte notwendig. Vorher werden einige Rechenregeln für die zeitlich gemittelten Größen beschrieben.

Hinze [Hinz-75] gibt folgende Regeln an:

$$a = \bar{a} + a', \quad b = \bar{b} + b' \quad (6.1)$$

$$\bar{a} = \overline{\bar{a} + a'} = \overline{\bar{a}} + \overline{a'} = \bar{a}, \quad \text{da} \quad \overline{a'} = 0 \quad (6.2)$$

$$\overline{\bar{a}b} = \overline{\bar{a}\bar{b}} = \bar{a}\bar{b} \quad (6.3)$$

$$\overline{\bar{a}b'} = \overline{\bar{a}b'} = \bar{a}\overline{b'} = 0 \quad (6.4)$$

$$\overline{ab} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \overline{\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b' + \bar{b}a' + a'b'} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'} \quad (6.5)$$

Es gelten folgende Sätze:

Zeitmittelung und Differentiation sind vertauschbar

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i}(a)} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}), \quad (6.6)$$

Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(ab) = a \frac{\partial}{\partial x_i}(b) + b \frac{\partial}{\partial x_i}(a), \quad (6.7)$$

Kontinuitätsgleichungen für die gemittelten und die Schwankungsgeschwindigkeiten

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0. \quad (6.8)$$

1.Schritt: Der Reynoldssche Ansatz zur Beschreibung turbulenter Strömungen wird in die exakte Wärmetransportgleichung (2.3) eingesetzt und davon die zeitlich gemittelte Wärmetransportgleichung (2.8) subtrahiert:

exakt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \Gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \quad \leftarrow \quad T = \bar{T} + T' \quad , \quad u = \bar{u} + u'$$

zeitabhängig:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \Gamma \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_j} + \Gamma \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j}$$

gemittelt:

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \Gamma \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' T'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \Gamma \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' T'} \quad (6.9)$$

2.Schritt: Multiplikation dieser Gleichung mit der Temperaturschwankung T'

$$\Rightarrow T' \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u_j' T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + u_j' T' \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \Gamma T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j} + T' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' T'} \quad (6.10)$$

3.Schritt: zeitliche Mittelung dieser Gleichung

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{T' \frac{\partial T'}{\partial t}}}_I + \underbrace{\overline{\bar{u}_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}}}_II + \underbrace{\overline{u_j' T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}}}_III + \underbrace{\overline{u_j' T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}}}_IV = \underbrace{\overline{\Gamma T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j}}}_V + \underbrace{\overline{T' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' T'}}}_VI \quad (6.11)$$

Als nächstes werden die einzelnen Glieder etwas genauer betrachtet und einige Umformungen durchgeführt:

- Glied I:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial T'^2}{\partial t}} &= \overline{2T' \frac{\partial T'}{\partial t}} \\ \Rightarrow \overline{T' \frac{\partial T'}{\partial t}} &= \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial T'^2}{\partial t}} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial T'^2}{\partial t}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

- Glied II:

$$\overline{u_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} = \overline{u_j T' \frac{\partial T'}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} \overline{u_j \frac{\partial T'^2}{\partial x_j}} \quad (6.13)$$

- Glied III:

$$\overline{u_j' T \frac{\partial T}{\partial x_j}} = \overline{u_j' T \frac{\partial T}{\partial x_j}} \quad (6.14)$$

- Glied IV:

$$\begin{aligned} \overline{u_j' T \frac{\partial T}{\partial x_j}} &= \frac{1}{2} \overline{u_j' \frac{\partial T'^2}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial u_j' T'^2}{\partial x_j}} - \underbrace{\overline{T'^2 \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}}_{=0} \right) \\ \Rightarrow \overline{u_j' T \frac{\partial T}{\partial x_j}} &= \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u_j' T'^2}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

- Glied V:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial^2 T'^2}{\partial x_j \partial x_j}} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[2T' \frac{\partial T'}{\partial x_j} \right]} = 2 \left[\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}} + \overline{T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j}} \right] \\ \overline{T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_j}} &= \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 T'^2}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{\Gamma T \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}} = \frac{1}{2} \overline{\Gamma \frac{\partial^2 T^2}{\partial x_j \partial x_j}} - \overline{\Gamma \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}} \quad (6.16)$$

- Glied VI:

$$\overline{T' \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j' T'}} = \overline{T'} \frac{\partial \overline{u_j' T'}}{\partial x_j} = 0 \quad (6.17)$$

Setzt man die neu gefundenen Zusammenhänge in Gleichung (6.11) ein, so erhält man die Transportgleichung für die Temperaturschwankungen:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}}_{\text{Änderungsrate}} + \underbrace{\overline{u_j} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j' T'^2})}_{\text{Diffusion}} + \overline{\Gamma \frac{\partial^2 T'^2}{\partial x_j \partial x_j}} - \underbrace{2 \overline{u_j' T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}}_{\text{Produktion durch T-Feld}} - \underbrace{2 \overline{\Gamma \frac{\partial T'}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}}}_{\text{Dissipationsrate } \mathcal{E}_T} \quad (6.18)$$

Diese Gleichung hat eine Form wie die Transportgleichung von k , ein Druckkorrelationsterm tritt nicht auf. Mit der neu eingeführten Transportgleichung für T^2 entstehen neue unbekannte Korrelationen zwischen den Schwankungsgrößen. Für diese Glieder werden Modellannahmen formuliert, die auf bekannten Größen aufbauen, wodurch wieder ein geschlossenes Gleichungssystem erzeugt wird.

Für den Diffusionsfluß $\overline{u_j' T'^2}$ wird das Gradientenmodell von Spalding [Spal-73] verwendet, bei dem der Diffusionsfluß proportional dem Gradienten von T^2 gesetzt wird:

$$\overline{u_j' T'^2} = C_{TT} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{T^2}}{\partial x_j} = \frac{v_t}{\sigma_{T^2}} \frac{\partial \overline{T^2}}{\partial x_j} \quad (6.19)$$

Als Proportionalitätskonstante dient v_t/σ_{T^2} . σ_{T^2} wird analog zu den Transportgleichungen für k und ε als Prandtl-Zahl für die Temperaturschwankungen bezeichnet,

$$\sigma_{T^2} = \frac{1}{C_{TT}} \omega_v \frac{\overline{v^2}}{k} \quad (6.20)$$

Den Dissipationsterm wird durch einen Modellansatz von Launder [Laun-75] ersetzt. Unter der Annahme, daß die Dissipationsterme von k und $\overline{T^2}$ innerhalb der Transportdifferentialgleichungen etwa die gleiche Gewichtung haben, gilt

$$\frac{k}{\varepsilon} \propto \frac{\overline{T^2}}{\varepsilon_T} \quad (6.21)$$

Mit der Proportionalitätskonstanten $1/C_T$ entsteht daraus folgender Ausdruck für den zu modellierenden Dissipationsterm

$$\varepsilon_T = \Gamma \frac{\overline{\partial T \partial T}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{C_T} \frac{\varepsilon \overline{T^2}}{k} \quad (6.22)$$

Durch die Beschränkung auf zweidimensionale Grenzschichtströmungen vereinfacht sich die Gleichung noch weiter. In Zylinderkoordinaten erhält man für die Transportgleichung der Temperaturschwankungen

$$\frac{\overline{\partial T^2}}{u \partial x} + \frac{\overline{\partial T^2}}{v \partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\Gamma + \frac{v_t}{\sigma_{T^2}} \right) \frac{\partial \overline{T^2}}{\partial r} \right) - \underbrace{2\overline{vT} \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}}_{\text{Produktion durch das T-Feld}} - \underbrace{\frac{2}{C_T} \frac{\varepsilon \overline{T^2}}{k}}_{\text{Dissipationsrate } \varepsilon_T} \quad (6.23)$$

$$\text{mit } \sigma_{T^2} = \frac{1}{C_{TT}} \omega_v \frac{\overline{v^2}}{k}$$

Für die empirischen Konstanten C_{TT} und C_T schlägt Launder die Werte 0.13 und 1.6 vor.

Diagramm (6.2) zeigt den Verlauf der mit den Konstanten nach Launder errechneten Kurve im Vergleich zu Meßwerten von George et al.

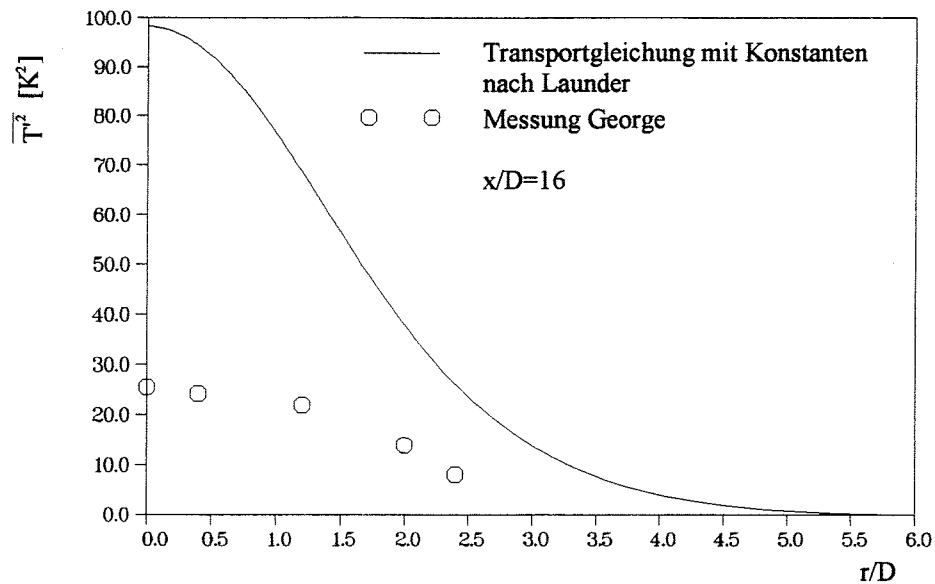


Diagramm (6.2): Profil der Temperaturschwankungen - Luftfreistrahler von George et al.

Die errechnete Kurve zeigt eine deutliche Überhöhung über die gesamte Strahlbreite. Dies läßt den Schluß zu, das die Konstante $C_T = 1.6$ für das vorliegende Problem nicht geeignet ist.

Zur Erzielung besserer Rechenergebnisse schlägt Tamanini [Tama-77] eine Unterscheidung zwischen Impulsstrahlen und Auftriebsstrahlen vor. Ein universelles $k-\varepsilon-T^2$ -Turbulenzmodell läßt sich seiner Meinung nach nicht realisieren, da der Unterschied zwischen Impulsstrahl und Auftriebsstrahl so wesentlich sei, daß beide Probleme nicht mit den selben Konstanten behandelt werden können. Tamanini schlägt bei Auftriebsstrahlen für die Konstante C_T den Wert 0.8 vor. Somit wird der Dissipationsterm um etwa den Faktor 2 vergrößert und das Niveau der $\overline{T^2}$ -Kurve gesenkt.

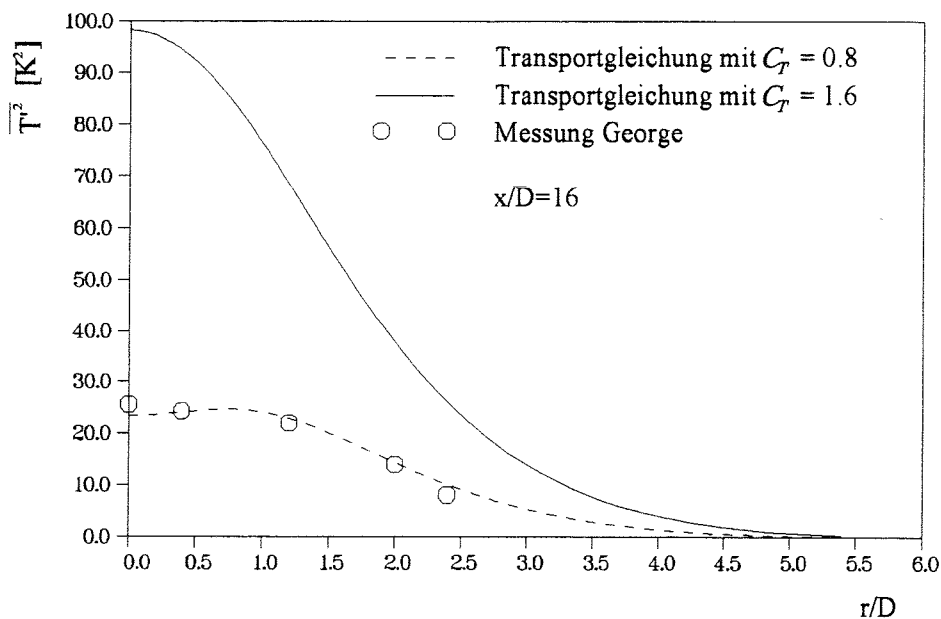


Diagramm (6.3): Profil der Temperaturschwankungen - Luftfreistrahler von George et al.

Diagramm (6.3) zeigt einen Vergleich der neuen Kurve mit der Konstanten nach Tamanini im Vergleich zu den Meßwerten von George. Rechnung und Messung stimmen sehr gut überein. Die Überlegung von Tamanini, für Auftriebsstrahlen eine Korrektur von C_T vorzunehmen, kann bestätigt werden.

Die Konstanten für das $k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Turbulenzmodell sind in Tabelle (6.1) zusammengefaßt.

C_S	C_ε	C_1	C_2	C_3	C_{1T}	C_{2T}	C_{3T}	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 3}$	C_{TT}	C_T	
0.24	0.15	2.2	0.55	0.55	3.0	0.5	0.5	1.44	1.92	0.8	0.13	1.6	Impulsstrahl
												0.8	Auftriebsstrahl

Tabelle (6.1): Empirische Konstanten des $k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Turbulenzmodells

In den Diagrammen (6.4) und (6.5) sind die Profile für die mittlere Geschwindigkeit \overline{u} und Temperatur \overline{T} dargestellt. Die Kurven wurden zum einen mit der algebraischen Beziehung (5.12) für $\overline{T^2}$ und zum anderen mit der Transportgleichung (6.23) berechnet.

Da die Kopplung zwischen $\overline{T^2}$ und \overline{u} oder \overline{T} sehr gering ist, sind keine wesentlichen Unterschiede in den Geschwindigkeits- und Temperaturprofilen zu erwarten. Die Profile verbessern sich jedoch qualitativ. Die turbulente Diffusion ist nicht mehr so stark ausgeprägt.

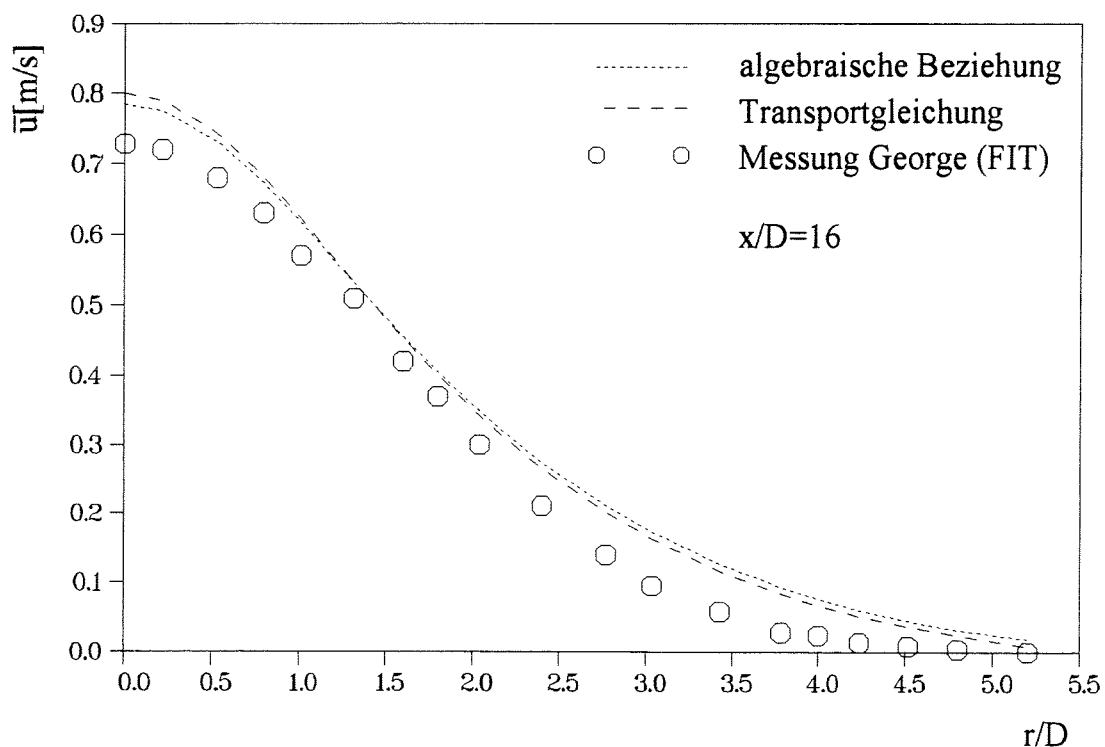


Diagramm (6.4): Geschwindigkeitsprofil -
Vergleich zwischen algebraischem Modell und $k-\varepsilon-T^2$ -Modell

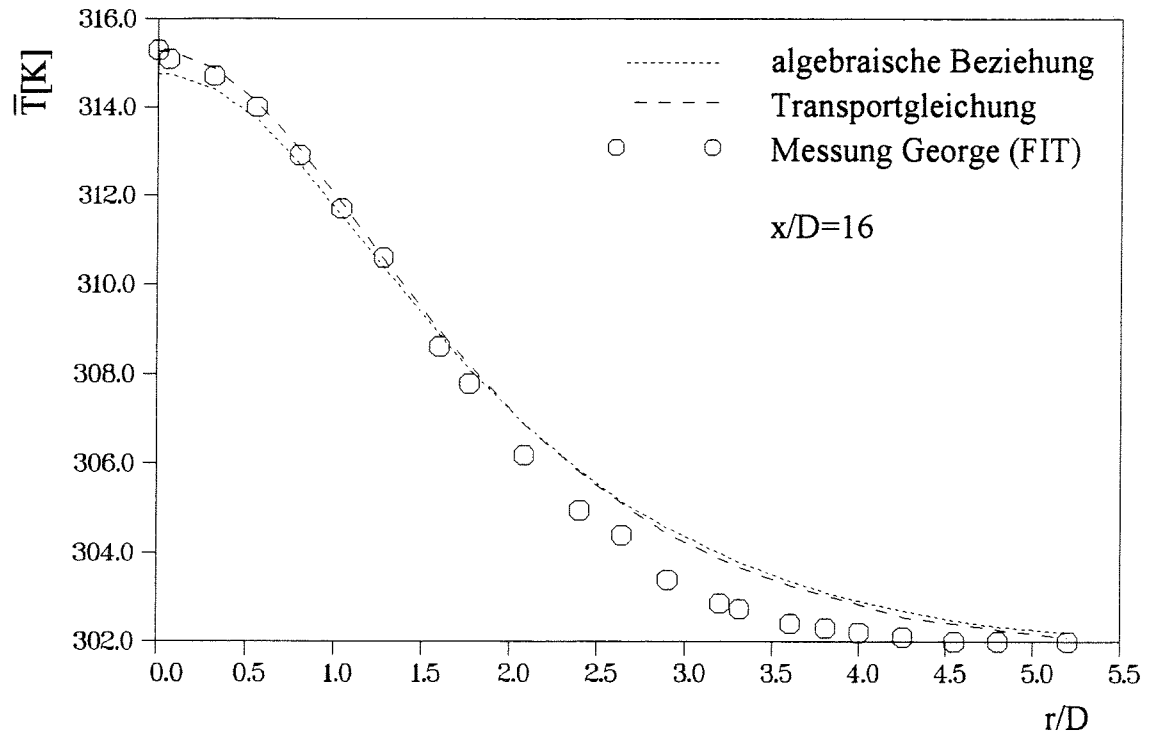


Diagramm (6.5): Temperaturprofil -

Vergleich zwischen algebraischem Modell und $k-\epsilon-T^2$ -Modell

7 Natrium-Experimente von Knebel

7.1 Daten des Experiments / Anfangs- und Randbedingungen für die Simulation

Um weitere Erfahrungen mit dem $k\text{-}\varepsilon\text{-}\overline{T^2}$ -Turbulenzmodell zu sammeln, werden die Natrium-Experimente von Knebel [Kneb-93] nachgerechnet.

Die Teststrecke TEFLU (Temperatur Fluktuationen) hat folgenden Aufbau:

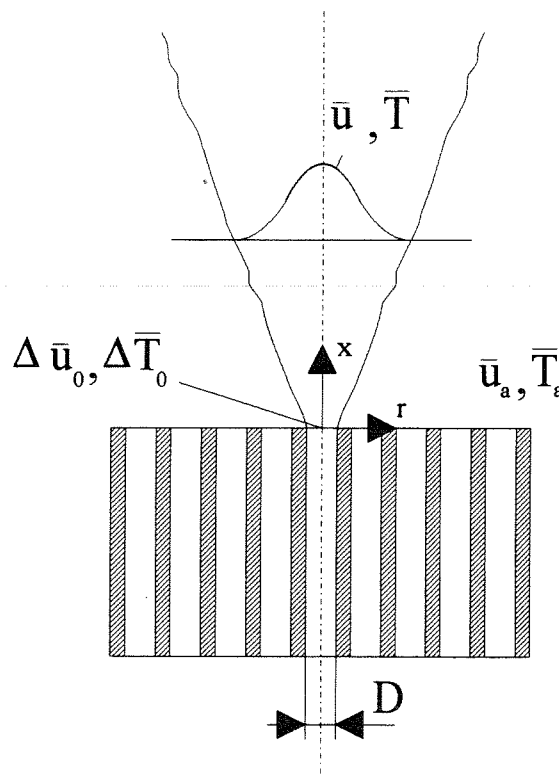


Abbildung (7.1): Aufbau der Natrium-Teststrecke TEFLU

Die Teststrecke besteht aus einem Rohr, das vertikal durchströmt wird. Die Geschwindigkeit und die Temperatur der Anströmung werden mit \overline{u}_a und \overline{T}_a bezeichnet. Im Rohr ist ein Düsenblock angebracht, in dessen Zentralbohrung, Innendurchmesser $D=0.0072m$, flüssiges Natrium mit erhöhter Geschwindigkeit $\Delta \overline{u}_0$ und Temperatur $\Delta \overline{T}_0$ eingespritzt wird. Für verschiedene x/D , d.h. Abstände vom Düsenblock, wurden von Knebel die Profile für Geschwindigkeit, Temperatur und Temperaturschwankungen gemessen. Die Messungen dienen als Grundlage, um die Leistungsfähigkeit des beschriebenen Turbulenzmodells zu testen. Es werden nur die Meßreihen C2, F und H verwendet.

Messung C2: Impulsstrahl

$\overline{u_a}$	$\overline{T_a}$	$\Delta \overline{u_0}$	$\Delta \overline{T_0}$
0.05 m/s	573 K	0.50 m/s	30 K

Messung F: Strahl im Übergangsbereich

$\overline{u_a}$	$\overline{T_a}$	$\Delta \overline{u_0}$	$\Delta \overline{T_0}$
0.1 m/s	573 K	0.33 m/s	25 K

Messung H: Auftriebsstrahl

$\overline{u_a}$	$\overline{T_a}$	$\Delta \overline{u_0}$	$\Delta \overline{T_0}$
0.1 m/s	573 K	0.17 m/s	75 K

Tabelle (7.1): Randbedingungen der Messungen von Knebel

Wie bei der Berechnung des Luftfreistrahls müssen Anfangsprofile für die Geschwindigkeit, die Temperatur und für die turbulenten Größen k , ε und $\overline{T'^2}$ vorgegeben werden. Die Rechnungen starten bei einem dimensionslosen Abstand vom Düsenblock $x/D=6$, da erst ab dieser Stelle für alle drei Meßreihen Meßwerte vorliegen. Als Eingabeprofile für Geschwindigkeit, Temperatur und Temperaturschwankungen werden die bei $x/D=6$ gemessenen Werte benutzt. Für die nicht gemessenen turbulenten Größen k und ε werden die Eingabeprofile aus einem Luft-Experiment von Corrsin [Corr-43] abgeleitet. Die Dissipationsrate ε wird nach folgender Beziehung aus der Wirbelviskosität ν_t errechnet,

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^2}{\nu_t} \quad (7.1)$$

Class et al. [CISK-89] leiten für hohe Reynolds-Zahlen einen Zusammenhang zwischen Luft- und Natrium-Experimenten her:

$$k_N\left(\frac{x}{D}=6, \frac{r}{D}\right) = k_L\left(\frac{x}{D}=6, \frac{r}{D}\right) \frac{\overline{u_{c,N}}^2}{\overline{u_{c,L}}^2} \Bigg|_{\frac{x}{D}=6} \quad (7.2)$$

$$v_{t,N}\left(\frac{x}{D}=6, \frac{r}{D}\right) = v_{t,L}\left(\frac{x}{D}=6, \frac{r}{D}\right) \frac{(\overline{u_c} - \overline{u_a})_N r_{05u,N}}{(\overline{u_c} - \overline{u_a})_L r_{05u,L}} \Bigg|_{\frac{x}{D}=6} \quad (7.3)$$

Für die Wirbelviskosität des Corrsin-Experiments wurde von Class et al. ein querschnittsgemittelter Wert von $v_t = 1.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ermittelt. In Tabelle (7.2) sind die umgerechneten Werte zusammengefaßt.

Experiment	C2	F	H
$v_t \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$

Tabelle (7.2): Querschnittgemittelte Werte für v_t nach Gleichung (7.3)

Zu beachten ist, daß der Wert für v_t mit Hilfe einer Variationsrechnung ermittelt wurde und somit sehr stark von dem zur Bestimmung benutzten Turbulenzmodell abhängig ist. Die Simulationsrechnungen mit GENMIX ergeben mit den obigen Werten keine zufriedenstellenden Ergebnisse für die Profile von Temperatur und Geschwindigkeit. Deshalb werden als Anfangswerte für die Wirbelviskosität die korrigierten Werte nach Tabelle (7.3) verwendet.

Experiment	C2	F	H
$v_t \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	$35 \cdot 10^{-6}$	$18 \cdot 10^{-6}$	$12 \cdot 10^{-6}$

Tabelle (7.3): Korrigierte Werte für v_t

Diese Vorgehensweise erscheint gerechtfertigt, da später der Einfluß der Konstanten in der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen untersucht werden soll. Als Grundlage hierfür wird eine gute Übereinstimmung der Geschwindigkeitsprofile von Rechnung und Messung benötigt, denn sonst wird der Konvektionsterm der Transportgleichung für $\overline{T^2}$ nicht richtig wiedergegeben und eine Untersuchung der Konstanten erscheint nicht sinnvoll.

Das Diagramm (7.1) zeigt die verwendeten Anfangsprofile für die kinetische Energie der Turbulenz k und deren Dissipationsrate ε für die drei Rechnungen.

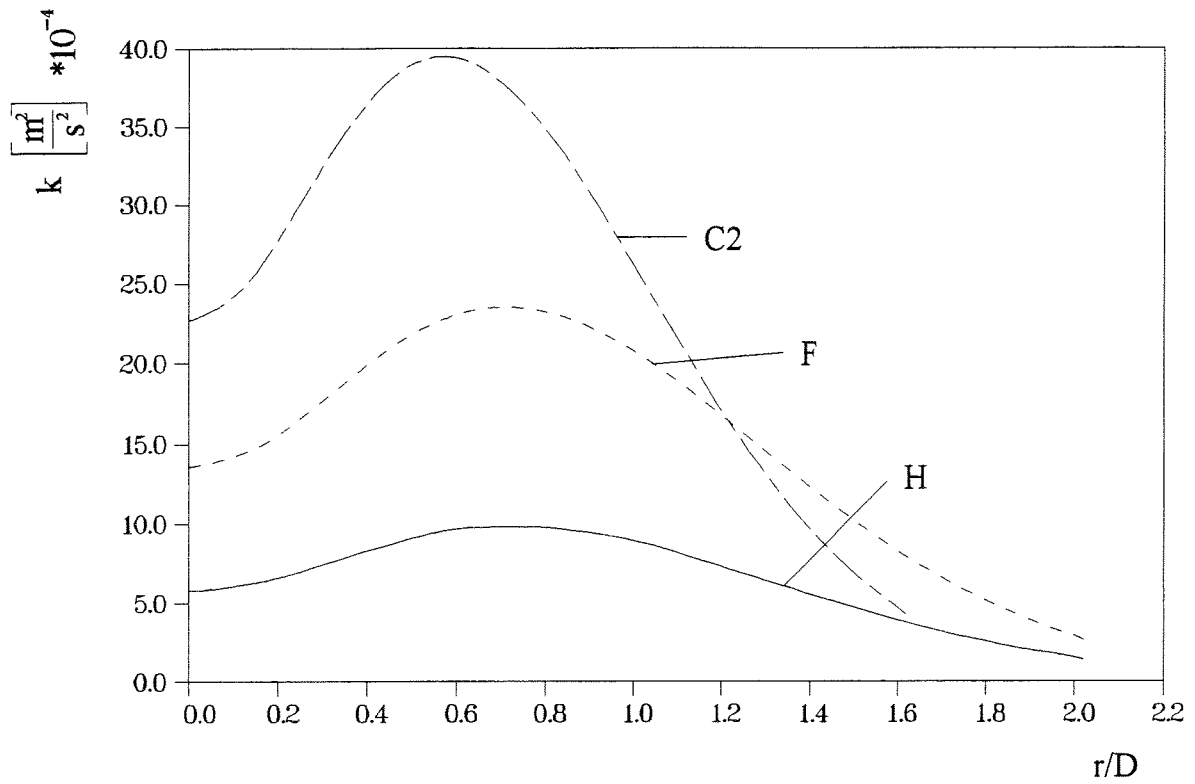


Diagramm (7.1): Anfangsprofile für k : Messung C2, F und H

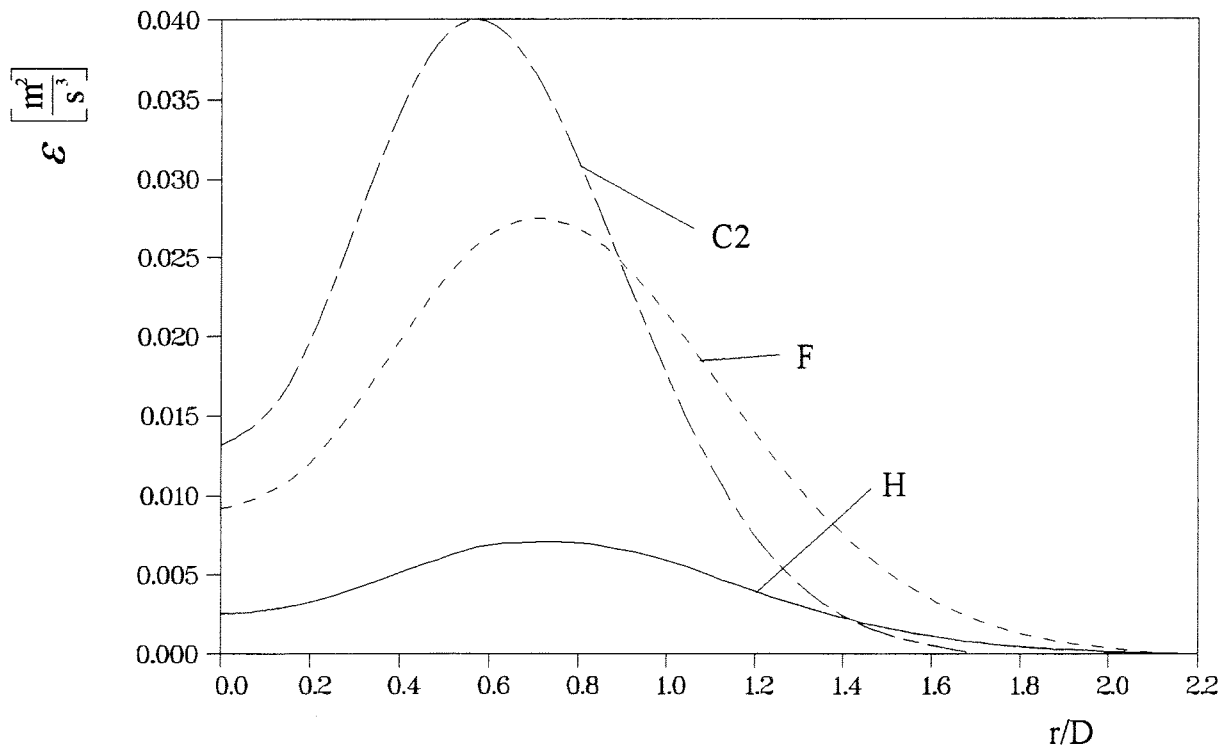


Diagramm (7.1): Anfangsprofile für ϵ : Messung C2, F und H

7.2 Fluide mit niedrigen Prandtl-Zahlen

Die in der Literatur vorgeschlagenen Konstanten für das k - ε -Turbulenzmodell, z.B. von Rodi [Rodi-86], beziehen sich auf Fluide mit Prandtl-Zahlen $Pr > 0.3$. Bei der Herleitung des k - ε -Turbulenzmodells wird davon ausgegangen, daß die turbulente Diffusion einer Größe wesentlich mehr Gewichtung hat als die molekulare Diffusion. Bei Fluiden wie zum Beispiel Natrium mit einer Prandtl-Zahl $Pr \approx 0.006$ ist auch bei turbulenter Strömung die molekulare Wärmeleitung gegenüber der turbulenten Wärmeleitung von dominierender Bedeutung. Deshalb darf der molekulare Anteil der Wärmeleitung nicht vernachlässigt werden. Es zeigt sich, daß die bisher benutzten Konstanten nicht zu realistischen Rechenergebnissen führen. Insbesondere die Modellierung des radialen Wärmestroms \overline{vT} und des Dissipationsterms ε_T in der T^2 -Transportgleichung müssen durch eine Anpassung der Konstanten verbessert werden.

7.2.1 Variation der turbulenten Prandtl-Zahl

Grundlage der Vorgehensweise zur Verbesserung der Modellierung des radialen Wärmestroms sind Überlegungen aus der Literatur. Aus Messungen in Rohrströmungen ist bekannt, daß die turbulente Prandtl-Zahl σ_t von der molekularen Prandtl-Zahl, der Reynolds-Zahl und dem Wandabstand abhängt. Da in dieser Arbeit Freistrahlen untersucht werden, spielt der Wandabstand jedoch keine Rolle. Auch der Einfluß der Reynolds-Zahl soll vernachlässigt werden, es bleibt die Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl.

Der Zusammenhang von molekularer Prandtl-Zahl und turbulenter Prandtl-Zahl läßt sich anschaulich begründen. Für Flüssigmetalle ist die molekulare Temperaturleitfähigkeit weit größer als die molekulare kinematische Viskosität. Daher können Turbulenzballen wesentlich leichter Wärme mit dem umgebenden Fluid austauschen als Impuls, d. h. es wird weniger Wärme durch den turbulenten Diffusionsanteil transportiert. Mit sinkender molekularer Prandtl-Zahl Pr steigt somit die turbulente Prandtl-Zahl σ_t .

Knebel et al. [KnSK-88] haben den Einfluß der turbulenten Prandtl-Zahl bereits untersucht und geben für Natrium in einer Rohrströmung ein Intervall von $3.0 \leq \sigma_t \leq 5.0$ für die turbulente Prandtl-Zahl an.

Class et al. [ClSK-89] untersuchen für einen Natrium-Freistrahler die turbulente Prandtl-Zahl in einem Intervall $0.6 \leq \sigma_t \leq 4.0$ und erreichen für $\sigma_t = 1.6$ die beste Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung.

Wie bei den Rechnungen in Luft gezeigt wurde, wird beim Standard- k - ε -Turbulenzmodell der radiale Wärmestrom unterbewertet. Die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile weisen eine deutliche Überhöhung auf der Strahlachse auf. Beim algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell wurde durch Einführung algebraischer Beziehungen dieser Schwachpunkt korrigiert. Es ist zu erwarten, daß unter Verwendung der algebraischen Beziehungen bei den Rechnungen in

Natrium der Einfluß der turbulenten Prandtl-Zahl noch deutlicher wird, denn die turbulente Diffusion wird gegenüber dem Standard- k - ε -Turbulenzmodell höher bewertet.

Die turbulente Prandtl-Zahl wird beim algebraischen Modell modelliert als $\sigma_t = \omega_v C_{IT}$. Für die Konstante C_{IT} gibt Hossain [Hoss-80] den Wert 3.0 an. Diese Konstante wird im Intervall $3.0 \leq C_{IT} \leq 10.0$ variiert und die berechneten Temperaturwerte mit den Meßwerten verglichen. Die Diskussion der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 7.3.

7.2.2 Variation des Dissipationsterms ε_T

Das Senkenglied in der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen $\overline{T'^2}$, $\varepsilon_T = \Gamma \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}$ wird als Dissipationrate der Temperaturschwankungen bezeichnet. Da dieses

Produkt aus partiellen Ableitungen eine unbekannte Korrelation ist, wird der Dissipationsterm nach Gleichung (6.22) modelliert als $\varepsilon_T = \frac{1}{C_T} \frac{\varepsilon}{k} \overline{T'^2}$.

Für Fluide mit einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr > 0.3$ gilt nach Launder [Laun-75] für die Konstante C_T der Wert 1.6. Da sich die molekulare Temperaturleitfähigkeit Γ für Natrium um etwa zwei Größenordnungen von der Temperaturleitfähigkeit von Luft bzw. drei Größenordnungen von Wasser unterscheidet, ist anzunehmen, daß die Konstante $C_T = 1.6$ für Natrium ihre Gültigkeit verliert.

Bei der Bestimmung einer neuen Konstanten für Natrium tritt das Problem auf, daß der Dissipationsterm nur in Abhängigkeit von dem Produktionsterm $-\overline{2v'T\partial T/\partial r}$ modelliert werden kann. Dieser ist eine Funktion der turbulenten Prandtl-Zahl σ_t , für die ebenfalls ein neuer Wert bestimmt werden soll. Somit hängt die Wahl einer neuen Konstanten C_T entscheidend von der Größe der turbulenten Prandtl-Zahl ab. Zunächst ist festzustellen, daß kleinere turbulente Prandtl-Zahlen den Reynoldsschen Wärmestrom $\overline{v'T}$ stärker erhöhen als der Gradient $\partial T/\partial r$ abnimmt. Deshalb resultieren aus kleinen turbulenten Prandtl-Zahlen große Produktionsterme in der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen. Dies erfordert somit auch größere Dissipationsterme.

Die Wahl von σ_t und C_T ist von entscheidendem Einfluß auf die berechneten Werte von $\overline{T'^2}$.

7.2.3 Variation der turbulenten Prandtl-Zahl für die Temperaturschwankungen

Eine weitere Einflußgröße ist die turbulente Diffusion der Temperaturschwankungen $\overline{T'^2}$. Wenn die turbulente Diffusion der mittleren Temperatur \overline{T} von der molekularen Prandtl-Zahl des Fluids abhängig ist, ist auch der turbulente Diffusionsterm in der $\overline{T'^2}$ -Gleichung von der molekularen Prandtl-Zahl abhängig. Es wird deshalb kurz auf den Einfluß von $\Gamma_{\overline{T'^2}} = \nu_t/\sigma_{T^2}$ eingegangen.

7.2.4 Variation der Parameter

Um die Kombinationsmöglichkeiten der Parameter $\Gamma_{\overline{T^2}}$, $\Gamma_{\overline{T}}$ und ε_T einzuschränken, wird folgende Vorgehensweise eingehalten:

Zunächst wird das mittlere Temperaturprofil \overline{T} durch Variation der turbulenten Prandtl-Zahl an die Meßwerte angepaßt. Dadurch wird auch die Größe des Produktionsterms in der $\overline{T^2}$ -Gleichung (6.23) festgelegt.

Zum Schluß wird versucht, durch eine Vergrößerung des Dissipationsterms die Rechnung an die Meßwerte anzupassen.

7.3 Ergebnisse der Simulationsrechnungen

7.3.1 Turbulente Prandtl-Zahl

Wie erwartet, lassen sich die Temperaturprofile für die Natrium-Experimente weder mit dem Standard-Modell und eine turbulenten Prandtl-Zahl von $\sigma_t=0.6$ noch mit dem $k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Modell und der Standardkonstanten $C_{IT}=3.0$ nachvollziehen.

Rechnungen mit einer auf $\sigma_t=1.6$ abgehobenen turbulenten Prandtl-Zahl bestätigen die Ergebnisse von Class et al. [CISK-89].

Das Diagramm (7.2) zeigt die berechneten Profile für $\sigma_t=0.6$ und $\sigma_t=1.6$ im Vergleich zu den Meßwerten bei $x/D=20$. Der Verlauf der Temperaturprofile ist für $\sigma_t=1.6$ zufriedenstellend, während mit dem Standardwert von $\sigma_t=0.6$ die turbulente Diffusion $\sqrt{v'T}$ zu groß modelliert wird.

Für das $k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Modell werden mit der Konstanten $C_{IT}=9.0$ zufriedenstellende Ergebnisse für die Temperaturprofile erzielt. Das Diagramm (7.3) zeigt die Ergebnisse für das $k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Modell.

Die turbulente Diffusion, die mit der Standardkonstanten $C_{IT}=3.0$ zu groß modelliert wird, wird ebenfalls korrigiert.

Auch die Überlegung, daß für das Standard-Modell eine geringere Korrektur der turbulenten Prandtl-Zahl notwendig ist, wird bestätigt.

	Standard-Modell	$k-\varepsilon-\overline{T^2}$ -Modell
Standardwert	$\sigma_t=0.6$	$C_{IT}=3.0$
neuer Wert	$\sigma_t=1.6$	$C_{IT}=9.0$
Korrektur	$\frac{\sigma_{t_{neu}}}{\sigma_{t_{alt}}}=2.667$	$\frac{\sigma_{t_{neu}}}{\sigma_{t_{alt}}}=3$

Tabelle (7.4): Korrektur der turbulenten Prandtl-Zahlen

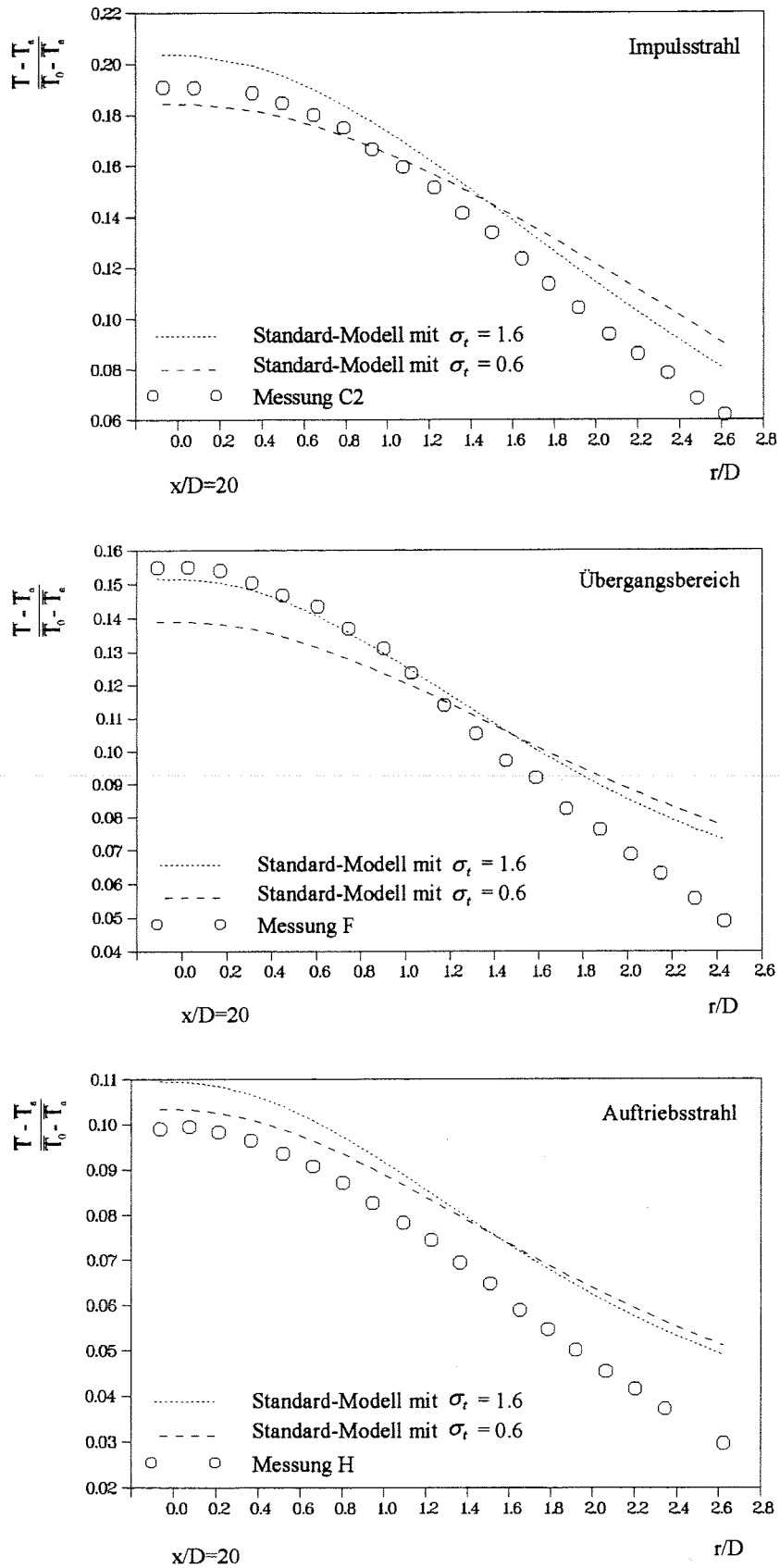


Diagramm (7.2): Temperaturprofile - Standard-Modell

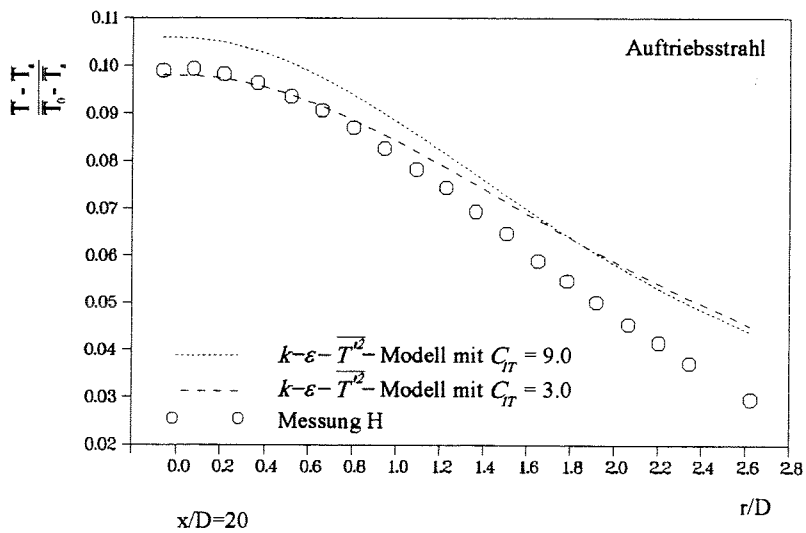
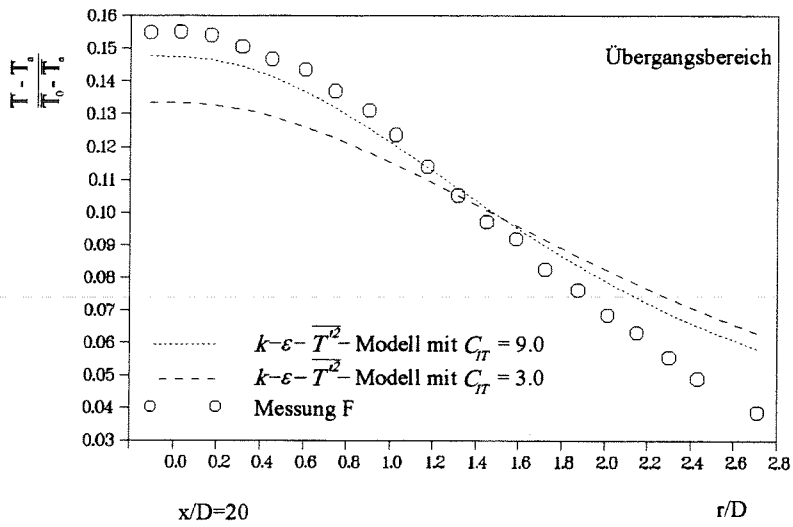
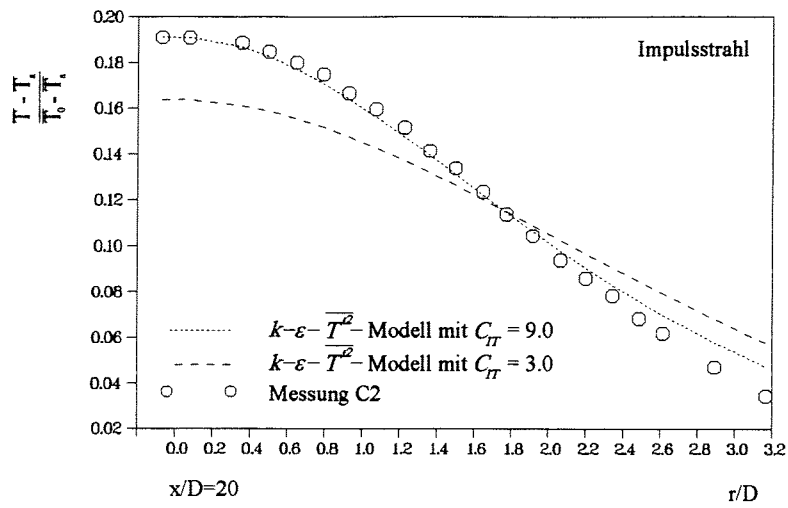


Diagramm (7.3): Temperaturprofile - $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell

7.3.2 Dissipationsterm in der Transportgleichung für die Temperaturschwankungen

Bei der Modellierung des Dissipationsterms ε_T wird davon ausgegangen, daß die Dissipationsterme von k und ε in den Transportgleichungen etwa die gleiche Gewichtung haben. Daraus resultiert der verwendete Modellansatz

$$-2\Gamma \overline{\frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j}} = -\frac{2}{C_T} \frac{\varepsilon}{k} \overline{T^2} \quad (6.22)$$

Um den Dissipationsterm ε_T über die Dissipationsrate der kinetischen Energie der Turbulenz ε modellieren zu können, müssen die thermische und die kinematische Grenzschicht in etwa die gleiche Ausdehnung haben. Ist dies nicht der Fall, so stellt sich die Frage, ob es gerechtfertigt ist, den Dissipationsterm der Temperaturschwankungen an die Kinematik des Fluids zu koppeln.

Für Luft mit einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr_{Luft}=0.7$ wurde gezeigt, daß sich mit Hilfe dieses Modellansatzes der Dissipationsterm ε_T ausreichend genau modellieren läßt. Allerdings muß die Konstante C_T für einen Auftriebsstrahl angepaßt werden.

Die Rechnungen in Natrium zeigen, daß sich der Modellansatz von Launder nicht für Fluide mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen eignet, da bei diesen die thermische und die kinematische Grenzschicht sehr unterschiedliche Ausdehnung haben.

Die Diagramme (7.4), (7.5) und (7.6) zeigen die berechneten $\overline{T^2}$ -Profile für verschiedene Konstanten C_T bei $x/D=20$ und $x/D=40$ im Vergleich zu den Meßwerten von Knebel.

Die Profile am Strahlrand weichen stark von den Meßwerten ab. Die Abweichungen werden mit zunehmendem Abstand vom Düsenblock größer. Während für die Messung C2 bei $x/D=20$ die Konstante $C_T=0.3$ die beste Übereinstimmung liefert, wird bei $x/D=40$ mit dem Wert $C_T=0.2$ das beste Ergebnis erzielt. Dies bestätigt die unzureichende Modellierung des Dissipationsterms.

Desweiteren zeigen die Rechnungen, daß je nach Charakter der Strömung die Konstante C_T angepaßt werden muß. Damit bestätigt sich die Überlegung von Tamanini [Tama-77], daß Auftriebs- und Impulsstrahlen nicht mit denselben Konstanten modelliert werden können.

Wie auch bei dem Experiment von George festgestellt wurde, muß für Auftriebsstrahlen der Dissipationsterm vergrößert werden. Tabelle (7.5) faßt die Ergebnisse zusammen.

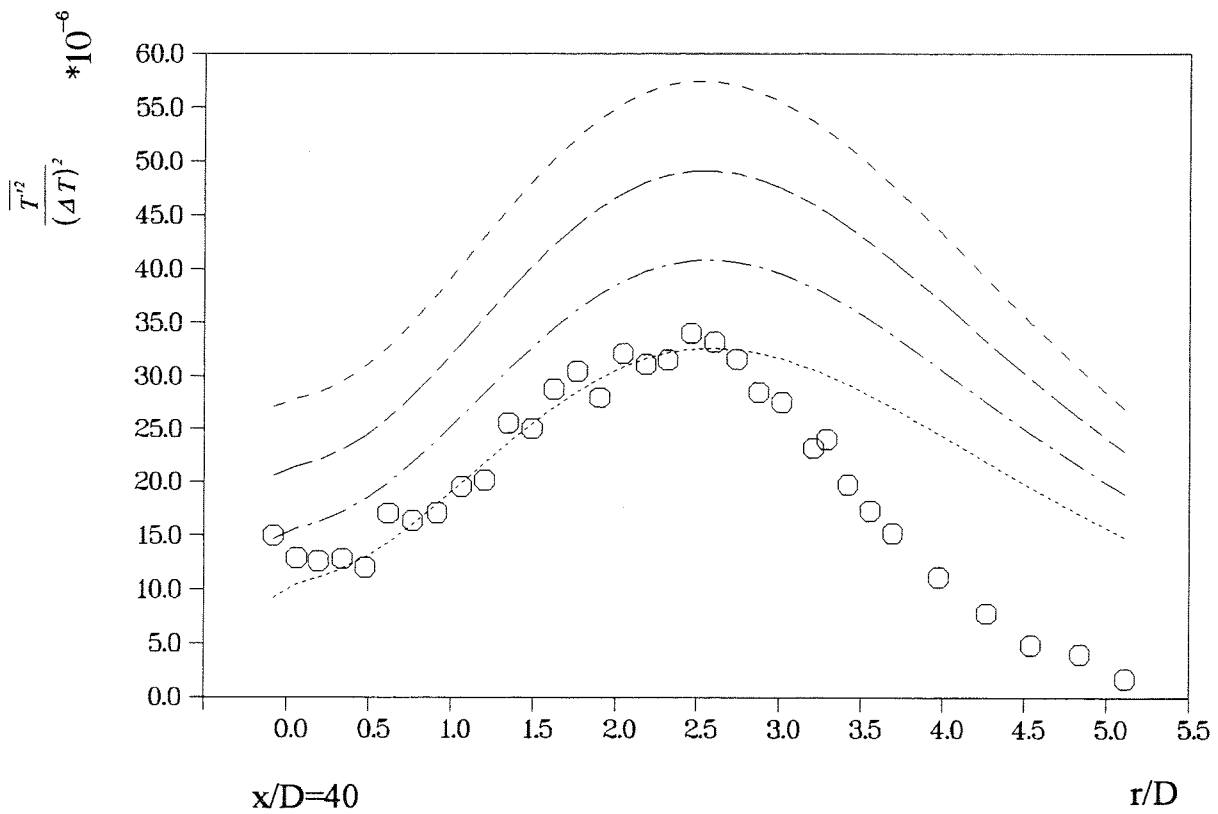
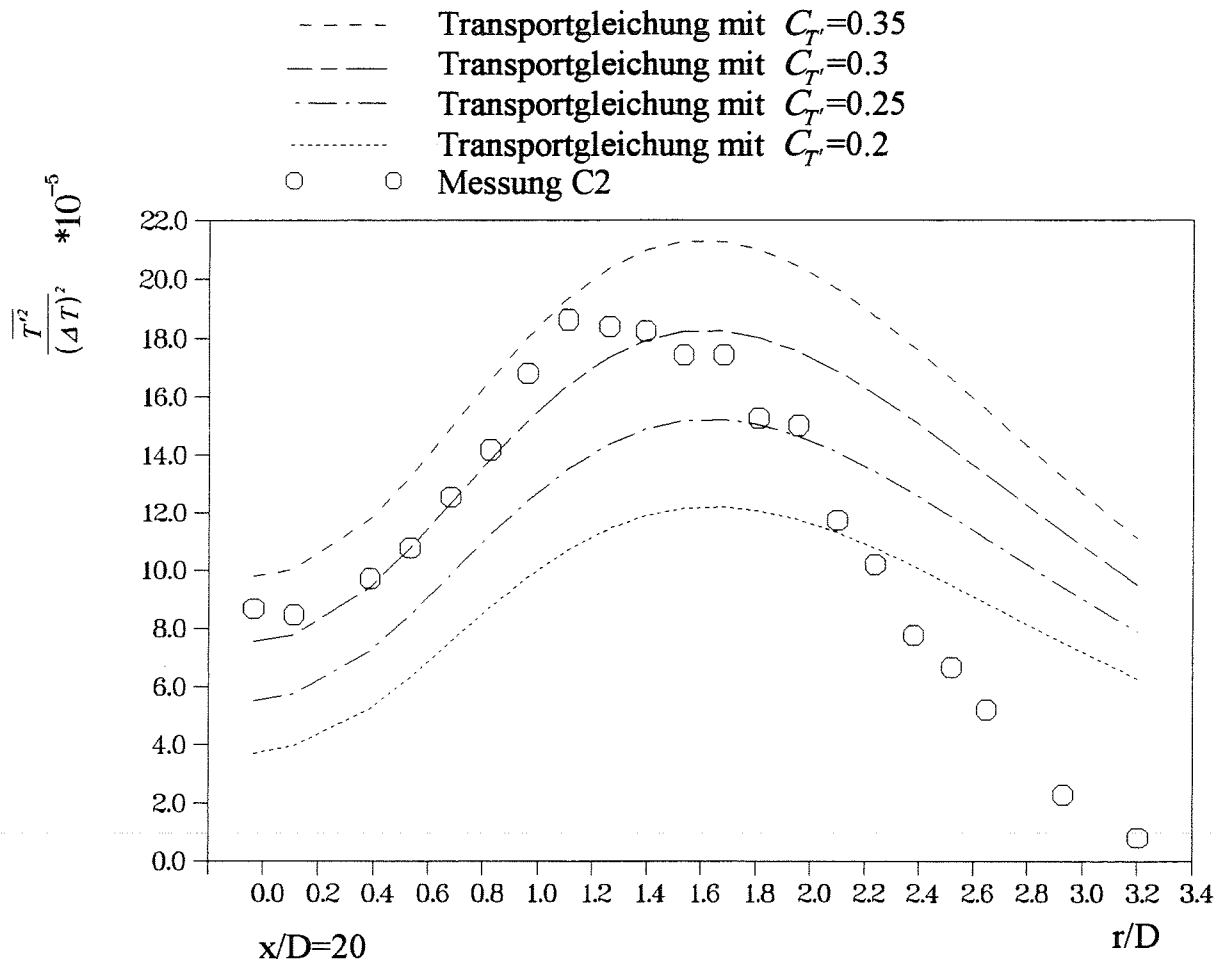


Diagramm (7.4): Temperaturschwankungen Messung C2 für $x/D=20$ und $x/D=40$

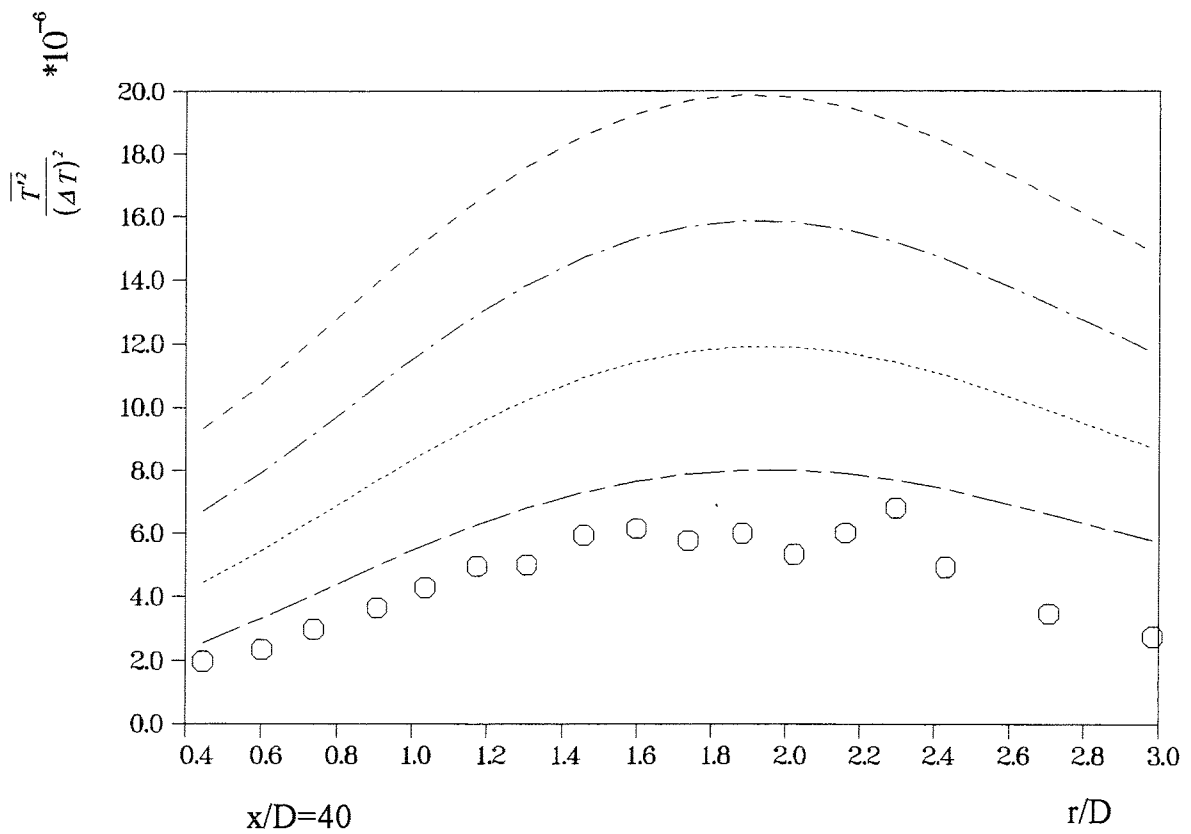
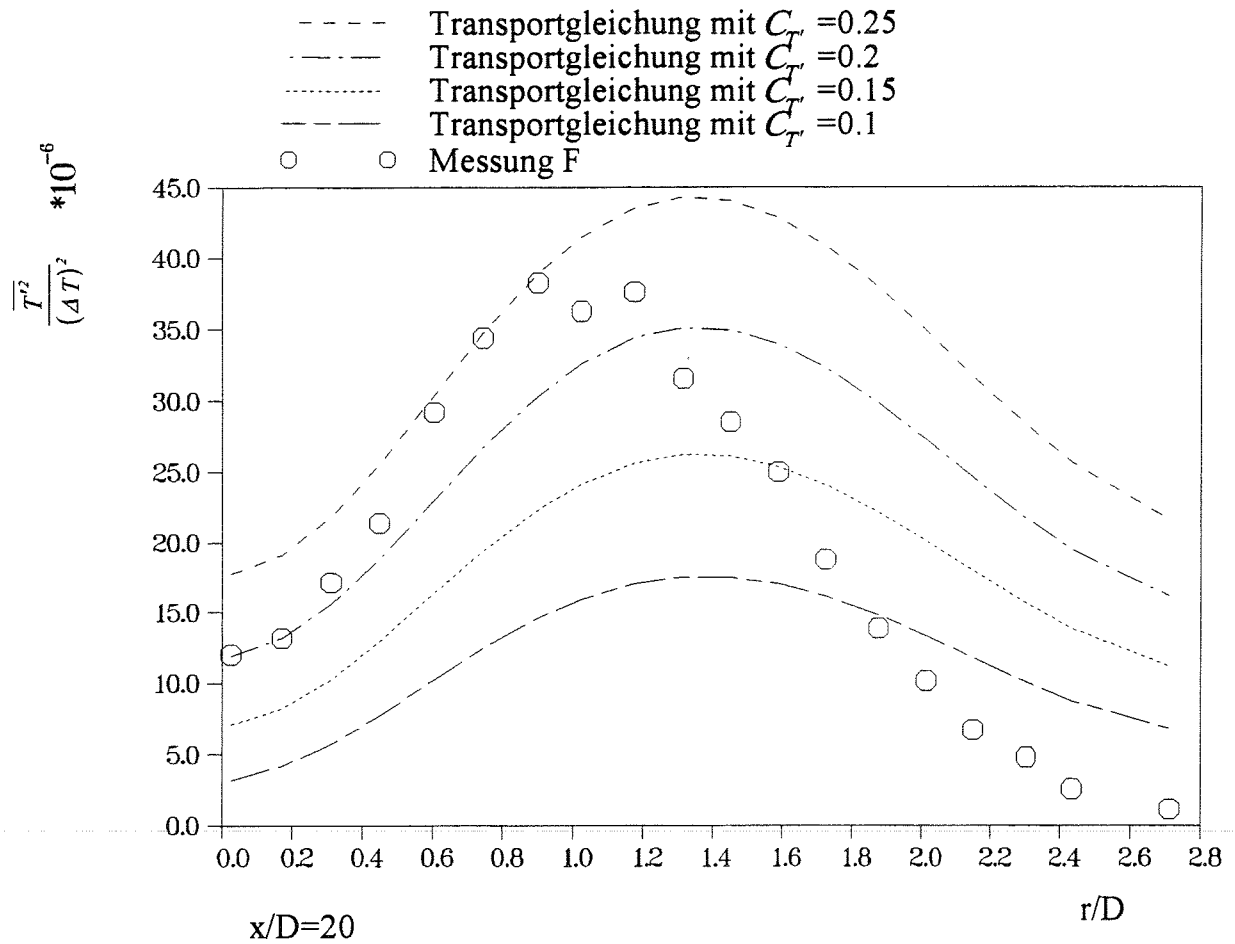


Diagramm (7.5): Temperaturschwankungen Messung F für $x/D=20$ und $x/D=40$

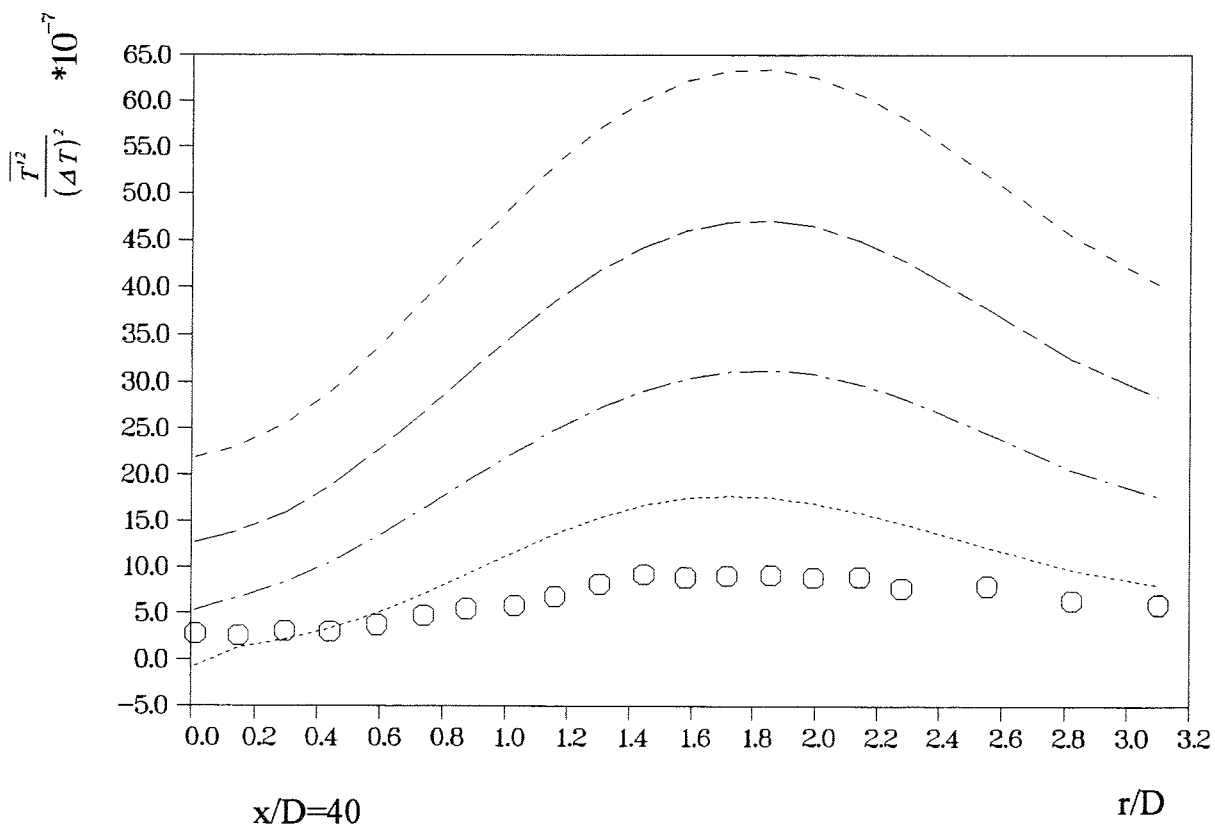
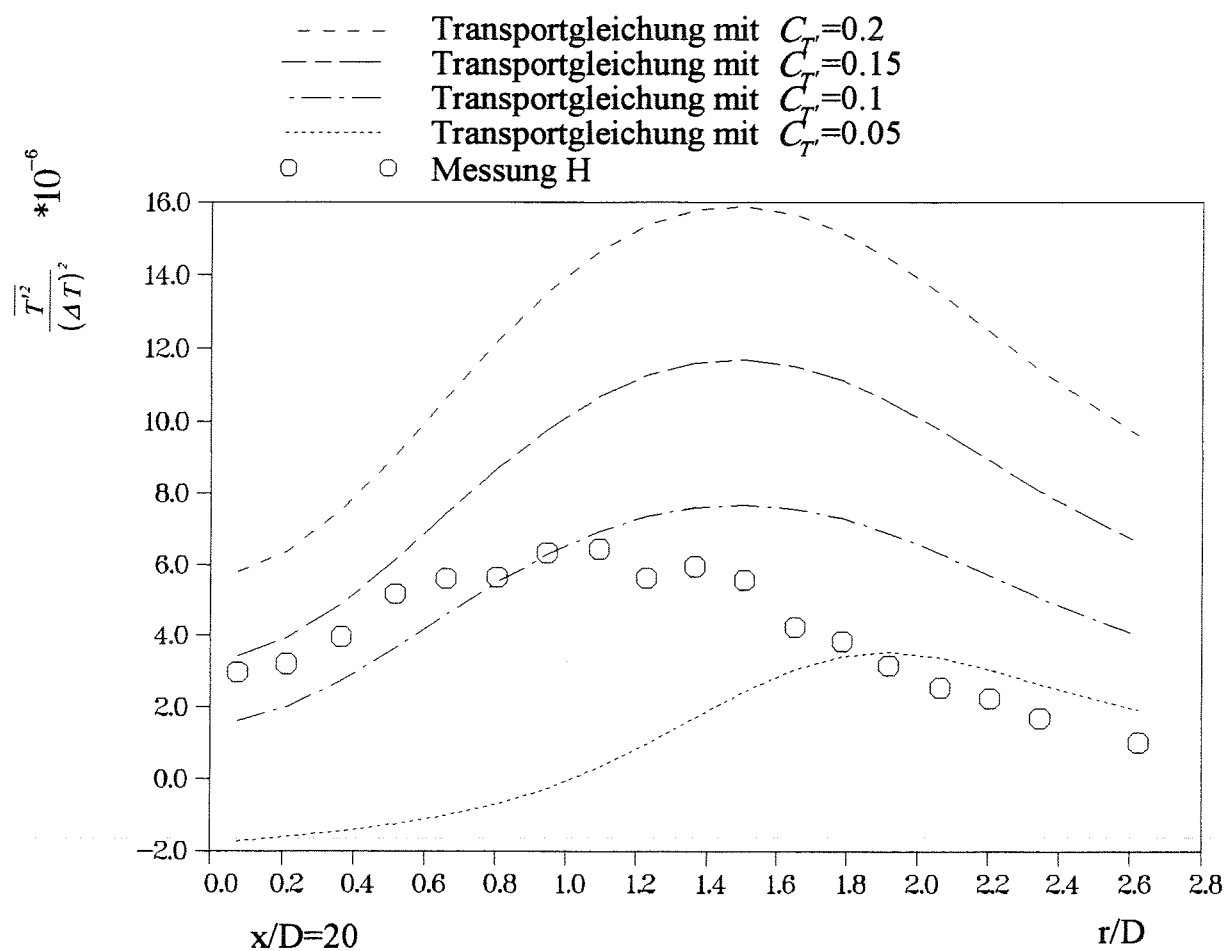


Diagramm (7.6): Temperaturschwankungen Messung H für $x/D=20$ und $x/D=40$

Messung	C2	F	H
Art des Problems	Impulsstrahl	Strahl im Übergangsbereich	Auftriebsstrahl
beste Übereinstimmung bei $x/d=20$	$C_T = 0.3$	$C_T = 0.2$	$C_T = 0.1$
beste Übereinstimmung bei $x/d=40$	$C_T = 0.2$	$C_T = 0.1$	$C_T = 0.05$

Tabelle (7.5): Optimale Konstanten C_T zur Modellierung des Dissipationsterms ε_T

Lumley und Khajeh-Nouri [LuKh-74] schlagen zur Bestimmung des Dissipationsterms ε_T die Lösung einer Transportgleichung vor. Angesichts der Probleme bei der Berechnung der Temperaturschwankungen erscheint dieser Vorschlag sinnvoll.

Andererseits ist die Kopplung zwischen den wesentlichen Strömungsgrößen, Geschwindigkeit und Temperatur, und den Temperaturschwankungen sehr gering. Das Diagramm (7.7) zeigt die berechneten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile, die sich aus den in Diagramm (7.6) dargestellten $\overline{T^2}$ -Profilen ergeben.

Für die Profile der mittleren Geschwindigkeit und der mittleren Temperatur sind bei Flüssigmetallströmung keine Unterschiede zu erkennen, so daß im Einzelfall Nutzen und Aufwand einer physikalisch richtigen Modellierung der Temperaturschwankungen abgewägt werden sollte.

Später wird gezeigt, daß auch der algebraische Modellansatz (5.12) zu ausreichend genauen Ergebnissen führt, so daß die Lösung einer Transportgleichung für die Temperaturschwankungen in den untersuchten Natriumströmungen überflüssig erscheint.

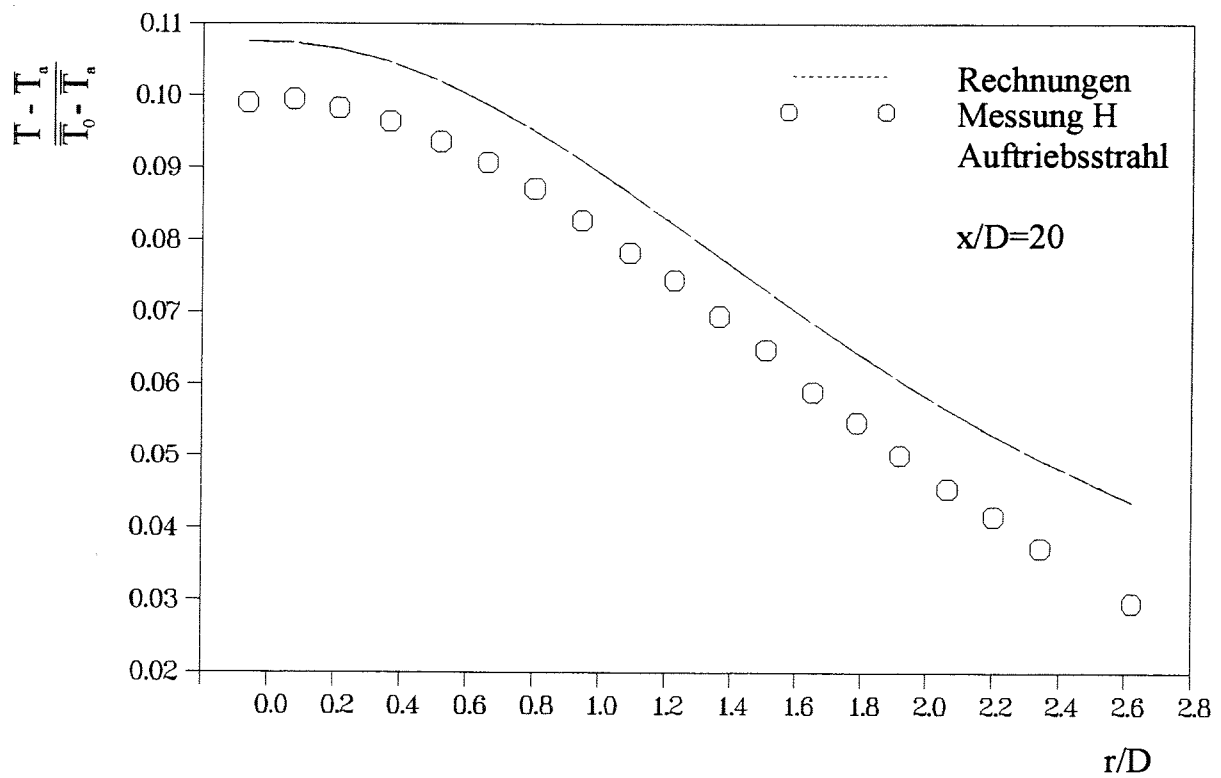
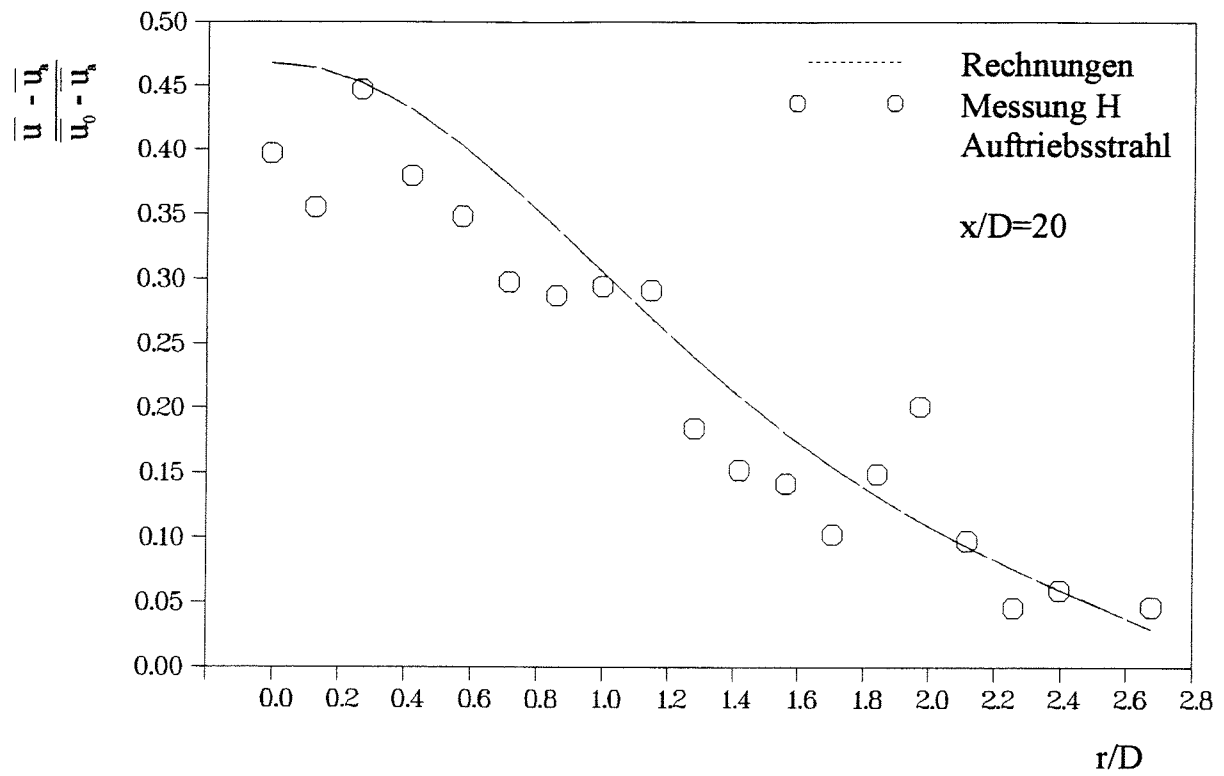
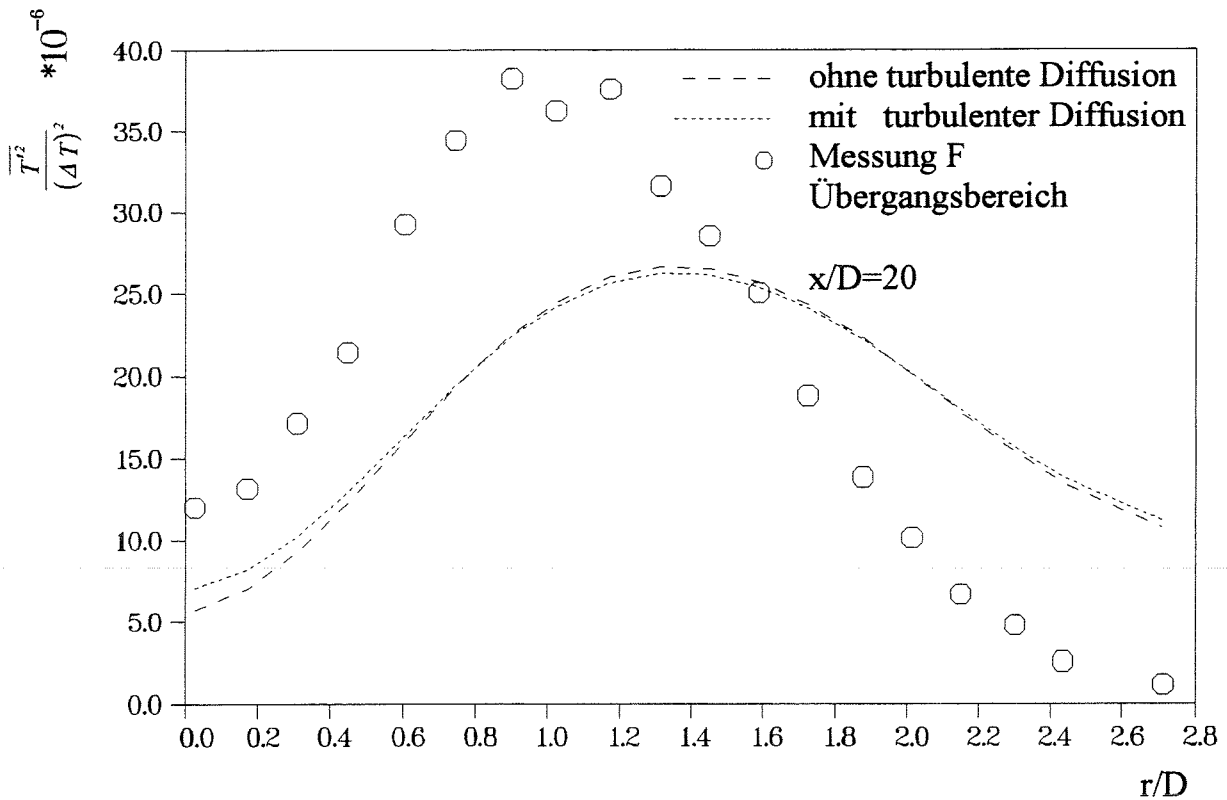


Diagramm (7.7): Geschwindigkeits- und Temperaturprofile zu Diagramm (7.6)

7.3.3 Turbulente Diffusion der Temperaturschwankungen

Die turbulente Diffusion der Temperaturschwankungen spielt in Natrium keine wesentliche Rolle. Diagramm (7.8) zeigt den radialen Verlauf der Temperaturschwankungen mit turbulenter Diffusion (Standardwert $C_{TT}=0.13$) und ohne turbulente Diffusion mit $C_{TT}=0$.



Diagramm(7.8): Profile der Temperaturschwankungen mit und ohne turbulente Diffusion

Es zeigt sich, daß der Einfluß sehr gering ist. Der molekulare Transport ist wesentlich größer als der turbulente Anteil

$$\Gamma \gg \frac{v_t}{\sigma_{T^2}}$$

Da die Modellierung des turbulenten Diffusionsterms keine entscheidende Rolle spielt, wird er für die abschließenden Rechnungen vernachlässigt.

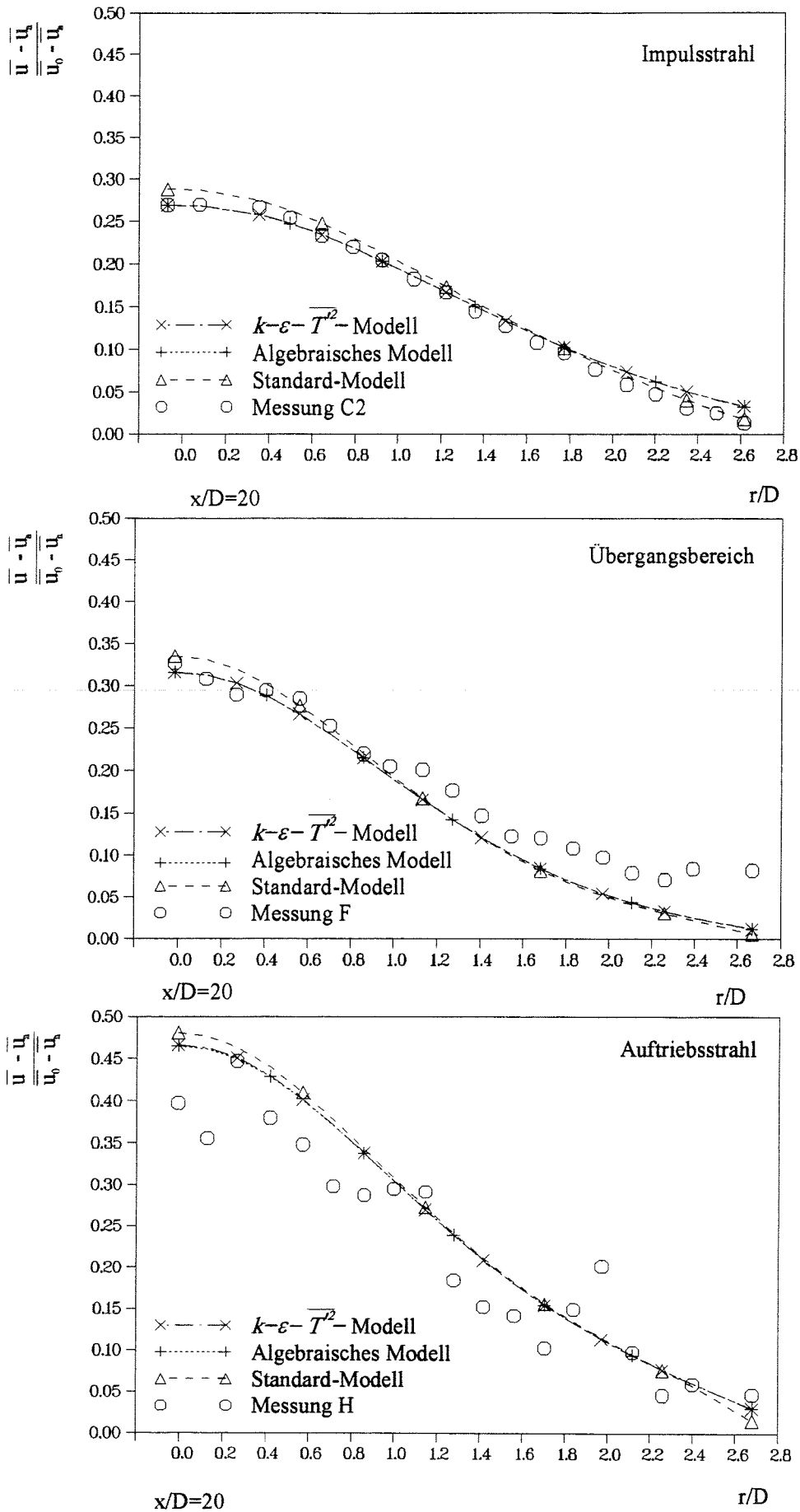
7.4 Vergleich der einzelnen Modelle

Zum Schluß werden die verwendeten Modelle miteinander verglichen. Da die Temperaturprofile für Natrium durch eine Korrektur der turbulenten Prandtl-Zahl entstanden sind, wird nicht die Leistungsfähigkeit der Modelle, sondern lediglich ihre charakteristischen Eigenschaften untersucht. Die Darstellung ist beschränkt auf den dimensionslosen Abstand $x/D=20$ vom Düsenblock.

7.5.1 Geschwindigkeitsprofile

Bei der Simulation des Experiments von George wurde festgestellt, daß beim Standard-Modell die Profile auf der Symmetrieachse eine deutliche Überhöhung aufweisen, da der Auftriebseinfluß in den turbulenten Diffusionsgliedern nicht berücksichtigt wird. Bei den Natrium-Experimenten wird ein ähnliches Verhalten beobachtet, wobei die Überhöhungen nicht so ausgeprägt sind wie bei dem Experiment von George. Im Vergleich zum Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell wird das turbulente Diffusionsglied $\overline{u'v'}$ kleiner modelliert. Dadurch sind die Geschwindigkeitsprofile für das Standard-Modell auf der Symmetrieachse etwas höher und am Strahlrand etwas niedriger als beim Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell, bei dem der Auftriebseinfluß in den turbulenten Diffusionsgliedern berücksichtigt wird. Zwischen Algebraischem Spannungs-/Fluß-Modell und dem $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell ist bei den Profilen für die mittlere Geschwindigkeit kein Unterschied zu erkennen. Beide Modelle führen zu identischen Kurven. Das Diagramm (7.9) zeigt die Ergebnisse für die drei Experimente.

In Diagramm (7.10) sind die axialen Profile der Geschwindigkeiten auf der Symmetrieachse dargestellt. Für alle drei Experimente liegen die berechneten Kurven von Algebraischem Spannungs-/Fluß-Modell und $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell näher an den Meßwerten als die mit dem Standard-Modell berechneten Kurven. Die Meßwerte werden mit allen drei Modellen gut wiedergegeben. Bei der Messung H schwanken die Meßwerte stark, so daß über die Qualität der Rechnung kein Urteil getroffen werden kann.



Diagramm(7.9): Geschwindigkeitsprofile Messung C2, F und H

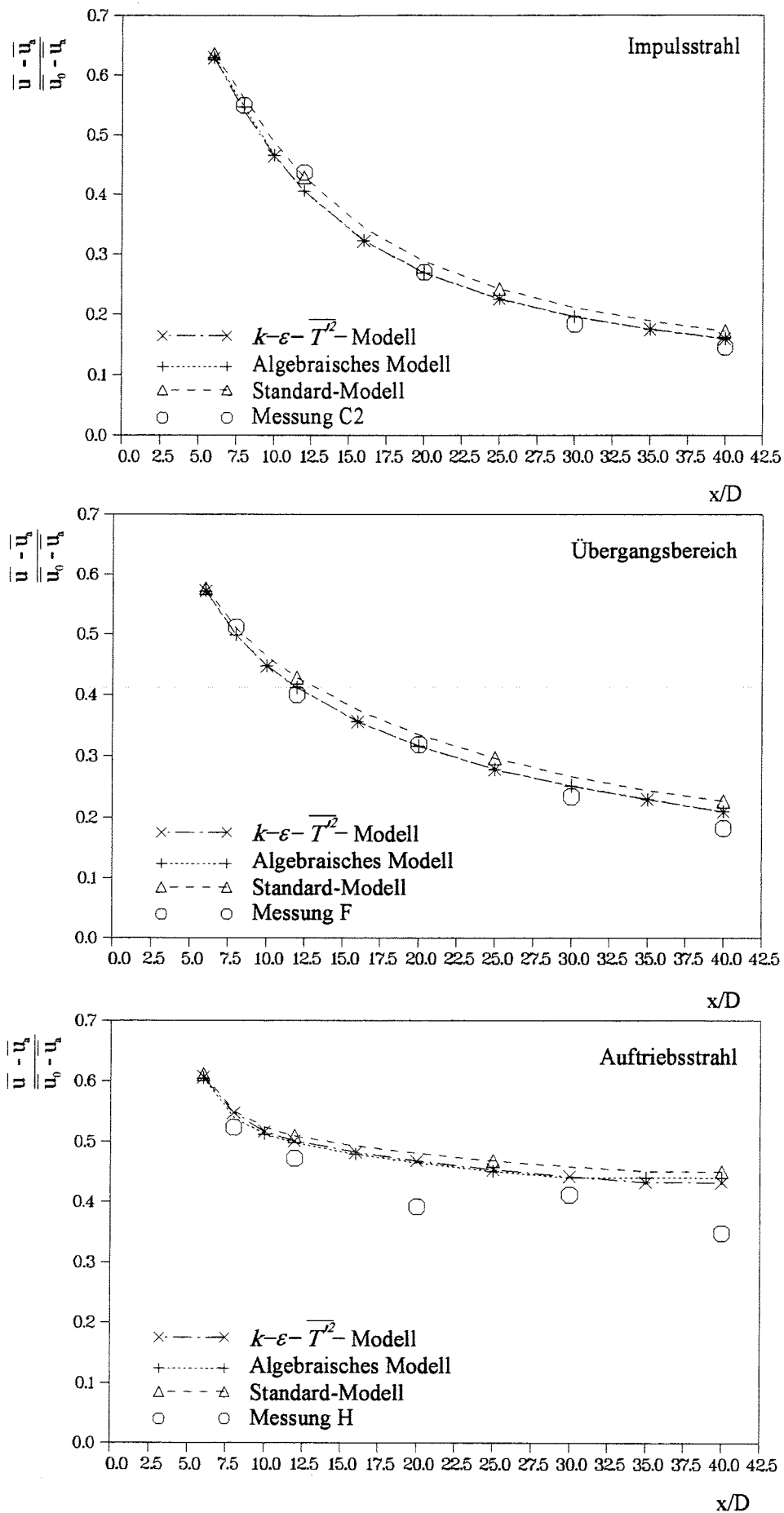


Diagramm (7.10): axiale Geschwindigkeitsprofile Messung C2, F und H für $r/D=0$

7.4.2 Profile für die Temperaturschwankungen

Das Diagramm (7.11) zeigt einen Vergleich zwischen dem Modellansatz (5.12), der Transportgleichung (6.23) und den Meßwerten von Knebel.

Für die Konstante C_T im Modellansatz (5.12) wurden abweichend vom Standardwert $C_T = 1.6$ die Werte nach Tabelle (7.6) verwendet.

Messung	C2	F	H
Art des Problems	Impulsstrahl	Strahl im Übergangsbereich	Auftriebsstrahl
verwendeter Wert	$C_T = 0.3$	$C_T = 0.2$	$C_T = 0.1$

Tabelle (7.6): Optimale Konstanten C_T zur Modellierung des Dissipationsterms

Diese Korrektur ist nötig, um den Charakter der Strömung zu berücksichtigen, denn mit zunehmendem Auftriebseinfluß nehmen die Werte der Temperaturschwankungen ab.

Transportgleichung (6.23) und Modellansatz (5.12) stimmen abgesehen vom Verlauf in der Nähe der Symmetrieachse annähernd überein. Deshalb erscheint der Aufwand, für $\overline{T'^2}$ eine Transportgleichung zu lösen, hier nicht gerechtfertigt.

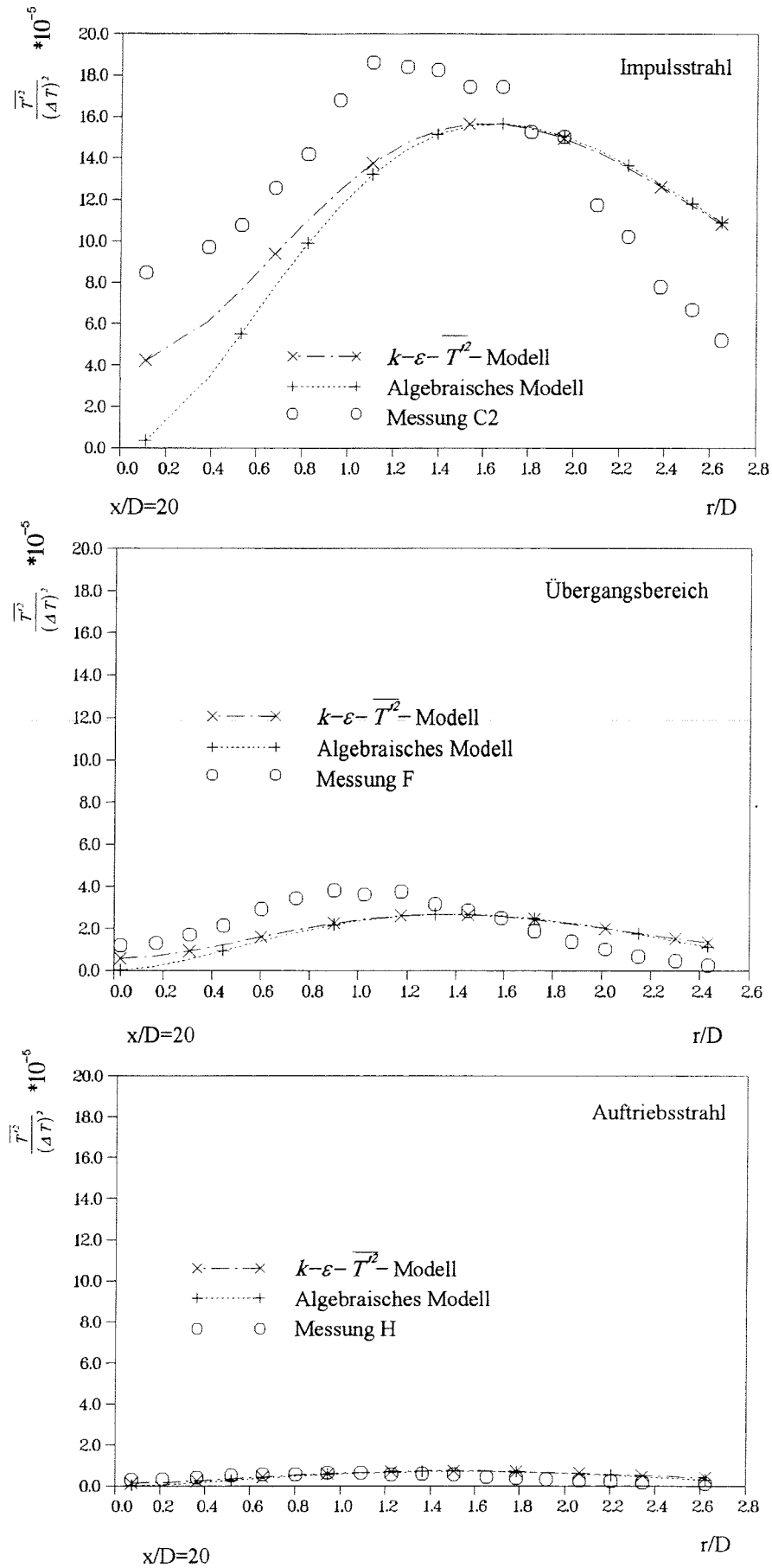


Diagramm (7.11): Profile der Temperaturschwankungen Messung C2, F und H

7.4.3 Profile der mittleren Temperatur

Bei den Temperaturprofilen werden die turbulenten Diffusionsglieder durch eine Erhöhung der turbulenten Prandtl-Zahl angepaßt. Eine Diskussion des Auftriebseinflusses in diesen Gliedern ist deshalb nicht sinnvoll. Es ist lediglich festzustellen, daß beim Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell die turbulenten Diffusionsglieder eine Funktion des Auftriebs sind und deshalb größer modelliert werden als beim Standard-Modell. Deshalb muß die turbulente Prandtl-Zahl stärker korrigiert werden. Beim Standard-Modell erhält man für $\sigma_t = 1.6$, beim Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell für $C_{IT} = 9.0$ eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung.

Bei den Temperaturprofilen wird deutlich, daß die Lösung einer Transportgleichung für die Temperaturschwankungen nicht notwendig ist. Bei allen drei Messungen ergeben sich mit dem Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell und dem $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell identische Temperaturprofile. Das Diagramm (7.12) zeigt die Ergebnisse für die Temperaturprofile.

In Diagramm (7.13) sind die axialen Profile der Temperatur auf der Symmetrieachse dargestellt. Die berechneten Kurven von Standard-Modell, Algebraischem Spannungs-/Fluß-Modell und $k-\varepsilon-\overline{T'^2}$ -Modell stimmen gut mit den Meßwerten überein. Die Wahl der neuen turbulenten Prandtl-Zahlen wird bestätigt.

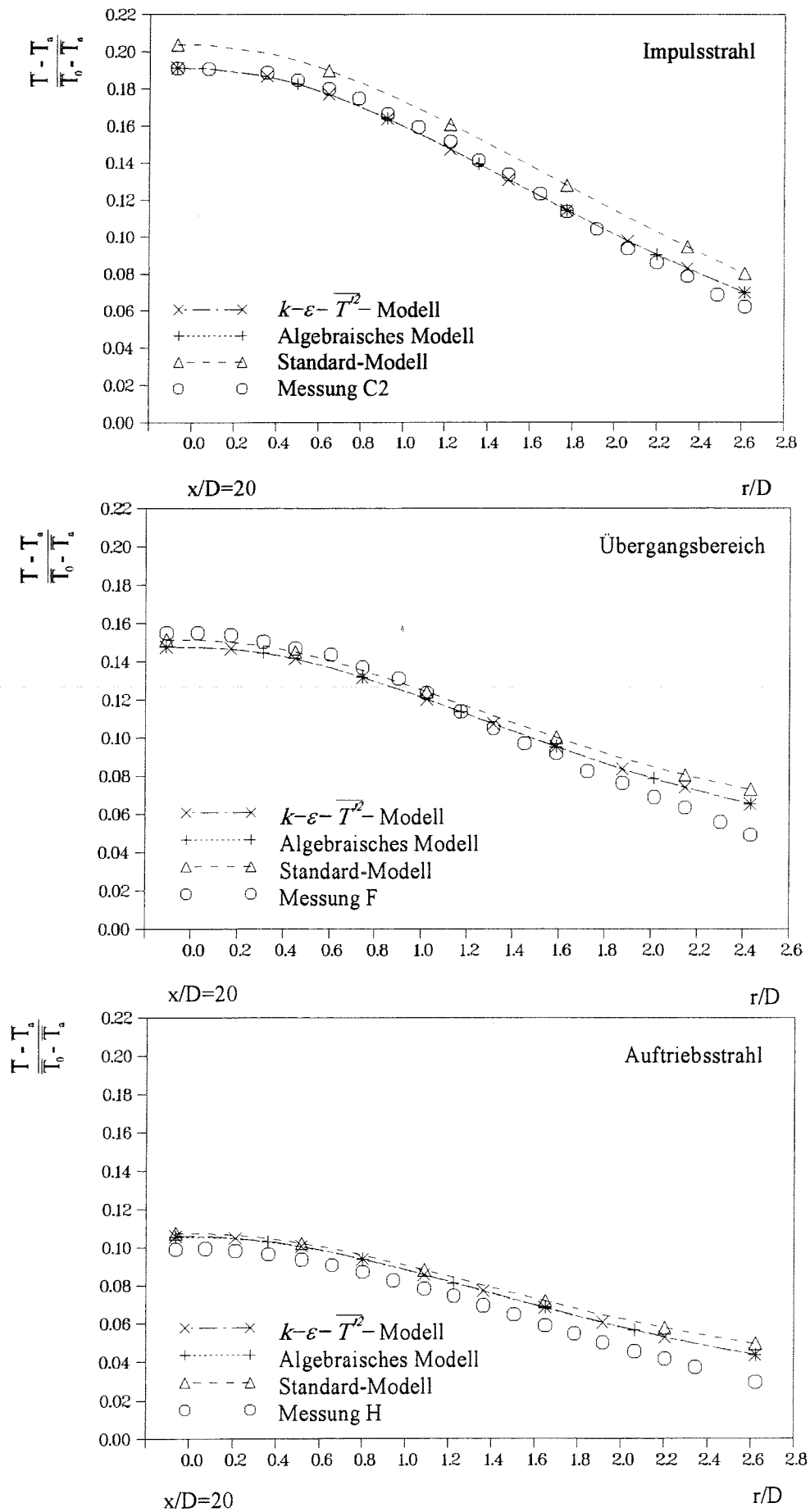


Diagramm (7.12): Temperaturprofile Messung C2, F und H

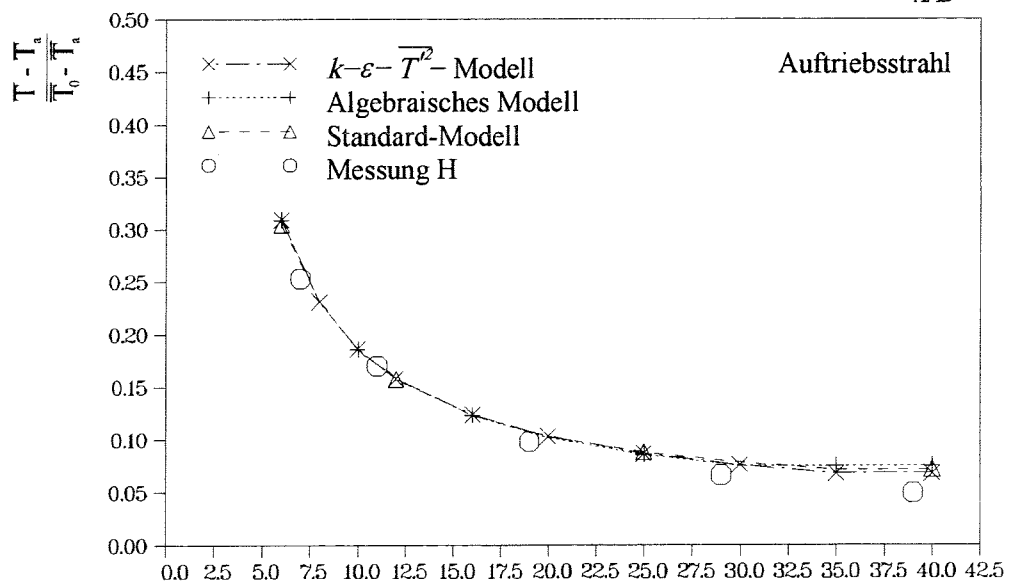
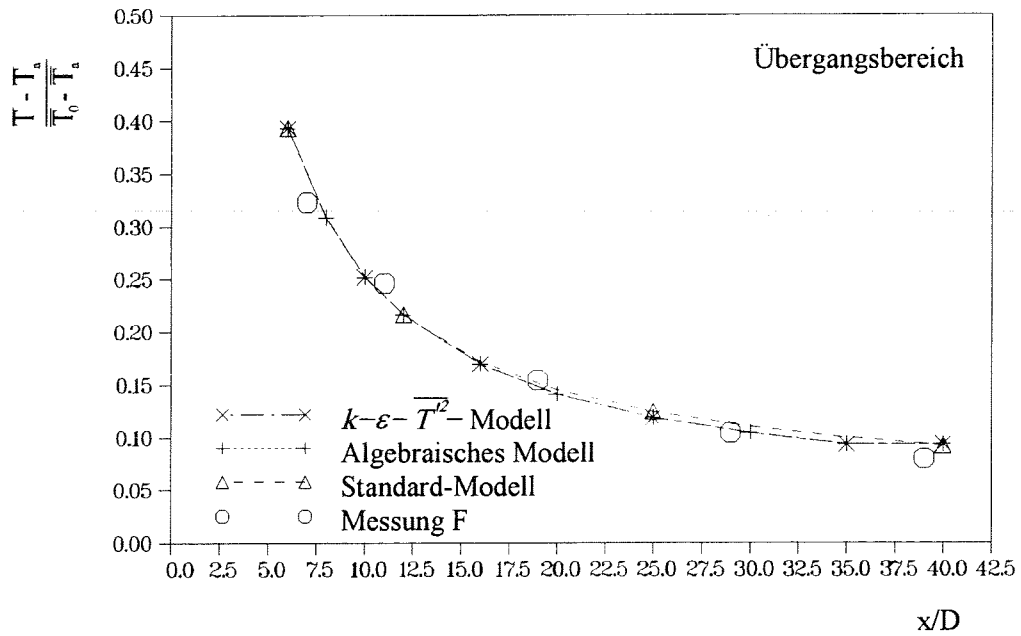
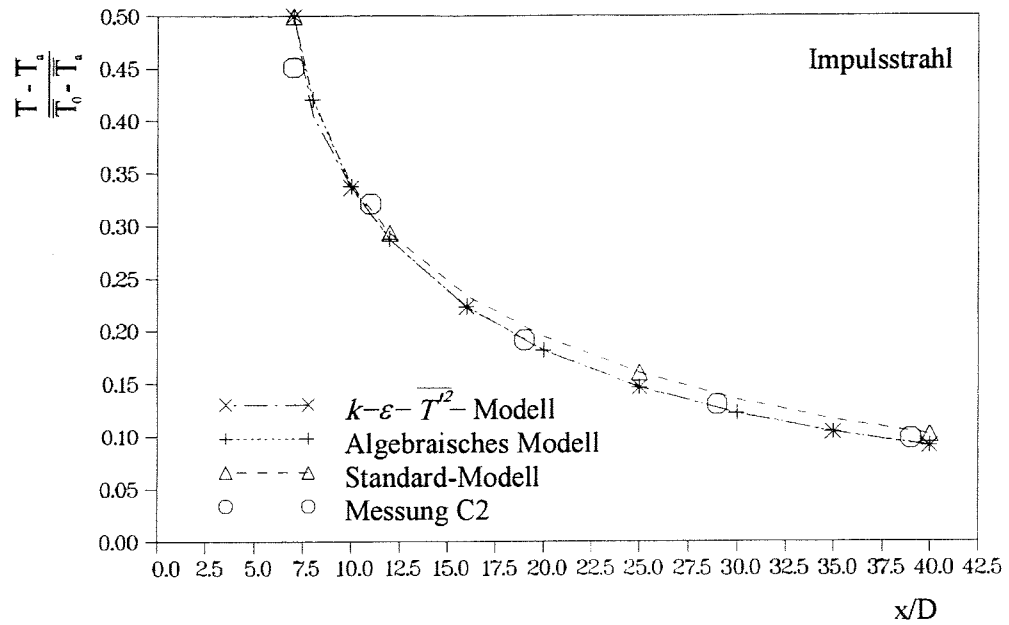


Diagramm (7.13): axiale Temperaturprofile Messung C2, F und H für $r/D=0$

8 Zusammenfassung

Auftriebsbehaftete Strömungen können mit dem Standard- k - ε -Modell nicht zufriedenstellend simuliert werden. Auftriebseffekte, besonders die durch Auftrieb zusätzlich produzierte kinetische Energie der Turbulenz k , werden unzureichend modelliert.

Durch die Einführung von algebraischen Beziehungen für die Reynoldsschen Spannungen und die Reynoldsschen Wärmeströme entstehen Ansätze, die den Auftriebseinfluß berücksichtigen. Mit dem Algebraischen Spannungs-/Fluß-Modell werden ausreichend genaue Ergebnisse für die Profile der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} und der mittleren Temperatur \bar{T} erzielt. Für die Temperaturschwankungen $\overline{T^2}$ liefert der algebraische Ansatz physikalisch falsche Profile. Durch Verwendung einer Transportgleichung für die Temperaturschwankungen lassen sich die von George et al. gemessenen Profile für einen Auftriebsstrahl in Luft gut reproduzieren.

Die Überlegung von Tamanini [Tama-77], den Dissipationsterm der Temperaturschwankungen für Auftriebsstrahlen zu vergrößern, kann bestätigt werden.

Bei der Berechnung hat sich gezeigt, daß die Kopplung zwischen der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} , der mittleren Temperatur \bar{T} und den Temperaturschwankungen $\overline{T^2}$ sehr gering ist, so daß der Aufwand, für $\overline{T^2}$ eine Transportgleichung zu lösen, abgewägt werden sollte.

Für Natrium mit einer Prandtl-Zahl von $Pr_N \approx 0.006$ konnten mit den Standard-Konstanten keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt werden. Für Fluide mit sehr kleinen Prandtl-Zahlen kann der molekulare Transport der Temperatur nicht gegenüber dem turbulenten Transport der Temperatur vernachlässigt werden. Die ursprüngliche Modellierung, die darauf basiert, daß der turbulente Austausch wesentlich größer ist als der molekulare, läßt sich deshalb nicht verwenden.

Um befriedigende Ergebnisse für die Profile der mittleren Temperatur \bar{T} zu erzielen, werden für die turbulente Prandtl-Zahl folgende Werte benutzt:

	Standard-Modell	k - ε - $\overline{T^2}$ -Modell
Standardwert	$\sigma_t = 0.6$	$C_{IT} = 3.0$
neuer Wert	$\sigma_t = 1.6$	$C_{IT} = 9.0$
Korrektur	$\frac{\sigma_{t_{neu}}}{\sigma_{t_{alt}}} = 2.667$	$\frac{\sigma_{t_{neu}}}{\sigma_{t_{alt}}} = 3$

Die Dissipationsrate der Temperaturschwankungen, die eine Funktion der Temperaturleitfähigkeit ist, muß ebenfalls korrigiert werden. Mit dem Ansatz von Launder läßt sich keine Konstante finden, mit der sich das Problem für den gesamten Lauflängenbereich ausreichend

genau simulieren läßt. Lediglich die Überlegung von Tamanini, mit steigendem Auftriebs- einfluß den Dissipationsterm zu vergrößern, konnte auch für Natrium bestätigt werden.

Um diesen Schwachpunkt bei der Modellierung des Dissipationsterms ε_T zu beheben, kann nach Lumley und Khajeh-Nouri [LuKh-74] für die Dissipationsrate der Temperaturschwankungen eine Transportgleichung gelöst werden. Bei der Modellierung der neuen Unbekannten, die innerhalb der Transportgleichung auftreten, entstehen neue Konstanten, die empirisch bestimmt werden müssen. Da diese Gleichung wenig ausgetestet ist, ist fraglich, ob sich die erwartete Verbesserung bei der Modellierung des Dissipationsterms ε_T realisieren läßt.

Für Natrium gilt wie für Luft, daß die Kopplung zwischen der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} , der mittleren Temperatur \bar{T} und den Temperaturschwankungen $\overline{T^2}$ für die untersuchten Strömungen sehr gering ist. Mit der algebraischen Beziehung für die Temperaturschwankungen $\overline{T^2}$ lassen sich ausreichend genaue Ergebnisse für die mittleren Größen erzielen. Der Aufwand, eine Transportgleichung für $\overline{T^2}$ zu lösen, erscheint für den untersuchten Typ von Strömungen und nicht zu große Temperaturunterschiede nicht gerechtfertigt.

9 Literaturverzeichnis

- [CISK-89] Class,A.; Suckow,D.; Krebs,L.
KfK/IATF, unveröffentlichter Bericht, Dezember 1989
- [Corr-43] Corrsin,S.
Investigation of flow in an axially symmetric heated jet of air
NACA wartime report, W-94,1943
- [GeAT-77] George,W.K.; Alpert,R.L.; Tamanini,F.
Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume
Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol.20, No.11, 1977, pp 1145-1154
- [HaNa-67] Harlow,F.; Nakajama,P.I.
Turbulence Transport Equations
Physics of Fluids, Vol. 10, 1967, pp.2323-2332
- [Hinz-75] Hinze,J.O.
Turbulence
McGraw-Hill Book Company, ISBN 0-07-029037-7
- [Hoel-93] Hoelle,C.
KfK/IATF, unveröffentlichter Bericht, Juli 1993
- [Hoss-80] Hossain,M.
Mathematische Modellierung von turbulenten Auftriebsströmungen
Dissertation Universität Karlsruhe Januar 1980
- [Kneb-89] Knebel,J.U.
KfK/IATF, unveröffentlichter Bericht, Dezember 1989
- [Kneb-93] Knebel,J.U.
Experimentelle Untersuchung in turbulenten Auftriebsstrahlen in Natrium
KfK/IATF, Dissertation März 1993
- [KnSK-88] Knebel,J.U.; Suckow,D.; Krebs,L.
KfK/IATF, unveröffentlichter Bericht, Dezember 1988
- [Laun-74] Launder,B.E.; Spalding,D.B.
The Numerical Computation of Turbulent Flows
Comput. Meth. in Applied Mech. and Eng., Vol.3, pp 269-289, 1974
- [Laun-75] Launder,B.E.
On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum
J. Fluid. Mech., 67, 3, pp 569-581
- [LuKh-74] Lumley,J.L.; Khajeh-Nouri,B.
Modelling homogeneous deformation of turbulence
Pennsylvania State University Report, 1974
- [PaSp-70] Patankar,S.V.; Spalding,D.B.
Heat and Mass Transfer in Boundary Layers
Intertext Books, London, 1970, ISBN 0-7002-0154-8
- [Rodi-85] Rodi,W.
Turbulenzmodelle und ihre Anwendung mit Hilfe von Differenzenverfahren
Vorlesungsskript WS 1985/86, Universität Karlsruhe

- [Rodi-86] Rodi, W.
Mathematische Simulierung turbulenter Auftriebsströmungen
Vorlesungsskript SS 1986, Universität Karlsruhe
- [Spal-73] Spalding, D.B.
A general computer program for two-dimensional boundary layer problems
Imperial College, Mech. Eng. Dept., Rep. HTS/73/48, 1973
- [Tama-77] Tamanini, F.
An improved version of the k - ε - g model of turbulence and its application to axisymmetric forced and buoyant jets
Technical report, Basic Research Dept., Norwood, Massachusetts 02062, März 1977