

**Forschungszentrum Karlsruhe**  
Technik und Umwelt

**Wissenschaftliche Berichte**  
FZKA 5692

**Ermittlung der  
Lebensdauerverteilung  
bei Thermoermüdung  
mit den Methoden der  
stochastischen Geometrie**

**E. Kullig, T. Johansson, A. Brückner-Foit,  
H. Riesch-Oppermann, D. Munz, T. Winkler,  
B. Michel**

**Institut für Materialforschung  
Centrum für Mikromechanik, Chemnitz**

**Februar 1996**

---



**Forschungszentrum Karlsruhe**

**Technik und Umwelt**

**Wissenschaftliche Berichte**

**FZKA 5692**

**Ermittlung der Lebensdauerverteilung  
bei Thermoermüdung mit den Methoden  
der stochastischen Geometrie**

E. Kullig<sup>1)</sup>, T. Johansson<sup>1)</sup>, A. Brückner-Foit<sup>1)</sup>,

H. Riesch-Oppermann, D. Munz<sup>1)</sup>,

T. Winkler<sup>2)</sup>, B. Michel<sup>3)</sup>

Institut für Materialforschung

1) Universität Karlsruhe,  
Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde  
im Maschinenbau

2) Centrum für Mikromechanik in der  
Chemnitzer Werkstoffmechanik GmbH

3) Fraunhofer Einrichtung Zuverlässigkeit und Mikrointegration Berlin

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
1996

Als Manuskript gedruckt  
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

ISSN 0947-8620

## **Kurzfassung**

Der vorliegende Bericht beschreibt die Interpretation von experimentell an glatten Oberflächen austenitischer Proben erzeugten Rißmustern infolge von Thermoermüdungsbeanspruchung.

Es wird ein methodischer Rahmen zur bruchmechanischen Beschreibung verzweigter Oberflächenrisse unter äquibiaxialer Belastung bereitgestellt, der auch die Behandlung von Wechselwirkungseinflüssen beinhaltet. Fortgeschrittene Methoden zur statistischen Auswertung von Rißmustern anhand geeigneter Kenngrößen werden entwickelt und ein effizientes Simulationsverfahren erlaubt die Identifizierung der Einflüsse verschiedener Größen des stochastischen Rißwachstumsmodells auf die entstehenden Rißmuster.

## **Lifetime distribution in thermal fatigue - A stochastic geometry approach**

### **Abstract**

The present report describes the interpretation approach for crack patterns which are generated on the smooth surface of austenitic specimens under thermal fatigue loading.

A framework for the fracture mechanics characterization of equibiaxially loaded branched surface cracks is developed which accounts also for crack interaction effects. Advanced methods for the statistical evaluation of crack patterns using suitable characteristic quantities are developed. An efficient simulation procedure allows to identify the impact of different variables of the stochastic crack growth model with respect to the generated crack patterns.

**Danksagung:**

Wir bedanken uns bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung dieses Vorhabens.

**Acknowledgement:**

Financial support of the Deutsche Forschungsgemeinschaft is gratefully acknowledged.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1-1</b>
<b>2. Zielstellung, grundsätzliches Vorgehen</b>	<b>2-1</b>
<b>3. Experimente</b>	<b>3-1</b>
<b>4. Modelle und Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Rißmuster</b>	<b>4-1</b>
4.1 Vorbemerkungen	4-1
4.2 Beschreibung der Rißmuster durch modellunabhängige Kenngrößen	4-3
4.2.1 Beschreibung der Rißmuster durch einfache Rißstatistik	4-3
4.2.2 Beschreibung der Rißmuster durch das Modell eines Faserprozesses	4-3
4.3 Beschreibung der Rißmuster durch auf dem Mosaik-Modell basierende Kenngrößen	4-5
4.3.1 Beschreibung der Rißmuster durch das Modell eines Mosaiks mit versagten Kanten	4-5
4.3.2 Beschreibung der Rißmuster durch das Referenzmodell eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten	4-10
4.4 Zusammenfassung der Kenngrößen zur Beschreibung der Oberflächenrißmuster	4-12
4.5 Zusätzliche Modellierung zur Rißtiefenausdehnung	4-14
<b>5. Simulation der Rißentwicklung</b>	<b>5-1</b>
5.1 Prinzip der Simulationsprozedur	5-1
5.2 Erzeugung der Schwachstellenstruktur	5-4
5.3 Simulation der Anfangsschädigung	5-4
5.4 Simulation weiterer Folgeschädigungsschritte	5-4
<b>6. Bruchmechanisches Modell</b>	<b>6-1</b>
6.1 Grundsätzliche Überlegungen	6-1
6.2 Rißwachstum von vorhandenen Rissen	6-2
6.2.1 Beanspruchungsgröße für ungerissene Kanten	6-2
6.2.2 Spannungszustand an Endpunkten verzweigter Risse	6-3
6.2.3 Spannungszustand an Knickpunkten verzweigter Risse	6-10
6.2.4 Zur Genauigkeit der Näherungsformeln	6-14

6.3	Rißwachstum durch Rißwechselwirkung	6-14
6.3.1	Definition der geometrischen Parameter	6-15
6.3.2	Symmetrirelationen	6-16
6.3.3	Bestimmung der Verstärkungs- und Abschirmbereiche	6-19
6.3.4	Ableitungen von Näherungen für die Rißwechselwirkung	6-22
6.4	Abschließende Bemerkungen	6-32
<b>7.</b>	<b>Statistische Analyse von experimentell beobachteten Rißmustern</b>	<b>7-1</b>
7.1	Vorbereitungen für die statistische Analyse der Oberflächenrißmuster	7-1
7.2	Modellunabhängige Kenngrößen der experimentellen Rißmuster	7-2
7.2.1	Kenngrößen der einfachen Rißstatistik	7-2
7.2.2	Kenngrößen des Faserprozesses	7-10
7.3	Auf dem Mosaik-Modell basierende Kenngrößen der experimentellen Rißmuster	7-12
7.3.1	Kenngrößen des Mosaiks	7-11
7.3.2	Charakterisierung der Schädigung	7-13
7.3.3	Charakterisierung der Rißmorphologie	7-14
7.3.4	Charakterisierung der Wechselwirkung mit Hilfe des Referenzmodells eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten	7-17
7.4	Zusätzliche Ergebnisse zur Rißtiefenausdehnung	7-21
7.4.1	Vorbereitungen für die Analyse der Rißtiefenausdehnung	7-21
7.4.2	Rißtiefe und Rißachsenverhältnis der experimentellen Risse	7-22
<b>8.</b>	<b>Statistische Analyse von simulierten Rißmustern</b>	<b>8-1</b>
8.1	Vorbereitungen zur Simulation und zur Auswertung der Rißmuster	8-1
8.2	Orientierende Voruntersuchungen	8-5
8.2.1	Optischer und statistischer Vergleich von drei Rißmustern	8-5
8.2.2	Vergleich verschiedener Rißmuster nach dem neunten Simulationsschritt	8-8
8.3	Spezielle Untersuchungen	8-13
8.3.1	Untersuchungen zum Einfluß des zugrundeliegenden Mosaiks	8-13
8.3.2	Untersuchungen zum Einfluß von Parameteränderungen	8-17
8.3.3	Untersuchungen zum Einfluß der Rißwechselwirkung	8-24
8.3.4	Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen	8-27
<b>9.</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>9-1</b>
<b>10.</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>10-1</b>

<b>Anhang A</b>	<b>Bestimmung der Nachbarschaftsrisse</b>	<b>A-1</b>
<b>Anhang B</b>	<b>Formeln für Wichtungsfaktoren (Mode I)</b>	<b>B-1</b>
	Fall A	B-2
	Fall B	B-2
	Fall C	B-3
	Entlastungspunkte auf der oberen und unteren Seite des Risses	B-4
<b>Anhang C</b>	<b>Formeln für Wichtungsfaktoren (Mode II)</b>	<b>C-1</b>
	Fall A	C-1
	Fall B	C-3
	Fall C	C-3
	Entlastungspunkte auf der oberen und unteren Seite des Risses	C-3
	Fall D	C-3
	Fall E	C-4
<b>Anhang D</b>	<b>BEM-Ergebnisse zum Spannungszustand an Knickpunkten</b>	<b>D-1</b>
	D.1 Geometriefunktionen des abgeknickten Ersatzrisses	D-1
	D.2 Geometriefunktionen zur Berücksichtigung von Abschirmeffekten	D-3



## Verwendete Bezeichnungen und Symbole

In der folgenden Zusammenstellung tauchen einige Symbole doppelt auf. Dabei handelt es sich um Größen, die einerseits im Rahmen der Statistik und stochastischen Geometrie verwendet werden und andererseits im bruchmechanischen Modell als übliche Bezeichnungen eingeführt sind. Da aus dem Zusammenhang jeweils deutlich ist, welche Größe gemeint ist, wurde auf eine Umbenennung verzichtet.

<b>Symbol</b>	<b>Bedeutung</b>
$a$	mittlere Zellfläche des ebenen POISSON-VORONOI-Mosaiks <sup>1</sup>
$\tilde{a}$	Schätzer für Zellfläche $a$
$a, b$	Achsen des halbelliptischen Oberflächenrisses <sup>2</sup>
$a_{\text{eff}}, a_1, a_2$	effektive halbe Rißlängen
$B$	Beanspruchungsgröße
$B_{\text{min}}, B_{\text{max}}$	Parameter zum Zusammenhang zwischen Beanspruchungsgröße und Versagenswahrscheinlichkeit
$C_1, C_3, C_4, C_6, \psi, \eta$	Geometriekenngrößen des verzweigten Risses
$F$	Airy'sche Spannungsfunktion
$F_T, F_N$	Einflußfaktoren für Tiefe und Nachbarschaft im Spannungsintensitätsfaktor
$\varphi_R$	Randwinkel des abgeknickten Ersatzrisses
$g_i, g_I, g_{II}, \dots$	Winkelfunktionen
$h_{\text{ges}}, l_{\text{ges}}, a_E$	charakteristische Längen eines verzweigten Risses
$K_I, K_{II}$	Spannungsintensitätsfaktoren für Modus I, II
$k_b, k_c, k_e, k_2$	Wichtungsfaktoren
$K, K_i$	Koeffizienten
$\lambda, \lambda_i, \dots$	Exponenten
$l_A$	mittlere Linienlänge des Rißmusters pro Flächeneinheit <sup>1</sup>
$l_A$	Länge der Randkante eines verzweigten Risses <sup>2</sup>
$l_1, l_2$	Schenkellängen des abgeknickten Ersatzrisses
$L_A$	mittlere Kantenlänge des POISSON-VORONOI-Mosaiks pro Flächeneinheit
$n_1$	mittlere Anzahl von Endpunkten der Risse pro Flächeneinheit
$n_3$	mittlere Anzahl von Verzweigungspunkten der Risse pro Flächeneinheit
$\hat{n}_3$	Schätzer von $n_3$ bei unabhängigem Kantenversagen
$n_K$	mittlere Anzahl von versagten Kanten des POISSON-VORONOI-Mosaiks pro Flächeneinheit

---

<sup>1</sup> (Kapitel 4, 7 und 8)

<sup>2</sup> (Kapitel 5 und 6)

$N_A$	mittlere Anzahl von Knoten des POISSON-VORONOI-Mosaiks pro Flächeneinheit
$N_K$	mittlere Anzahl von Kanten des POISSON-VORONOI-Mosaiks pro Flächeneinheit
$\tilde{N}_K$	Schätzer für $N_K$
$N_L$	Anzahl der Schnittpunkte pro Testlinienlänge
$\mu$	mittlere Kantenlänge des POISSON-VORONOI-Mosaiks
$\sigma^2$	empirische Streuung der Kantenlänge des POISSON-VORONOI-Mosaiks
$p$	Versagenswahrscheinlichkeit für die Kanten des POISSON-VORONOI-Mosaiks
$\tilde{p}, \hat{p}, \check{p}$	Schätzer für $p$ bei unabhängigem Kantenversagen
$p_b, p_e$	Projektionen des verzweigten Risses auf die Randkante
$p_0, p_1$	Versagenswahrscheinlichkeit für Anfangs- und Folgeschädigungsschritt
$p_k$	Versagenswahrscheinlichkeit der Kante $k$
$p_{\min}$	Parameter zum Zusammenhang zwischen Beanspruchungsgröße und Versagenswahrscheinlichkeit
$r$	Punktprozeßintensität des POISSON-VORONOI-Mosaiks <sup>1</sup>
$\tilde{r}, r^*$	Schätzer für $r$
$\hat{r}, \check{r}$	Schätzer für $r$ bei unabhängigem Kantenversagen
$r, \varphi$	Polarkoordinaten <sup>2</sup>
$\vec{r}$	Vektor zur Quantifizierung der Unsymmetrie eines verzweigten Risses
$r_0$	Integrationslänge
$\sigma$	äußere Spannung (äquibiaxialer Zug)
$\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$	Spannungskomponenten
$v_{K_i}$	Verstärkungsfaktor für Kante $K_i$
$v_0, v_{\min}, m_v$	Parameter für Verstärkungsfunktion
$Y_A$	Geometriefunktion eines Risses
$\theta_1$	Rißverzweigungsgrad
$\theta_2$	Rechteckformparameter

## 1. Einleitung

Der vorliegende Bericht dokumentiert die im Rahmen eines gemeinsamen DFG-Projekts zwischen dem Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau (IZSM) der Universität Karlsruhe und dem Centrum für Mikromechanik Chemnitz (CMech) erhaltenen Ergebnisse zur stochastischen Schädigungsentwicklung bei Thermoermüdung.

Analoge Schädigungsentwicklungen werden in der Literatur in den Fällen reiner Ermüdung, des Kriechens sowie der Kriech- und Korrosionsermüdung untersucht.

Bei einachsigen äußeren Belastungen [2] [3] [4] bilden sich die Mikrorisse bevorzugt senkrecht zur Lastrichtung. Zur Quantifizierung der Schädigung werden Größen wie die Rißdichte und Rißlängenverteilung in Abhängigkeit der Lastzyklenzahl bestimmt. Auch werden anhand ausgewählter Risse Rißwachstumskurven ermittelt und mit denen des isolierten Makrorisses verglichen. Voraussetzung dafür ist, daß die Rißentwicklung an einer Probe im Versuch verfolgt werden kann. Zur Simulation der Rißentwicklung werden einfache Modelle entwickelt, die in der Regel Rißwachstumskurven beinhalten und damit einen Zusammenhang zwischen Schädigungszustand und Lastzyklenzahl liefern.

Zweiachsige Spannungszustände werden z.B. in [5] und [6] betrachtet. Junyi et al. [5] haben die Ausbildung der Rißmuster bei Überlagerung thermischer und mechanischer Wechselbelastung verfolgt und festgestellt, daß die Orientierung der Risse senkrecht zur maximalen Hauptspannung bzw. der damit verbundenen plastischen Dehnung verläuft. Hoshide et al. [6] geben ein Modell zur Simulation der Initiierung und des Wachstums von Mikrorissen bei zweiachsiger Ermüdungsbelastung an. Auf einem simulierten Gleitliniensystem erfolgt die Rißbildung schubspannungskontrolliert nach einem Modell von Tanaka und Mura [7]. Bei der Simulation des Rißwachstums werden Rißzusammenlagerung und zyklisches Wachstum eines dominanten Risses als konkurrierende Prozesse aufgefaßt.

Im Unterschied zu den genannten Arbeiten [2]-[7] wird im vorliegenden Projekt von einer zufälligen geometrischen Struktur von Schwachstellen ausgegangen. In die Modellierung des Rißwachstums werden bruchmechanische Überlegungen integriert. Dabei wird die Gesamtheit aller Risse des Rißmusters berücksichtigt. Zyklisches Rißwachstum und Zusammenlagerung können gleichzeitig stattfinden.

Am IZSM wurden ausgehend von früheren Thermoermüdungsversuchen das experimentelle Datenmaterial zusammengetragen und für eine Auswertung aufbereitet. Charakteristisch für das Schädigungsbild sind viele kleine, verzweigte Risse, die teilweise netzartige Rißmuster bilden. Verschiedene physikalische Modelle zur Schädigungsentwicklung wurden in ein vorhandenes Simulationsprogramm implementiert und damit die Simulationsrechnungen durchgeführt.

Am CMech wurden die experimentellen und simulierten Rißmuster statistisch ausgewertet und verglichen. Dazu wurden geeignete Methoden und Modelle der stochastischen Geometrie untersucht bzw. entwickelt, die ihrerseits wieder Eingang in den Simulationsalgorithmus gefunden haben.

Alle durchgeführten Untersuchungen und Ergebnisse fließen in den gemeinsamen Bericht ein. Dieser ist so gegliedert, daß zunächst in den folgenden drei Kapiteln die Grundlagen und Methoden hinsichtlich der Vorgehensweise, der Experimente und der Statistik zusammengestellt werden, danach die konkrete Modellierung beschrieben wird und schließlich Ergebnisse der statistischen Auswertung diskutiert werden.

Bei der Darstellung der Modellierung wurde eine Unterteilung in die Beschreibung des Simulationsalgorithmus (Kapitel 5) und des bruchmechanischen Modells (Kapitel 6) vorgenommen. Letzteres ist zwar Bestandteil des Simulationsprogramms, aber als selbständiger Teil über eine Schnittstelle eindeutig abgegrenzt.

Die statistische Auswertung erfolgt für die experimentellen Rißmuster (Kapitel 7) und für die mit dem Simulationsmodell erzeugten Rißmuster (Kapitel 8). Anhand des Vergleichs der Ergebnisse der statistischen Auswertungen wird eine Bewertung des Simulationsmodells vorgenommen.

Ergebnisse aus dem Zwischenbericht an die DFG [1] werden in diesem Abschlußbericht an geeigneten Stellen noch einmal verkürzt eingefügt, um eine zusammenhängende Darstellung des DFG-Projekts zu erreichen.

## 2. Problemstellung und grundsätzliche Überlegungen

In Bauteilen, die einer thermischen Wechselbelastung unterworfen werden, bilden sich stark inhomogene und zeitlich veränderliche Spannungsfelder. Die Folge ist Entstehung und Wachstum von Rissen, wodurch letztendlich Versagen ausgelöst werden kann. Liegen äußere Kerben am Bauteil vor, steht durch die damit verbundene Spannungskonzentration der Ort der Rißentstehung in der Regel fest. Die Lebensdauer wird durch die Wachstumsphase des von dieser Kerbe ausgehenden Risses bestimmt.

Dagegen kommt es an glatten Oberflächen zur Ausbildung typischer Rißmuster, die durch das Auftreten vieler kleiner verzweigter und unregelmäßig angeordneter Risse gekennzeichnet sind. Ort und Orientierung der Risse sind zufällig und werden außer von den vorliegenden Spannungsfeldern wesentlich von den Materialinhomogenitäten bestimmt. Die Streuung der Struktur des Materials bestimmt damit die anfängliche Rißbildung und Ausbreitung.

Mit steigender Anzahl von Lastzyklen wachsen die Risse sowohl entlang der Oberfläche als auch in die Tiefe. Dabei entstehen netzartige Strukturen, in deren Inneren weitere Risse initiiert werden. Verzweigtes Rißwachstum, Rißzusammenlagerung und Neuentstehung von Rissen sind in der Schädigungsentwicklung konkurrierende Prozesse, die gleichzeitig ablaufen. Die weitere Rißentwicklung wird zunehmend auch von den Wechselwirkungen der Risse untereinander bestimmt.

Bei reiner thermozyklischer Belastung ist die dargestellte Schädigung selten versagensauslösend. Trotzdem ist die richtige Modellierung der Rißentwicklung zur Berechnung der Lebensdauer wichtig, weil dadurch eine Vorschädigung des Materials erfolgt. Sind die gebildeten Risse groß genug, kann ein Bauteil bei überlagerter mechanischer Belastung durch instabiles Rißwachstum versagen.

Ziel des vorzustellenden Projektes ist die Erarbeitung eines stochastischen Rißwachstumsmodells, bei dem durch Simulation die Schädigungsentwicklung im Fall thermozyklisch belasteter glatter Oberflächen von Metallen beschrieben wird. Ausgangspunkt bilden experimentelle Untersuchungen aus einem früheren DFG-Vorhaben [8].

Zwei zentrale Fragestellungen ergeben sich aus dieser Zielstellung. Zum einen muß eine sinnvolle Vorschrift gefunden werden, nach der die Simulation abläuft. Zum anderen ist zu klären, anhand welcher statistischer Kenngrößen simulierte und experimentelle Rißbilder ausgewertet und verglichen werden. Dabei soll die Information aus den experimentellen Rißbildern möglichst vollständig verwertet werden. Sowohl für die Simulationsprozedur als auch für die statistische Auswertung liefert die stochastische Geometrie [11] [12] geeignete Methoden.

Das grundsätzliche Vorgehen besteht in folgendem: Man gibt sich die potentiellen Stellen für Rißentstehung durch eine geometrische Struktur vor. Aus dieser Struktur entsteht das Rißmuster nach bestimmten Modellen. Die verschiedenen Stadien der Schädigungsentwicklung werden durch eine bruchmechanische Beschreibung von Rißwachstum und Rißwechselwirkung modelliert. Zufällige Einflüsse auf die Schädigungsentwicklung, z.B. durch eine lokal inhomogene Mikrostruktur des Werkstoffs, werden durch belastungsabhängige Versagenswahrscheinlichkeiten beschrieben.

Das Modell für die Simulation der Schädigungsentwicklung besteht aus den Komponenten "Simulation der zufälligen Struktur potentieller Stellen und Pfade des Versagens", "Bruchmechanische Ermittlung der Belastungsgröße an potentiellen Stellen des Versagens" und "Simulation des zufälligen, belastungsabhängigen lokalen Versagens". Simulation wird in diesem Projekt immer im statistischen Sinne verstanden, d.h. die Untersuchung erfolgt unter Einbeziehung von Zufallsexperimenten, im konkreten Fall bei der Ermittlung der Struktur potentieller Stellen des Versagens sowie bei der Ermittlung des belastungsabhängigen, aber nicht deterministischen lokalen Versagens.

Die simulierten Rißmuster werden statistisch ausgewertet und mit den experimentellen Oberflächenaufnahmen verglichen. Um systematische Fehler auszuschließen, ist es notwendig, daß simulierte und experimentelle Rißmuster durch gleiche geometrische Gebilde beschrieben und durch gleiche statistische Kenngrößen charakterisiert werden. Die Kenngrößen sollen die in den Rißmustern enthaltene Information zur Schädigungsentwicklung maximal ausnutzen. Es muß untersucht werden, welche Kenngrößen hierfür am besten geeignet sind.

Wechselwirkungen zwischen den Rissen werden in der Simulation durch die verwendeten Modelle berücksichtigt. Aus dem Vergleich simulierter und experimenteller Rißmuster sollen hierfür sinnvolle Annahmen gefunden werden. Daneben treten allgemein im Modell eine Reihe Parameter auf, deren Einflüsse auf das simulierte Rißmuster anhand statistischer Kenngrößen untersucht werden muß. Es ist zu prüfen, welche Kenngrößen die aus den unterschiedlichen Modellen bzw. Modellparametern resultierenden Unterschiede in den Rißmustern am besten erfassen und ob die Ergebnisse der Simulation in Einklang mit den experimentellen Ergebnissen stehen.

### 3. Experimente

Im Rahmen eines früheren DFG-Vorhabens Mu466-12 [8] wurden u.a. Experimente zur Thermoermüdung an glatten Oberflächen mit dem Ziel der Übertragbarkeit der bruchmechanischen Beschreibung des Rißwachstums auf die thermozyklische Belastung durchgeführt.

Der prinzipielle Ablauf der thermozyklischen Belastungsversuche ist in Abb. 3.1 dargestellt.

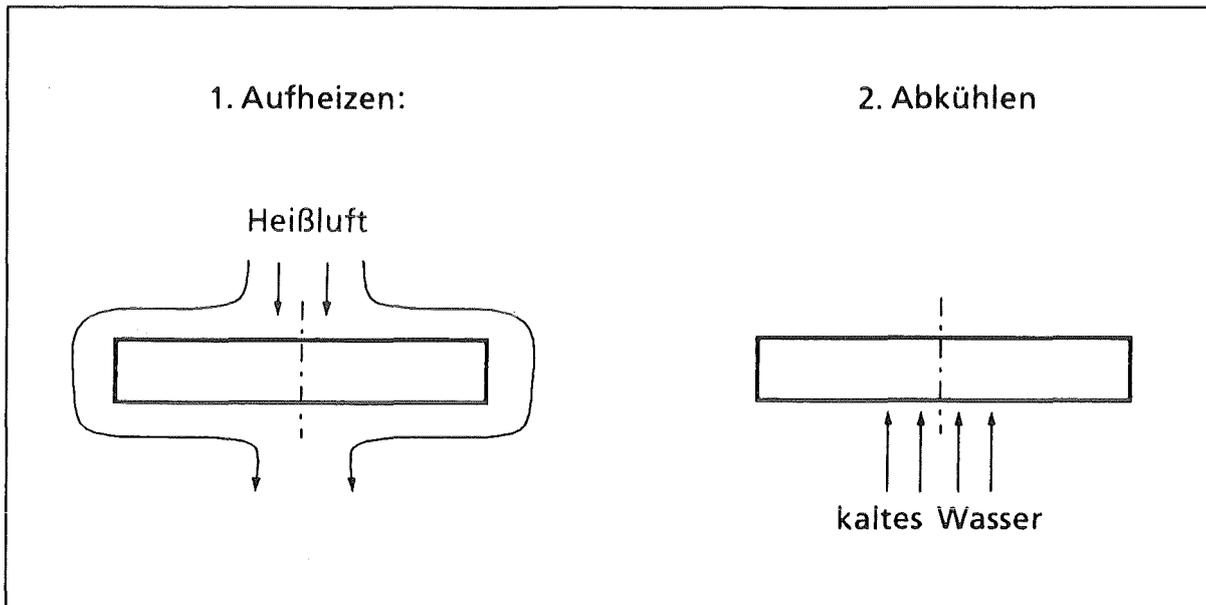


Abb. 3.1: Prinzipieller Ablauf der thermozyklischen Belastungsversuche.

Kreisförmige Proben ( Durchmesser 15 cm, Dicke 2 cm) aus dem austenitischen Stahl 1.4948 wurden im Heißluftgebläse 2 bis 4 Minuten lang erwärmt, bis sie eine homogene Temperatur von 410°C hatten. Anschließend wurde die Probe an der Unterseite innerhalb eines vorgegebenen Spritzwasserflecks von 30 mm Durchmesser mit kaltem Wasser auf eine Temperatur von 17°C abgeschreckt. Die Abkühlphase dauerte etwa 5 Sekunden. Das Aufheizen und Abkühlen stellt ein Belastungszyklus dar, der wiederholt aufgebracht wurde. Die Lastwechselzahlen lagen zwischen 500 und 15000.

Jede Probe wurde nach einer bestimmten Lastzyklenzahl ausgespannt. Nach dem Entfernen einer an der Unterseite gebildeten Oxidschicht durch Abschleifen konnten die Oberflächenrißmuster fotografiert werden. In Tabelle 3.1 sind die vorhandenen Fotos zusammengestellt. Aufgrund des Abschleifens war eine Fortsetzung des Versuchs nicht sinnvoll, so daß ein Verfolgen der Rißentwicklung ein und derselben Probe mit steigender Lastzyklenzahl nicht möglich war.

Als Beispiel eines typischen Oberflächenrißmusters ist in Abb. 3.2 auf der linken Seite eine Aufnahme nach 4500 Lastzyklen gezeigt. Die zufällige Anordnung der Risse in der Größenordnung einiger 100 µm ist gut zu erkennen. Metallographische Untersuchungen haben gezeigt, daß die Risse sowohl entlang der Korngrenzen als auch durch die Körner wachsen.

Im Rahmen des DFG-Projektes Mu466-12 wurde die Spannungsverteilung in der Probe mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) untersucht [9]. Zunächst ergab eine elastische Rechnung, daß die größten Spannungen in Form eines äquibiaxialen Spannungszustandes an der Oberfläche der Probe vorlagen und die Fließspannung des Stahls bei Raumtemperatur von 231 MPa überstiegen.

Deshalb wurde eine elastisch-plastische Spannungsanalyse auf der Basis des ORNL-Modells [10], bei dem die Spannungs-Dehnungs-Kurve durch einen bilinearen Verlauf approximiert wird, durchgeführt. Danach tritt im ersten Belastungszyklus plastisches Fließen nahe der Oberfläche sowohl während der Kühlphase im Zugbereich als auch während der Aufheizphase im Druckbereich auf. Ab dem zweiten Belastungszyklus stellen sich für die weiteren Zyklen jeweils gleiche zeitabhängige Spannungsverläufe ein. Daraus wird gefolgert, daß sich der Werkstoff in den folgenden Zyklen rein elastisch verhält.

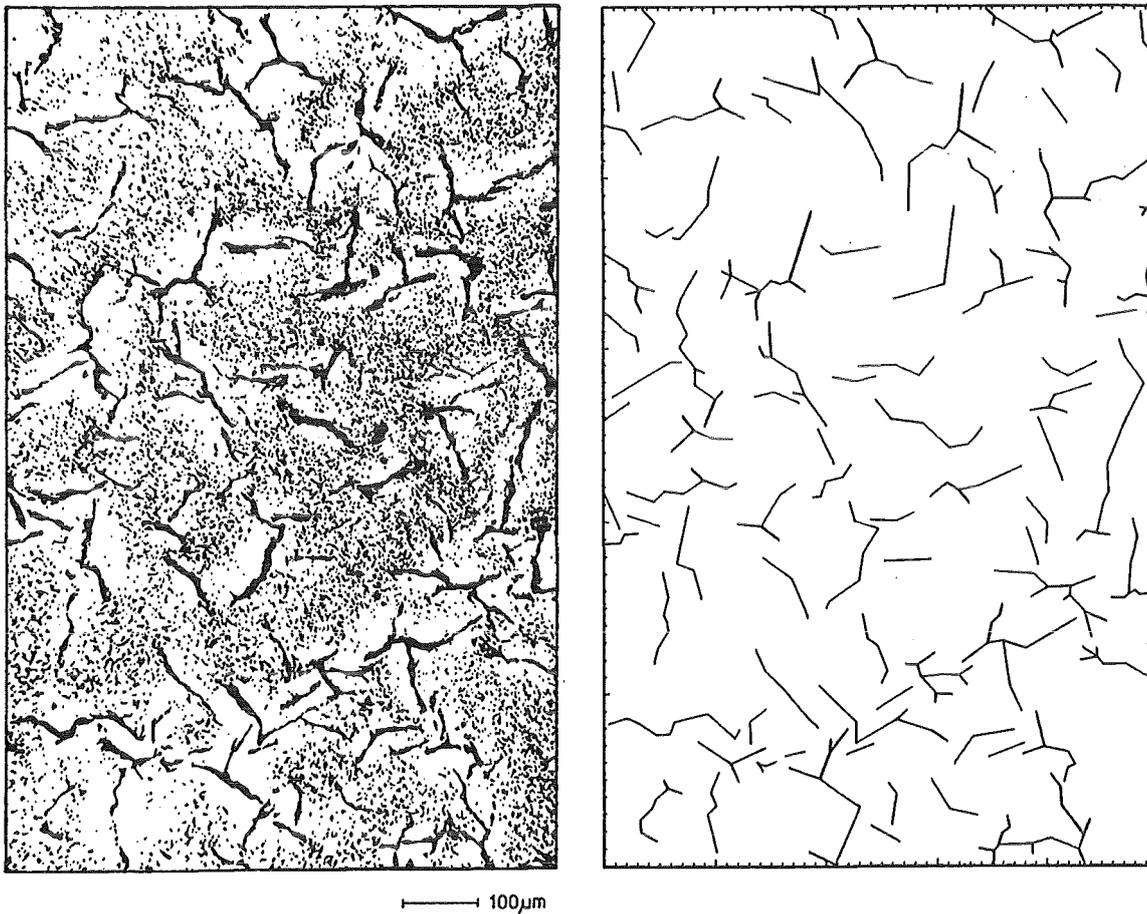
Im DFG-Projekt Mu466-12 wurde das Rißwachstumsverhalten ausgewählter Einzelrisse unter Thermoermüdung an vorhandenen Rissen und an glatten Oberflächen untersucht. Die an glatten Oberflächen sich ergebenden Oberflächenrißmuster enthalten jedoch mehr Informationen zur Schädigungsentwicklung als in dem Projekt berücksichtigt wurden. Diese Informationen sollen im vorliegenden Vorhaben ausgenutzt werden.

Ort der Aufnahme	Lastzyklenzahl						
	2500	3500	4500	5500	6500	7500	11000
Probenmitte	3	3	3	3	3	3	3
6-8 mm vom Zentrum	3	-	3	3	3	3	3
10-12 mm vom Zentrum	3	-	3	3	3	3	3

**Tab.3.1: Zusammenstellung der vorhandenen Oberflächenaufnahmen aus den thermozyklischen Belastungsversuchen**

Die erhaltenen Oberflächenrißbilder verschiedener Proben mit unterschiedlichen Lastzyklenzahlen bilden die wichtigste Datenbasis zur Erstellung des stochastischen Rißwachstumsmodells. Für eine statistische Auswertung wurden die fotografischen Rißmuster manuell digitalisiert. Dabei wurden die Risse durch stückweise gerade Linienzüge approximiert und die End-, Knick- und Verzweigungspunkte im Rechner abgespeichert. In Abb. 3.2 ist auf der rechten Seite das zu der Oberflächenaufnahme gehörende digitalisierte Rißbild gezeigt. Auf den Einfluß dieses Digitalisierungsverfahrens auf statistische Merkmale der Rißmuster wird im Kapitel 7 eingegangen.

Neben der Aufnahme der Oberfläche sind horizontale Schnitte durch die Probe zur Erfassung der räumlichen Rißgeometrie in gleicher Weise digitalisiert worden, worauf ebenfalls im Kapitel 7 eingegangen wird.



**Abb. 3.2: Oberflächenaufnahme und digitalisiertes Rißbild nach 4500 Lastzyklen.**

## 4. Modelle und Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Rißmuster

### 4.1 Vorbemerkungen

Die Bilder der Schädigungen der Probenoberfläche, aufgenommen unter gleichen Versuchsbedingungen nach der gleichen Anzahl von Lastzyklen, zeigen, daß die Ausbildung eines Rißmusters ein *zufälliger* Vorgang ist. Im folgenden wird das entstehende zufällige ebene geometrische Muster analysiert. Dabei werden mehrere Zielstellungen verfolgt:

- Erstens geht es um die geeignete Charakterisierung und Quantifizierung der wachsenden Schädigung. Dabei ist die Überlagerung durch Zufallseinflüsse zu berücksichtigen.
- Zweitens sind die Modelle zur Beschreibung der entstehenden geometrischen Schädigungsstrukturen zu bewerten. Diese geometrischen Modelle bilden in Verbindung mit einer physikalischen Modellierung die Grundlage für eine Simulation des Schädigungsvorgangs.
- Drittens sind Kriterien herauszuarbeiten, wie anhand des Vergleichs von experimentell beobachteten und simulierten Rißmustern die Güte des entwickelten Simulationsmodells beurteilt werden kann.

Die Charakterisierung der zufälligen Oberflächenrißmuster erfordert die Ermittlung von *statistischen* Kenngrößen der Bilder. Aufgrund der festgestellten Vielfalt und der komplizierten Struktur der Muster ist nicht von vornherein klar, welche Kenngrößen dafür geeignet sind. Notwendig sind solche Kenngrößen, die

- die in den Bildern enthaltene Information zur Schädigungsentwicklung maximal berücksichtigen,
- einen Vergleich zwischen experimentell erhaltenen und simulierten Bildern ermöglichen und
- die Unterschiede zwischen unterschiedlichen Bildern erfassen.

Die Stochastische Geometrie, ein Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik, beschäftigt sich mit der Charakterisierung zufälliger geometrischer Strukturen [11] [12].

Aus der Vielzahl ihrer Teilgebiete waren solche Modelle und Methoden auszuwählen, die die spezifische Struktur der Werkstoffschädigung gut erfassen. Dazu ist es notwendig, die geometrische Struktur zu klassifizieren. Eine solche geometrische Klassifizierung ist aber nur in Verbindung mit einer physikalischen Modellierung sinnvoll, wenn als Zielstellung ein Simulationsmodell für den Schädigungsprozeß entwickelt werden soll. Mit unterschiedlichen Ebenen der physikalischen Modellierung des Schädigungsmechanismus sind unterschiedliche geometrische Klassifizierungen der Strukturen verbunden. Neben einer Charakterisierung der Rißmuster auf der Probenoberfläche durch eine einfache Rißstatistik wurden folgende ebene Strukturen untersucht:

- Faserprozeß,
- Mosaik mit versagten Kanten,
- Mosaik mit unabhängig versagten Kanten,

Die statistischen Kenngrößen der Modelle dienen nicht nur zur Charakterisierung der Rißmuster an sich, sondern gleichermaßen zur Überprüfung der Berechtigung der Modellannahmen. Diese Überprüfung anhand des Vergleichs ermittelter Kenngrößen kann zum einen bei den experimentell beobachteten Rißmustern durch mehrere, im Modell konsistente Kenngrößen erfolgen. Zum anderen kann sie zwischen experimentell beobachteten und simulierten Rißmustern vorgenommen werden.

Die erwähnten Modelle berücksichtigen spezifische Eigenschaften der Muster in unterschiedlich starkem Maße. Während mit der einfachen Rißstatistik Größe und Anzahl von relativ beliebigen zufälligen Objekten ermittelt werden können, beruht das Modell des Faserprozesses auf der linienförmigen Struktur der Muster. Die mit Mosaiken in Zusammenhang stehenden Modelle für die Schädigung berücksichtigen noch weitere charakteristische Eigenschaften der beobachteten Rißmuster. Der schrittweise Aufbau von immer ausgereifteren Modellen dient zur Entwicklung, Überprüfung und Verbesserung des bruchmechanischen Simulationsmodells für den Schädigungsprozeß.

In gleichem Maße wie bei der Modellentwicklung erfolgt auf der Seite der statistischen Auswertung ein schrittweiser Lernprozeß über die Eignung und die Aussagekraft der Kenngrößen bzw. die Notwendigkeit der Einführung zusätzlicher Kenngrößen. Mit wachsender Spezifik der Modelle verbunden ist der Übergang von "einfacheren" statistischen Kenngrößen, die globale Eigenschaften der Schädigung gut erfassen, hin zu komplizierteren Kenngrößen, die auch die lokale Verteilung beschreiben.

Die geometrischen Kenngrößen lassen sich jeweils in zwei Gruppen einteilen:

- Bildbezogene Kenngrößen gemessen in "Maßeinheit (z.B. Länge, Anzahl) pro Flächeneinheit"
- Objektbezogene, d.h. rißbezogene, Kenngrößen ermittelt an der Gesamtheit aller Risse des Musters.

Dargestellt werden können sowohl der mittlere Wert als auch die empirische Verteilung der Kenngröße.

In den folgenden Abschnitten 4.2 und 4.3 werden die Modelle der Stochastischen Geometrie beschrieben. Zu den Modellen werden zugehörige, speziell für die Charakterisierung der Rißmuster ausgewählte, Kenngrößen bereitgestellt und deren statistische Eigenschaften diskutiert. Ein zusammenfassender Überblick über die verwendeten Kenngrößen wird im Abschnitt 4.4 gegeben. Neben der Charakterisierung der Rißmuster auf der Probenoberfläche werden im Kapitel 4.5 die Untersuchungen zur räumlichen Ausdehnung der Risse in die Tiefe erläutert.

## **4.2 Beschreibung der Oberflächenrißmuster durch modellunabhängige statistische Kenngrößen**

### **4.2.1 Beschreibung der Rißmuster durch einfache Rißstatistik**

Bei der Bestimmung von Kenngrößen einer einfachen Rißstatistik sind keine zusätzlichen Modellannahmen nötig. Man registriert die Anzahl der Risse und ihre Größe. Bestimmt werden neben der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Größen Schätzungen für den Erwartungswert und die Varianz.

Unter der Kenngröße "Länge eines Einzelrisses" wird zunächst die gesamte Länge des in der Regel verzweigten Risses verstanden. Weitere geometrische Definitionen einer in speziellem Sinne "effektiven Länge eines Einzelrisses" werden im Zusammenhang mit der bruchmechanischen Modellierung des Rißwachstums im Abschnitt 6.2 diskutiert.

Zusätzliche Kenngrößen sind die "Anzahl der Risse pro Flächeneinheit" und die "Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit". Während die Gesamtlänge aller Risse die globale Schädigung beschreibt, liefern die beiden anderen Kenngrößen zusätzliche Aussagen darüber, ob diese Schädigung bevorzugt durch das Entstehen neuer Risse oder aber durch das Wachstum bereits vorhandener Risse eintritt.

In die Kenngrößen der einfachen Rißstatistik gehen alle Risse unabhängig von ihrer Lage im Bild ein. Zur Erfassung des Einflusses zwischen benachbarten Rissen sind weitere Kenngrößen nötig, die in den folgenden Abschnitten definiert werden.

### **4.2.2 Beschreibung der Rißmuster durch das Modell eines Faserprozesses**

Unter einem Faserprozeß versteht man ein zufälliges System aus endlich vielen, hinreichend glatten Kurvenstücken [11], [12]. In einer ersten Stufe der Modellierung wird das Rißmuster als ein spezieller ebener Faserprozeß, und zwar als ein System von Linienabschnitten in der Ebene, aufgefaßt. Die Mikrorisse werden als gerade Linien mit zufälliger Länge, Orientierung und Mittelpunkt modelliert. Risse ergeben sich in dem Modell als stückweise gerade Linienzüge. Dieses Modell muß für den speziellen Anwendungsfall durch zusätzliche Annahmen ergänzt werden, z.B. ist das Überschneiden von Linien auszuschließen [13].

Falls der Faserprozeß isotrop ist, kann die statistische Charakterisierung vereinfacht werden durch die Betrachtung allein der Schnittpunkte zwischen Faserprozeß und einer in das Bild gelegten Testlinie (Linienschnittmethode).

Aus der Anzahl  $N_L$  der Schnittpunkte pro Längeneinheit zwischen Faserprozeß und Testlinie kann die Gesamtlänge  $l_A$  aller Risse pro Flächeneinheit geschätzt werden

$$l_A = \frac{\pi}{2} N_L. \quad (4.1)$$

Bestimmte Aspekte der Irregularität des Rißmusters, nämlich die gehäuft, clusterförmig, auftretenden Schädigungen, können -neben anderen möglichen Ansätzen- ausgehend von den Sehnenlängen, d.h. den Abständen der Schnittpunkte auf einer Testlinie, charakterisiert werden. Der Grundgedanke der gewählten Herangehensweise lautet: Der vorliegende Faserprozeß wird mit dem Referenzmodell eines Booleschen Segmentprozesses bzw. Poissonschen Geradenprozesses verglichen. Dieser Prozeß ist rein zufällig und ergibt ein regelloses Muster. Der Prozeß weist gleichzeitig ein charakteristisches Verhältnis zwischen Standardabweichung und Mittelwert der Sehnenlängen auf. Man bestimmt deshalb das Verhältnis von Standardabweichung und Mittelwert der Sehnenlängen für den vorliegenden Faserprozeß und vergleicht den erhaltenen Wert mit dem des Referenzprozesses.

Ein Poissonscher Geradenprozeß kann folgendermaßen veranschaulicht werden: Dem Geradenprozeß liegt ein homogener Poissonscher Punktprozeß zugrunde. Die Punkte sind "rein zufällig" im Bild verstreut, d.h. ihre Koordinaten sind gleichverteilte Zufallszahlen. Jeder Punkt ist Mittelpunkt einer Strecke mit zufälliger Länge und zufälliger Orientierung. Bekannt ist ([11][12]): Die Verteilung der Sehnenlängen, d.h. der Abstände der Schnittpunkte zwischen Poissonschem Geradenprozeß und einer Testlinie, ist die Exponentialverteilung mit der Verteilungsfunktion  $F(x)$ :

$$F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\} \quad \text{mit Erwartungswert } \frac{1}{\lambda} \quad \text{und Standardabweichung } \frac{1}{\lambda} .$$

Man bestimmt zum Vergleich den Variationskoeffizienten *var* der Schnittpunktabstände des zu charakterisierenden Faserprozesses, d.h. den Quotienten aus empirischer Standardabweichung und Mittelwert. Es gilt:

- $var = 1$  für ein ähnlich "regelloses", "rein zufälliges" Muster wie den Vergleichsprozeß,
- $var < 1$  für einen regelmäßigeren Prozeß als den Vergleichsprozeß (im Extremfall z.B. einen Gitterprozeß),
- $var > 1$  für einen anders geordneten regelmäßigeren Prozeß mit Tendenz zur Clusterung.

Je kleiner der Variationskoeffizient der Schnittpunktabstände, desto größer ist die Tendenz zur Regelmäßigkeit. Bei Werten oberhalb von Eins drückt die Zunahme der Kenngröße die zunehmende Tendenz zur periodischen Häufung aus.

Eine weitere aus den Abständen zwischen den Schnittpunkten hergeleitete Größe, die Paarkorrelationsfunktion, beschreibt die Häufigkeit der Abstände sowie ein gewisses bevorzugtes oder gemiedenes Auftreten von benachbarten Abständen. Damit charakterisiert sie ebenfalls Aspekte der Regularität des Rißmusters. In die Kenngröße gehen nicht nur die Schnittpunktabstände selbst ein (wie beim Variationskoeffizient), sondern auch die Reihenfolge dieser Abstände, d.h. es wird z.B. auch erfaßt, ob kleinere Abstände gehäuft oder gleichmäßig abwechselnd mit größeren auftreten. Zur (vergleichsweise etwas komplizierteren) Schätzung der Paarkorrelationsfunktion sind Kernschätzer verfügbar [11] [12].

### ***4.3 Beschreibung der Rißmuster durch auf dem Mosaik-Modell basierende Kenngrößen***

#### **4.3.1 Beschreibung der Rißmuster durch das Modell eines Mosaiks mit versagten Kanten**

Unter einem ebenen Mosaik versteht man eine Zerlegung der Ebene in Polygone, die sogenannten Zellen. Diese Zellen sind voneinander durch Linien, die als Kanten bezeichnet werden, getrennt. Die Punkte, in denen die Kanten zusammenstoßen, heißen Knoten [11] [12]. Die Ausbildung eines Rißmusters legt die Annahme einer zugrundeliegenden mosaikartigen Struktur von Schwachstellen im Werkstoff nahe. Es wird angenommen:

- Die Struktur der Schwachstellen kann durch ein ebenes Mosaik beschrieben werden. Die Kanten des Mosaiks sind Kandidaten für die Entstehung eines Mikrorisses oder für das Wachstum eines Einzelrisses. Kanten versagen, wenn überhaupt, vollständig. Das Rißmuster ist die Teilmenge der versagten Kanten des Mosaiks.
- Es liegt ein spezielles ebenes Mosaik vor, und zwar ein sogenanntes DIRICHLET-Mosaik (in der Literatur auch teilweise als ebenes POISSON-VORONOI-Mosaik bezeichnet) [11] [12]. Zum einen ermöglicht diese Annahme, den Aufwand bei der Simulation der zufälligen Schwachstellenstruktur in vertretbarem Rahmen zu halten, zum anderen können eine ganze Reihe von Werkstoffstrukturen erfahrungsgemäß hinreichend gut durch solch ein spezielles Mosaik beschrieben werden.
- Das Versagen einer Kante ist zufällig, die Versagenswahrscheinlichkeit wird aber von der Umgebung der Kante beeinflusst. Mehrere mögliche Ansätze für die Versagenswahrscheinlichkeit werden im Kapitel 6 sowie im Abschnitt 4.3.2 diskutiert.

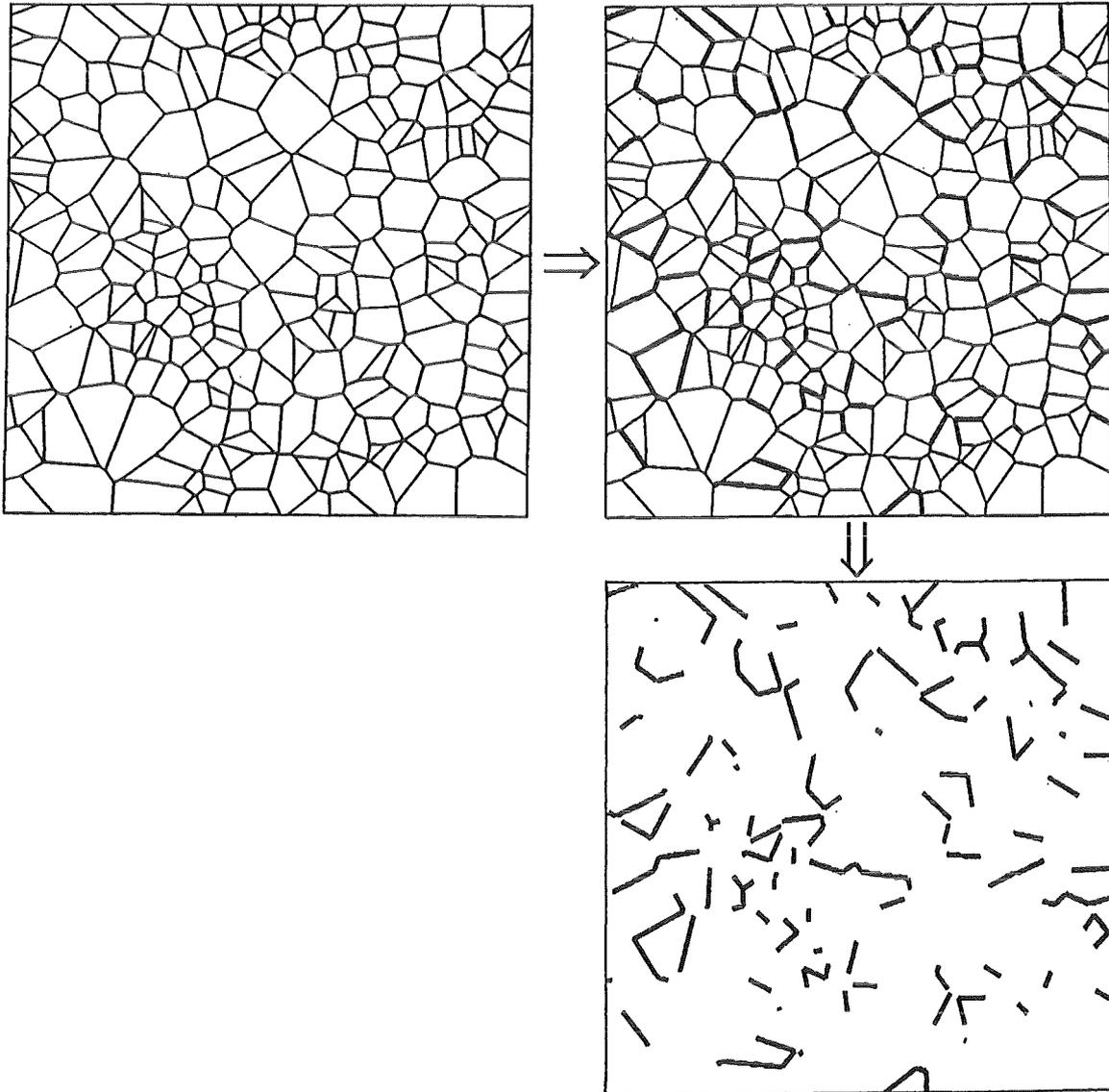
Anschaulich heißt die Annahme eines DIRICHLET-Mosaiks: Dem Mosaik liegt ein homogener Poissonscher Punktprozeß von Keimpunkten zugrunde. Jedem Keim ist eineindeutig eine Zelle des Mosaiks zugeordnet. Die Keime sind "rein zufällig" im Bild verstreut, d.h. ihre Koordinaten sind gleichverteilte Zufallszahlen. Jeder Knoten des zugehörigen Mosaiks hat dann mit Wahrscheinlichkeit 1 genau drei Kanten [11] [12]. Das DIRICHLET-Mosaik ist durch die Angabe der "Punktprozeß-Intensität", d.h. der mittleren Anzahl von Keimpunkten pro Flächeneinheit, vollständig festgelegt. Die Punktprozeß-Intensität ist gleich der mittleren Anzahl von Zellen pro Flächeneinheit.

Aus der Punktprozeß-Intensität lassen sich weitere statistische Kenngrößen eines DIRICHLET-Mosaiks ableiten, die eine anschauliche Bedeutung haben und die zur Anpassung eines Mosaiks an ein vorliegendes Rißmuster verwendet werden können. Das sind:

- die "mittlere Zellfläche des Mosaiks",
- die "mittlere Länge einer Kante des Mosaiks"
- die "mittlere Anzahl von Kanten pro Flächeneinheit des Mosaik".

## Zusammenhang von Mosaik und Rißmuster

Ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen einem Mosaik und einem Rißmuster wird im Abb. 4.1 gegeben. Im Bild oben links ist ein zufälliges Mosaik dargestellt. Zufällig ausgewählte Kanten, die für versagte Kanten stehen, sind im Bild oben rechts hervorgehoben. Das Rißmuster ergibt sich aus der Menge der versagten Kanten (Bild unten).



**Abb. 4.1:** Zusammenhang zwischen einem Mosaik mit versagten Kanten und einem Rißmuster. Oben links: Realisierung eines zufälligen DIRICHLET-Mosaiks, oben rechts: Realisierung des Versagens von Kanten, unten rechts: Realisierung des Rißmusters.

In Abb. 4.1 ist dargestellt, wie sich aus einem Mosaik durch das Versagen von Kanten ein Rißmuster ergibt. Im folgenden wird die umgekehrte, für die Auswertung der Experimente wichtige Fragestellung diskutiert, wie sich aus einem Rißmuster ein zugehöriges DIRICHLET-Mosaik konstruieren läßt. Dabei interessieren an dieser Stelle nicht die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Zuordnung, sondern es sollen unter Einbeziehung weiterer,

physikalisch sinnvoller Annahmen spezielle DIRICHLET-Mosaik angepasst werden. Dabei geht es nicht um die Realisierung des Mosaiks, sondern die Anpassung soll in dem Sinne erfolgen, daß das konstruierte Mosaik in bestimmten statistischen Kenngrößen mit denen des Rißmusters übereinstimmt (z.B. die gleiche mittlere Kantenlänge aufweist). Gleichzeitig ist anhand geeigneter statistischer Kriterien zu prüfen, ob ein vorliegendes Rißmuster mit den getroffenen Annahmen zum zufälligen Mosaik und zum Versagensmechanismus in Einklang steht.

Eine einfache Möglichkeit, zu einem vorgegebenen Rißmuster ein zugehöriges Mosaik zu konstruieren, beruht auf folgender Annahme:

Die Verteilung der Länge der ausgefallenen Kanten ist die gleiche wie die aller Kanten des Mosaiks. Diese Annahme ist erfüllt, wenn die Versagenswahrscheinlichkeit nicht von der Kantenlänge abhängt. Unter der Annahme kann die Punktprozeß-Intensität  $r$  des DIRICHLET-Mosaiks sowohl aus dem Mittelwert  $\mu$  als auch aus der Streuung  $\sigma^2$  der Länge der ausgefallenen Kanten geschätzt werden. Nach [11] und [14] hat man die beiden Schätzer

$$\tilde{r} = \frac{4}{9\mu^2} \quad (4.2)$$

und

$$r^* = \frac{0.1856}{\sigma^2} \quad (4.3)$$

Bei einem DIRICHLET-Mosaik sind beide Schätzungen konsistent. Ein Vergleich beider Schätzwerte am gleichen Rißmuster kann deshalb zur Prüfung des geometrischen Modells verwendet werden.

Unter der oben getroffenen Annahme gleicher Kantenlängenverteilungen von Rißmuster und DIRICHLET-Mosaik können noch weitere Mosaik-Kenngrößen geschätzt werden. Die Schätzer beruhen auf Eigenschaften des DIRICHLET-Mosaiks. So erhält man den Schätzer  $\tilde{a}$  für die mittlere Zellfläche aus der mittleren Kantenlänge  $\mu$

$$\tilde{a} = \frac{9}{4}\mu^2 \quad (4.4)$$

Ein Schätzer  $\tilde{N}_K$  für die mittlere Anzahl  $N_K$  von Kanten des Mosaiks pro Flächeneinheit kann aus der Mittelwertformel (4.5) ([11]) hergeleitet werden:

$$N_K = 3r \quad (4.5)$$

Unter Verwendung von Formel (4.2) erhält man den Schätzer

$$\tilde{N}_K = \frac{4}{3\mu^2} \quad (4.6)$$

Die mittlere Sehnenlänge  $l$  des DIRICHLET-Mosaiks, die physikalisch den mittleren Korndurchmesser der Struktur beschreibt, kann ebenfalls aus der mittleren Kantenlänge geschätzt werden [11]:

$$\tilde{l} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\mu} \quad (4.7)$$

## Rißmorphologie

Die Risse eines Rißmusters sollen in ihrer Form beschrieben werden. Ziel der Untersuchung ist es, die Risse trotz der Vielfalt der Rißformen zu charakterisieren, möglicherweise auch zu klassifizieren, und Formänderungen der Risse beim Vergleich verschiedener Rißmuster zu erfassen. Für verästelte Rißmuster gibt es in der Fachliteratur keine feststehenden geometrischen Parameter. Deshalb werden in Anlehnung an optische Eindrücke verschiedene Parameter zur Beschreibung der Rißform eingeführt, die unterschiedliche Aspekte der Form eines verzweigten Risses beschreiben. Größenunterschiede der Risse sollen in diesem Zusammenhang dagegen eliminiert werden.

Es ist nicht von vornherein klar, welche Kenngrößen welche Aussagen stützen. Anhand der Untersuchung konkreter Rißmuster muß geprüft werden, ob die Kenngrößen optische Eindrücke von Rißmustern mit unterschiedlichen Rißformen auch so wiedergeben und wie sich die fortschreitende Schädigungsentwicklung in einer Veränderung der Kenngrößen widerspiegelt. Als Rißformparameter werden verwendet:

- der Verzweigungsgrad  $\theta_1$  und
- der Rechteckformparameter  $\theta_2$ .

Der Rißverzweigungsgrad  $\theta_1$  soll den Grad der Verästelung eines Risses charakterisieren. Er wird definiert als

$$\theta_1 = 2 \cdot \frac{\text{Anzahl der Verzweigungen des Risses}}{\text{Anzahl der Kanten des Risses}} \quad (4.8)$$

Es gilt:  $0 \leq \theta_1 < 1$ ,

wobei  $\theta_1 = 0$ , falls der Riss keine Verzweigung hat

und  $\theta_1 \rightarrow 1$ , falls der Riss keine Knickpunkte, sondern nur Verzweigungen hat.

Der Rechteckformparameter  $\theta_2$  soll charakterisieren, ob der Riss mehr langgestreckt oder mehr kompakt ist. Dazu wird die konvexe Hülle aller Knotenpunkte des Risses konstruiert. Die Fläche der konvexen Hülle überdeckt den Riß vollständig. Die Form der konvexen Hülle soll dahingehend charakterisiert werden, ob sie mehr einem Quadrat oder mehr einem langgestreckten Rechteck ähnelt. Der Rechteckformparameter  $\theta_2$  wird im einzelnen folgendermaßen ermittelt:

1. Man konstruiert die konvexe Hülle aller Knoten des Risses.
2. Für jede Außenkante der konvexen Hülle erfolgt die Konstruktion einer Überdeckung der konvexen Hülle durch ein Rechteck, dessen Grundseite auf dieser Außenkante liegt. Es wird der Quotient von kürzerer zu längerer Rechteckseite bestimmt.
3. Der Rechteckformparameter  $\theta_2$  des Risses wird als kleinster Quotient aus allen solchen Rechtecküberdeckungen des Risses ermittelt.

$$\theta_2 = \min_i \left\{ \frac{\text{kürzere Seite}}{\text{längere Seite}} \text{ der } i\text{-ten Rechtecküberdeckung der konvexen Hülle} \right\} \quad (4.9)$$

Es gilt:  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ ,

wobei  $\theta_2 \rightarrow 0$ , falls der Riss sehr langgestreckt und wenig gekrümmt ist

und  $\theta_2 \rightarrow 1$ , falls der Riss sich in der Ebene in alle Richtungen etwa gleich weit ausdehnt.

Eine Sonderstellung bei der Charakterisierung der Rißform nehmen diejenigen Risse ein, die nur aus einer einzigen Kante bestehen. Bei der Bestimmung der Mittelwerte von Formparametern kann eine größere Anzahl von isolierten Rissen möglicherweise das Ergebnis deutlich beeinflussen hin zu kleineren Werten, während die Form bzw. Formänderung der anderen, größeren Risse sich weniger auswirkt. Deshalb ist es erforderlich, auch Verteilungen von Rißformparametern zu bestimmen oder zumindest den Einfluß der isolierten Risse abzuschätzen. Dazu erfolgt ein Vergleich der Mittelwerte für das Muster unter Einbeziehung einerseits bzw. unter Ausschluß der isolierten Kanten andererseits.

Neben der Charakterisierung der Form des Rißmusters über die Ermittlung von Formkenngrößen für die Risse sollen auch auf das gesamte Bild bezogene Formkenngrößen ermittelt werden.

So ist die gegenseitige Lage von benachbarten Kanten des Mosaiks von Bedeutung für die Charakterisierung eines Mosaiks. Sie wird durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung des sogenannten typischen Winkels zwischen zwei benachbarten Kanten beschrieben [10] [11]. Da sich die drei in Frage kommenden Winkel an einem Knoten zu  $360^\circ$  ergänzen, wird bei der Schätzung der Verteilung an jedem Knoten zufällig einer der drei Winkel zwischen den Kanten ausgewählt. Bei einem DIRICHLET-Mosaik hat die Dichtefunktion des Winkels die Form

$$f(\alpha) = \frac{4 \sin \alpha}{3} \cdot (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha) \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (4.10)$$

mit einem Maximum bei  $0,72 \pi$  (ca.  $130^\circ$ ), der Erwartungswert ist  $\frac{2}{3} \pi$  [12].

Zum Vergleich wird die gegenseitige Lage von benachbarten Kanten des Rißmusters, also von benachbarten *versagten* Kanten des Mosaiks, untersucht. Dabei ist zunächst zu unterscheiden zwischen den eingeschlossenen Winkeln an Verzweigungen (alle drei benachbarten Kanten sind versagt) und denen an Knickpunkten (also zwischen zwei versagten Kanten). Im letzteren Fall ist nur einer der drei Winkel "sichtbar". Wenn die gegenseitige Lage von benachbarten potentiellen Kandidaten für das weitere Versagen von Kanten keinen Einfluß auf die Versagenswahrscheinlichkeit hat, dann sollten jedoch beide Verteilungen untereinander sowie mit der Verteilung beim zugrundeliegenden Mosaik übereinstimmen.

### 4.3.2 Beschreibung der Rißmuster durch den Spezialfall eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten

Bisher wurden, abgesehen von der Kantenlängenunabhängigkeit, keine weiteren Annahmen über die Versagenswahrscheinlichkeit der Kanten gemacht. In diesem Abschnitt wird das Modell eines Mosaiks mit zugehörigem speziellem Mechanismus des Kantenversagens an das Rißmuster angepaßt. Durch die Festlegung eines physikalisch begründbaren Versagensmechanismus ist dann auch die Simulation des Schädigungsvorgangs möglich, die im Kapitel 5 behandelt wird. Vorher werden jedoch das Modell selbst und die Vorgehensweise zur Schätzung von Kenngrößen des Mosaiks und von Parametern des Versagensmechanismus beschrieben.

Es wird angenommen, daß alle Kanten des Mosaiks unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $p$  versagen. Für diese Modellannahme gibt es mehrere Gründe:

- Das Modell beschreibt Wechselwirkungsfreiheit zwischen den einzelnen Kanten bzw. Rissen. Ein Vergleich von simulierten oder experimentell beobachteten Rißmustern, die unter Rißwechselwirkung entstanden, mit dem Spezialfall eines Mosaiks ohne Wechselwirkung beim Kantenversagen ermöglicht Aussagen zur Größe des Einflusses der Wechselwirkungseffekte.
- Zur Schätzung der Modellparameter (Punktprozeß-Intensität und Versagenswahrscheinlichkeit einer Kante) werden nur wenige geometrischen Größen des Rißmusters benötigt, die außerdem einfach und relativ genau ermittelt werden können. Es kann ein analytischer Zusammenhang zwischen diesen Eingangsgrößen und den Modellparametern hergeleitet werden.

Die Rekonstruktion des DIRICHLET-Mosaiks aus einem vorliegenden Rißmuster erfolgt über das Verhältnis der Anzahlen von Rißendpunkten und -verzweigungspunkten sowie die Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit. Sie beruht anschaulich darauf, daß das Versagen isolierter bzw. benachbarter Kanten zu unterschiedlichen Anzahlen von Rißend- und Verzweigungspunkten führt.

Als Bezeichnungen werden verwendet:

- $N_A$  für die mittlere Anzahl von Knoten pro Flächeneinheit des Mosaiks (den Erwartungswert der Anzahl),
- $n_1$  für die mittlere Anzahl von Endpunkten pro Flächeneinheit aller Risse des Rißmusters (gleichbedeutend mit der mittleren Anzahl pro Flächeneinheit der Knoten des Mosaiks mit genau einer versagten Kante) und
- $n_3$  für die mittlere Anzahl von Verzweigungspunkten pro Flächeneinheit aller Risse des Rißmusters (der Knoten mit drei versagten Kanten).

Die Anzahl der ausgefallenen Kanten an einem beliebigen Knoten ist eine zufällige Variable. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern  $p$  und  $n=3$ . Folglich gelten die Erwartungswertgleichungen

$$n_3 = p^3 \cdot N_A \quad (4.11)$$

$$n_1 = 3p(1-p)^2 \cdot N_A, \quad (4.12)$$

denn die linke Seite in Gleichung (4.11) ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, daß alle drei Kanten gleichzeitig versagen, und in  $n_1$  gehen die Knoten ein, wo eine der drei Kanten versagt (mit Wahrscheinlichkeit  $p$ ) und die beiden anderen nicht versagen (Wahrscheinlichkeit  $(1-p)^2$ ), das ist in drei verschiedenen Konfigurationen möglich. Die Versagenswahrscheinlichkeit  $p$  einer Kante kann mit der Momentenmethode aus den Erwartungswertgleichungen (4.11) und (4.12) geschätzt werden, wenn man anstelle der Erwartungswerte  $n_1$  und  $n_3$  die sich aus dem Rißmuster ergebenden Realisierungen einsetzt [15]:

$$\tilde{p} = \frac{\sqrt{\frac{3n_3}{n_1}}}{1 + \sqrt{\frac{3n_3}{n_1}}} \quad (4.13)$$

Zur Schätzung der Punktprozeß-Intensität  $r$  des DIRICHLET-Mosaiks ist noch eine weitere Gleichung nötig. Aufgrund des umgebungsunabhängigen und rißlängenunabhängigen Kantenversagens besteht zwischen der mittleren Linienlänge pro Flächeneinheit  $l_A$  des Rißmusters (der Gesamtlänge aller versagten Kanten bzw. aller Risse pro Flächeneinheit) und der mittleren Linienlänge pro Flächeneinheit  $L_A$  des Mosaiks (der Gesamtlänge aller Kanten pro Flächeneinheit) die Beziehung

$$l_A = p \cdot L_A \quad (4.14)$$

Bei einem DIRICHLET-Mosaik können die Erwartungswerte  $L_A$  und  $N_A$  auf die Punktprozeß-Intensität  $r$  zurückgeführt werden [11], [12]

$$L_A = 2\sqrt{r} \quad (4.15)$$

und

$$N_A = 2r \quad (4.16)$$

Die zwei unbekanntenen Größen  $p$  und  $r$  können aus den Erwartungswertgleichungen (4.11) und (4.14)-(4.16) bzw. aus (4.12) und (4.14)-(4.16) geschätzt werden. Man erhält die Schätzer  $\hat{p}$  und  $\hat{r}$  beruhend auf den Realisierungen von  $l_A$  und  $n_1$  [15]:

$$\hat{p} = 1 + \frac{n_1}{3l_A^2} - \sqrt{2 \frac{n_1}{3l_A^2} + \left(\frac{n_1}{3l_A^2}\right)^2} \quad (4.17)$$

$$\hat{r} = \left(\frac{l_A}{2\hat{p}}\right)^2$$

Das zweite Paar von Schätzern  $\tilde{p}$  und  $\tilde{r}$  beruhend auf den Realisierungen von  $l_A$  und  $n_3$  ist:

$$\tilde{p} = \frac{2n_3}{l_A^2} \quad (4.18)$$

$$\bar{r} = \left( \frac{l_A}{2\bar{p}} \right)^2$$

Die mit den Beziehungen (4.17) bzw. (4.18) erhaltenen Schätzungen für  $p$  müssen mit dem Ergebnis nach (4.13) verglichen werden. Bei unabhängigem Kantenversagen sollten die Schätzungen übereinstimmen.

#### ***4.4 Kenngrößen zur Beschreibung der Oberflächenrißmuster***

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurden, ausgehend von unterschiedlich genauen physikalischen Modellvorstellungen, verschiedene Kenngrößen zur Charakterisierung der Rißmuster eingeführt. Diese Kenngrößen sind noch einmal in Tabelle 4.1 zusammengefaßt.

Unterschiedlichen Ebenen der Modellierung entsprechen unterschiedliche Kenngrößen. In den Kapiteln 7 und 8 wird beschrieben, wie die einzelnen Kenngrößen zur Charakterisierung vorliegender Schädigungszustände und zur Verifizierung von Modellen für den Schädigungsprozeß verwendet werden können. Insbesondere geht es darum, die Aussagekraft der verschiedenen Kenngrößen zu beurteilen und zur Beschreibung bestimmter Aspekte eines Rißmusters bzw. der Schädigungsentwicklung die dafür am besten geeigneten Kenngrößen zu finden.

<b>Ebene der Modellierung</b>	<b>Bildbezogene Kenngrößen</b>	<b>Rißbezogene Kenngrößen</b>
Einfache Rißstatistik	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anzahl von Rissen</li> <li>• Gesamtlänge aller Risse</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Länge eines Einzelrisses</li> </ul>
Modell eines Faserprozesses	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Richtungswinkel eines Liniensegments</li> <li>• Schätzung der Gesamtlänge aller Risse</li> <li>• Variationskoeffizient der Sehnenlängen</li> <li>• Paarkorrelationsfunktion der Schnittpunktabstände</li> </ul>	
Modell eines Mosaiks mit versagten Kanten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Schätzung der Punktprozeß-Intensität</li> <li>• Schätzung der mittleren Zellfläche</li> <li>• Anteil der ausgefallenen Kanten</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anzahl der Kanten eines Risses</li> <li>• Anzahl der Verzweigungen eines Risses</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Winkel an Knoten mit zwei Kanten</li> <li>• Winkel an Knoten mit drei Kanten</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verzweigungsgrad eines Risses</li> <li>• Rechteckformparameter eines Risses</li> </ul>
Modell eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Schätzung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit</li> <li>• Schätzung der Punktprozeß-Intensität</li> <li>• Anteil "zusätzlicher" Verzweigungen</li> </ul>	

**Tab. 4.1: Statistische Kenngrößen zur Charakterisierung zufälliger Rißmuster.**

#### *4.5 Zusätzliche Modellierung zur Rißtiefenausdehnung*

Bisher erfolgt die Charakterisierung der in Wirklichkeit vorhandenen dreidimensionalen Risse allein anhand des Oberflächenbildes. Zusätzliche Informationen z.B. zum Vergleich des Fortschreitens des Schädigungsprozesses an der Oberfläche einerseits und in die Tiefe andererseits oder zum Zusammenlagerungsverhalten können aus der räumlichen Ausdehnung der Risse erhalten werden. Darüber hinaus werden durch die räumliche Ausdehnung möglicherweise die Wechselwirkungen, d.h. die gegenseitige Verstärkung bzw. Abschirmung der einzelnen Risse, beeinflußt, was dann bei der Anpassung des ebenen Simulationsmodells zu berücksichtigen wäre.

Das allgemein übliche Verfahren zur Bestimmung der statistischen Merkmale der räumlichen Rißmuster besteht darin, die Probe zu zerteilen und aus einem Seitenschliff Rißtiefenverteilungen zu bestimmen. Hierfür liegen in [9] Ergebnisse vor. Dort werden keine Informationen über die räumliche Verteilung der Risse berücksichtigt. Im Gegenteil, es wird bei der Auswertung nicht einmal erfaßt, ob im Seitenschliff benachbart liegende Anschnitte von Rissen zu einem einzelnen oder verschiedenen, benachbarten Rissen gehören.

Die so erhaltenen Informationen reichen deshalb nicht aus, um Anhaltspunkte zu gewinnen, wie das räumliche Wachstum der einzelnen Risse erfolgt, insbesondere auch nach Zusammenlagerungen von Rissen. Das Wachstum der Risse in die Tiefe wird wesentlich vom räumlichen Spannungsfeld bestimmt. Aufgrund der vorliegenden komplizierten inhomogenen zeitabhängigen Spannungsfelder (vgl. Kapitel 3) ist daraus die bruchmechanische Ableitung der Rißentwicklung in die Tiefe kaum möglich.

Deshalb ist die Kenntnis der sich im Experiment entwickelnden räumlichen Rißgeometrie wichtig. Dabei ist es notwendig, die komplizierten dreidimensionalen Rißgebilde auf einfache Formen zurückzuführen. Üblicherweise sollen zur Berechnung der Beanspruchungen die Risse durch halbelliptische Oberflächenrisse ersetzt werden. Von großem Interesse ist dabei, ob bzw. wie sich die statistischen Merkmale wie etwa die Verteilung der Achsenverhältnisse der Halbellipsen mit steigender Lastzyklenzahl ändern.

Dazu wurde an einzelnen Proben die Oberfläche schichtweise abgeschliffen und die Rißmuster analog zur Oberflächenaufnahme fotografiert und anschließend digitalisiert. Somit liegen die Schnittbilder der räumlichen Rißkonfiguration in einer Folge von parallelen Ebenen mit bekannten Abständen vor. Durch die Zuordnung der End-, Knick- und Verzweigungspunkte der digitalisierten Risse in den benachbarten Ebenen kann prinzipiell die dreidimensionale Ausdehnung des Risses rekonstruiert werden. Die Rekonstruktion unter einigen vereinfachenden Annahmen wird im Zwischenbericht [1] beschrieben und im Abschnitt 7.4 kurz zusammengefaßt. Es wird eine näherungsweise Approximation der räumlichen Rißstruktur durch halbelliptische Oberflächenrisse vorgenommen. Deren Tiefenverteilung und Rißachsenverhältnis kann getrennt untersucht werden.

Durch die Zusammenlagerung von Rissen und den Einfluß der Werkstoffstruktur entstehen komplizierte räumliche Gebilde. Deshalb sind vereinfachende Annahmen nötig, um Kenngrößen abzuleiten, die auf die räumliche Struktur der Risse anwendbar sind.

Die Ermittlung der Rißtiefenverteilung erfolgt üblicherweise aus den Seitenschliffen [9]. Man erhält allerdings nicht die tatsächliche Rißtiefe, da der - nur im Idealfall halb elliptische - Riß zufällig an einer bestimmten, aber im allgemeinen nicht der tiefsten Stelle angeschnitten wird. Bei bekanntem Rißachsenverhältnis kann aus der Tiefe der angeschnittenen Risse mit stereologischen Methoden die tatsächliche Rißtiefe errechnet werden [11]. Ohne die Umrechnung lassen die Ergebnisse nur vergleichende Aussagen von Probe zu Probe über die Tendenz der Rißtiefenentwicklung zu.

Aus den Schliffen parallel zur Oberfläche kann näherungsweise ebenfalls eine Rißtiefenverteilung ermittelt werden, wenn die Tiefe des Risses durch die tiefste Ebene bestimmt wird, die den Riß noch schneidet.

Die digitalisierten Bilder in verschiedenen Schichttiefen können neben der näherungsweisen Konstruktion halb elliptischer Oberflächenrisse weitere Ansatzpunkte zur Beschreibung der räumlichen Rißgeometrie und der Entwicklung der Schädigung in die Tiefe liefern. Eine Möglichkeit besteht darin, die bisher beschriebenen statistischen Methoden zur Charakterisierung der Oberflächenrißmuster formal auch auf die Schliffbilder anzuwenden.

Aussagen über die Rißmorphologie in der Tiefe erfordern die Berücksichtigung von Zusammenhangseigenschaften aufeinanderfolgender Bilder von Schichten. Inhalt des dargestellten Projekts ist jedoch die Entwicklung und Bewertung eines bruchmechanischen Modells für die Schädigungsentwicklung an der Oberfläche und nicht in der Tiefe. Deshalb erfolgt eine Beschränkung auf Teilergebnisse der statistischen Auswertung der räumlichen Strukturen. Eine umfassende Charakterisierung durch statistische Kenngrößen ist im Rahmen des Projekts nicht erforderlich.

Die durchgeführten Digitalisierungen der Parallelschliffe zeigen, daß die Untersuchung der räumlichen Rißausbreitung kompliziert und aufwendig ist. Die Bilder vermitteln aber einen ersten Eindruck über die Rißform. Die Aufspaltung eines verzweigten Risses mit zunehmender Tiefe in mehrere getrennte Teile besagt, daß die Äste des Risses unterschiedlich tief sind und zwischen benachbarten tieferen Ästen eine geringe Rißtiefe vorliegt. Das bedeutet, daß eine solche Rißform nicht durch Rißverzweigung, sondern durch Zusammenlagerung mehrerer Risse entstanden ist. Da solche Fälle in den Mustern oft vorkommen, deutet dies auf den größeren Einfluß der Koaleszenz gegenüber dem Rißwachstum bei der Entwicklung der Verzweigungen hin. Die Bilder von den Schichttiefen erlauben dagegen keine Aussagen zum Mechanismus des Rißwachstums *nach* erfolgter Koaleszenz.

## 5. Simulation der Rißentwicklung

Im folgenden Kapitel wird - um eine geschlossene Darstellung zu erhalten - die bereits im Zwischenbericht [1] enthaltene grundsätzliche Vorgehensweise bei der Simulation der Entwicklung von Rißmustern kurz wiedergegeben.

### 5.1 Prinzip der Simulationsprozedur

Ziel der Simulation ist die Beschreibung der Schädigungsentwicklung unter Berücksichtigung des Zufallscharakters. Ein physikalisches Modell zur Beschreibung der Wechselwirkungen ist Bestandteil des Simulationsalgorithmus [16]. Die Beurteilung unterschiedlicher Modellannahmen kann nur anhand des Ergebnisses der Simulation, nämlich der simulierten Rißbilder, erfolgen, da es wegen der stochastischen Natur des Schädigungsprozesses keinen direkten Zusammenhang zwischen physikalischem Modell und realisiertem Rißmuster gibt. Insofern ist ein weiteres Ziel der Simulation, durch Variation verschiedener Modellannahmen bzw. deren Parameter und anschließendem Vergleich zwischen simulierten und experimentellen Rißmustern den bestimmenden Mechanismus der Rißmusterbildung zu finden.

Bei der Simulation wird von einer einfachen Anfangsrißkonfiguration ausgegangen. In mehreren Schritten wird dann die weitere Rißentwicklung bestimmt. Dabei sollten die in Kapitel 2 beschriebenen Stadien der Schädigungsentwicklung

- Neuentstehung von Rissen
- Wachstum vorhandener Risse
- Zusammenlagerung von Rissen

und die damit verbundenen typischen geometrischen Merkmale der Rißmuster prinzipiell richtig wiedergegeben werden.

Um den Rechenaufwand zu verringern, erfolgt die Simulation der Rißentwicklung an der Oberfläche, d.h. als ebenes Problem. Diese Vereinfachung kann getroffen werden, weil unter den vorhandenen Belastungsbedingungen das Tiefenwachstum mit dem Wachstum an der Oberfläche gekoppelt ist.

Wie die statistische Auswertung der experimentellen Rißmuster in Kapitel 7 zeigt, kann man davon ausgehen, daß das Rißwachstum an der Oberfläche bei hohen Zyklenzahlen nur noch gering ist. Daher wird mit den Simulationen angestrebt, das Rißwachstum bis zum Erreichen einer Sättigung der Rißdichte an der Oberfläche zu beschreiben.

Die Simulation selbst verläuft in den folgenden drei Schritten:

- Vorgabe einer Schwachstellenstruktur,
- Erzeugung einer Anfangsschädigung,
- Simulation sukzessiver Folgeschädigungsschritte,

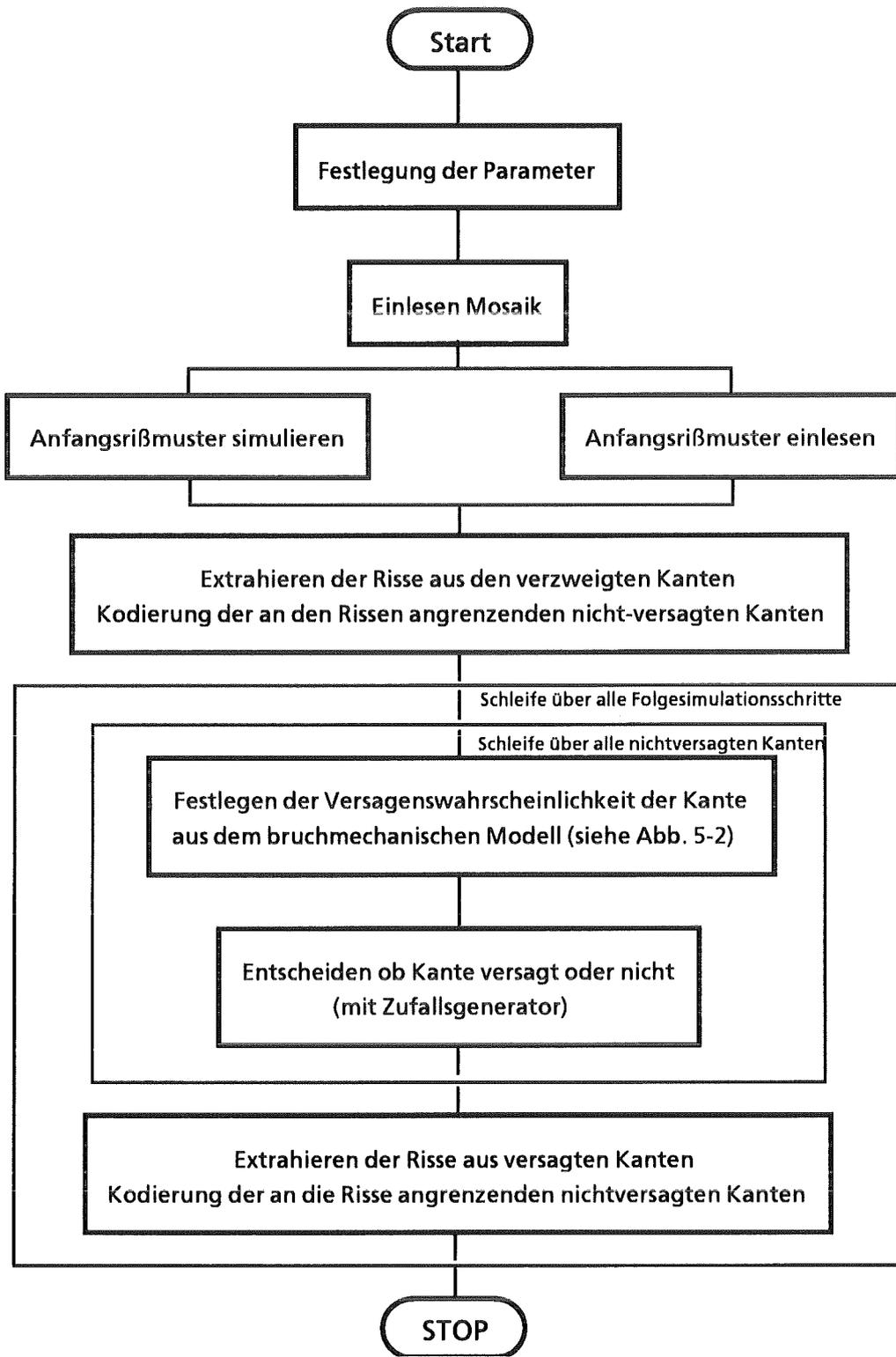


Abbildung 5-1. Ablauf der Simulation der Rißmusterbildung

die in diesem Abschnitt näher erläutert werden. Der vollständige Ablauf der Simulation ist in Abb. 5-1 dargestellt.

**\* Festlegen der Versagenswahrscheinlichkeit  $p$  der Kante  
aus dem bruchmechanischen Modell**

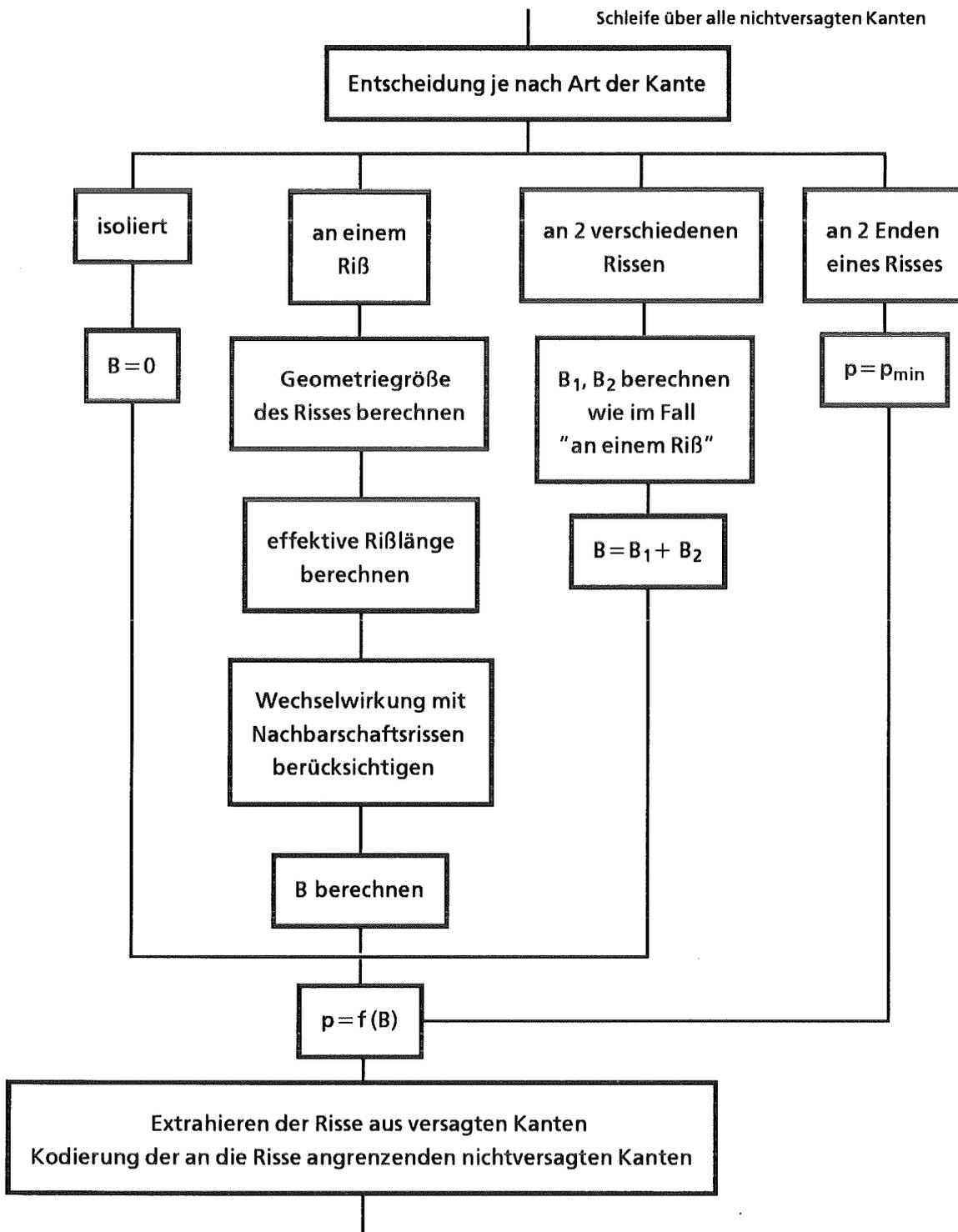


Abbildung 5-2. Festlegen der Versagenswahrscheinlichkeit aus dem bruchmechanischen Modell

## 5.2 Erzeugung einer Schwachstellenstruktur

In der Simulation wird das Modell eines Mosaiks mit versagten Kanten (vgl. Kapitel 4) verwendet. Die Schwachstellenstruktur wird in Form eines ebenen Dirichlet-Mosaiks nach dem Algorithmus von Green und Sibson [17] simuliert.

Da die Risse sowohl entlang der Korngrenzen als auch durch die Körner wachsen, ist eine direkte Zuordnung des Mosaiks zu Merkmalen eines Gefügeschliffes nicht möglich. Wichtig für die Anwendung des Dirichlet-Mosaiks und der damit verbundenen Modellvorstellungen sind vielmehr die gleichen statistisch-geometrischen Eigenschaften des Mosaiks und eines Rißmusters als unvollständiger Ausschnitt aus diesem Mosaik. Dieser Gesichtspunkt wurde bereits im Kapitel 4 diskutiert.

Die Kanten des Mosaiks stellen die potentiellen Rißkandidaten dar. Für sie gibt es die beiden Zustände: 'versagt' und 'intakt'. Die versagten Kanten bilden das Rißmuster (s. auch Abb. 5-1).

## 5.3 Simulation der Anfangsschädigung

Zu Beginn der Rißentwicklung bilden sich Risse an zufälligen Orten, wobei die Rißdichte noch gering ist und demnach keine großen Wechselwirkungen zu erwarten sind. Dementsprechend wird das Anfangsrißbild durch unabhängiges Kantenversagen simuliert. Jede Kante des Mosaiks erhält die gleiche Versagenswahrscheinlichkeit  $p_0$ , unabhängig davon, was mit den übrigen Kanten passiert. Mit dem Zufallszahlengenerator wird für jede Kante bestimmt, ob sie versagt oder nicht. Die Versagenswahrscheinlichkeit  $p_0$  wird zweckmäßigerweise klein gewählt, damit das Schädigungsmodell am Ende der Simulation durch die einzelnen Folgesimulationsschritte geprägt wird.

## 5.4 Simulation weiterer Folgeschädigungsschritte

Die Simulation der weiteren Rißentwicklung erfolgt in mehreren Schritten. Die Versagenswahrscheinlichkeit der noch intakten Kanten muß in Abhängigkeit von dem sich im vorhergehenden Simulationsschritt gebildeten Rißmuster festgelegt werden. Ein besonders wichtiger, aber auch sehr schwieriger Punkt ist die ausreichend genaue Berücksichtigung von Wechselwirkungseffekten. Dabei ist neben der bruchmechanischen Bewertung der Rißwechselwirkung eine effektive Berücksichtigung der Nachbarn des bewerteten Risses notwendig. Das hierzu benutzte Verfahren wird im Anhang A erläutert.

Der Ablauf der einzelnen Folgesimulationsschritte umfaßt im wesentlichen drei Punkte (vgl. Abb. 5-1): zunächst wird für jede nichtversagte Kante eine Beanspruchungsgröße berechnet, dann wird diese in eine Versagenswahrscheinlichkeit umgerechnet und als letztes wird mit dem Zufallszahlengenerator bestimmt, ob die Kante versagt oder nicht. Dieser Ablauf erfolgt in einer Schleife über alle nichtversagten Kanten des Mosaiks. Das bedeutet,

daß innerhalb eines Folgesimulationsschrittes das Versagen einer noch intakten Kante nicht davon abhängt, was mit den anderen Kanten passiert.

Prinzipiell ist es möglich, den Algorithmus so zu gestalten, daß nur genau eine Kante pro Simulationsschritt versagt.

Das gleichzeitige Versagen mehrerer Kanten in einem Simulationsschritt ohne Berücksichtigung einer möglichen Wechselwirkung kann jedoch als zulässig betrachtet werden, wenn die Anzahl der versagenden Kanten pro Simulationsschritt hinreichend kleine Werte annimmt, so daß die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung klein ist. Wird dies bei der Simulation berücksichtigt, so kann man davon ausgehen, daß die Unterschiede im Vergleich zur entsprechenden Simulation, bei der nur eine Kante pro Simulationsschritt versagt, vernachlässigbar sind und innerhalb der statistischen Streuung liegen.

Bei den durchgeführten Simulationen zeigte sich, daß die Mehrzahl der (praktisch nicht sinnvollen) Rundrisse entstand, weil die zwei Kanten, die den Riß schlossen, unabhängig voneinander in einem Simulationsschritt versagten. In diesem Falle hätte eine Simulation mit einem Ein-Kanten-Versagen pro Simulationsschritt beim Versagen der einen Kante zu einer minimalen Versagenswahrscheinlichkeit  $p_{\min}$  (s. Abb. 5-1) der zweiten Kante geführt und somit wäre die Wahrscheinlichkeit zur Bildung des Rundrisses deutlich kleiner als bei unabhängigen Kantenversagen. Trotz dieser Einschränkungen kann davon ausgegangen werden, daß der durch das Versagen vieler Kanten in einem Simulationsschritt entstehende Fehler kleiner als der durch das bruchmechanischen Modell entstehende Fehler ist. Insofern ist das Vorgehen im Rahmen des hier vorgestellten Modells zulässig.

Da in jedem Knoten des Mosaiks genau drei Kanten zusammentreffen (s. Abb. 6-1), gibt es hinsichtlich der Zuordnung einer ungerissenen Kante zu vorhandenen Rissen folgende neun Möglichkeiten:

- isolierte Kante,
- Kante am Endpunkt eines Risses,
- Kante am Knickpunkt eines Risses,
- Kante zwischen zwei Endpunkten zweier Risse,
- Kante zwischen End- und Knickpunkt zweier Risse,
- Kante zwischen zwei Knickpunkten zweier Risse,
- Kante zwischen zwei Endpunkten eines Risses,
- Kante zwischen End- und Knickpunkt eines Risses,
- Kante zwischen zwei Knickpunkten eines Risses,

woraus sich die Notwendigkeit einiger besonderer Festlegungen ergibt.

1. Isolierte Kanten erhalten eine Beanspruchungsgröße  $B = 0$  zugeordnet. Ansonsten wird  $B$  aus einem bruchmechanischen Modell, das in Kapitel 6 ausführlich erläutert ist, berechnet.
2. Kanten, die auf beiden Seiten an den gleichen Riß angrenzen, erhalten eine minimale Versagenswahrscheinlichkeit  $p_{\min}$ , weil dadurch die Bildung von Rundrissen erschwert wird. Rundrisse treten in den experimentellen Rißmustern kaum auf. Eine richtige Mo-

dellierung der Schädigungsentwicklung sollte ebenfalls nicht zu Rundrissen führen. Die Festlegung von  $p_{\min}$  erscheint auch deshalb sinnvoll, weil bestimmte Ungenauigkeiten in der Modellierung der Schwachstellenstruktur durch ein Dirichlet-Mosaik und in der Berechnung der Beanspruchungsgröße in die richtige Richtung korrigiert werden können. In der Regel sind Kanten, die zu Rundrissen führen würden, durch den Riß stark abgeschirmt und in diesen Fällen ist eine genaue bruchmechanische Modellierung schwierig (vgl. Kapitel 6).

3. Bei nichtversagten Kanten, die auf beiden Seiten an unterschiedliche Risse angrenzen, wird für jedes Ende eine separate Beanspruchungsgröße berechnet. Diese werden zu einer gemeinsamen Beanspruchungsgröße addiert, aus der die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet wird.

Bei den Festlegungen 1 - 3 handelt es sich um sinnvolle Annahmen, die als Bestandteil des Simulationsmodells zu sehen sind. Es ist nicht möglich, diese Annahmen einzeln für sich zu überprüfen.

Bei der Simulation der Rißentwicklung wird auch die Wechselwirkung mit benachbarten Rissen berücksichtigt. Es ergeben sich prinzipiell folgende Möglichkeiten der Einbeziehung in der Wechselwirkung:

1. Es wird nur das Reißende bewertet, welches am nächsten zu dem analysierten Reißende liegt (Variante R0). Hierzu wird der Abstand zu allen Reißenden der mit dem im Anhang A dargestellten Verfahren bestimmten Nachbarschaftsrisse berechnet. Dem Riß mit dem Reißende, das die kürzeste Entfernung zum analysierten Reißende aufweist wird eine - durch die Einzelrißanalyse gegebene - effektive Rißlänge zugeordnet. Dies erfolgt analog bei dem analysierten Reißende. Dadurch wird die Analyse vereinfacht, da statt zweier verzweigter Risse zwei gerade Risse zu bewerten sind. Dem so gegebenen Problem der Wechselwirkung zweier gerader Risse läßt sich durch eine geometrische Klassifizierung mit dem in Abschnitt 6.3 dargestellten Näherungsverfahren ein Faktor  $F_N$  bestimmen, der den Einfluß des Risses mit dem ermittelten nächsten Reißende auf den analysierten Riß widerspiegelt.
2. Es werden die Reißenden aller Nachbarrisse bewertet, die am nächsten zu dem analysierten Reißende liegen (Variante R1). D.h. für jeden Nachbarriß wird genau ein Reißende ermittelt, dessen Lage die Wechselwirkung charakterisiert. In der gleichen Art und Weise wie in Punkt 1 wird für jeden Nachbarriß ein Nachbarschaftsfaktor  $F_N$  berechnet. Der Faktor  $F_N$  für den analysierten Riß ergibt sich als Produkt aller  $F_N$  der Nachbarschaftsrisse.
3. Es werden alle Reißenden, die zu unmittelbar benachbarten Rissen gehören, in die Auswertung mit einbezogen (Variante R2). In diesem Fall ergibt sich für jedes Reißende jedes Nachbarschaftsrisse genau ein  $F_N$ . Dabei kann der Riß für unterschiedliche Reißenden unterschiedliche effektive Rißlängen erhalten. Der Nachbarschaftsfaktor eines Nachbarrisse ergibt sich aus der Wurzel des Produkts der  $F_N$  der einzelnen Reißenden

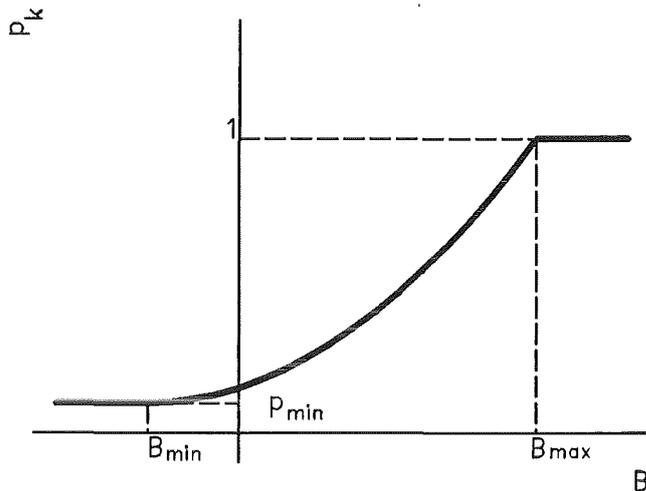


Abbildung 5-3. Zusammenhang zwischen Beanspruchungsgröße und Versagenswahrscheinlichkeit

des benachbarten Risses. Dadurch wird gewährleistet, daß das Modell mit dem Modell der Wechselwirkung zweier gerader Risse konsistent ist.

Die vorgestellten unterschiedlichen Varianten der Berücksichtigung der Rißwechselwirkung besitzen demnach einen unterschiedlichen Genauigkeitsgrad. Bei der Variante R0 kann es relativ häufig vorkommen, daß ein Rißende, das sich im Abschirmbereich (z. B. in der Nähe der Mitte des analysierten Risses) in seiner Wirkung unterschätzt wird, da der Abstand vom analysierten Rißende relativ groß ist.

Bei der Variante R1 ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers deutlich reduziert, da für einen solche Konstellation ein relativ weit verzweigter Riß vorliegen muß.

Die Variante R2 wird in der Genauigkeit der Berücksichtigung der Wechselwirkung am besten sein, obwohl auch hier durch in gewissen Bereichen fehlerhafte Näherungsformeln Fehler entstehen können.

Für den Spezialfall zweier wechselwirkender Risse liefern alle drei Varianten das gleiche Ergebnis.

Die bruchmechanische Modellierung der Rißwechselwirkung wird im Abschnitt 6.4 genauer vorgestellt.

Die Festlegung der Versagenswahrscheinlichkeit  $p_k$  der nichtversagten Kante  $k$  erfolgt durch folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 p_k &= p_{\min} && \text{für } B \leq B_{\min} \\
 p_k &= (1 - p_{\min}) \left( \frac{B - B_{\min}}{B_{\max} - B_{\min}} \right)^n + p_{\min} && \text{für } B_{\min} < B < B_{\max} \\
 p_k &= 1 && \text{für } B \geq B_{\max} \text{ ,}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

die in Abb. 5-3 grafisch dargestellt ist. Die Größen  $B_{\min}$ ,  $B_{\max}$ ,  $p_{\min}$ ,  $n$  sind Parameter des Simulationsmodells. Dabei ist  $B_{\max}$  die Grenze der Beanspruchungsgröße  $B$ , ab der sicheres Versagen eintritt, während unterhalb von  $B_{\min}$  die Versagenswahrscheinlichkeit unabhängig von  $B$  den minimalen Wert  $p_{\min}$  zugeordnet bekommt.

Die Entwicklung unterschiedlicher geometrischer Eigenschaften der simulierten Rißmuster kann durch Variation der Parameter gesteuert werden.

Um den Einfluß der Parameter auf die entstehenden Rißmuster zu untersuchen, werden in Kapitel 8 die mit dem Modell erzeugten Rißmuster bei unterschiedlichen Parametern untersucht.

Eine physikalische Interpretation von  $n$  und damit eine Vorstellung, welche Werte  $n$  annehmen sollte, läßt sich aus der bruchmechanischen Beziehung für die Beschreibung von Ermüdungsrißwachstum ableiten. Die dort gültige Paris-Gleichung

$$\frac{da}{dN} = C (K_I)^n, \quad (5.2)$$

drückt die Rißlängenzunahme pro Lastzyklus aus. Der Exponent  $n$ , der in beiden Beziehungen auftaucht, sowohl in (5.1) als auch in (5.2), sollte folglich im gleichen Größenbereich liegen.  $n$  sollte damit für Stahl typische Werte von 2-4 besitzen. Für die durchgeführten Simulationen wurde deshalb ein typischer Wert von  $n = 3$  benutzt, soweit nicht anders angegeben. Experimentelle Untersuchungen mit künstlich eingebrachten Rissen und mechanischer Ermüdungsbelastung liefern für den betrachteten Austenit einen Wert von  $n = 4.0$  [9].

## 6. Bruchmechanisches Modell

Die Weiterentwicklung des bruchmechanischen Modells gegenüber der Version, wie im Zwischenbericht [1] dokumentiert, betrifft folgende Punkte:

1. Überarbeitung aller Formeln zur Berechnung effektiver Rißlängen auf Grundlage weiterer BEM-Analysen an ebenen verzweigten Rissen. Es wurden 55 zusätzliche Risse analysiert, so daß sich die Gesamtzahl auf 85 erhöht. Die Abweichungen zwischen den Näherungsformeln und den BEM-Ergebnissen konnten gegenüber der alten Version deutlich verringert werden.
2. Untersuchung des Abschirmungsverhaltens an Rißenden, für die auf der oberen und unteren Seite entlastende Rißzweige vorhanden sind.
3. Untersuchungen zur Genauigkeit der erarbeiteten Formeln zur Berechnung der effektiven Rißlängen.
4. Einbeziehung des Abschirmungsverhaltens an Knickpunkten.
5. Untersuchungen zur Rißwechselwirkung.

Im folgenden wird die vorliegende Version des bruchmechanischen Modells vollständig dargestellt.

### 6.1 Grundsätzliche Überlegungen

Ziel ist, eine Beanspruchungsgröße für die an vorhandene Risse angrenzenden nichtversagten Kanten mit geringem numerischen Aufwand zu berechnen. Das ist vor allem deswegen wichtig, weil die bruchmechanische Bewertung der Rißmuster in jedem Simulationsschritt erneut durchgeführt werden muß.

Die genaue Ermittlung der Beanspruchungen an den verzweigten Rissen stellt aus drei Gründen ein kompliziertes Randwertproblem dar:

1. Es liegt eine große Anzahl von Rissen vor.
2. Die Risse haben eine komplizierte Form.
3. Wegen des zugrundegelegten Mosaiks treten in den Kantenlängen der Risse große Unterschiede auf.

Aufgrund dieser Eigenschaften des Randwertproblems kommen die universellen numerischen Lösungsverfahren wie FEM oder BEM wegen des sehr großen Rechenaufwandes nicht in Frage.

Als Alternative wird ein vereinfachtes bruchmechanisches Modell entwickelt und in das Simulationsprogramm eingebaut. Da es um eine relative Bewertung der Beanspruchungen an den einzelnen ungerissenen Kanten geht, wird vereinfachend linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt.

Die Spannungen hängen von der äußeren Belastung und der Rißgeometrie ab. Als Belastung wird ausgehend von den im früheren DFG-Vorhaben durchgeführten FEM-Analysen ein äquibiaxialer Spannungszustand angenommen. Der absolute Wert bzw. der zeitliche Verlauf der Spannung spielt allerdings keine Rolle, da die Schädigungsentwicklung durch Simulation erfaßt wird.

Ausgehend von Lösungen aus der Literatur [19] [20] und von durchgeführten BEM-Berechnungen wird ein Algorithmus festgelegt, der jedem End- und Knickpunkt eines verzweigten Risses den Wert einer Beanspruchung zuordnet. Dieser Algorithmus muß eindeutig sein, d.h. für beliebig kompliziert geformte Risse muß ein Wert einer Beanspruchung berechnet werden. Aufgrund der außerordentlich großen Vielfalt der möglichen Rißgeometrien bei der Simulation ist ein Kompromiß zwischen Aufwand zur Erarbeitung des Algorithmus und Genauigkeit notwendig. Das Prinzip besteht darin, durch geeignete Ansätze für eine Beanspruchungsgröße eine ausreichende Anzahl bekannter Ergebnisse möglichst gut zu beschreiben und diese Formeln dann auf andere Rißgeometrien anzuwenden.

## 6.2 Rißwachstum von vorhandenen Rissen

### 6.2.1 Beanspruchungskenngröße für ungerissene Kanten

Sowohl an den Endpunkten als auch an den Knickpunkten verzweigter Risse ergeben sich nach der linearen Elastizitätstheorie singuläre Spannungsspitzen. Als maßgebende Größe für das Versagen einer Kante, die unter dem Winkel  $\varphi$  an einen vorhandenen Riß angrenzt, wird der Normalspannungsverlauf  $\sigma_\varphi$  angesehen. Dieser läßt sich allgemein in Form einer Potenzreihe darstellen.

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \sum_i K_i r^{-\lambda_i} g_i(\varphi) \quad (6.1)$$

Dabei sind  $r, \varphi$  Polarkoordinaten mit dem Zentrum am End- oder Knickpunkt des Risses,  $K_i$  sind die Koeffizienten,  $\lambda_i$  die Exponenten und  $g_i(\varphi)$  Winkelfunktionen.

Die Reihe (6.1) wird sowohl für die Endpunkte als auch für die Knickpunkte nach dem zweiten Glied abgebrochen, so daß jeweils ein symmetrischer und ein antimetrischer Anteil berücksichtigt wird.

Zur Festlegung der Versagenswahrscheinlichkeit gemäß (5.1) müssen die unterschiedlichen Spannungsverläufe auf eine vergleichbare Beanspruchungskenngröße umgerechnet werden. Dazu wird entsprechend der von Neuber eingeführten Mikrostützwirkung [23] der Mittelwert der Spannung  $\sigma_\varphi$  über eine Länge  $r_0$  vor dem Riß berechnet (s. Abb. 6-1):

$$B(\varphi) = \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sigma_\varphi(r, \varphi) dr. \quad (6.2)$$

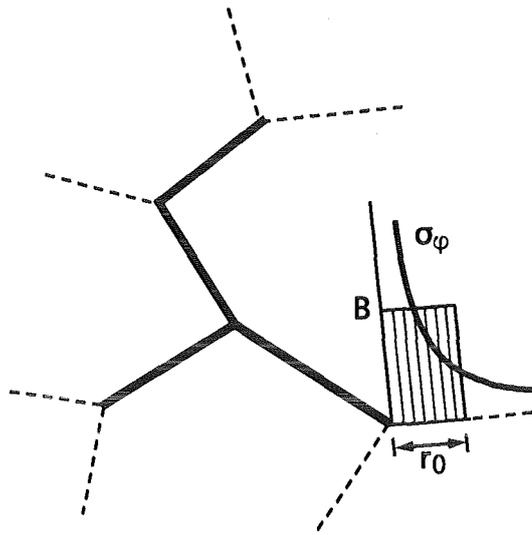


Abbildung 6-1. Berechnung der Beanspruchungskenngröße und potentielle Rißpfade

Die Länge  $r_0$  ist ein Modellparameter, mit dem die Belastung von ungerissenen Kanten an End- und Knickpunkten der Risse relativ zueinander festgelegt werden kann, wodurch das Verzweigungsverhalten der Risse beeinflusst wird. Das Integral in (6.2) stellt die Zugkraft dar, die von der nichtversagten Kante über die Länge  $r_0$  übertragen wird.

### 6.2.2 Spannungszustand an Endpunkten verzweigter Risse

An den Endpunkten eines Risses liegt die aus der Bruchmechanik bekannte  $1/\sqrt{r}$ -Spannungssingularität vor, wobei Modus I und II zu berücksichtigen sind. Bei Abbruch der Reihe (6.1) nach dem zweiten Glied erhält man

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} g_I(\varphi) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} g_{II}(\varphi) \quad (6.3)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I$  wird aus

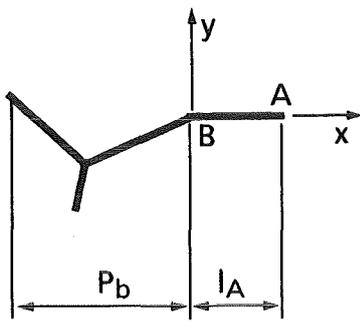
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a_{eff I}} F_T F_N \quad (6.4_1)$$

berechnet. Eine analoge Beziehung gilt für  $K_{II}$ .

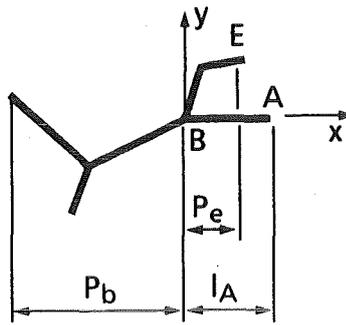
$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a_{eff II}} F_T F_N \quad (6.4_2)$$

Durch Einführung einer effektiven Rißlänge  $a_{eff}$  wird der unregelmäßigen Form der Risse an der Oberfläche Rechnung getragen. Hierfür werden aus vorhandenen Ergebnissen geeignete Ansätze abgeleitet.  $F_T$  und  $F_N$  berücksichtigen die Ausdehnung der Risse in die Tiefe (K-Faktor an der Oberfläche) sowie das Vorhandensein von weiteren Rissen in der Nachbarschaft.

Riß A:



Riß B:



Riß C:

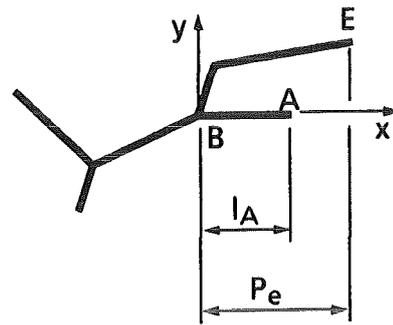


Abbildung 6-2. Charakteristische Längen zur Berechnung der effektiven Rißlängen

### Effektive Rißlänge für Mode I

Zur Ableitung eines Ansatzes für die effektive Rißlänge sollen die drei ebenen Risse in Abb. 6-2 betrachtet werden. A ist jeweils der zu bewertende Endpunkt des Risses, B der andere Endpunkt der entsprechenden Randkante. Es wird ein lokales Koordinatensystem in den Punkt B gelegt, dessen positive x-Achse entlang der Randkante verläuft.

Für die beiden Risse A und B kann folgende Überlegung angestellt werden. Der Anteil des Risses auf der linken Seite der y-Achse führt gegenüber einem einfachen Riß der Länge  $l_A$  zu einer Erhöhung des Spannungsintensitätsfaktors im Punkt A. Dagegen schirmen Rißzweige auf der rechten Seite der y-Achse mit dem Entlastungspunkt E als Endpunkt (Riß B) den Punkt A in der Regel ab, so daß sich der Spannungsintensitätsfaktor wieder verringert. Das führt zu folgendem Ansatz für die effektive Rißlänge:

$$2 a_{eff I} = l_A + k_b p_b - k_e p_e \quad (6.5)$$

Charakteristische Längen sind die Projektionen  $p_b$  und  $p_e$  der beiden oben beschriebenen Teile des Risses auf die Randkante.  $k_b$  und  $k_e$  sind Wichtungsfaktoren, die von der Rißgeometrie abhängen. Der Sonderfall, daß der Riß nur aus einer Kante der Länge  $l_A$  besteht, wird automatisch richtig wiedergegeben.

Im Fall des Risses C ist die Randkante mit der Länge  $l_A$  klein gegenüber den anderen Teilen des Risses. Hier kann aus Sicht des Endpunktes A der Riß als freie Oberfläche aufgefaßt werden, so daß als einzige charakteristische Länge die Länge der Randkante selbst bleibt. Der entsprechende Ansatz für die effektive Rißlänge lautet:

$$a_{eff I} = k_c l_A \quad (6.6)$$

Auch hier ist  $k_c$  der Wichtungsfaktor zur Berücksichtigung der Rißgeometrie.

Zur Aufstellung von Formeln zur Berechnung der effektiven Rißlänge ist die hier angegebene Fallunterscheidung sinnvoll, wobei die Festlegung für den Fall C etwas willkürlich vorgenommen werden muß.

- Fall A:  $p_e = 0$
- Fall B:  $p_e < l_A$
- Fall C:  $p_e \geq l_A$

Für diese Fälle werden aus den BEM-Rechnungen unterschiedliche Formeln abgeleitet. Dabei kann jedes Rißende eindeutig einem Fall zugeordnet werden.

### *Effektive Rißlänge für Mode II*

Der Betrag und das Vorzeichen von  $K_{II}$  hängen mit der Symmetrie des Risses bezüglich der x-Achse (vgl. Abb. 6-2) zusammen. Bei dem zugrundegelegten quibiaxialen Spannungszustand verschwindet  $K_{II}$  für einen symmetrischen Riß. Bei einem unsymmetrischen Riß bleibt der Betrag von  $K_{II}$  erhalten und es ändert sich lediglich das Vorzeichen, wenn man den an der x-Achse gespiegelten Riß betrachtet. Gemäß (6.4<sub>2</sub>) kann ein Ansatz für die effektive Rißlänge

$$a_{eff II} = k_2 l_{b2} \quad (6.7)$$

nur den Betrag von  $K_{II}$  bestimmen. Das Vorzeichen muß gesondert festgelegt werden. Durch  $k_2$  wird analog dem Mode-I-Anteil die Geometrie des verzweigten Risses berücksichtigt.  $l_{b2}$  ist eine Bezugslänge (charakteristische Länge des Risses), die für die einzelnen Fälle geeignet an die berechneten Ergebnisse angepaßt werden kann. Bei der Auswertung der BEM-Ergebnisse wird die für Mode I getroffene Unterteilung übernommen.

### *Charakterisierung der Rißformen*

Bei Beschränkung auf eine maximale Kantenzahl des Risses ist die Geometrie vollständig durch die Angabe der Koordinaten der Punkte und die Zuordnung der Anfangs- und Endpunkte zu den einzelnen Kanten bestimmt. Dieser Parametersatz wäre allerdings viel zu umfangreich, um aus den BEM-Ergebnissen einfache Beziehungen zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren abzuleiten. Deswegen ist es wichtig, solche Kenngrößen zu finden, die wesentlichen Einfluß auf die Spannungsintensitätsfaktoren haben. Die Anzahl der verwendeten Parameter muß demnach wesentlich geringer sein, als zur vollständigen Charakterisierung der Geometrie erforderlich. Das hat zur Folge, daß es zu einem festen Parametersatz geometrischer Kenngrößen in der Regel verschiedene Risse mit unterschiedlichen Spannungsintensitätsfaktoren gibt. Durch die Näherungsformeln erhalten diese verschiedenen Risse allerdings den gleichen Spannungsintensitätsfaktor. Da sich dieser Widerspruch nicht aufheben läßt, hängen die erhaltenen Formeln in gewissem Umfang von der Auswahl der Risse für die BEM-Rechnungen ab. Deswegen ist es wichtig, eine dem Problem angepaßte repräsentative Auswahl von Rissen zu treffen.

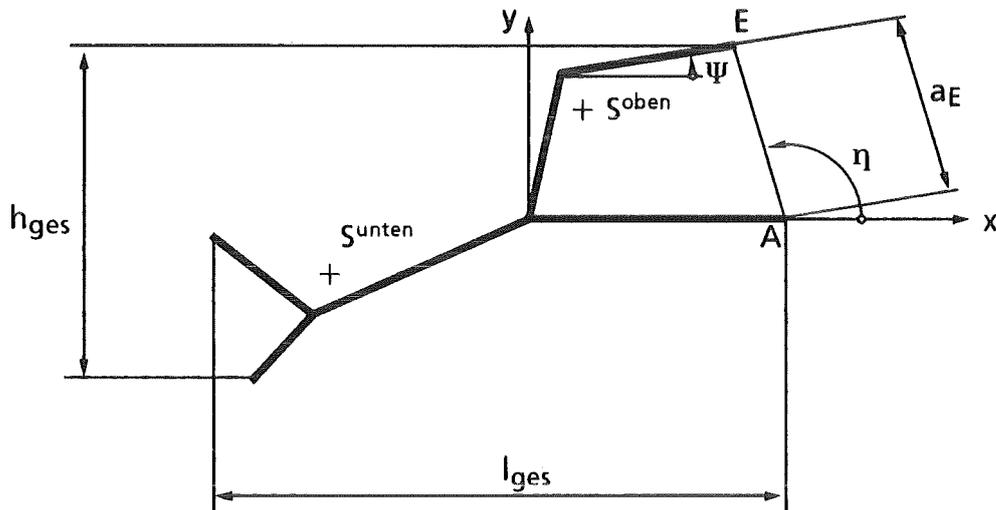


Abbildung 6-3. Geometrische Kenngrößen eines verzweigten Risses

Anhaltspunkte für geeignete Kenngrößen lassen sich aus einer qualitativen Vorstellung der Spannungsverhältnisse am verzweigten RiB ableiten. Deren Korrelation zu den Wichtungsfaktoren muß danach geprüft werden.

Für Mode I Belastungen haben sich folgende Kenngrößen zur Beschreibung der RiBgeometrie aus Sicht des Endpunktes A herauskristallisiert (Abb. 6-3):

- Das Längenverhältnis des den RiB umschließenden Rechtecks

$$C_1 = \frac{h_{ges}}{l_{ges}} \quad (6.8)$$

berücksichtigt die Ausdehnung des Risses senkrecht zur Richtung der Randkante. Die Ausdehnung des Risses in Richtung der Randkante ist in (6.5) bereits durch die Projektionen enthalten.

- Die Größe

$$C_3 = \frac{a_E}{\sqrt{l_{ges}^2 + h_{ges}^2}} \quad (6.9)$$

ist ein Maß für den Abstand eines den Endpunkt A entlastenden Endpunktes E, bezogen auf die Größe des gesamten Risses. Als Maß für die Größe des Risses ist die Diagonale des umschließenden Rechtecks verwendet worden. Je größer der Abstand ist, desto geringer ist die abschirmende Wirkung des Punktes E auf den Punkt A.

- Die Größe

$$C_4 = \frac{p_e}{l_A} \quad (6.10)$$

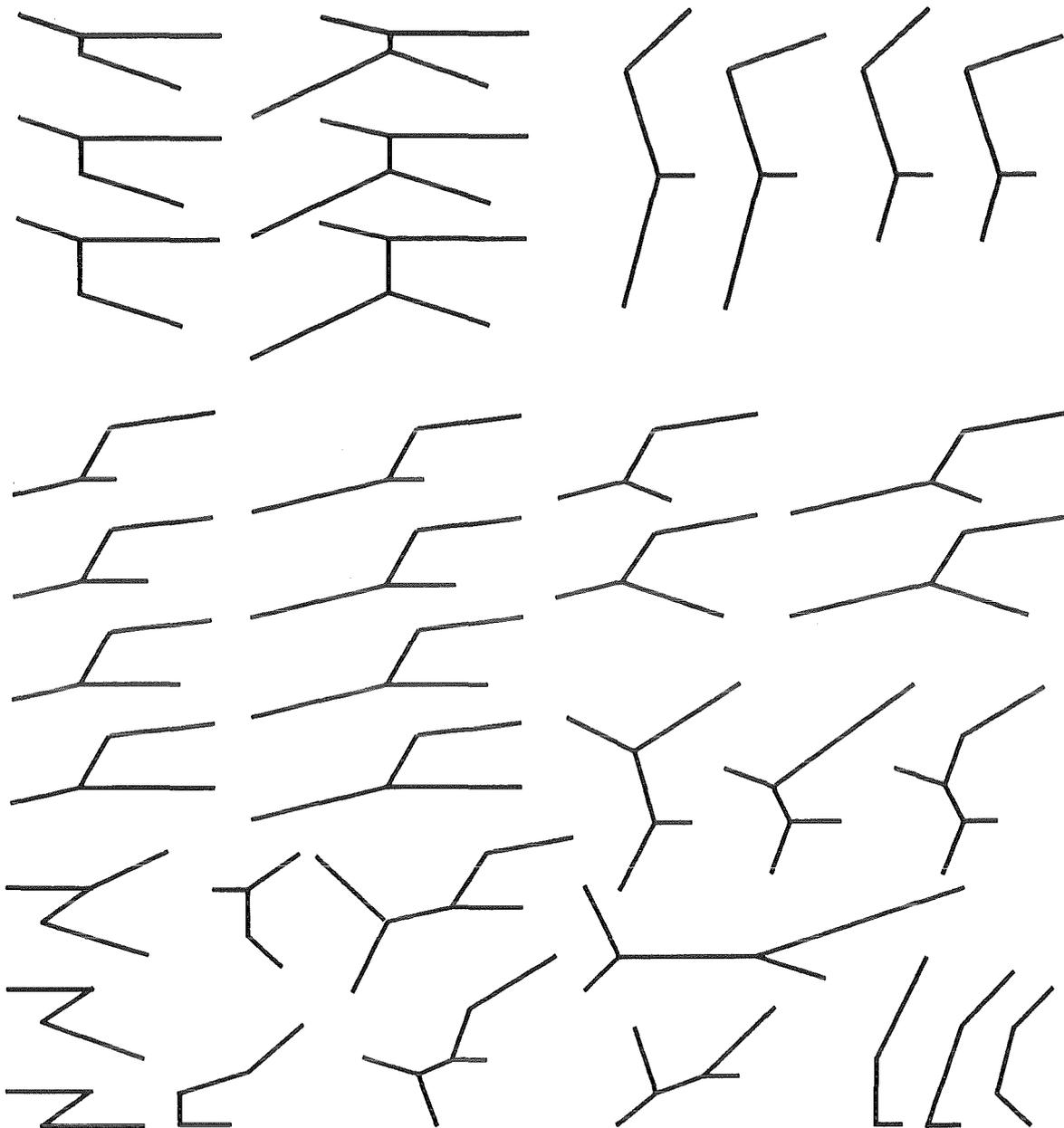


Abbildung 6-4. Auswahl der mit BEM analysierten Risse

wird nur im Fall C verwendet und ist ein Maß dafür, wie weit der Endpunkt A von dem restlichen Riß überdeckt wird. Mit größer werdendem  $C_4$  nimmt der Spannungsfaktors ab.

- Der Winkel  $\eta$  gibt eine zusätzliche Information zur Lage des entlastenden Punktes E in Bezug zum Punkt A. Tendenziell nimmt die entlastende Wirkung des Punktes E auf den Punkt A mit kleineren Winkel  $\eta$  zu.
- Der Winkel  $\psi$  ist ein Maß für die gegenseitige Richtung der Randkanten an den Punkten A und E. Bei der Auswahl der Risse wurde  $\psi$  im Bereich  $-27^\circ < \psi < 72^\circ$  variiert. Mit steigenden positiven Werten  $\psi$  nimmt die abschirmende Wirkung des Punktes E auf den Punkt A ab.

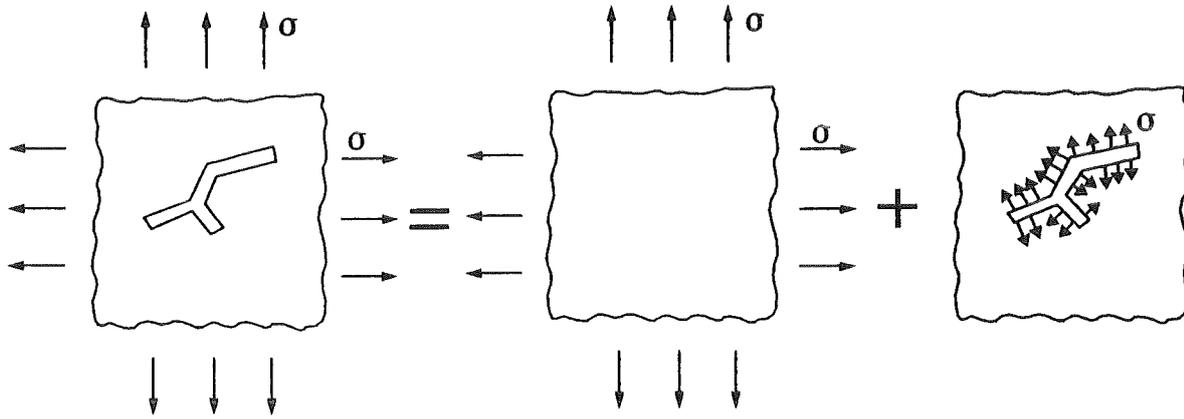


Abbildung 6-5. BEM-Analysen. Umrechnung der äußeren Belastung in äquivalente Rißuferbelastungen.

Als Geometrie Kenngröße des verzweigten Risses, die prinzipiell mit  $K_{II}$  am Endpunkt A korrelieren sollte, wird ein Vektor der Unsymmetrie  $\vec{r}$  wie folgt eingeführt: Durch die x-Achse wird der Riß in einen oberen und einen unteren Teil zerlegt. Für beide Teile wird der Linienschwerpunkt  $S^{oben}$  und  $S^{unten}$  bestimmt, wobei die Randkante am Punkt A unberücksichtigt bleibt. Die Komponenten von  $\vec{r}$  ergeben sich aus

$$\begin{aligned} r_x &= x_S^{unten} - x_S^{oben} \\ r_y &= y_S^{unten} + y_S^{oben} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Für einen symmetrischen Riß gilt:  $\vec{r} = \vec{0}$ . Der Wichtungsfaktor  $k_2$  in (6.7) wird in Abhängigkeit von der Geometriegröße

$$C_6 = \frac{|\vec{r}|}{l_{b2}} \quad (6.12)$$

bestimmt. Das Vorzeichen von  $K_{II}$  korreliert mit der Richtung von  $\vec{r}$ , die durch

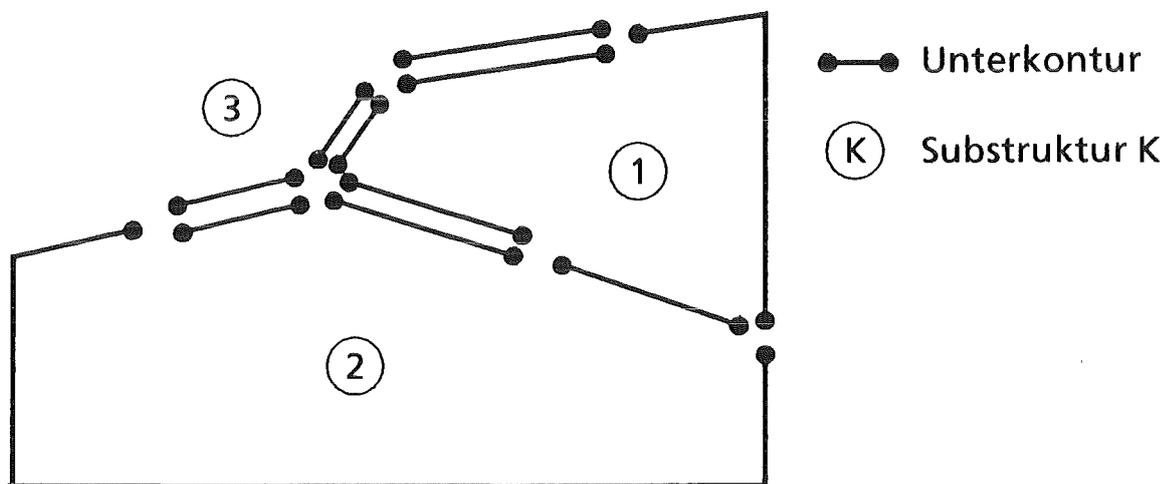


Abbildung 6-6. BEM-Analysen. Beispiel einer Diskretisierung (ohne Elementunterteilung)

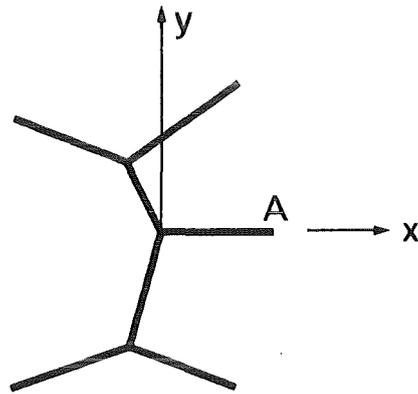


Abbildung 6-7. Riß mit entlastenden Rißzweigen oben und unten

$$\varphi = \arctan \frac{r_y}{r_x} \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (6.13)$$

gegeben ist. Bei einer Spiegelung des Risses um die x-Achse (vgl. Abb. 6-3) bleibt  $C_6$  unverändert und  $\varphi$  ändert sich um  $\pm \pi$ . Dadurch läßt sich mit diesen geometrischen Kenngrößen ein Ansatz zur Berechnung der effektiven Rißlänge  $a_{eff II}$  aufbauen, der den o.g. Forderungen hinsichtlich der Symmetrie entspricht.

#### *BEM-Analysen an ebenen verzweigten Rissen*

Zunächst wurden 85 Risse bestehend aus bis zu sechs geraden Kanten mit höchstens einem Entlastungspunkt E analysiert, um Abhängigkeiten der Wichtungsfaktoren von der Rißgeometrie in der allgemeinen Form

$$k_b, k_e, k_c, k_2 = f(C_1, C_3, C_4, C_6, \eta, \psi, \varphi) \quad (6.14)$$

zu erhalten. Die Geometrie wurde ausgehend von Formen, die in den Experimenten häufig auftraten, gezielt variiert. In Abb. 6-4 ist eine Auswahl der untersuchten Risse gezeigt.

Bei der Anwendung der erhaltenen Formeln hat sich gezeigt, daß Rißenden, die auf beiden Seiten von entlastenden Rißzweigen abgeschirmt werden (Punkt A in Abb. 6-7), zu hoch bewertet wurden. Deshalb wurden weitere 33 Risse bestehend aus sieben geraden Kanten der Form entsprechend Abb. 6-7 mit der BEM berechnet und ausgewertet.

Zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren wurde das BEM-Programm ATHENE [24] verwendet, das am Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik, Außenstelle Halle, entwickelt wurde. Der vorliegende äquibiaxiale Zugspannungszustand wurde in eine äquivalente Rißuferbelastung umgerechnet (vgl. Abb. 6-5), weil dadurch die Einbindung des Risses in eine unendliche äußere Substruktur möglich ist. Abb. 6-6 zeigt das BEM-Modell des in Abb. 6-5 dargestellten Risses. Im Programm ATHENE werden Dreiknotenelemente mit

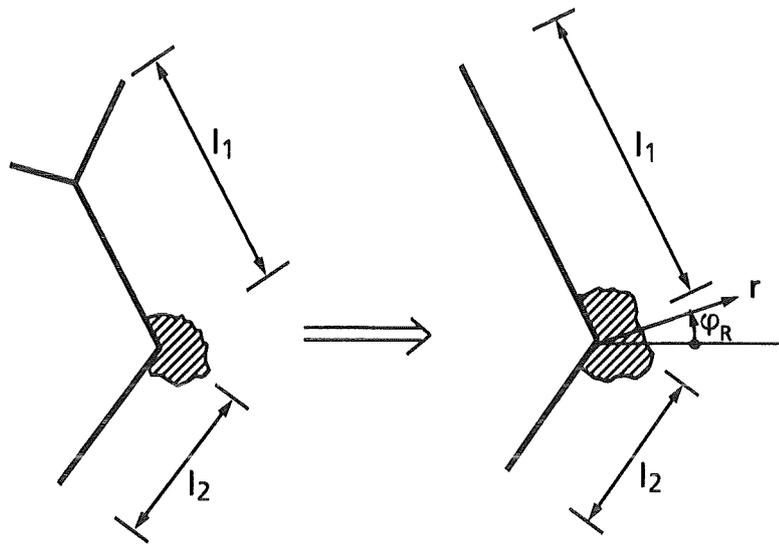


Abbildung 6-8. Ersatzriß zur Berechnung des Spannungszustandes am Knickpunkt

quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Die Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren erfolgt mittels knotendistordierter Elemente.

Eine Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Wichtungsfaktoren ist für Mode I im Anhang B und für Mode II im Anhang C zu finden.

### 6.2.3 Spannungszustand an Knickpunkten verzweigter Risse

Zur Berechnung der Beanspruchungsgröße  $B$  nach (6.1) ist die Kenntnis des Spannungszustandes nur in der Umgebung des Knickpunktes erforderlich. Als einzige geometrische Randbedingung tritt der Öffnungswinkel am Knickpunkt auf. Deswegen kann die grundsätzliche Untersuchung zunächst an einem einfachen abgeknickten Ersatzriß geführt werden, wobei Annahmen zu treffen sind, wie aus dem tatsächlich vorhandenen Riß der Ersatzriß zu bilden ist. Als Näherung werden hier die Schenkellängen gleich den maximalen Ausdehnungen des Risses in deren Richtungen gesetzt (vgl. Abb. 6-8). Der lokale Spannungszustand in der Umgebung des Knickpunktes hängt damit nur von den Geometriegrößen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $\varphi_R$  ab, da die äußere Belastung mit dem äquibiaxialen Spannungszustand feststeht.

Zunächst wird von dem so festgelegten Ersatzriß ausgegangen und die Spannungsverteilung in der Umgebung des Knickpunktes berechnet. Die Spannungskomponenten ergeben sich allgemein aus der Airy'schen Spannungsfunktion [25] zu:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi} \\
\sigma_\varphi &= F_{,rr} \\
\tau_{r\varphi} &= - \left( \frac{1}{r} F_{,\varphi} \right)_{,r}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Die Spannungsfunktion  $F$  ist eine Bipotentialfunktion, d.h. es gilt:

$$\Delta\Delta F = 0 \quad , \tag{6.16}$$

wobei  $\Delta$  der Laplaceoperator ist. Ausgehend von einem Separationsansatz ist Gl. (6.16) erfüllt für:

$$\begin{aligned}
F &= F_s + F_a \\
\text{mit} \\
F_s &= r^{-\lambda+2} [A_1 \cos \lambda\varphi + A_2 \cos (2-\lambda)\varphi] \\
F_a &= r^{-\lambda+2} [B_1 \sin \lambda\varphi + B_2 \sin (2-\lambda)\varphi]
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Die Aufteilung des Spannungszustandes in einen symmetrischen ( $F_s$ ) und einen antimetrischen ( $F_a$ ) Anteil ist zweckmäßig. Aus den Randbedingungen, d.h. aus der Spannungsfreiheit der Reißflanken, folgt zur Bestimmung der Konstanten  $A_k$  und  $B_k$  je Anteil ein homogenes Gleichungssystem, das nur dann eine nichttriviale Lösung hat, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese Bedingung liefert die Eigenwertgleichungen zur Bestimmung der Exponenten  $\lambda$  in Abhängigkeit vom Randwinkel  $\varphi_R$ :

$$\begin{aligned}
&\text{symmetrischer Anteil:} \\
(2-\lambda) \sin (2-\lambda)\varphi_R \cos \lambda\varphi_R - \lambda \sin \lambda\varphi_R \cos (2-\lambda)\varphi_R &= 0
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
&\text{antimetrischer Anteil:} \\
(2-\lambda) \sin \lambda\varphi_R \cos (2-\lambda)\varphi_R - \lambda \sin (2-\lambda)\varphi_R \cos \lambda\varphi_R &= 0
\end{aligned}$$

Zu jedem Randwinkel  $\varphi_R$  gibt es unendlich viele Eigenwerte  $\lambda_i$ , die, eingesetzt in (6.17) und (6.15), je ein Reihenglied für die Spannungen in der Darstellung (6.1) liefern. In bestimmten Bereichen des Randwinkels  $\varphi_R$  treten konjugiert komplexe Eigenwerte  $\lambda_i = \alpha_i \pm i \beta_i$  auf. Das entsprechende Reihenglied für die Spannung  $\sigma_\varphi$  ergibt sich dann zu [26]:

$$\sigma_{\varphi_i} = r^{-\alpha_i} [a_i(\varphi) \cos (\beta_i \ln r) + b_i(\varphi) \sin (\beta_i \ln r)] \quad , \tag{6.19}$$

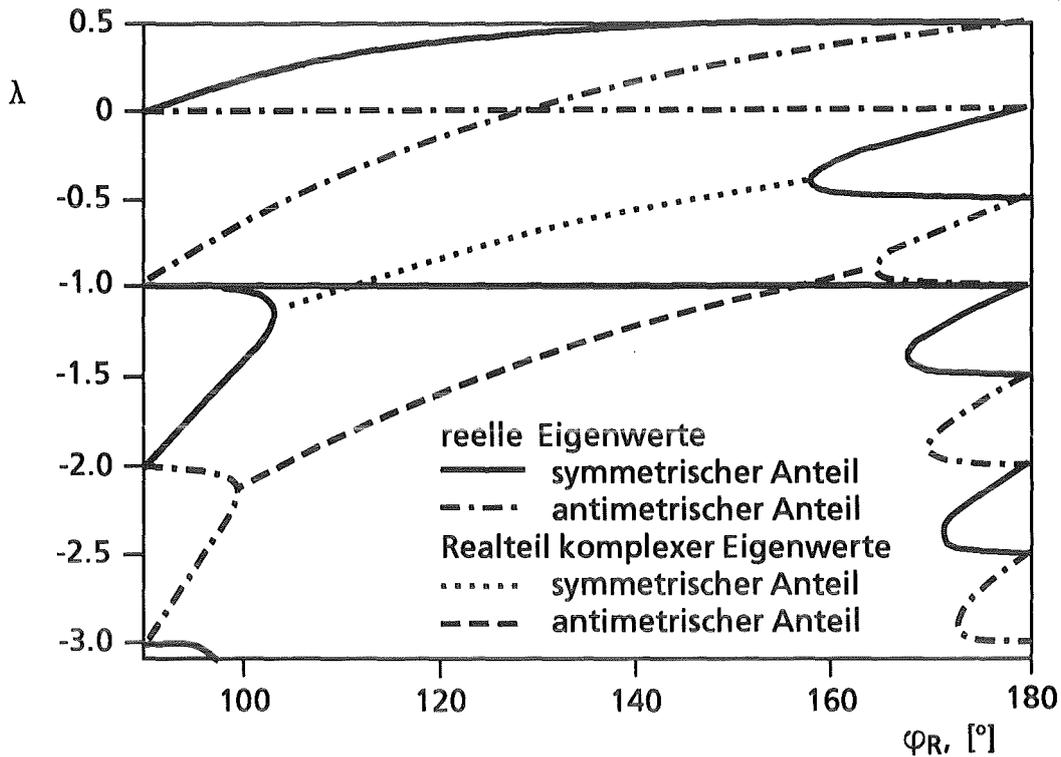


Abbildung 6-9. Eigenwerte in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel  $\varphi_R$

wobei  $a_i(\varphi)$  und  $b_i(\varphi)$  Funktionen des Winkels  $\varphi$  sind. In Abb. 6-9 sind im interessierenden Bereich des Randwinkels  $\varphi_R$  alle reellen und ein Teil der Realteile komplexer Eigenwerte  $\lambda_i$  im Bereich  $-3 \leq \lambda_i \leq 0,5$  dargestellt. Da bei den komplexen Eigenwerten die Realteile negativ sind, liefern die entsprechenden Reihenglieder nach (6.19) keine singulären Spannungsanteile.

Für die Näherungslösung im Rahmen des bruchmechanischen Modells wurden je ein symmetrischer (Index s) und ein antisymmetrischer (Index a) reeller Eigenwert mit den dazugehörigen Eigenfunktionen verwendet. Die Spannungsverteilung ergibt sich damit zu:

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = K_s r^{-\lambda_s} g_s(\varphi) + K_a r^{-\lambda_a} g_a(\varphi)$$

mit (6.20)

$$K_i = \sigma l_2^{\lambda_i} h_i\left(\varphi_R, \frac{l_1}{l_2}\right) \quad \text{für beide Reihenglieder.}$$

Dabei ist  $\sigma$  die Spannung des vorliegenden äquibiaxialen Spannungszustandes und  $h_i(\varphi_R, l_1/l_2)$  eine dimensionslose Funktion zur Berücksichtigung der Geometrie des Ersatzrisses.

Zur Verwendung von Gleichung (6.20) im Simulationsalgorithmus ist ein analytischer Zusammenhang zwischen Normalspannung  $\sigma_\varphi$  und Randwinkel  $\varphi_R$  wünschenswert. Deswegen

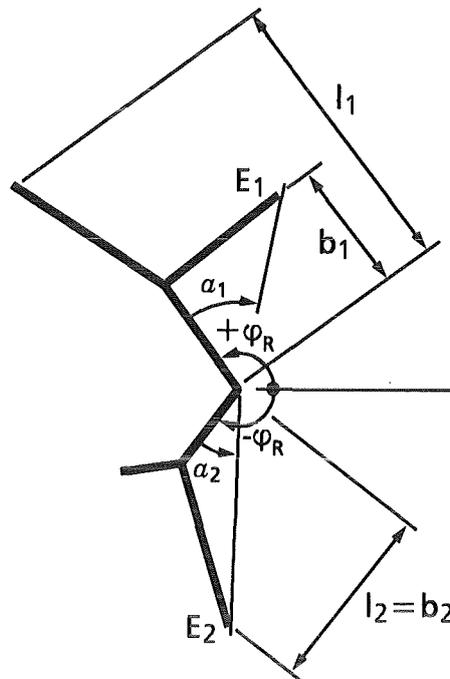


Abbildung 6-10. Untersuchung von Abschirmungen an Knickpunkten. Charakterisierung der Geometrie abschirmender Rißzweige.

werden die punktweise ermittelten Exponenten durch folgende Gleichungen angenähert (vgl. Abb. 6-9):

$$\lambda_s = 0.5 \left[ 1 - \left( 2 - \frac{\varphi_R}{90^\circ} \right)^{3.6537} \right] \quad (6.21)$$

$$\lambda_a = 0.5 - 1.157 \left( 1 - \frac{\varphi_R}{180^\circ} \right) - 6.79 \left( 1 - \frac{\varphi_R}{180^\circ} \right)^{2.95} .$$

Die Winkelfunktionen lassen sich aus (6.15), (6.17) und unter Verwendung der Randbedingungen ableiten:

$$g_s(\varphi) = (2 - \lambda_s)(1 - \lambda_s) \left[ \cos \lambda_s \varphi - \frac{\cos \lambda_s \varphi_R}{\cos (2 - \lambda_s) \varphi_R} \cos (2 - \lambda_s) \varphi \right] \quad (6.22)$$

$$g_a(\varphi) = (2 - \lambda_a)(1 - \lambda_a) \left[ \sin \lambda_a \varphi - \frac{\sin \lambda_a \varphi_R}{\sin (2 - \lambda_a) \varphi_R} \sin (2 - \lambda_a) \varphi \right] .$$

Zur Ermittlung der Funktionen  $h_s$  und  $h_a$  vom Randwinkel  $\varphi_R$  und vom Längenverhältnis  $l_1/l_2$  der Schenkel des Ersatzrisses wurden BEM-Rechnungen durchgeführt. Eine Zusammenstellung der einzelnen Formeln ist im Anhang D angegeben.

Es hat sich gezeigt, daß die Näherung basierend auf dem hier eingeführten Ersatzriß sehr ungenau wird und stets zu große Spannungswerte liefert, wenn der betrachtete Knickpunkt durch bestimmte Rißzweige abgeschirmt wird. Deswegen sind zur Korrektur dieses systematischen Fehlers zusätzliche Untersuchungen mit dem Ziel einer Erweiterung der bisherigen Ergebnisse durchgeführt worden.

In der Formel (6.20) für den Spannungsverlauf  $\sigma_\varphi$  geht die Rißgeometrie in die Faktoren  $k_i$  ein. Diese werden jetzt durch einen zusätzlichen Faktor  $k_i(p_j)$  ergänzt:

$$K_i = \sigma l_2^{\lambda_i} h_i \left( \varphi_R, \frac{l_1}{l_2} \right) k_i(p_j) \quad . \quad (6.23)$$

Dabei sind  $p_j$  noch zu definierende Geometrie Größen zur Beschreibung der den betrachteten Knickpunkt abschirmenden Rißzweige. Zur Erläuterung soll der Riß in Abb. 6-10 betrachtet werden. Zur Charakterisierung abschirmender Rißzweige werden die jeweiligen Endpunkte  $E_1$  auf der längeren Seite und  $E_2$  auf der kürzeren Seite herangezogen. Deren Lage ist durch die Größen  $b_1, \alpha_1, b_2, \alpha_2$  eindeutig festgelegt. Gibt es auf einer Seite mehrere solcher Punkte, wird als maßgebender Entlastungspunkt derjenige mit dem größten Winkel  $\alpha_i$  gewählt. Als Entlastungspunkte werden nur Endpunkte betrachtet, die positive  $\alpha_i$  haben. Als Geometrieparameter  $p_j$  werden die bezogenen Größen  $\alpha_1/\varphi_R, b_1/l_1, \alpha_2/\varphi_R, b_2/l_2$  verwendet. Die einzelnen Formeln  $k_i = f(p_j)$  sind aus BEM-Analysen an einer großen Anzahl von Rissen ermittelt worden und ebenfalls im Anhang D zusammengestellt.

#### 6.2.4 Zur Genauigkeit der Näherungsformeln

Für die Rißenden läßt sich allgemein folgende Aussage treffen: Die Ergebnisse des Falles A sind genauer als die Ergebnisse von Fall B, der wiederum genauer ist als Fall C. Die Ergebnisse aus Mode I sind genauer als die Ergebnisse von Mode II. Allerdings sind im Fall A und teilweise im Fall B die  $K_{II}$ -Faktoren wesentlich kleiner als die  $K_I$ -Werte, so daß hier größere Fehler tolerierbar sind.

Durch die Fehlerhistogramme im Anhang B und C ist ein Eindruck über die Genauigkeit vermittelt. Es ist allerdings damit zu rechnen, daß die Fehler zunehmen werden, wenn kompliziertere bzw. umfangreichere Rißgeometrien betrachtet werden. Außerdem ist es nicht möglich, für einen gegebenen Riß eine Aussage zur Genauigkeit der mit den hier vorgestellten Näherungsformeln berechneten K-Faktoren zu treffen. Es kann aber davon ausgegangen werden, daß für eine große Anzahl von Rissen mit nicht zu stark von den untersuchten Rissen abweichender Geometrie sich eine ähnliche Fehlerverteilung wie im Anhang gezeigt ergibt.

Eine quantitative Aussage zur Genauigkeit der Formeln für die Knickpunkte ist nicht einfach möglich. Eine Verbesserung der Genauigkeit wurde durch die Berücksichtigung von Abschirmeffekten erreicht. Bei den hierzu untersuchten Rissen betrug die Abweichung zwischen den BEM-Ergebnissen und den Näherungsformeln in 70% der Fälle weniger als 50%.

## 6.3 Untersuchungen zur Rißwechselwirkung

Durch die bisherigen Betrachtungen wurden bereits Wechselwirkungen zweier Risse berücksichtigt, wenn diese durch eine angrenzende nicht versagte Kante verbunden sind.

In diesem Abschnitt sollen Wechselwirkungen von Rissen untersucht werden, die räumlich benachbart, aber nicht durch eine Kante verbunden sind. Die Berücksichtigung derartiger Wechselwirkungen kann insbesondere bei den verwendeten POISSON-VORONOI-Mosaiken von Bedeutung sein, da diese sich häufig durch eine große Zahl relativ kurzer Kanten auszeichnen.

Entsprechend Gleichung (6.4) werden zwei verzweigte Risse mit den in Kapitel 6.3 beschriebenen Verfahren durch zwei gerade Risse mit den effektiven Rißlängen  $a_1$  und  $a_2$  ersetzt. Aufgrund dieser Vereinfachung ergibt sich die Aufgabe, die Wechselwirkung zweier gerader Risse in Abhängigkeit von ihrer geometrischen Lage zueinander zu untersuchen.

Die Ermittlung von Formeln, die die gegenseitige Beeinflussung der Risse vollständig beschreiben, ist mit einer sehr großen Anzahl von BEM-Rechnungen verbunden und wird daher im Rahmen dieses Vorhabens nicht angestrebt.

Für die Anwendung im Simulationsprogramm ist es wichtig, qualitativ unterschiedliches Verhalten bei Berücksichtigung von Rißwechselwirkungen gegeneinander abzugrenzen. Daher werden in diesem Abschnitt speziell ausgewählte Geometrien untersucht. Dabei wird die Wirkung eines Risses auf einen anderen Riß in Abhängigkeit von verschiedenen Geometrieparametern untersucht. Qualitativ kann durch den anderen Riß die Belastung am betrachteten Rißende in unterschiedlicher Weise geändert werden. Es wird die folgende Unterteilung getroffen:

- Verstärkung
- Abschirmung
- keine Wechselwirkung.

Zur Beschreibung dieser drei Bereiche in der Umgebung des betrachteten Riendes werden aus den BEM-Rechnungen Näherungsformeln für den Faktor  $F_N$  der Wechselwirkung mit den Nachbarrissen abgeleitet, die für das bruchmechanische Modell verwendet werden. Dabei muß ein sinnvolles Verhältnis von Aufwand und Nutzen eingegangen werden. Als Ergebnis wird angestrebt, anhand der Simulationsrechnungen mit Rißwechselwirkungen abzuschätzen, inwiefern eine Berücksichtigung der Rißwechselwirkungen notwendig ist.

### 6.3.1 Definition der geometrischen Parameter

Zur Beschreibung der Geometrie für den Fall zweier wechselwirkender Risse werden die Bezeichnungen aus Abb. 6-11 verwendet.

Das Koordinatensystem wird in den Mittelpunkt des Risses 1 gelegt.

Die Geometrie ist festgelegt durch die Größen:

- $a_1, a_2$ , als halbe Rißlängen der beiden Risse

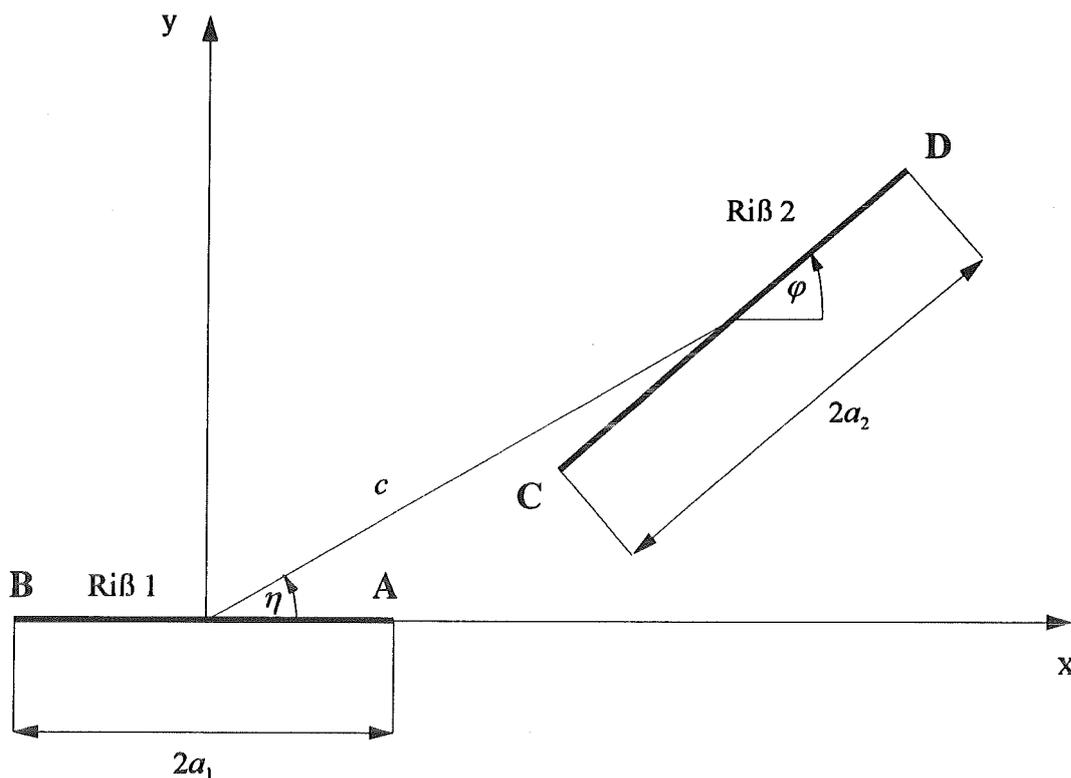


Abbildung 6-11. Geometrie zweier wechselwirkender Risse

- $c, \eta$ , Lage des Mittelpunktes des Risses 2
- $\varphi$  relative Orientierung der beiden Risse.

Die Endpunkte der beiden Risse werden folgendermaßen bezeichnet: A kennzeichnet das Reißende auf der positiven x-Achse, B das auf der negativen. C hat immer den zahlenmäßig kleineren x-Wert, D den größeren, sind beide gleich, so hat C den kleineren y-Wert, wenn  $\varphi$  positiv ist bzw. den größeren Wert, wenn  $\varphi$  negativ ist.

Bei der Analyse der BEM-Ergebnisse gilt das Interesse der Wirkung des zweiten Risses auf das Reißende A. In diesem Sinne stellt der Punkt B nur ein fiktives Reißende dar. Außerdem wird nur der Mode-I-Anteil ausgewertet.

Nach Gleichung (6.4) lautet der K-Faktor des Risses 1 mit der effektiven Reißlänge  $a_1$  für das Reißende A:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a_1} Y_A ,$$

wobei die Geometriefunktion  $Y_A$  den Einfluß des Risses 2 auf das Reißende A beschreibt:

$$Y_A = Y_A\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \eta, \varphi\right) . \quad (6.24)$$

Da die Lage des Risses 2 zunächst beliebig ist, ergeben sich für die Geometrieparameter folgende Wertebereiche:  $0 < a_2/a_1 < \infty$ ,  $0 < c/a_1 < \infty$ ,  $-180^\circ < \eta \leq 180^\circ$ ,  $-90^\circ < \varphi \leq 90^\circ$ .

### 6.3.2 Symmetrierelationen

Um die berechneten K-Faktoren der Rißenden B, C, und D nutzen zu können, werden Symmetriebeziehungen der beiden Risse ausgenutzt. Ausgangspunkt ist Abb. 6-11 mit dem Mittelpunkt des Risses 2 im ersten Quadranten. Es ergeben sich folgende Symmetriebeziehungen für die Geometriefunktionen:

Spiegelung an der x-Achse:

$$Y\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, -\eta, -\varphi\right) = Y\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \eta, \varphi\right), \quad (6.25)$$

wobei als Index der Geometriefunktion Y die Bezeichnungen der Rißenden A, B, C oder D stehen können und diese auf beiden Seiten der Gleichung gleich sind.

Spiegelung an der y-Achse:

$$\begin{aligned} Y_{A/B}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \pi - \eta, -\varphi\right) &= Y_{B/A}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \eta, \varphi\right), \\ Y_{C/D}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \pi - \eta, -\varphi\right) &= Y_{D/C}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{c}{a_1}, \eta, \varphi\right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

d.h. die Rißenden eines Risses werden vertauscht.

Mit diesen beiden Symmetriebetrachtungen läßt sich der Wertebereich des Winkels  $\eta$  der zu berechnenden Ausgangsgeometrien auf den ersten Quadranten ( $0 \leq \eta \leq 90^\circ$ ) einschränken.

Um weitere Symmetrierelationen zu erhalten, kann man die Risse vertauschen, das Koordinatensystem in den Riß 2 verlegen und analoge Symmetriebetrachtungen anstellen, wie in Abb. 6-12 angedeutet. Wenn der Punkt C die zu bewertende Rißspitze ist, ergeben sich folgende Geometrienumrechnungen:

$$\begin{aligned} a_{1/2}' &= a_{2/1}, \\ c' &= c, \\ \eta' &= \varphi - \eta, \\ \varphi' &= \varphi. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dabei beziehen sich die mit einem Strich versehenen Größen auf das Modell mit dem Koordinatensystem im Mittelpunkt von Riß 2.

Für die Geometriefunktionen Y ergeben sich aus den Symmetriebetrachtungen die folgenden Beziehungen:

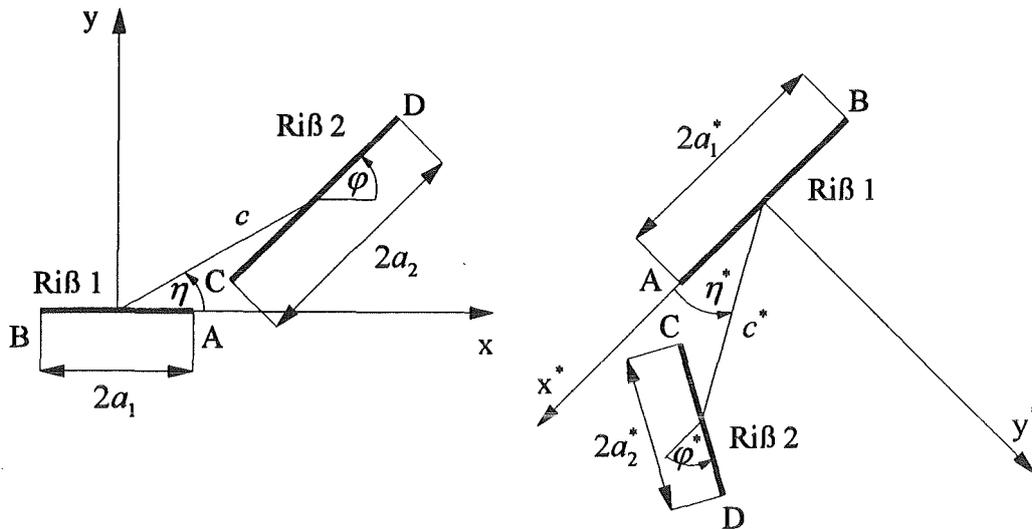


Abbildung 6-12. Verlegung des Koordinatensystems in Riß 2 und Spiegelung

$$\begin{aligned}
 Y'_{A/C} \left( \frac{a_2'}{a_1'}, \frac{c'}{a_1'}, \eta', \varphi' \right) &= Y_{C/A} \left( \frac{a_1}{a_2}, \frac{c}{a_2}, \varphi - \eta, \varphi \right) . \\
 Y'_{B/D} \left( \frac{a_2'}{a_1'}, \frac{c'}{a_1'}, \eta', \varphi' \right) &= Y_{D/B} \left( \frac{a_1}{a_2}, \frac{c}{a_2}, \varphi - \eta, \varphi \right) .
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

Bei Anwendung dieser Relationen kann es vorkommen, daß der Winkel  $\eta'$  negativ wird. In diesem Fall kann man durch Spiegelung an der x-Achse erreichen, daß  $\eta$  positiv wird und somit der ursprüngliche Wertebereich erhalten bleibt.

Unter Ausnutzung aller Symmetrierelationen kann man die Berechnungen auf den folgenden Wertebereich beschränken:

$$\begin{aligned}
 1 &< \frac{a_2}{a_1} < \infty \\
 0 &< \frac{c}{a_1} < \infty \\
 0^\circ &< \eta \leq 90^\circ \\
 -90^\circ &< \varphi \leq 90^\circ
 \end{aligned}
 \tag{6.29}$$

Die beschriebenen Symmetriebeziehungen gestatten es, die durch die BEM-Berechnungen gelieferten K-Faktoren für die Punkte A, B, C, und D zu nutzen und für entsprechende Geometrieparameter, die auch außerhalb des in (6.29) definierten Bereiches liegen können, dem Wertebereich von  $Y_A$  zuzuordnen.

Tabelle 6-1 gibt das diesbezügliche Umrechnungsschema wieder, wobei sich die umgerechneten Größen auf den Fall beziehen, daß die Rißspitze (A, B, C oder D) die zu bewertende Rißspitze ist.

Rißspitze	$\varphi$ umgerechnet	$\eta$ umgerechnet
A	$\varphi$	$\eta$
B	$-\varphi$	$180^\circ - \eta$
C	$\pm\varphi$	$\pm(\varphi - \eta)$
D	$\mp\varphi$	$\pm(180^\circ - \varphi + \eta)$

Tabelle 6-1. Umrechnung der Geometrieparameter über Symmetrietransformationen

Dabei ist das Vorzeichen so zu wählen, daß  $\eta$  positiv ist.

Damit ist es ausreichend, sich bei den BEM-Rechnungen auf den oben angegebenen Bereich zu beschränken.

In der Untersuchung wird die Wechselwirkung des Risses 2 auf das Reißende A analysiert. Bei der Auswertung der BEM-Rechnungen wird eine Unterscheidung in vier Bereiche vorgenommen, um eine mögliche Differenzierung zu erleichtern. Die Bereiche unterscheiden sich durch die Größe des Winkels  $\varphi$  sowie durch die Größe des Winkels  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Fall A: } & 0^\circ \leq \eta \leq 90^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\
 \text{Fall B: } & 0^\circ \leq \eta \leq 90^\circ, \quad -90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ \\
 \text{Fall C: } & 90^\circ < \eta \leq 180^\circ, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\
 \text{Fall D: } & 90^\circ < \eta \leq 180^\circ, \quad -90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ
 \end{aligned}
 \tag{6.30}$$

Durch eine Spiegelung an der x-Achse erhält man den vollständigen Wertebereich der Voll-ebene für die Parameter.

### 6.3.3 Bestimmung der Verstärkungs- und Abschirmbereiche

Die Geometriefunktionen selbst unter Ausnutzung der Symmetrierelationen vollständig zu bestimmen, ist wegen der Abhängigkeit der vier Parameter immer noch mit einer sehr großen Anzahl von BEM-Rechnungen verbunden. Daher werden nur einige ausgewählte Geometrien untersucht, in welchen Bereichen Verstärkung, Abschirmung oder keine Wechselwirkung auftritt, um in einer Verallgemeinerung der Ergebnisse Näherungsformeln für das Simulationsmodell aufzustellen.

Abweichungen der Geometriefunktion  $Y_A$  von bis zu 10% gegenüber der Geometriefunktion des Einzerrisses ( $Y_A = 1$ ) können im Simulationsprogramm vernachlässigt werden. Deshalb werden die folgenden Bereichsgrenzen vorgegeben:

- Verstärkung für:  $Y_A \geq 1.1$ ,
- Abschirmung für:  $Y_A \leq 0.9$ ,
- vernachlässigbare Wechselwirkung für:  $0.9 < Y_A < 1.1$ .

Bei konstantem Rißlängenverhältnis und konstanten Winkel  $\varphi$  wird untersucht, in welchen Bereichen der x-y-Ebene sich der Punkt C bzw. D des Risses 2 befinden kann, damit das Reißende A beeinflusst wird. Die untersuchten Geometrien sind in Tabelle 6-2 zusammengestellt.

Fall	$a_2/a_1$	$\varphi$
1	1	0°
2	1	45°
3	2	30°
4	0.5	30°
5	2	60°

Tabelle 6-2. Geometrie der untersuchten Fälle

Im Fall 5 wurde nur die Abschirmung und diese in einem Teilbereich (Fall B) untersucht. Die Festlegung der Geometrie erfolgte für jeden weiteren Fall unter Einbeziehung der Ergebnisse der schon untersuchten Fälle. Ziel war, mit wenigen Fällen einen möglichst großen Bereich des Rißlängenverhältnisses und  $\varphi$  zu untersuchen.

Für den Fall 1 lagen Ergebnisse aus der Literatur vor, die im folgenden erläutert werden. Alle anderen Fälle wurden mit der BEM untersucht.

Rißwechselwirkungen sind in der Literatur auf spezielle Rißkonfigurationen beschränkt und meist nur für den Fall einachsiger Belastung angegeben. Zur Berechnung allgemeiner Rißkonfigurationen muß auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden [19], [20], [21], [22].

Den einfachsten Fall stellt dabei die Rißkonfiguration paralleler Risse mit den Geometrieparametern  $\varphi = 0^\circ$ ,  $a_2/a_1 = 1$  dar. In diesem Fall stimmen die Spannungsintensitätsfaktoren für den einachsigen und den äquibiaxialen Zug überein. Diese Konfiguration ist im Handbuch [20] berechnet worden. Dort ist der Verlauf der Geometriefunktionen in Abhängigkeit speziell gewählter Geometrieparameter für die Punkte A und B angegeben. Aufgrund der speziellen Geometrie sind die Geometriefunktionen des Punktes C bzw. D mit denen des Punktes A bzw. B identisch. Anhand dieser Ergebnisse ist es möglich, die Bereichsgrenzen für Verstärkung und Abschirmung zu bestimmen. Abb. 6-13 zeigt die Geometrie der beiden Risse. In [20] sind entlang unterschiedlicher Linien die Geometriefunktionen dargestellt, mit deren Hilfe es möglich ist, die interessierenden Bereiche zu ermitteln und innerhalb der Bereiche Näherungsformeln für den Verstärkungs- bzw. Abschirmfaktor zu bestimmen.

Nach Auswertung aller Diagramme ergaben sich die Bereichsgrenzen für Verstärkung und Abschirmung des Punktes A für die Lage des Reißendes P, wie in Abb. 6-14 dargestellt.

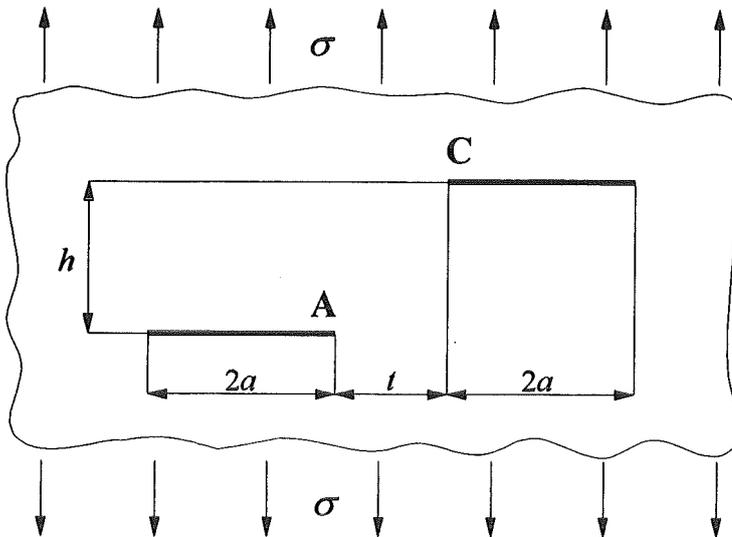


Abbildung 6-13. Geometrie der Risse für den Fall 1

Um einen guten optischen Eindruck der Bereiche zu erhalten, wurden die Bereiche so gezeichnet, daß diese immer einem Punkt des Risses 2 (bezeichnet mit P) zugeordnet werden. Diese Bezeichnung ist nicht identisch mit der Definition des Punktes C in Abb. 6-11, d.h. in der Darstellung wird bei der Änderung des Winkels  $\eta$  (nur dieser Parameter wird geändert) immer die physikalisch gleiche Rißspitze betrachtet. Die in Abb. 6-14 dargestellten Bereiche entstehen durch die Betrachtung eines Proberisses, der in der x-y-Ebene verschoben wird. Liegt das Reißende P im Bereich I, wird der Riß 1 verstärkt, im Bereich II wird er abgeschirmt.

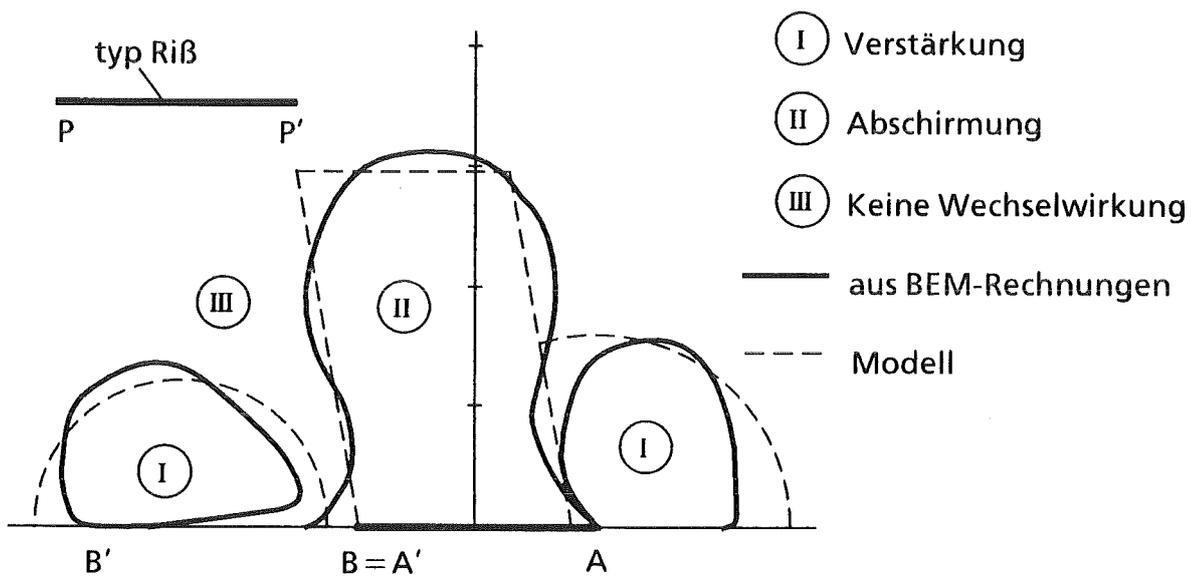


Abbildung 6-14. Verstärkungs- und Abschirmbereich für Fall 1:  $a_2 = a_1$ ,  $\varphi = 0^\circ$

Der Verstärkungsbereich unterteilt sich in zwei Bereiche, einem Bereich um den Punkt A und den um die Rißlänge  $a_1$  verschobenen Punkt B (die Verschiebung kommt dadurch zustande, daß in der Darstellung der gleiche Punkt betrachtet wird, aber in Wirklichkeit die Lage des anderen Rißendes maßgebend ist). Der Abschirmungsbereich läßt sich durch eine glockenförmige Kurve über der gesamten Rißlänge ( $2a_1$ ) beschreiben. Eingezeichnet sind ebenfalls die Bereichsgrenzen, wie sie sich nach der Verallgemeinerung der Berechnungen über die bestimmten Näherungen ergeben. Auf die Herleitung wird weiter unten eingegangen.

Für die Fälle 2 bis 5 wurden die Geometriefunktionen  $Y_A$  mit Hilfe der BEM berechnet. Dazu mußte die Lage des Risses 2 und somit die Parameter  $c$  und  $\eta$  in jeder Rechnung verändert werden. Die Vorgehensweise bestand darin, die Punkte C jeweils auf Geraden der x-y Ebene so vorzugeben, daß das ermittelte Kurvenstück  $Y_A = f(x, y)$  auf den Geraden den 0.9 oder 1.1- Durchgang erfaßte. Damit war dann, analog zur Auswertung für Fall 1, ein Punkt der Bereichsgrenze gegeben.

Wie bereits erläutert, können aus einer BEM-Rechnung durch Spiegelung und Verlegung des Koordinatensystems weitere Ergebnisse für andere Geometrie Größen abgeleitet werden. Mit diesen Umrechnungen läßt sich die Unterteilung in die vier Bereiche nach (6.30) motivieren.

Die aus den BEM-Rechnungen abgeleiteten Bereiche für Verstärkung und Abschirmung sind in Abb. 6-15 bis Abb. 6-18 dargestellt. Die Bereiche ergaben sich ähnlich wie im Fall 1, der betrachtete Bereich wurde jedoch wegen der fehlenden Symmetrie bzgl. der x-Achse auf die gesamte Vollebene ausgedehnt.

In Abb. 6-15 bis Abb. 6-18 werden, wie im Fall 1, die Bereiche der Verstärkung und der Abschirmung bzgl. der Lage einer (physikalischen) Rißspitze des Risses 2 bei Änderung des Geometrieparameters  $\eta$  dargestellt. Zusätzlich wird der Riß 2 als starr bezüglich einer Rotation um seinen Mittelpunkt angenommen. Da  $\varphi$  im gesamten Bereich nur positiv ist, wird, um auch die Ergebnisse der Rechnungen mit negativen  $\varphi$  zu nutzen und den gesamten Wertebereich bei der Analyse abzudecken, der Bereich von  $\eta$  auf alle Quadranten ausgedehnt (d.h.  $\eta$  kann auch negativ sein). Eine entsprechende Umwandlung kann durch Spiegelung an der x-Achse erfolgen. In Abb. 6-15 bis Abb. 6-18 wird demnach die Wirkung eines Risses mit festgelegtem  $\varphi$  und variabler Lage auf den Ausgangsriß durch die Bereiche beschrieben. Anders als im Fall 1 (Abb. 6-14) existiert jeweils ein Bereich, in dem die betrachtete Rißspitze aus geometrischen Gründen nicht liegen kann, da sich die Risse nicht kreuzen oder berühren dürfen.

Charakteristisch sind in allen genannten Abbildungen (Abb. 6-14 bis Abb. 6-18) die Verstärkungsbereiche um die Rißspitze A und um den Punkt B', wobei A'B' der im Winkel  $\varphi$  um  $2a_2$  verschobene Riß 1 ist. Das Parallelogramm ABA'B' deckt somit den Bereich ab, in dem die analysierte Rißspitze des Risses 2 nicht liegen kann. Das bedeutet, daß der Verstärkungsbereich um B' dem Verstärkungsbereich der anderen Rißspitze P' des Risses 2 um B entspricht. (Würde man die Lage der anderen Rißspitze P' bzgl. der Verstärkung/Abschirmung analysieren, so ergäbe sich das identische Bild, nur daß AB in A'B' und umgekehrt übergeht).

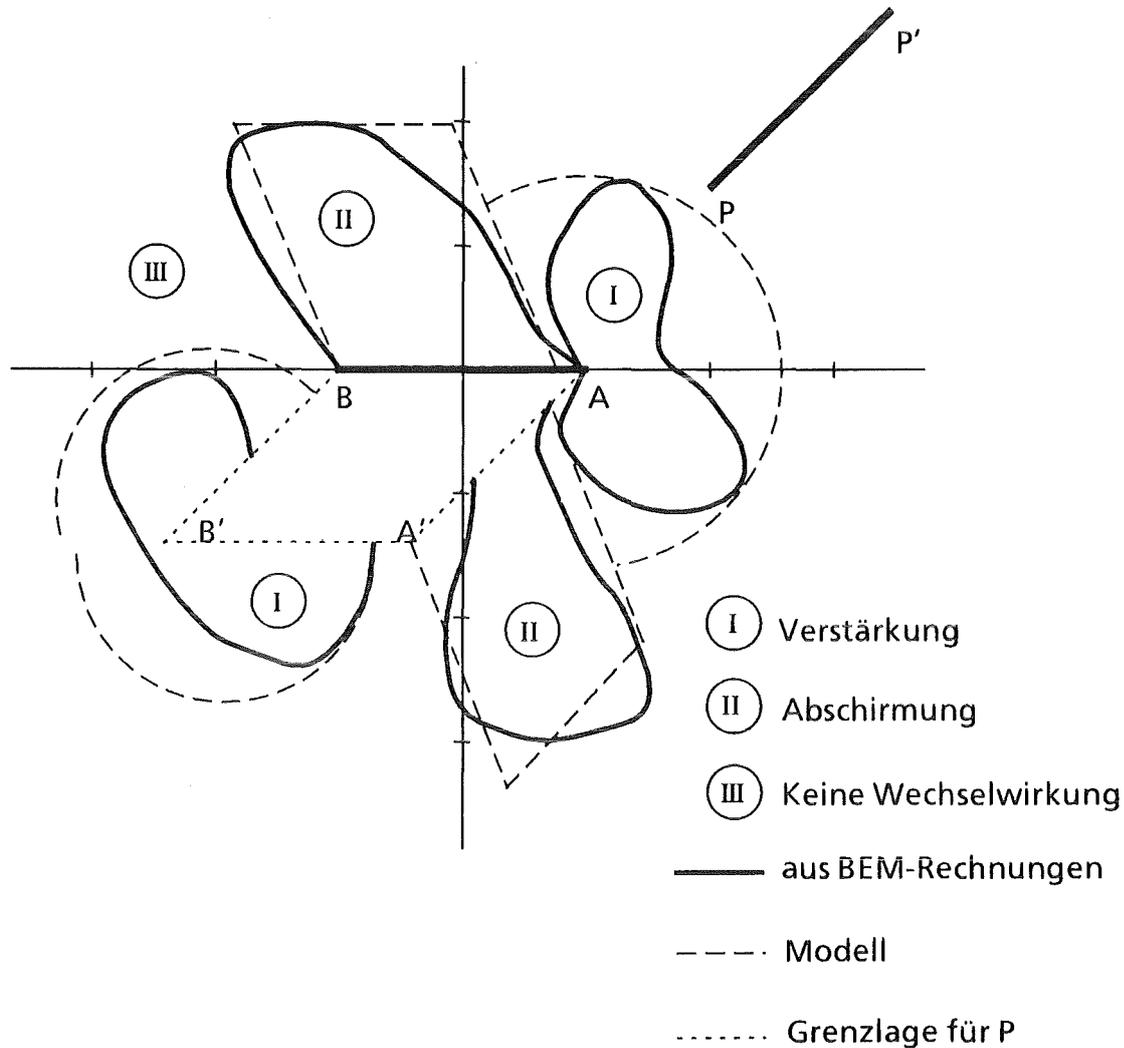


Abbildung 6-15. Verstärkungs- und Abschirmbereich für Fall 2:  $a_2 = a_1$ ,  $\varphi = 45^\circ$

Analog lassen sich die zwei Abschirmungsbereiche analysieren. Wie im Fall 1 existiert ein glockenähnlicher Bereich, der in kurzem Abstand vom Verstärkungsbereich beginnt und sich auf einer Länge von ungefähr der Länge des Risses  $2(2a_2)$  ausdehnt. Zusätzlich ergibt sich im Bereich negativer  $\eta$  ein in der Form und Größe ähnlicher Bereich, wie sich durch Spiegelung an der Achse  $AB'$  zeigen läßt.

### 6.3.4 Ableitung von Näherungen für die Rißwechselwirkung

Nach der eher phänomenologischen Analyse der Größe der Verstärkungsbereiche wird in diesem Unterabschnitt versucht, die erzielten numerischen Ergebnisse zu verallgemeinern, damit diese in das Simulationsmodell einfließen können.

Beim Versuch, mit Hilfe von analytischen Methoden eine Näherungslösung zu bestimmen, muß beachtet werden, daß die zwei Risse, bezogen auf die Rißlänge, nicht mehr im gegenseitigen Nahfeldbereich liegen. Daher ist es notwendig, mit der vollständigen Lösung des

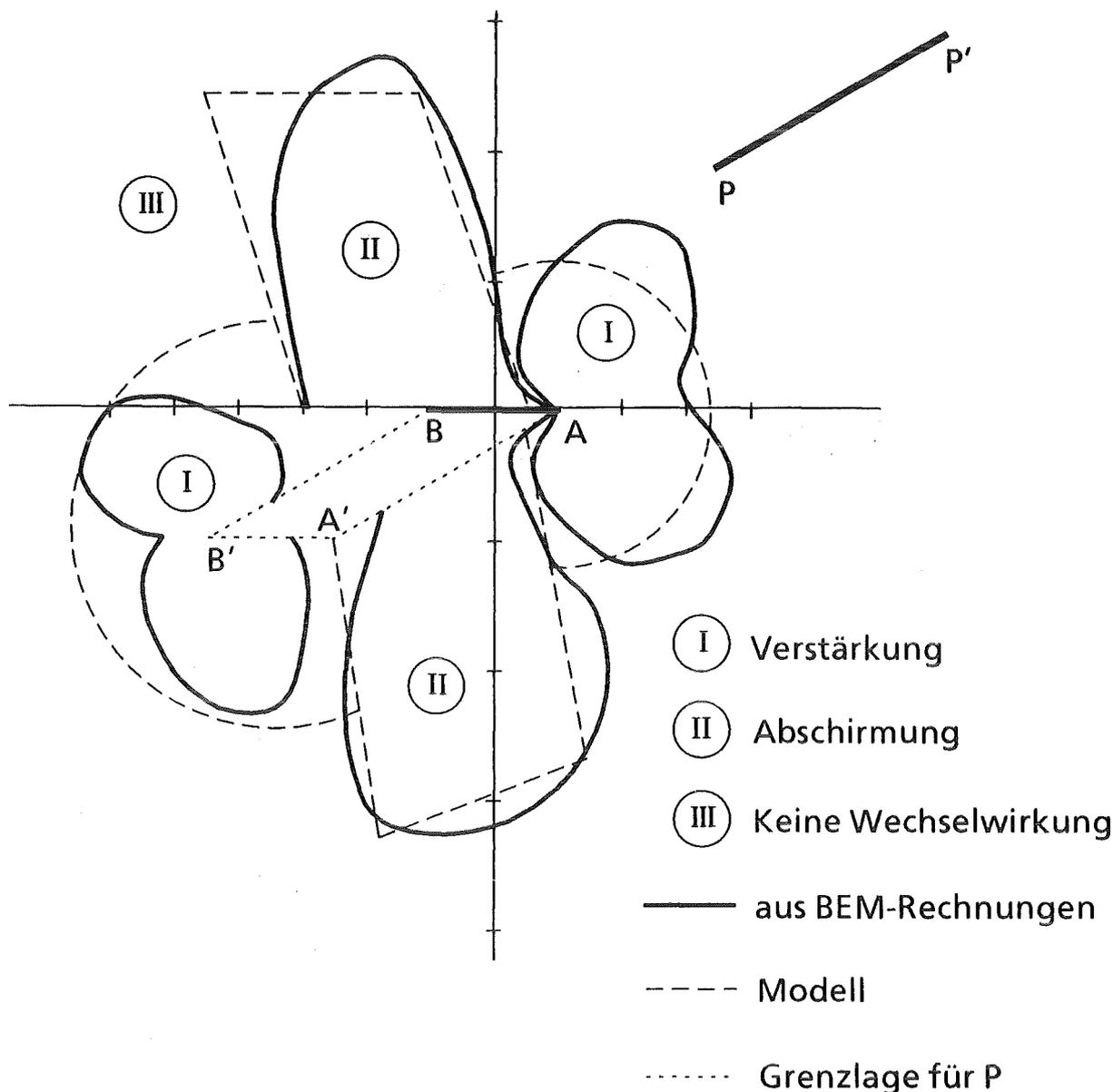


Abbildung 6-16. Verstärkungs- und Abschirmbereich für Fall 3:  $a_2 = 2a_1$ ,  $\varphi = 30^\circ$

Griffith-Problems zu arbeiten. Es zeigte sich jedoch, daß mit einer einfachen Superposition der Einzelriß-Lösungen die Größe der Bereiche im Vergleich zu den numerischen Ergebnissen deutlich überschätzt werden. Betrachtungen, die von der Nahfeldlösung ausgehen, können nur zu sinnvollen Ergebnissen führen, wenn die Entfernung der nächsten Rißspitzen klein gegen die Rißlänge ist.

Versuche in der Literatur, z. B. in [28], die Rißwechselwirkung zu erfassen, führen zu Integralgleichungen, die numerisch aufwendig gelöst werden müssen und, wie im Fall der BEM, keine geschlossenen analytischen Ausdrücke ergeben.

Aufgrund dieser Tatsachen wird im folgenden nicht versucht, geschlossene Formeln aufzustellen. Stattdessen werden ausgehend von den numerischen Ergebnissen der ausgewählten Beispiele verallgemeinerte Formeln für die einzelnen Bereiche und die Verstärkungs- bzw. Abschirmungsfunktionen für die Geometriefunktion  $Y_A$ , die identisch mit dem Faktor  $F_N$  ist, in Abhängigkeit von den definierten Parametern aufgestellt.

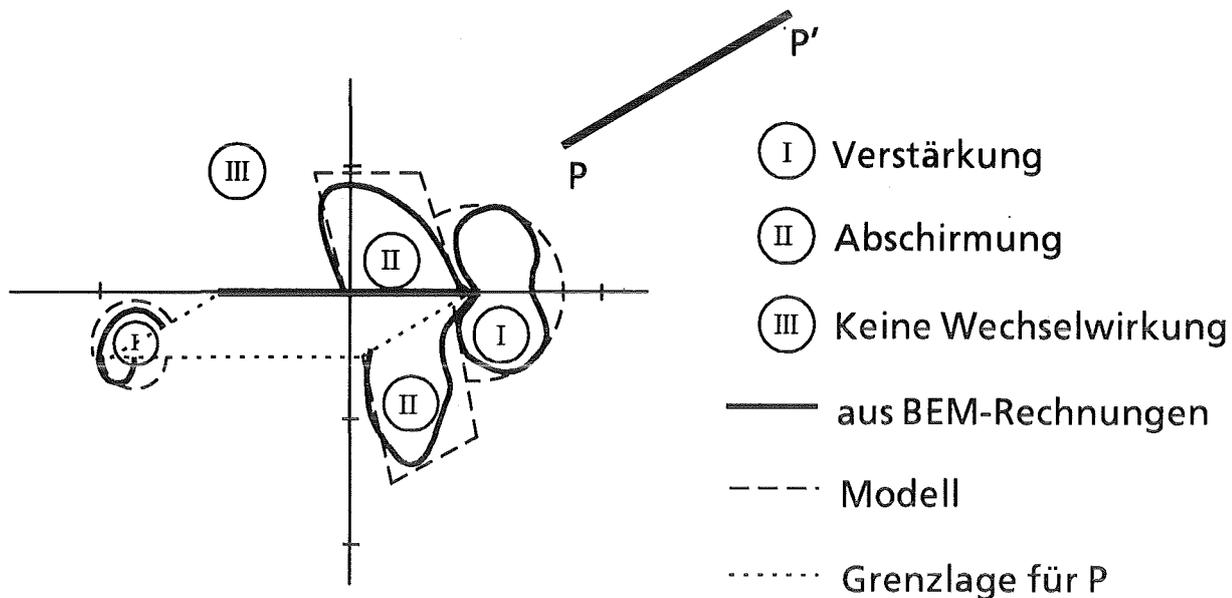


Abbildung 6-17. Verstärkungs- und Abschirmbereich für Fall 4:  $a_2 = 0.5a_1$ ,  $\varphi = 30^\circ$

### Abschirmung

Wie die Bereichsgrenzen für die Abschirmungen in Abb. 6-14 bis Abb. 6-18 zeigen, lassen sich die Abschirmbereiche in jedem der Fälle 1-5 durch ähnliche Kurven beschreiben. Dabei sind zwei Bereiche zu beobachten, die, wie durch Spiegelung an der Achse AB' nachweisbar, eine gewisse Symmetrie bzgl. dieser Achse aufweisen.

Die Unterscheidung nach der Lage des zweiten Risses wird nach Gleichung (6.30) getroffen.

Die Abschirmbereiche werden so gewählt, daß die Lage einer immer gleichen Rißspitze untersucht wird. Dies ist im Fall B (Gleichung (6.30)) die Rißspitze C, während im Fall D dies nach obiger Definition die Rißspitze D ist.

Um den Überblick zu bewahren, erfolgt auch in diesem Fall eine getrennte Behandlung der beiden Abschirmungsbereiche.

Für eine einfache Verallgemeinerung des ersten Bereichs wird dieser durch eine Fläche mit den in Abb. 6-19 dargestellten Parametern modelliert. Dabei wird diese Fläche für  $a_2 \leq a_1$  durch ein Parallelogramm begrenzt. Für  $a_2 > a_1$  ergibt sich ein zusätzlicher Bereich (Abb. 6-16), der durch die x-Achse und die Strecke BB' begrenzt ist.

Die hierbei auftretenden Parameter sind vom Winkel  $\varphi$  und dem Rißlängenverhältnis abhängig, wobei für einige Größen auch vereinfachte Beziehungen abgeleitet werden können, da andere Abhängigkeiten vernachlässigbar sind:

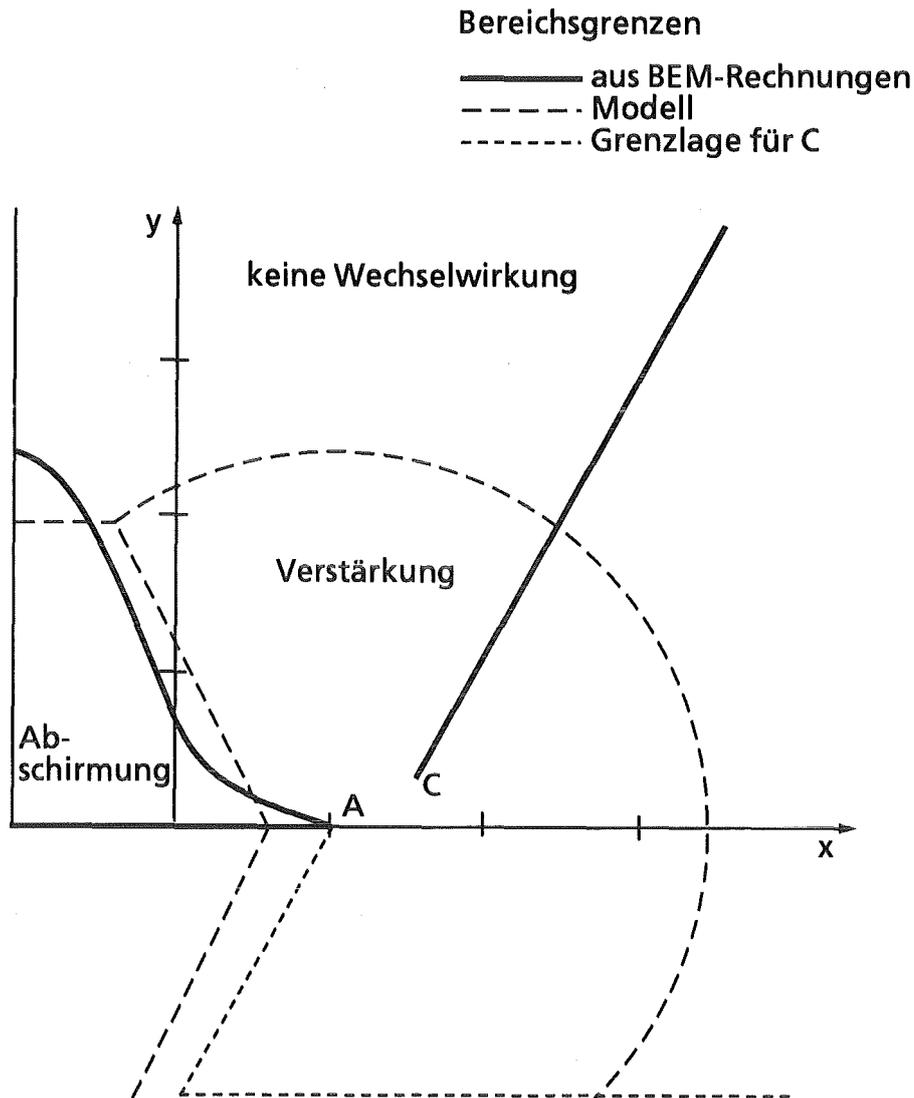


Abbildung 6-18. Verstärkungs- und Abschirmbereich für Fall 5:  $a_2 = 2a_1$ ,  $\varphi = 60^\circ$  nur für den Fall B

$$\begin{aligned}
 \frac{x_E}{a_1} &= f\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = -0.18 \frac{a_2}{a_1} + 0.96 \\
 s_V &= f(a_2, \varphi) = 3a_2 \cos(\varphi) \\
 \alpha &= f(\varphi) = 0.293\varphi + 100^\circ \\
 s_H &= f(a_2) = 2a_2
 \end{aligned}
 \tag{6.31}$$

Um eine Geometriefunktion im Abschirmbereich zu bestimmen, wurde die Abhängigkeit der numerisch berechneten Werte der Geometriefunktion  $Y_A$  von der Lage der maßgebenden Rißspitze ausgewertet.

Obwohl im allgemeinen eine Winkelabhängigkeit zu erwarten ist, wird im verwendeten Modell, welches möglichst einfache Beziehungen ableiten möchte, angestrebt, nur eine Abhängigkeit vom Abstand zu einem festzulegenden Punkt aufzustellen.

Danach ergibt sich die folgende Abschirmfunktion in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  der Rißspitze P von diesem Punkt:

Fall B + Fall D

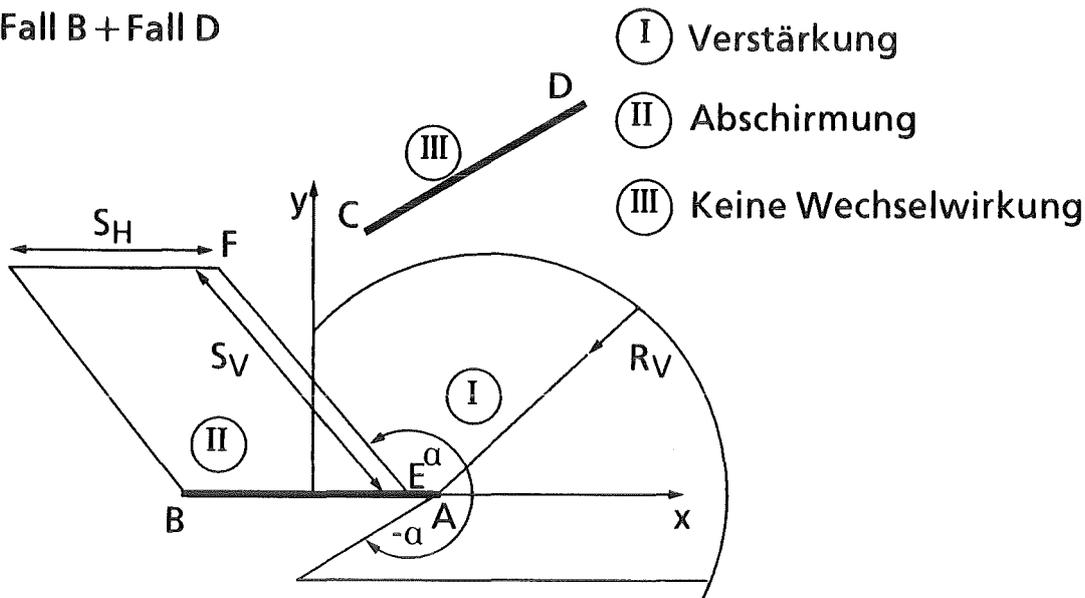


Abbildung 6-19. Modell zur Beschreibung der Bereichsgrenzen für Verstärkung und Abschirmung

$$Y_A = \begin{cases} 0.9 - 1.6 \frac{a_2}{a_1 + a_2} [\cos(\varphi)]^2 \left[ 1 - 2 \frac{r}{a_2} \right] & \text{für } r < \frac{s_Y}{2} \\ 0.9 & \text{für } r \geq \frac{s_Y}{2} \end{cases} \quad (6.32)$$

Abb. 6-20 zeigt die gute Übereinstimmung der untersuchten Fälle mit den Näherungsformeln.

Der zweite Abschirmbereich ist dem Bild des gespiegelten ersten Abschirmbereichs an der größeren Diagonalen des Parallelogramms, welches sich aus dem Riß 1 bei einer Verschiebung des Risses 1 im Winkel  $\varphi$  zum Ausgangsriß um die Strecke  $2 a_2$  ergibt, ähnlich (Dieses Parallelogramm ist identisch mit dem Bereich, in dem die betrachtete Rißspitze nicht liegen kann). In diesem zweiten Abschirmbereich ist der Winkel  $\varphi$  negativ und  $\eta$  positiv oder (durch Spiegelung an der x-Achse identisch)  $\varphi$  positiv und  $\eta$  negativ (Fall A und Fall C nach (6.30)).

In Abb. 6-21 sind die zur Definition dieses Bereiches notwendigen Geometrieparameter eingezeichnet. Dabei ist, wie im ersten Abschirmbereich, zu beachten, daß beim Übergang von Fall A zu Fall D die gleiche Rißspitze betrachtet wird, d.h beim Wechsel der geometrischen Bereiche ändert sich die Bezeichnung der Rißspitzen von C zu D.

Die Auswertung der numerischen Berechnungen ergaben die folgenden verallgemeinerten Gleichungen:

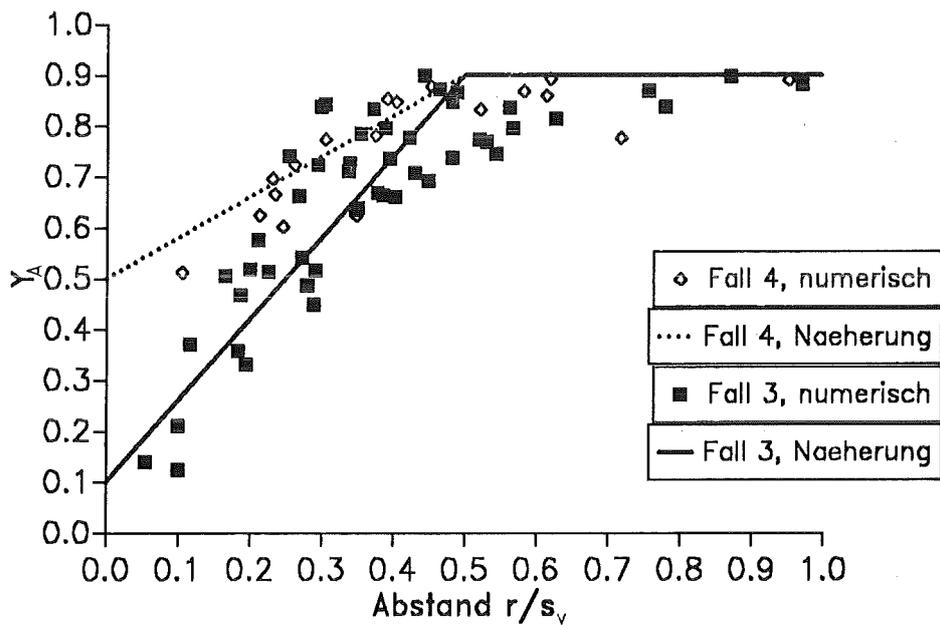
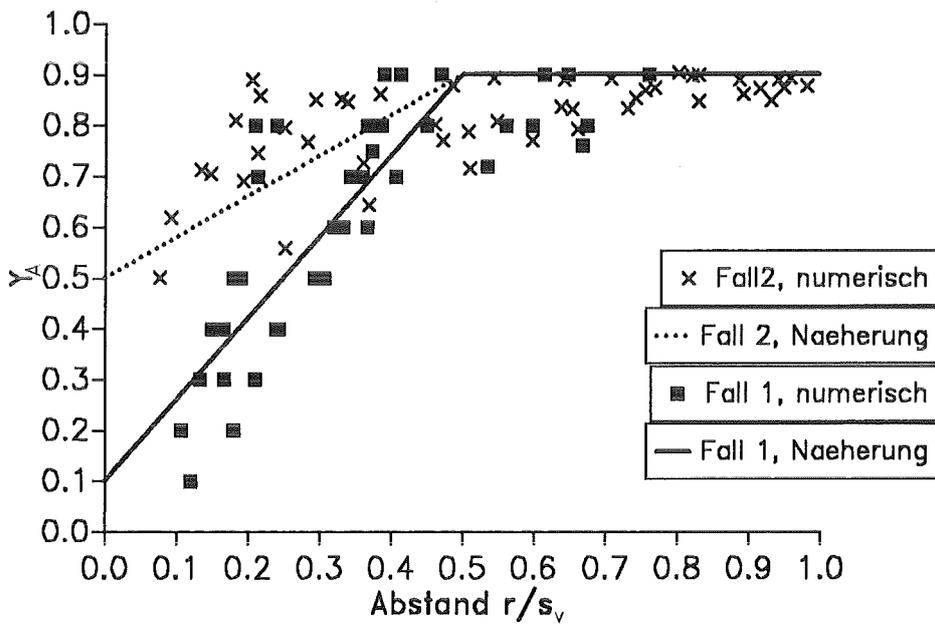


Abbildung 6-20. Vergleich der Näherungsformeln für die Abschirmung mit den numerischen Ergebnissen

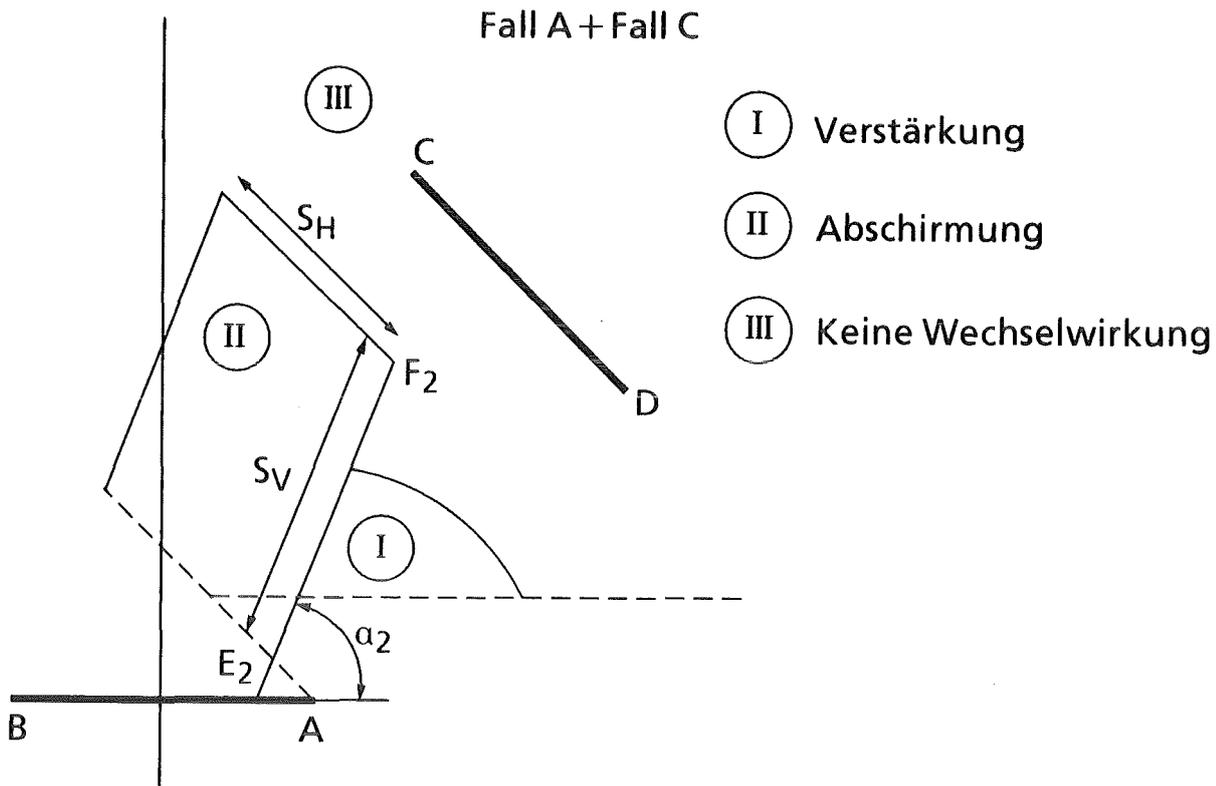


Abbildung 6-21. Modell zur Beschreibung der Bereichsgrenzen für Verstärkung und Abschirmung bei negativem  $\varphi$

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 &= \alpha + \varphi \\
 s_V &= f(a_2, \varphi) = 3a_2 \cos(\varphi) \\
 s_{E2} &= [1 - \sin(\varphi)][a_1 - x_E] \\
 x_{E2} &= a_1 - \cos(\varphi)s_{E2} \\
 y_{E2} &= \sin(\varphi)s_{E2} \\
 x_{F2} &= x_{E2} + \cos(\alpha_2)s_V \\
 y_{F2} &= y_{E2} + \sin(\alpha_2)s_V
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

Das mit diesen Parametern beschriebene Parallelogramm bildet den zweiten Abschirmbereich. Um die Güte dieser Abschätzung zu prüfen, sind in Abb. 6-14 bis Abb. 6-18 neben den Abschirmbereichen aus BEM-Rechnungen auch die verallgemeinerten Abschirmbereiche (Modell) eingezeichnet.

Zur Bestimmung von geeigneten Funktionen, die die Geometriefunktionen in dem zweiten Abschirmbereich wiedergeben, wurde analog zum ersten Abschirmbereich vorgegangen.

Der Punkt, zu dem der Abstand die maßgebliche Größe bei der Bestimmung einer geeigneten Abschirmfunktion ist, wurde im zweiten Abschirmbereich nach den numerisch berechneten Werten folgendermaßen festgelegt:

$$\begin{aligned}
 x_{A_2} &= a_1 - 1.5a_2 \cos(\varphi) \\
 y_{A_2} &= 1.5a_2 \sin(\varphi)
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Wird  $\varphi$  zu Null, so fallen die "Abschirmzentren" in einen Punkt.

Es zeigt sich, daß bei gleichen Abständen zum "Abschirmzentrum" die Geometriefunktionen im allgemeinen etwas kleinere Werte liefern. Mit guter Näherung kann jedoch die gleiche Funktion wie im ersten Abschirmbereich verwendet werden.

### *Verstärkungsbereich*

Wie bereits bei der Beschreibung der numerischen Ergebnisse erwähnt, liegen bei dem betrachteten Rißwechselwirkungsproblem zwei Verstärkungsbereiche vor.

Der erste Verstärkungsbereich, in dem der nach der geometrischen Definition bezeichnete Punkt C liegt, befindet sich um den Punkt A. Um mit möglichst wenigen Parametern in dem Modell arbeiten zu können, wird dieser Bereich durch einen Kreisausschnitt mit dem Mittelpunkt in A beschrieben. Wie Abb. 6-14 und Abb. 6-15 zeigen, ist der Radius dieses Kreises relativ unempfindlich gegen eine Winkeländerung. Daher wird angenommen, daß der Radius nur vom Rißlängenverhältnis abhängt und sich wie folgt ausdrücken läßt:

$$R_{V1} = \begin{cases} 0.8 (a_2 + a_1) & \text{für } a_2 \geq a_1 \\ 1.6 \left[ \frac{2a_2}{a_1 + a_2} \right]^2 a_1 & \text{für } a_2 \leq a_1 \end{cases} \quad (6.35)$$

Durch diese Unterscheidung wird die Randbedingung erfüllt, daß bei einem sehr kleinen Riß die Wechselwirkung gegen Null geht.

Der Abstand zwischen Verstärkungs- und Abschirmbereich ist relativ klein und wird in dem hier betrachteten einfachen Modell vernachlässigt, so daß Verstärkungs- und Abschirmbereich aneinander grenzen. Die Bestimmung der Grenzen des Abschirmbereichs erfolgte bereits, so daß der Radius der einzige Parameter zur Beschreibung des Verstärkungsbereichs ist.

Nachdem der Verstärkungsbereich bekannt ist, wird im folgenden die Verstärkungsfunktion abgeschätzt.

Aufgrund des Kreisausschnittes mit dem Mittelpunkt in A wird der Abstand der Rißspitze C zum Punkt A als charakteristische Größe angenommen. Trägt man die ermittelten Werte für  $Y_A$  gegen den mit dem Bereichsradius  $R_{V1}$  normierten Radius auf, erkennt man einen steilen Anstieg der Geometriefunktion, wenn  $r/R_{V1}$  klein wird. Analysiert man die berechneten Ergebnisse, so erhält man die folgende Verstärkungsfunktion, die die Abhängigkeit vom Rißlängenverhältnis und dem Neigungswinkel  $\varphi$  wiedergibt:

$$Y_A = 1.1 + \left[ 0.8 \frac{a_1 + a_2}{2a_1} \cos^2(\varphi) \right] \left[ \frac{r}{R_{V1}}^{1/4} - 1 \right] \quad (6.36)$$

Wie Abb. 6-22 zeigt, gibt diese Funktion die berechneten Werte der Geometriefunktion der verschiedenen Fälle recht gut wieder.

Der zweite Verstärkungsbereich liegt, wie bereits in Abb. 6-13 für den Fall 1 beschrieben, um den Punkt B'. Maßgebend ist demnach die Lage der Reißspitze C (nach obiger Definition die Reißspitze mit dem betragsmäßig kleineren x-Wert) in der Nähe von B.

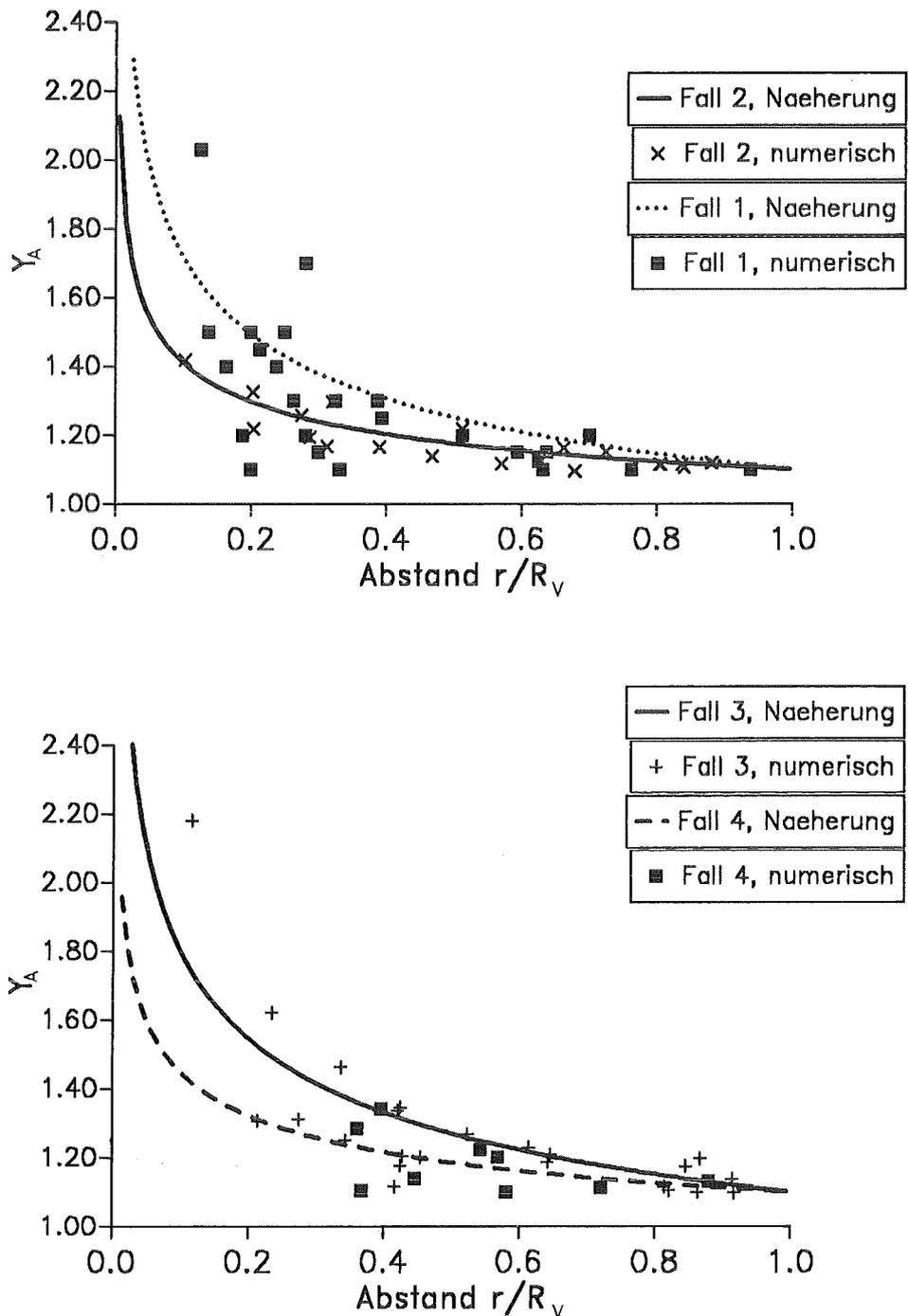


Abbildung 6-22. Vergleich der Näherungsformeln für die Verstärkung mit den numerischen Ergebnissen für  $\eta \leq 90^\circ$

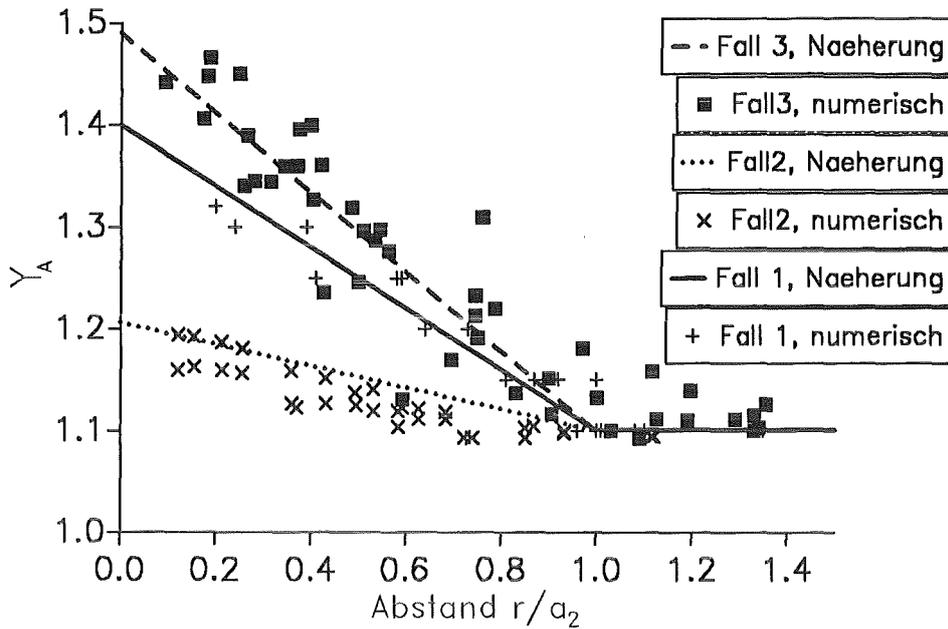


Abbildung 6-23. Vergleich der Näherungsformeln für die Verstärkung mit den numerischen Ergebnissen für  $\eta > 90^\circ$

Die Auswertung der numerischen Ergebnisse hat gezeigt, daß dieser Bereich durch zwei Kreisbögen mit gleichem Radius, aber unterschiedlichen Mittelpunkt abgegrenzt werden kann.

Die Lage der Kreismittelpunkte läßt sich durch die Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 (x_{R1}, y_{R1}) &= \left( -a_1 + \frac{a_2}{2}, 0 \right) \\
 (x_{R2}, y_{R2}) &= \left( -a_1 + \frac{a_2}{2} \cos \varphi, \pm \frac{a_2}{2} \sin \varphi \right)
 \end{aligned}
 \tag{6.37}$$

angeben, wobei sich das Vorzeichen im Term für den y-Wert nach dem Vorzeichen von  $\varphi$  richtet. Der erste Mittelpunkt liegt demnach auf der x-Achse, während der zweite Mittelpunkt auf der Grenzgeraden  $BB'$  liegt. Für die spezielle Geometrie des Falles 1 gehen beide Mittelpunkte in einen über, womit die Konsistenz zu dieser speziellen Symmetriegeometrie gewahrt ist.

Die Radien werden als vom Winkel  $\varphi$  unabhängige Größen angenommen, und ergeben sich zu:

$$R_{VB1} = \begin{cases} 1.8 a_2 - 0.6 a_1 & \text{für } a_1/a_2 < 3 \\ 0 & \text{für } a_1/a_2 \geq 3 \end{cases} .
 \tag{6.38}$$

Wie die Abb. 6-17 zeigt, wird bereits bei einem Rißlängenverhältnis von 0.5 der Verstärkungsradius sehr klein.

Wie bei der Analyse des ersten Verstärkungsbereiches wird der Abstand von den Kreismittelpunkten als die für die Werte der Verstärkungsfunktion bestimmende Größe angesehen. Nach der Auswertung der Ergebnisse wurde die folgende Beziehung in Form einer Bilinearfunktion bestimmt:

$$Y_A = \begin{cases} 1.1 + 0.3 \cos^3(\varphi) \left[ \frac{a_2 - r}{a_1} \right] & \text{für } r < a_2 \\ 1.1 & \text{für } r \geq a_2 \end{cases} \quad (6.39)$$

Mit dieser Beziehung wird der Wert der Geometriefunktion an der Bereichsgrenze für den Fall 4 nicht richtig wiedergegeben (der Wert an der Bereichsgrenze ist nicht 1.1), die Abweichungen sind jedoch sehr klein ( $Y_A = 1.13$ ), so daß der Fehler vernachlässigbar ist.

Wie Abb. 6-23 zeigt, gibt diese Funktion die berechneten Werte der Geometriefunktion der verschiedenen Fälle gut wieder.

#### **6.4 Abschließende Bemerkungen**

Das hier vorgestellte bruchmechanische Modell hatte zum Ziel, die Belastungsgröße  $B$  für beliebige Rißgeometrien und Nachbarschaftsverhältnisse durch möglichst einfache Näherungen zu berechnen.

Aufgrund dieser Zielsetzung sollten hierbei die wichtigsten Effekte berücksichtigt werden, während Details in dem Modell vernachlässigt werden. Diese Vorgehensweise ist sinnvoll, da viele kleine Details in den durch das stochastische Simulationsmodell erzeugten zufälligen Schwankungen untergehen. Die Klassifizierung der Risse und das Aufstellen von einfachen Rissen ist zudem für eine mit vertretbarem Aufwand durchzuführende Simulation unumgänglich.

Das in diesem Kapitel entwickelten Modell ist die bruchmechanische Grundlage für die in Kapitel 5 dargestellte Simulationsprozedur. Prinzipiell können damit beliebig geformte Risse beschrieben werden, die sich gegenseitig möglicherweise beeinflussen, was eine Voraussetzung für die Durchführung von Rißwachstum in zufälligen Rißmustern ist.

## 7. Statistische Analyse von experimentell beobachteten Rißmustern

### 7.1 Vorbereitung für eine statistische Analyse der Oberflächenrißmuster

Im Kapitel 7 werden die im Kapitel 4 bereitgestellten stochastischen Modelle auf gegebene Rißmuster angewendet. Zum einen wird gezeigt, wie anhand der Bestimmung der statistischen Kenngrößen verschiedene Realisierungen des gleichen Schädigungsprozesses verglichen werden können und in welcher Form sich die wachsende Schädigung manifestiert; zum anderen wird überprüft, inwieweit die Modelle, die ja mit bestimmten physikalischen Annahmen verbunden sind, in Einklang mit den experimentellen Realisierungen stehen.

Wie im Kapitel 3 beschrieben, werden die experimentell erhaltenen Rißmuster manuell digitalisiert, indem die Risse durch stückweise gerade Linienzüge approximiert und die End- bzw. Knickpunkte abgespeichert werden. Diese manuelle Digitalisierung hat gegenüber einer Verarbeitung mit bildanalytischen Verfahren (Einsatz von Bildverarbeitungssystemen) hier den Vorteil, daß die Rißmuster in einer Form gespeichert werden, die eine Analyse mit verschiedenen statistischen Methoden und eine Anpassung an verschiedene Modelle erlaubt. Von Nachteil ist neben dem zeitlichen Aufwand bei der Digitalisierung eine eventuell mögliche Verfälschung durch das Weglassen sehr kurzer Mikrorisse und das Ersetzen gekrümmter Rißverläufe durch stückweise gerade. Daraus resultierende Effekte bei der statistischen Analyse werden im Abschnitt 7.2 diskutiert.

Bei der Auswertung der Experimente stehen in der Regel jeweils neun Bilder zur Verfügung, die an Proben mit der gleichen Zyklenzahl aufgenommen wurden (nach 3500 Zyklen nur drei Bilder). Die Bilder wurden an drei unterschiedlichen Stellen auf der Probe aufgenommen. Bei einer nach Probenbereichen getrennten Auswertung konnten keine signifikanten Unterschiede in den Kenngrößen zwischen den unterschiedlichen Probenbereichen festgestellt werden. Das wurde aufgrund des vorliegenden equibiaxialen Spannungszustandes auch so erwartet. Deshalb werden alle Bilder mit gleicher Zyklenzahl folgendermaßen zusammengefaßt: Zunächst wird der Wert der Kenngröße an einem jeden Bild einzeln bestimmt. Anschließend wird der Mittelwert unter den neun (bei 3500 Zyklen drei) Werten berechnet. Zur Veranschaulichung der Streubreite der Kenngröße bei der entsprechenden Zyklenzahl werden außerdem der minimale und der maximale Wert innerhalb der neun (drei) Werte angegeben.

Lastzyklenzahl	2500	3500	4500	5500	6500	7500	11000
Anzahl der Bilder	9	3	9	9	9	9	9

Tab. 7.1: Anzahl der zur Verfügung stehenden Bilder von experimentellen Rißmustern nach verschiedenen Lastzyklenzahlen

## 7.2 Modellunabhängige Kenngrößen der experimentellen Rißmuster

### 7.2.1 Kenngrößen der einfachen Rißstatistik

Dargestellt werden die zwei bildbezogenen Kenngrößen "Anzahl der Risse pro Flächeneinheit" und "Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit" sowie die rißbezogene Kenngröße "mittlere Länge eines Einzerrisses" (siehe Abb. 7.1). Die einzelnen Grafiken zeigen zunächst, daß die Streubreite der Kenngrößen relativ groß ist im Vergleich zu den mittleren Werten. Die nachfolgenden Aussagen über Tendenzen der Entwicklung der mittleren Werte mit wachsender Zyklenzahl lassen sich deshalb mit den zur Verfügung stehenden, relativ wenigen Bildern nach gleicher Zyklenzahl nicht ausreichend statistisch absichern (im Sinne eines statistischen Tests von Hypothesen).

An den drei Grafiken in Abb. 7.1 fällt auf, daß erstens zwischen den Lastzyklenbereichen von 2500 bis 5500 einerseits und 6500 bis 7500 andererseits eine Sprungstelle in der Veränderung der mittleren Werte der Kenngrößen über der Zyklenzahl vorliegt und daß zweitens die Ergebnisse bei 11000 Zyklen sich nicht als natürliche Fortsetzung der Veränderung der Kenngrößen im Bereich von 2500 bis 7500 Zyklen darstellen lassen.

Die Ergebnisse bei 11000 Zyklen werden am Ende dieses Abschnitts interpretiert. Die Sprungstelle zwischen 5500 und 6500 Zyklen dagegen läßt sich darauf zurückführen, daß die manuelle Digitalisierung in den beiden Teilbereichen von 2500 bis 5500 Zyklen bzw. 6500 bis 11000 Zyklen durch zwei unterschiedliche Personen durchgeführt wurde. Zum Vergleich wurden daraufhin noch einmal mehrere Rißmuster unabhängig voneinander durch beide Personen digitalisiert (siehe Abb. 7.2). Es ergab sich folgendes Problem: Die Bilder der Probenoberfläche zeigen neben den Rißmustern auch Korrosionspartikel, und es ist oft nicht eindeutig entscheidbar, ob es sich um einen Mikroriß oder eine Verunreinigung handelt. Bei der manuellen Digitalisierung sind Entscheidungen sind zu treffen insbesondere

- bei der Unterscheidung zwischen sehr kurzen Mikrorissen und Verunreinigungen,
- beim Ersetzen gekrümmter Rißverläufe durch stückweise gerade und
- beim Schließen von sehr kurzen Unterbrechungen von Linienzügen.

Diese Entscheidungen beeinflussen das Ergebnis der Digitalisierung.

Zur parallelen Digitalisierung von Rißmustern durch beide Personen wurden willkürlich je zwei Bilder nach 2500 und 3500 Lastzyklen sowie ein Bild nach 4500 Zyklen ausgewählt. Die Ergebnisse der Auswertung sind im Abb. 7.3 dargestellt.

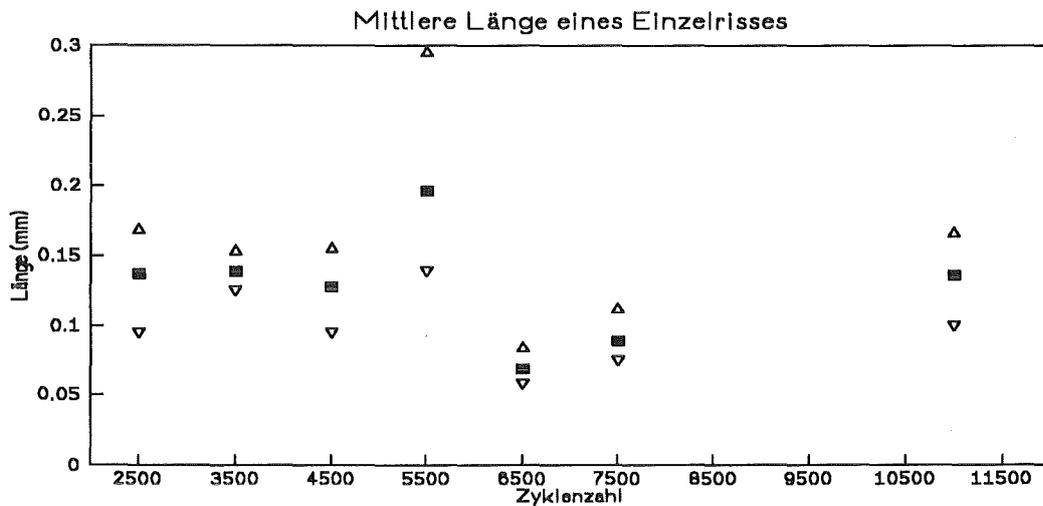
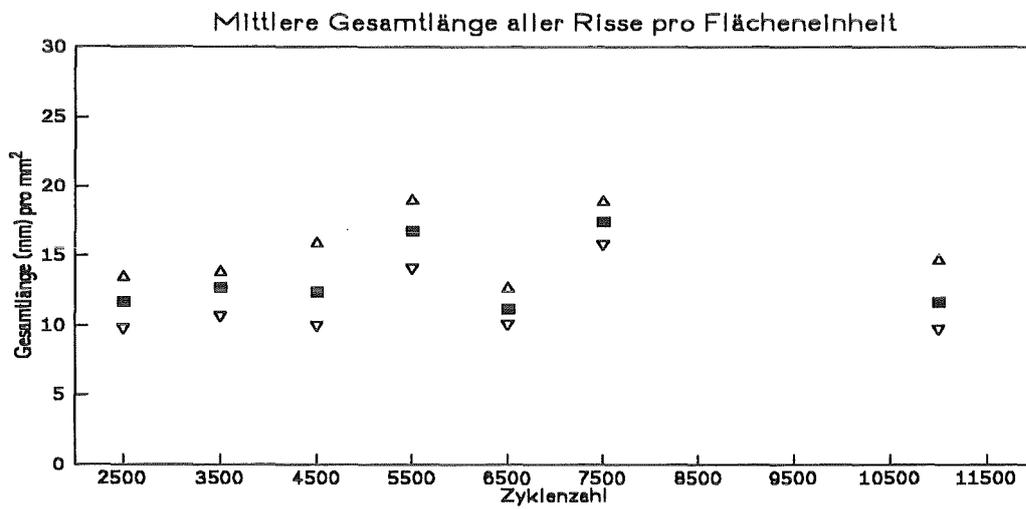
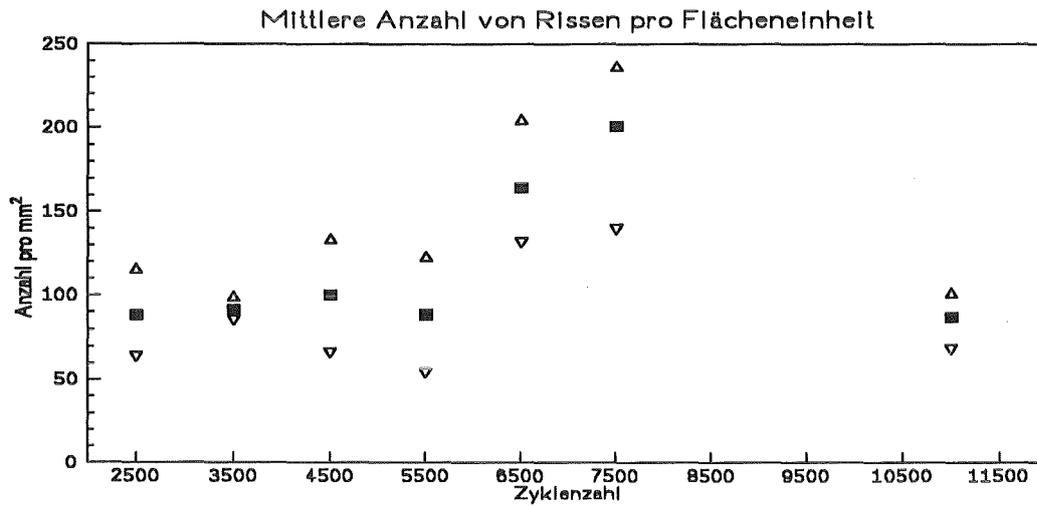
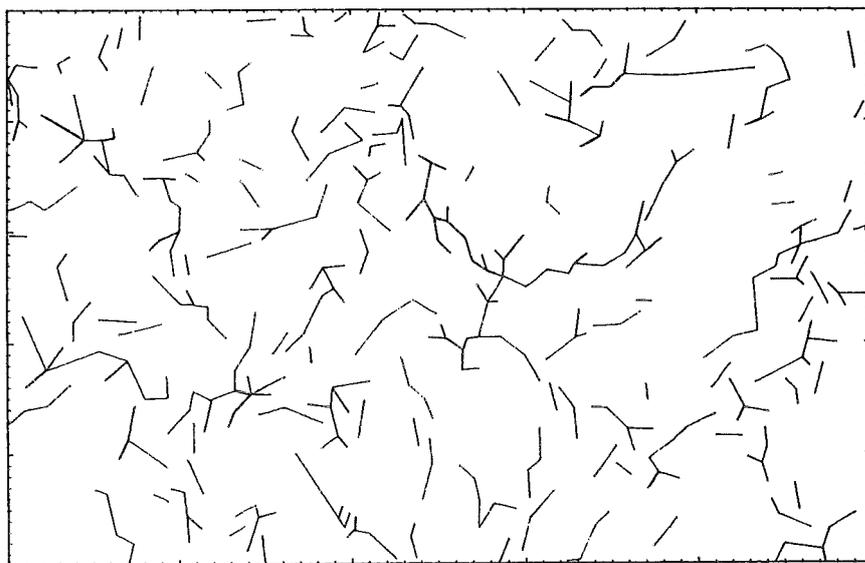
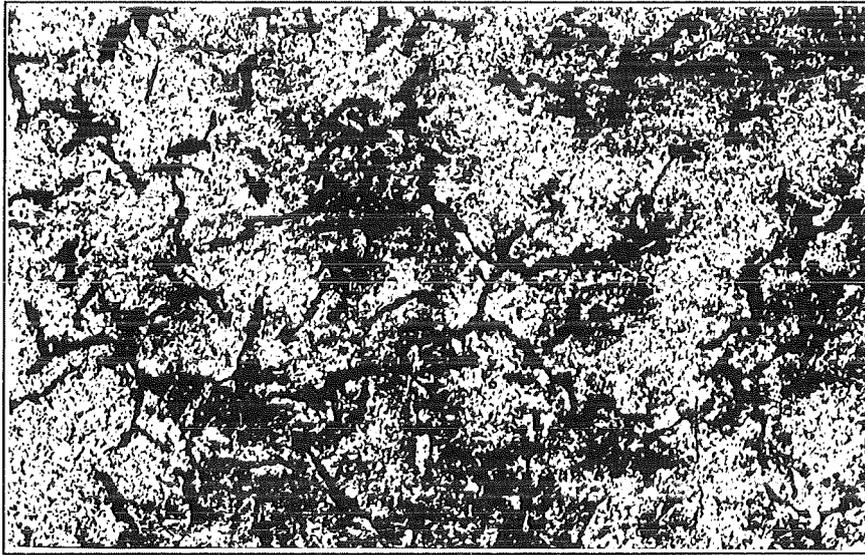
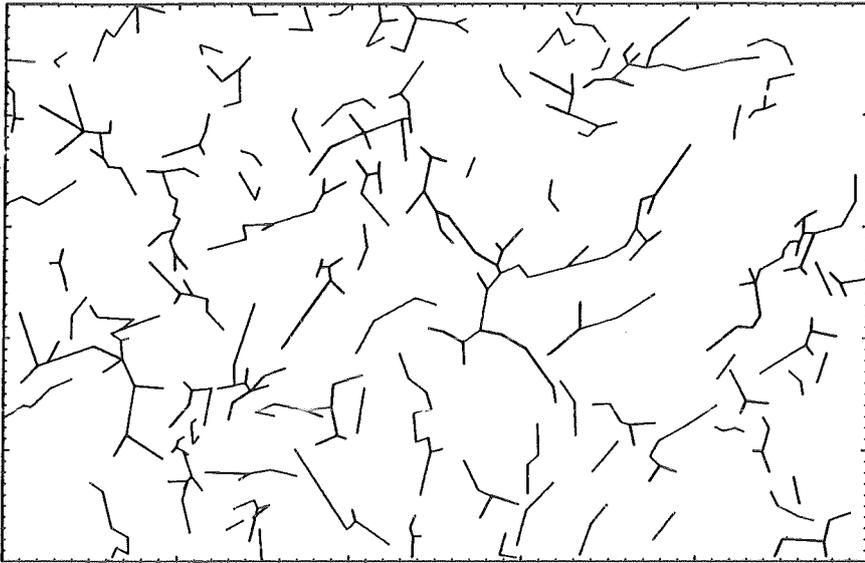


Abb. 7.1: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik für die experimentellen Rißmuster in Abhängigkeit von der Lastzykluszahl. Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses (■ Mittelwert, ▽ Minimum und △ Maximum innerhalb der 9 (bzw. 3) Bilder mit gleicher Zykluszahl).

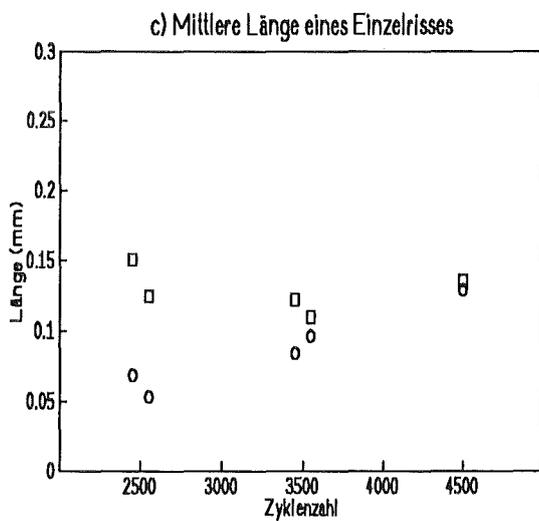
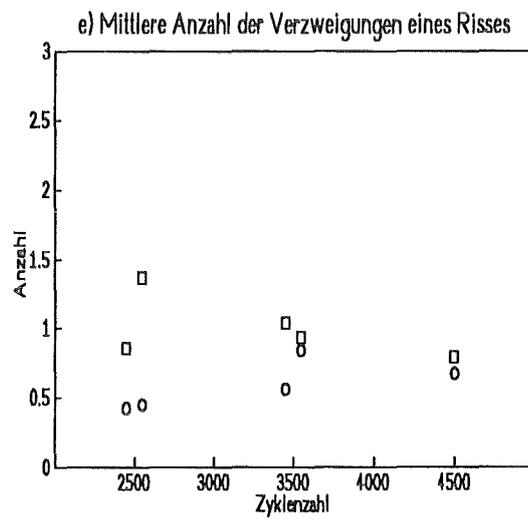
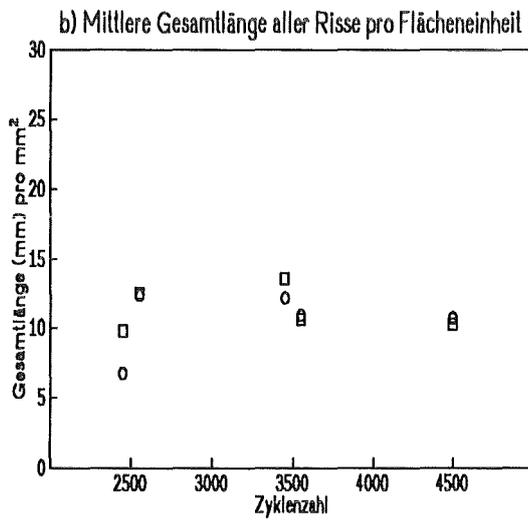
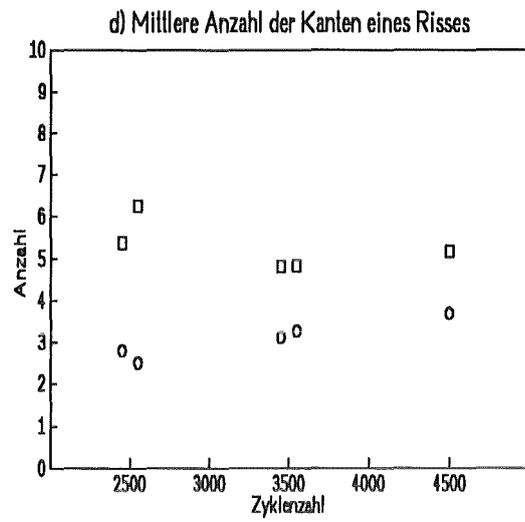
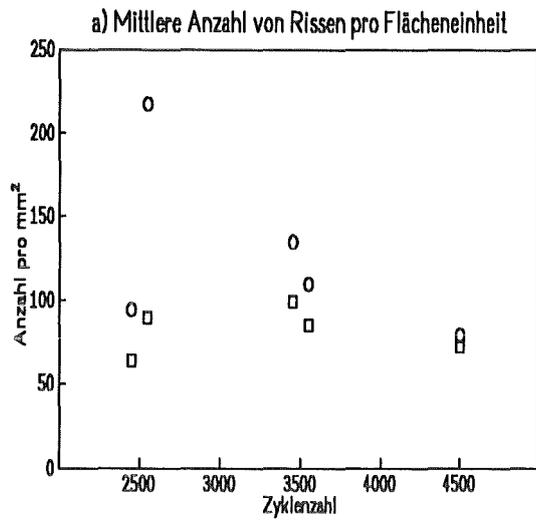


**Abb. 7.2:** Zwei verschiedene Digitalisierungen eines Bildausschnitts. Oben: Digitalisierung A, Mitte: Fotografie des Rißmusters, unten: Digitalisierung B.

Die Ergebnisse der Auswertung der parallel vorgenommenen Digitalisierungen zeigt Abb. 7.3. Die Werte der Kenngrößen aus der Digitalisierung von Person A, die die Rißmuster mit den niederen Zyklenzahlen vollständig digitalisiert hat, sind jeweils mit dem Symbol □ aufgetragen. Bei fast gleichen Werten der Gesamtlinielänge unterscheiden sich die Werte der anderen Kenngrößen wie Rißanzahl und mittlere Länge eines Risses teilweise deutlich. Die Ergebnisse lassen den Schluß zu, daß Person A sich tendenziell öfters für die Ersetzung eines gekrümmten Linienzugs durch wenige, dafür längere gerade Liniestücke und das Schließen von kleinen Unterbrechungen entschied. Die Digitalisierung B enthält dagegen mehr Risse, außerdem einfacher geformte und kleinere Risse (entsprechende Werte sind in Abb. 7.3 mit dem Symbol ○ aufgetragen). Ein daraufhin vorgenommener optischer Vergleich der Fotografie des Rißmusters mit den beiden verschiedenen Digitalisierungen (siehe Abb. 7.2) ergab keine Hinweise, daß eine der beiden Personen einen systematischen Fehler bei der Digitalisierung begangen hat. Der nochmalige Vergleich, der wie beide Digitalisierungen selbst subjektiv ist, fiel von Fall zu Fall zugunsten der einen oder anderen Digitalisierung aus. Insbesondere das Schließen bzw. Nichtschließen von kurzen Unterbrechungen zwischen benachbarten Linienzügen wirkt sich zwar kaum auf die mittlere Gesamtlinielänge pro Flächeneinheit aus, dagegen jedoch deutlich auf die Anzahl der Risse und die mittlere Länge eines Risses.

Obwohl die Entscheidung über die Digitalisierung eines Linienzuges bei der manuellen Digitalisierung subjektiv zu treffen ist, ergibt der Einsatz von bildanalytischen Verfahren (Einsatz kommerzieller Bildverarbeitungssysteme) keine größere Objektivität. Durch die aufgrund der Versuchsdurchführung entstehenden Korrosionspartikel erhält man solche Grauwertbilder, die generell nicht eindeutig ausgewertet werden können (siehe Abb. 7.2 Mitte). Die im Bildanalytisesystem angewendeten Entscheidungskriterien beispielsweise zu den vorn genannten drei Beispielen für Probleme bei der Digitalisierung (Klassifizieren als Verunreinigung, stückweise Linearisierung, Schließen von Unterbrechungen) können von Fall zu Fall den physikalischen Sachverhalt richtig oder falsch abbilden.

Hinzu kommt, daß die Modellvorstellung eines Mosaiks mit sukzessiv versagten Kanten die Erfassung der Schädigung in Form von stückweise geraden Linienzügen erfordert, was nicht zum Standard kommerzieller Bildverarbeitungssysteme gehört. Für das Mosaik-Modell werden außerdem im Vorhaben einige modellspezifische Kenngrößen definiert und berechnet, die ebenfalls nicht Standard von Bildverarbeitungssystemen sind.



**Abb. 7.3:** Einfluß der zwei Digitalisierungen auf die Kenngrößen am Beispiel von fünf doppelt ausgewerteten Rißmustern.  
 a) Anzahl der Risse pro Flächeneinheit,  
 b) Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit,  
 c) mittlere Länge eines Risses,  
 d) Anzahl der Kanten eines Risses,  
 e) Anzahl der Verzweigungen eines Risses  
 (□ Digitalisierung A, ○ Digitalisierung B).

Aus den Ergebnissen der parallelen Digitalisierung lassen sich folgende Schlußfolgerungen für die Versuchsdurchführung und Auswertung solcher Thermoermüdungsexperimente ziehen:

- Die Präparation der Probenoberflächen muß sehr sorgfältig an allen Proben in der gleichen Intensität erfolgen, um vergleichbare Bilder zu erhalten.
- Die Verwendung eines anderen Kühlmediums, welches die Probenoberfläche nicht korrodiert, hätte eine bessere Reproduzierbarkeit der Auswertung ermöglicht.
- Die globalen Kenngrößen der Rißmuster (z.B. Gesamtlängelänge pro Flächeneinheit) sind relativ unempfindlich gegenüber der Digitalisierung, die lokalen Kenngrößen (wie z.B. Rißformparameter) dagegen teilweise nicht.

Da die Experimente in einem anderen DFG-Projekt mit anderer Zielstellung durchgeführt wurden und schon abgeschlossen waren, konnten die Erkenntnisse zur Verbesserung der Experimentdurchführung nicht mehr umgesetzt werden. Es ging vielmehr nur noch darum, sie bei der Auswertung der experimentellen Ergebnisse entsprechend zu berücksichtigen.

Zur Untersuchung der Tendenzen der Entwicklung der mittleren Werte der Kenngrößen der einfachen Rißstatistik mit wachsender Zyklenzahl wurden deshalb auch die zweifach digitalisierten Bilder in die Auswertung einbezogen (siehe Tab. 7.2). Die mittleren Werte der Kenngrößen sind in Abb. 7.4 dargestellt. Abb. 7.4 unterscheidet sich von Abb. 7.1 dadurch, daß bei 2500, 3500 und 4500 Zyklen neben den Mittelwerten aus der Digitalisierung A (Symbol ■) auch Ergebnisse der Digitalisierung B aufgetragen sind (Symbol ●). Letztere "Mittelwerte" konnten jedoch nicht aus allen neun bzw. drei Bildern ermittelt werden, sondern nur aus den wenigen doppelt digitalisierten Bildern. Die mit ● aufgetragenen "Mittelwerte" stehen also teilweise nur für einen Wert (bei 4500 Zyklen) bzw. den Mittelwert aus zwei Bildern (bei 2500 und 3500 Zyklen; siehe Tab. 7.2) und sind deshalb sehr eingeschränkt interpretierbar. Ein Beispiel dafür, wie stark sich zufällige Streuungen von Bild zu Bild gleicher Zyklenzahl auswirken können, liegt bei der Größe "mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit" bei 4500 Zyklen vor. Obwohl bei der mit ● dargestellten Digitalisierung bei allen Bildern erheblich mehr und kleinere Risse digitalisiert wurden (vgl. Bild 7.1), liegt die mittlere Anzahl der Risse bei dieser Digitalisierung bei 4500 Zyklen noch unter dem Mittelwert der anderen Digitalisierungen (Symbol ■).

Lastzyklenzahl	2500	3500	4500	5500	6500	7500	11000
Digitalisierung A	9	3	9	9	-	-	-
Digitalisierung B	2	2	1	-	9	9	9

Tab. 7.2: Anzahl aller Digitalisierungen von Bildern nach verschiedenen Lastzyklenzahlen

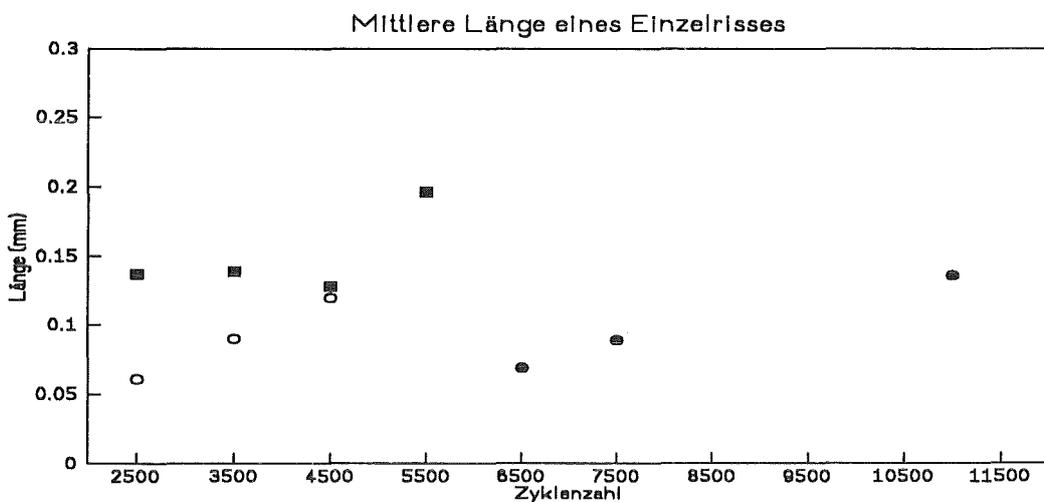
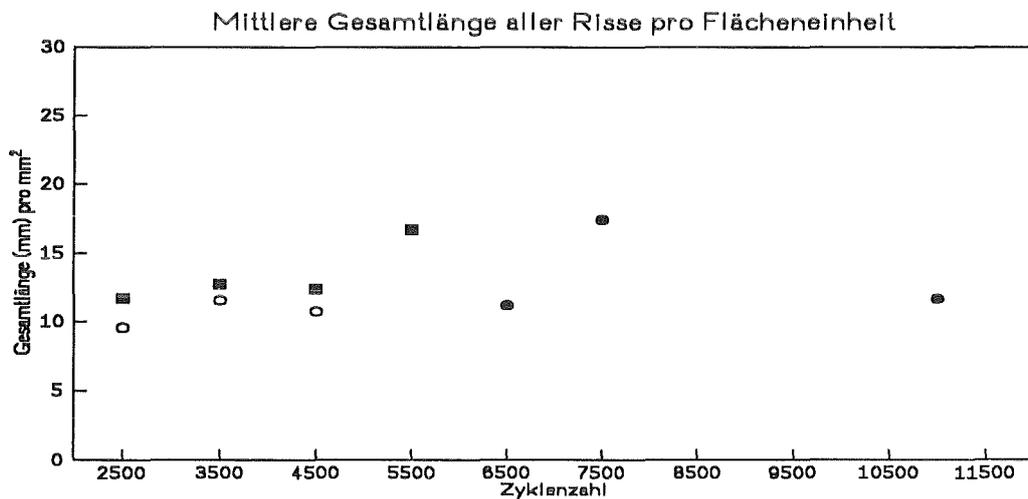
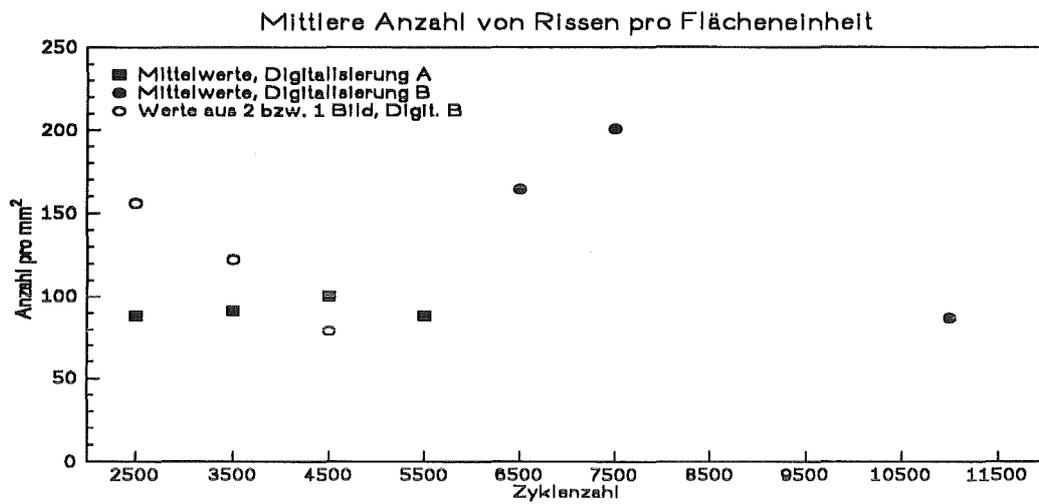


Abb. 7.4: Mittelwerte der Kenngrößen der einfachen RiBstatistik für die experimentellen RiBmuster in Abhängigkeit von der Lastzyklenzahl. Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses.

Sieht man von den zufälligen Streuungen ab, dann könnte eine mögliche Interpretation der Tendenzen der Entwicklung der Kenngrößen mit wachsender Zyklenzahl aus Abb. 7.4 lauten:

- Es gibt eine Rißentstehungsphase, die dadurch gekennzeichnet ist, daß die Anzahl der Risse wächst, die mittlere Länge eines Einzelrisses sich aber kaum ändert. Daran schließt sich eine Rißwachstumsphase an. Hier kommt es außerdem zu einem Zusammenwachsen von Rissen. Das Rißwachstum ergibt sich aus der Zunahme der mittleren Länge eines Einzelrisses und der Gesamtlänge aller Risse. Das Zusammenlagern von Rissen ist an der leicht abfallenden Anzahl der Risse zu erkennen. Diese Tendenzen sind bei beiden Digitalisierungen feststellbar, finden allerdings auf unterschiedlichen Niveaus statt.
- Die Regellosigkeit des Rißmusters und fehlende Vorzugsrichtungen der Risse deuten darauf hin, daß sich Verstärkung und Abschwächung durch Wechselwirkung beim Rißwachstum teilweise aufheben.
- Es ist eine relativ geringe Zunahme der Gesamtlängelänge über der Zyklenzahl zu verzeichnen, insbesondere im Vergleich zu Simulationsergebnissen (vgl. Abschnitt 8.3.4). Offensichtlich findet die Mikrorißentstehung und das Mikrorißwachstum an der Oberfläche, wie es im Abschnitt 5 modelliert und simuliert wird, schon bei kleineren Zyklenzahlen statt. Das charakteristische netzartige Oberflächenrißmuster ist frühzeitig ausgeprägt und ändert sich dann über einen großen Lastzyklenbereich nicht mehr wesentlich. Ursache sind vermutlich Abschirmungseffekte. Zu prüfen ist noch, inwieweit anstelle dessen verstärktes Rißwachstum in die Tiefe auftritt (siehe dazu Abschn. 7.4.2).
- Der Abfall in der Gesamtlängelänge und der Einzelrißlänge bei 11000 Zyklen ist mit dem Modell nicht erklärbar. Der Charakter der Bilder bei 11000 Zyklen weicht deutlich von den anderen ab, z.B. gibt es große Bildbereiche ohne irgendwelche Schädigung. Vermutlich erfolgte hier wegen der fortgeschrittenen Korrosion der Oberfläche ein größerer Abtrag bei der Probenpräparation, bei dem dann auch einige Mikrorisse mit verschwanden. Auf dieses Problem wird ebenfalls noch einmal bei der Bestimmung der Rißtiefenverteilung im Abschn. 7.4.2 zurückgekommen.
- Es ist möglich, daß sich Perioden der verstärkten Rißentstehung mit Perioden des verstärkten Rißwachstums sowie der Rißzusammenlagerung abwechseln: Nach der ersten Initiierungsphase tritt zunächst verstärktes Rißwachstum an den vorhandenen Rissen ein. Die entstehenden großen Risse schirmen sich dann zunehmend gegenseitig so sehr ab, daß in den bisher ungeschädigten Bereichen in einer zweiten Rißinitiierungsphase neue Mikrorisse entstehen können. Für einen derartigen Prozeß gibt es noch kein bruchmechanisches Modell.

Weitergehende Interpretationen zur Entwicklung der Schädigung sind allein anhand der Kenngrößen der einfachen Rißstatistik nicht möglich. Diese Feststellung resultiert aus den deutlichen Unterschieden der experimentellen Befunde zu denen bei üblichen Ermüdungsexperimenten, beispielsweise

- entwickelt sich kein dominierender Einzelriß, sondern ein Feld von Rissen,
- liegen wegen des biaxialen Spannungszustands keine Vorzugsrichtungen der Risse vor,
- entstehen keine geraden, sondern verzweigte Risse,
- ist kein Verfolgen der Zunahme der Schädigung an ein und derselben Probe möglich.

Wegen dieser Unterschiede ist eine modifizierte Auswertung nötig, die über die einfache Rißstatistik hinausgeht.

## 7.2.2 Kenngrößen des Faserprozesses

Kenngrößen des Faserprozesses werden verwendet (siehe [1])

- zur vereinfachten Schätzung der Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit,
- zur Charakterisierung von Orientierungseigenschaften der Rißmuster, insbesondere zur Prüfung der Isotropie, und
- zur Charakterisierung der Regularität des Rißmusters durch Vergleich mit einem Referenzmodell eines speziellen Faserprozesses (dieser Punkt ist in [1] noch nicht enthalten).

Bei der Prüfung der Isotropie des Faserprozesses anhand der Häufigkeitsverteilung der Richtung aller Linienabschnitte konnten keine bevorzugten Richtungen festgestellt werden. Die Isotropie des Rißmusters war wegen des biaxialen Spannungszustandes zu erwarten.

Die Schätzung der Gesamtlänge aller Risse aus der Anzahl der Schnittpunkte pro Längeneinheit des Testliniensystems durch Anwendung von Formel (4.1) wies eine gute Übereinstimmung mit dem genauer bestimmten Wert aus Abschnitt 7.2.1 auf.

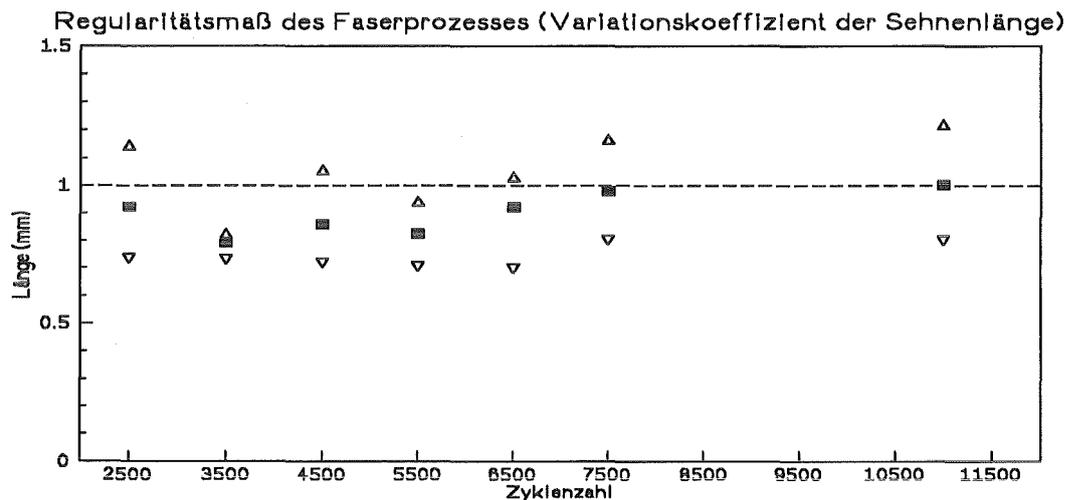
Zur Untersuchung räumlicher Lagebeziehungen wurde die Paarkorrelationsfunktion der Abstände der Schnittpunkte zwischen Rißmuster und den Testlinien verwendet. Die ersten Gipfel bzw. Täler der Paarkorrelationsfunktion beschreiben bevorzugte bzw. gemiedene Abstände der Schnittpunkte. Die bei den Rißmustern mit wachsender Zyklenzahl festgestellte Verschiebung der ersten Gipfel zu niedrigeren Werten ist zurückzuführen auf die wachsende Schädigung, d.h. die Entstehung weiterer Risse und das Wachstum vorhandener. Quantitative Aussagen zu den Abständen sind nicht möglich, da auf jeder Testlinie nur relativ wenige Schnittpunkte (etwa 8-15) entstehen und die einzelnen Paarkorrelationsfunktionen deshalb voneinander abweichen. Notwendig wäre ein größerer Ausschnitt von der Probenoberfläche.

Aus der im vorigen Abschnitt ermittelten mittleren Linienlänge pro Flächeneinheit  $l_A$  kann man übrigens die zu erwartende mittlere Anzahl von Schnittpunkten  $N_S$  auf einer Testlinie der Länge  $S = 1,15\text{mm}$  (das ist die Breite eines Bildes) vorausbestimmen. Nach Formel (4.1) gilt

$$N_S = l_A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot S \quad (7.1)$$

Bei einem mittleren Wert  $l_A = 12\text{mm}/\text{mm}^2$  (siehe Abb. 7.1 Mitte) erhält man die zu erwartende Anzahl von 8,8 Schnittpunkten auf einer Testlinie, bei  $l_A = 15\text{mm}/\text{mm}^2$  z.B. ergeben sich im Mittel 11 Schnittpunkte.

Zur Charakterisierung der Regularität des Rißmusters wurde weiterhin der Variationskoeffizient der Sehnenlängen ermittelt. Anhand des ermittelten Wertes erfolgt der Vergleich des Faserprozesses mit dem "völlig regellosen" Poissonschen Geradenprozeß, bei dem theoretisch der Variationskoeffizient Eins vorliegt. Die Ergebnisse sind in Abb. 7.5 dargestellt. Es ist eine Zunahme des Regularitätsmaßes zu verzeichnen. Die Abweichung des Ergebnisses bei 2500 Zyklen ist auf die dort sehr geringe Anzahl von Schnittpunkten zwischen Faserprozeß und Testliniensystem zurückzuführen.



PARNELI

Abb. 7.5: Regularitätsmaß des Faserprozesses in Abhängigkeit von der Zykluszahl (Quotient von Standardabweichung und Mittelwert der Sehnenlängen).

### 7.3 Auf dem Mosaik-Modell basierende Kenngrößen der experimentellen Rißmuster

Durch ein Mosaik-Modell werden bestimmte Vorstellungen über die Form der Risse umgesetzt. Ein DIRICHLET-Mosaik dient als Approximation der Lageverteilung von potentiellen Stellen für Mikrorißentstehung und Wegen für weiteres Rißwachstum. Untersucht werden:

- Kenngrößen des DIRICHLET-Mosaiks und die Konsistenz der Schätzungen,
- die globale Ausfüllung des Mosaiks durch versagte Kanten,
- Lagebeziehungen der versagten Kanten,
- Charakteristika der Rißform, d.h. Rißformparameter und Anordnung benachbarter versagter Kanten.

#### 7.3.1 Kenngrößen des Mosaiks

Die Kenngrößen des DIRICHLET-Mosaiks können aus dem Mittelwert oder der Streuung der Länge der ausgefallenen Kanten geschätzt werden. Dabei ist aber zu beachten, daß bei der

Diskretisierung des Rißmusters möglicherweise sehr kurze Kanten nicht erfaßt oder zu benachbarten Kanten zugeschlagen werden. Das führt zu einer leichten Erhöhung des empirisch ermittelten Mittelwertes  $\mu$  und einer Verringerung der empirischen Varianz  $\sigma^2$ .

Die Abweichung zwischen den Schätzungen  $\tilde{r}$  und  $r^*$  (Formeln (4.2) und (4.3)) ist vermutlich auf diesen systematischen Fehler in der Kantenlängenverteilung zurückzuführen (siehe Abb. 7.6 oben). Die mittlere Zellfläche geschätzt aus der mittleren Kantenlänge  $\mu$  (Formel (4.4)) ist ebenfalls im Abb. 7.6 dargestellt. Man erhält unabhängig von der Zunahme der Lastzyklenzahl eine mittlere Zellfläche in der Größenordnung von etwa  $1500 \mu\text{m}^2$  bei der einen Digitalisierung und  $750 \mu\text{m}^2$  bei der anderen. Das Ergebnis ist mit dem Modell eines Mosaiks mit sukzessiv versagenden Kanten konsistent.

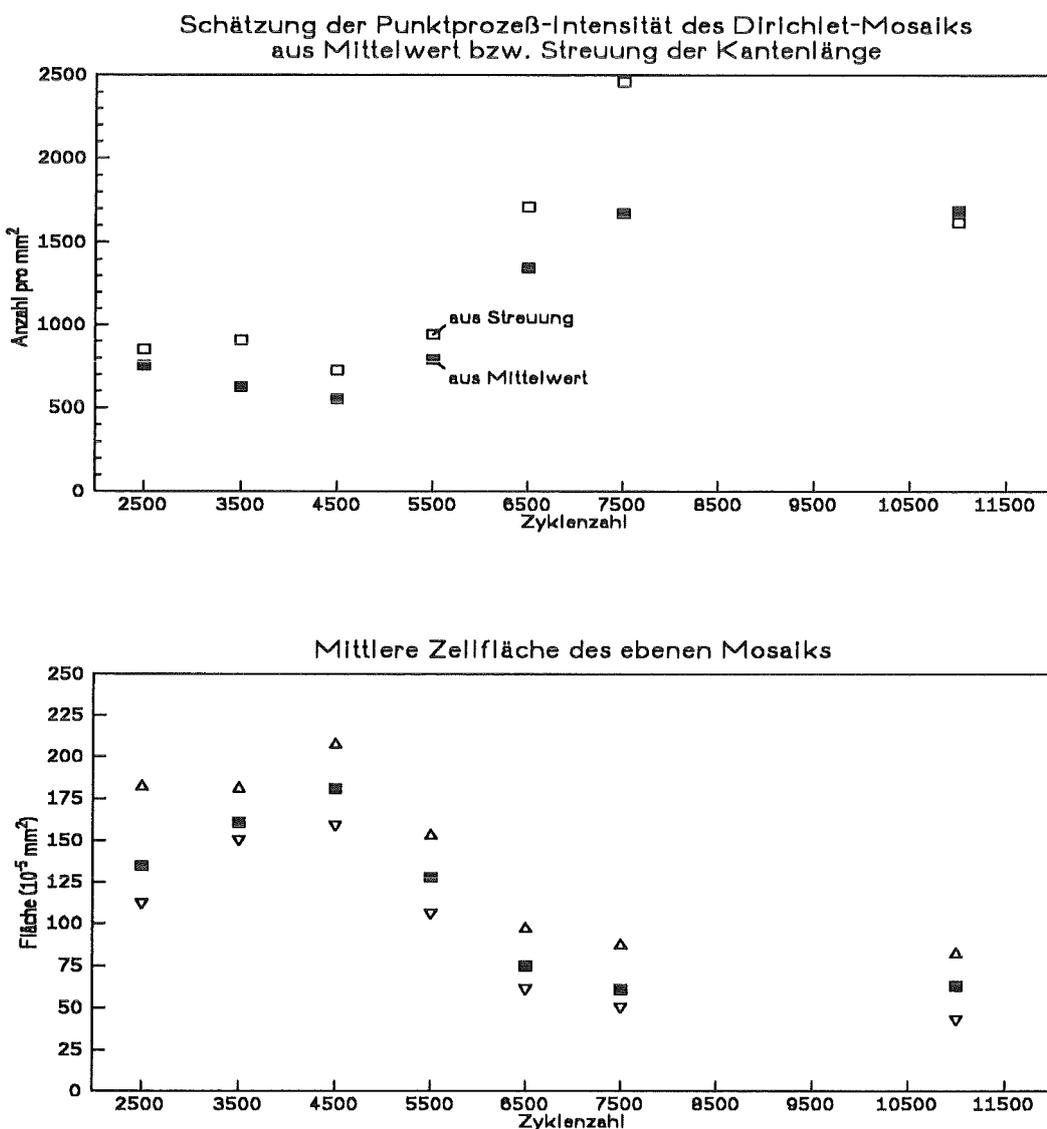


Abb. 7.6: Anpassung eines ebenen DIRICHLET-Mosaiks an die Rißmuster. Oben: Schätzung der Punktprozeß-Intensität aus dem Mittelwert bzw. der Streuung der Kantenlänge (jeweils Darstellung nur des Mittelwerts der Schätzung), unten: Schätzung der mittleren Zellfläche aus dem Mittelwert der Kantenlänge (Mittelwert, Minimum und Maximum).

### 7.3.2 Charakterisierung der Schädigung

Bisher wurden Kenngrößen des DIRICHLET-Mosaiks ermittelt. Im folgenden wird das Versagen der Kanten des Mosaiks untersucht. Im oberen Bild von Abb. 7.7 ist die mittlere Länge eines Einzelrisses gemeinsam mit der mittleren Anzahl von Kanten eines Risses aufgetragen. Der Vergleich beider Größen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung bei allen Zyklenzahlen, was ebenfalls in Einklang mit dem Mosaik-Modell steht. Der relative Anteil kürzerer bzw. längerer Kanten in der Menge der ausfallenden Kanten ändert sich nicht mit wachsender Zyklenzahl.

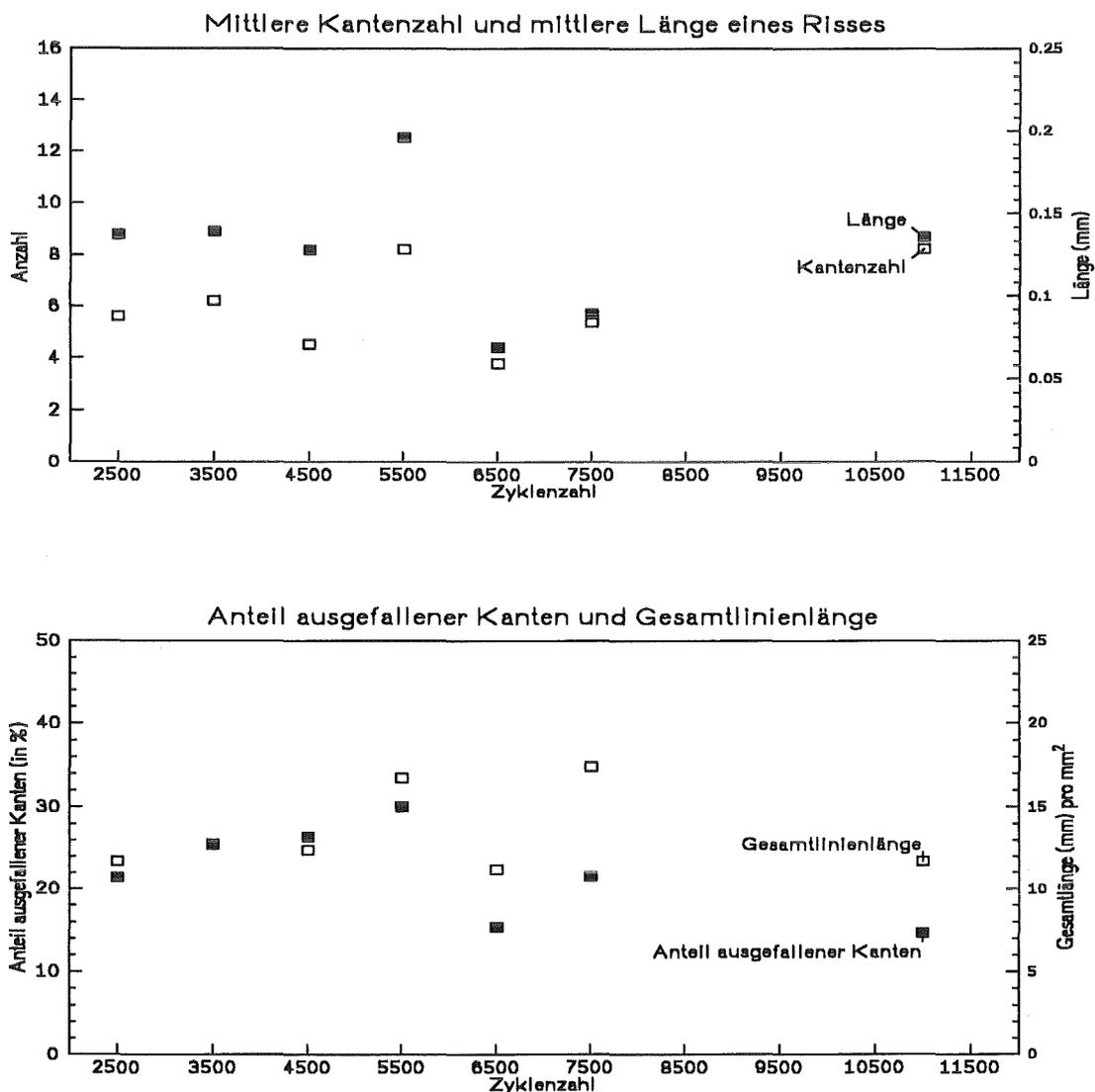


Abb. 7.7: Versagen der Kanten des DIRICHLET-Mosaiks und vergleichbare Kenngrößen der einfachen Ribstatistik. Oben: Mittlere Anzahl der Kanten und mittlere Länge eines Risses, unten: Anteil der ausgefallenen Kanten des Mosaiks und mittlere Gesamtrißlänge.

Gleichzeitig wird deutlich, daß die mittlere Länge einer Kante bei den beiden Digitalisierungen (Zyklenzahlen bis 5500 bzw. ab 6500) unterschiedlich, aber innerhalb einer Digitalisierung annähernd gleich ist. Das im oberen Teil von Abb. 7.7 gewählte Verhältnis zwischen der linken und rechten Ordinatenachse (mittlere Kantenzahl und mittlere Länge eines Risses) bedeutet eine mittlere Kantenlänge von etwa 0,015 mm. Diese mittlere Kantenlänge ist für die Digitalisierung B charakteristisch. Durch Wahl eines anderen Verhältnisses kann demgegenüber die Überdeckung der Punkte im linken Teil der Grafik erreicht werden. Man erhält dann einen Wert von etwa 0,025 mm für die mittlere Länge einer Kante, der nunmehr die Digitalisierung A charakterisiert. Die so ermittelten Richtwerte für die mittlere Länge einer Kante stimmen gut mit den aus dem Rißmuster erhaltenen Schätzungen überein.

Bezeichne  $n_K$  die mittlere Anzahl der ausgefallenen Kanten pro Flächeneinheit und  $\tilde{N}_K$  die Schätzung der mittleren Anzahl aller Kanten des konstruierten DIRICHLET-Mosaiks (Formel (4.6)). Der Quotient  $n_K / \tilde{N}_K$  beschreibt den "Anteil der ausgefallenen Kanten des Mosaiks" und charakterisiert den erreichten Grad der Schädigung im Rahmen des Mosaik-Modells. Die Zunahme mit wachsender Zyklenzahl ist im unteren Bild von Abb. 7.7 dargestellt und stimmt mit der bei der vergleichbaren, aber mosaikmodellunabhängigen, Kenngröße der einfachen Rißstatistik für den Grad der globalen Schädigung, der "Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit", überein (Abb. 7.1). Wegen der unterschiedlichen mittleren Kantenlängen muß auch hier für beide Digitalisierungen ein unterschiedliches Verhältnis der beiden Ordinatenachsen gewählt werden, damit sich die beiden Kenngrößen "Anteil ausgefallener Kanten" und "Gesamtlängeneinheit" überdecken.

### 7.3.3 Charakterisierung der Rißmorphologie

Bisher wurden Kenngrößen ausgehend von der Länge der ausgefallenen Kanten ermittelt. Im folgenden wird die relative Orientierung von ausgefallenen Kanten mit gemeinsamem Knotenpunkt untersucht. Bestimmt wird die Verteilung des eingeschlossenen Winkels zum einen an Verzweigungspunkten mit drei ausgefallenen Kanten, zum anderen an Knickpunkten der Risses, d.h. an Knoten mit genau zwei ausgefallenen Kanten. Man erhält zwei deutlich unterschiedliche Verteilungen (siehe Abb. 7.8).

Bei völliger Wechselwirkungsfreiheit des Kantenversagens sind identische Verteilungen zu erwarten. Das deutliche Maximum bei etwa  $150^\circ$  des Winkels zwischen zwei benachbarten Kanten zeigt, daß bevorzugt langgestreckte Konfigurationen gebildet werden, wenn keine Verzweigung eintritt. Verzweigungen dagegen entstehen bevorzugt, wenn die Winkel der beiden möglichen Pfade für weiteres Wachstum von einer Außenkante aus etwa in der gleichen Größenordnung liegen.

Die jeweiligen Verteilungen stimmen bei allen Lastzyklenzahlen überein, d.h. der Effekt ist unabhängig von der Zyklenzahl. Er weist auf den Einfluß benachbarter ausgefallener und noch

nicht ausgefallener Kanten auf die Versagenswahrscheinlichkeit einer Kante hin. Entsprechende Ansätze wurden im Kapitel 6 gemacht.

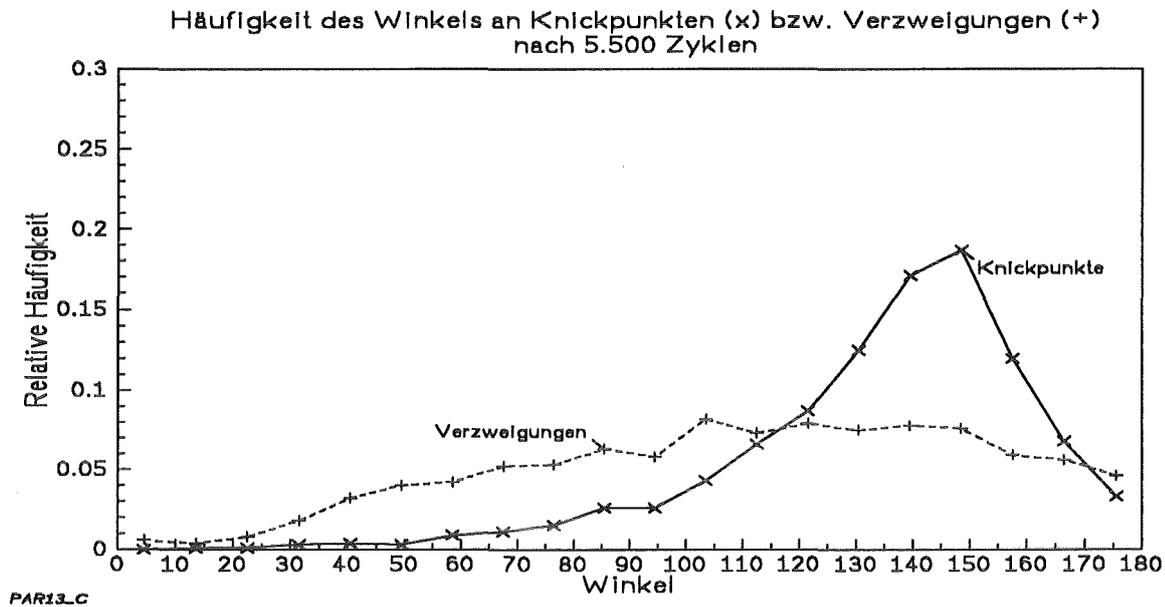


Abb. 7.8: Häufigkeitsverteilung des Winkels zwischen zwei ausgefallenen Kanten mit gemeinsamem Knoten nach 5500 Zyklen, Ermittlung an Knoten mit zwei (x) bzw. drei (+)Kanten.

Die unterschiedlichen Häufigkeitsverteilungen der Winkel sind charakteristisch für die Form der Risse. Weitere optische Eindrücke der Rißform sollen durch die Untersuchung spezieller Kennzahlen der Rißgeometrie erfaßt werden. Im Abschn. 4.3.1 wurde zur Charakterisierung des Grades der Verästelung der Risse der Rißverzweigungsgrad  $\theta_1$  eingeführt. Die Größe

$$\theta_1 = 2 \cdot \frac{\text{Anzahl der Verzweigungen des Risses}}{\text{Anzahl der Kanten des Risses}}$$

ist ein Maß für die Anzahl der gebildeten Verzweigungen bezogen auf die Anzahl der maximal möglichen Verzweigungen des Risses. In die Bestimmung des Mittelwerts des Rißverzweigungsgrads wurden zum einen alle Risse des Rißmusters einbezogen, zum anderen nur die Risse mit mindestens zwei Kanten. Diese Unterscheidung wurde aus der Vorstellung heraus vorgenommen, daß der Grad der Verästelung eines Rißmusters optisch nicht durch die isolierten, kleinen Kanten beeinflusst wird. Deshalb werden diese Mikrorisse in der Grafik im unteren Teil von Abb. 7.9 nicht berücksichtigt. Man erkennt in Abb. 7.9 - unter Berücksichtigung der Streubreite der Ergebnisse - eine Zunahme des Verzweigungsgrads, allerdings in geringerem Maße als erwartet. Diese Feststellung bezüglich der Rißform wurde in gleicher Weise schon bei der Entwicklung der globalen Schädigungsmaße getroffen (siehe Abschn. 7.2.1). Die Tatsache bestätigt und ergänzt die dort gezogene Schlußfolgerung, daß das charakteristische Rißmuster an der Oberfläche zu einem relativ frühen Zeitpunkt der Schädigungsentwicklung ausgeprägt ist und sich danach nur noch wenig verändert. Eine (geringfügige) Veränderung des Oberflächenrißmusters ist aus der stärkeren Zunahme des

Rißverzweigungsgrads im oberen Teil von Abb. 7.9 abzulesen. Der Effekt ist auf die Abnahme der Anzahl isolierter Kanten zurückzuführen, die in der oberen Kurve zugrundeliegenden Auswertung den Zahlenwert des Mittelwerts verringert. Ähnliche Beobachtungen wurden bei der Ermittlung des Rechteckformparameters  $\theta_2$  gemacht.

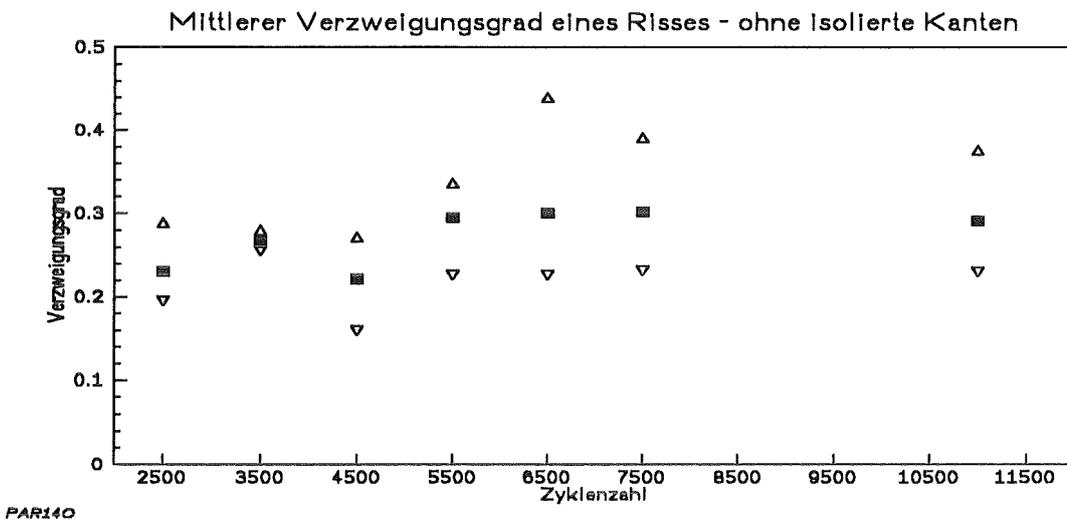
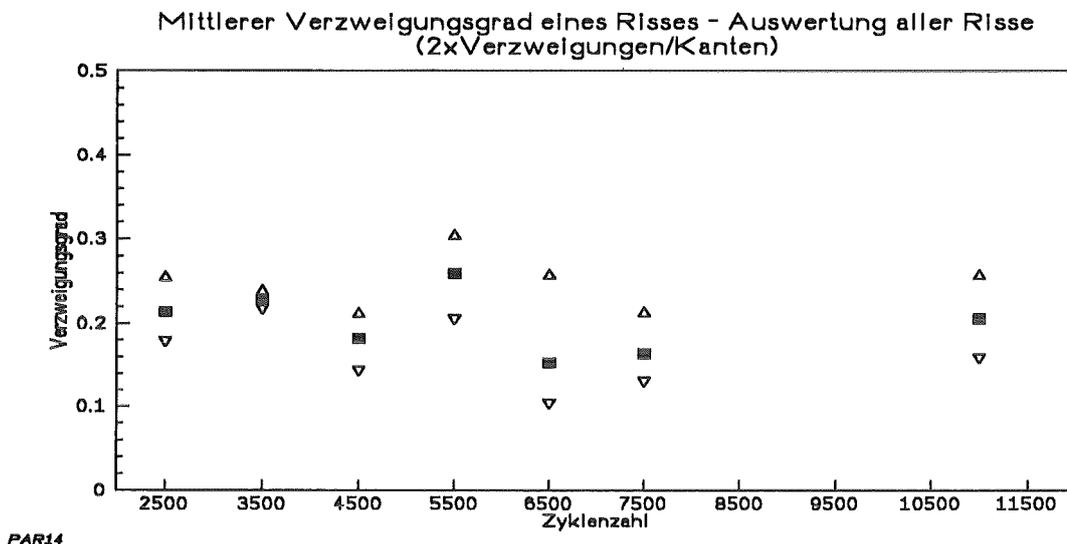


Abb. 7.9: Mittlerer Verzweigungsgrad eines Risses. Oben: Mittelung über alle Risse des Rißmusters, unten: Mittelung unter Ausschluß isolierter Kanten.

Die Rißformparameter  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sind auf den Einzelriß bezogene Kenngrößen und deshalb nicht stabil gegenüber einer Digitalisierung (siehe die Bemerkungen zur Digitalisierung im Abschnitt 7.2.1). Das betrifft unter anderem auch den den hier diskutierten Rißverzweigungsgrad, denn obwohl Verzweigungen in der Regel gut erkennbar sind, wird die Kenngröße durch das Schließen bzw. Nichtschließen von kleinen, scheinbaren Unterbrechungen von Linien beeinflusst. Deshalb sind weitergehende Untersuchungen, beispielsweise zur empirischen Verteilung der Rißformparameter oder zu einer auf Rißformparametern beruhenden Clusteranalyse der Risse, nicht aussagekräftig.

### 7.3.4 Charakterisierung der Wechselwirkung mit Hilfe des Referenzmodells eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten

In den bisherigen Modellen wurden keine Wechselwirkungseffekte berücksichtigt. Die unterschiedlichen Häufigkeiten der Winkel an Knick- bzw. Verzweigungspunkten weisen jedoch auf die Notwendigkeit hin, auch die Größe der Wechselwirkung geeignet zu charakterisieren. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen: Man bestimmt verschiedene Kenngrößen des Mosaik-Modells ohne Wechselwirkung. Diese Größen sind konsistent (z.B. die verschiedenen Schätzungen der Kantenversagenswahrscheinlichkeit). Der Grad der Abweichung der Kenngrößen bei realen Rißmustern wird als ein Maß für die Wechselwirkung beim Kantenversagen verwendet.

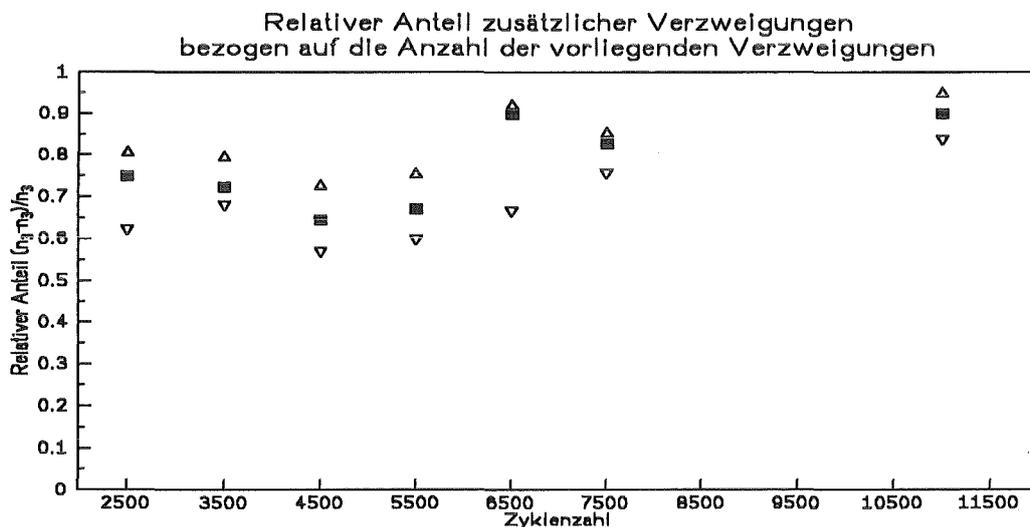
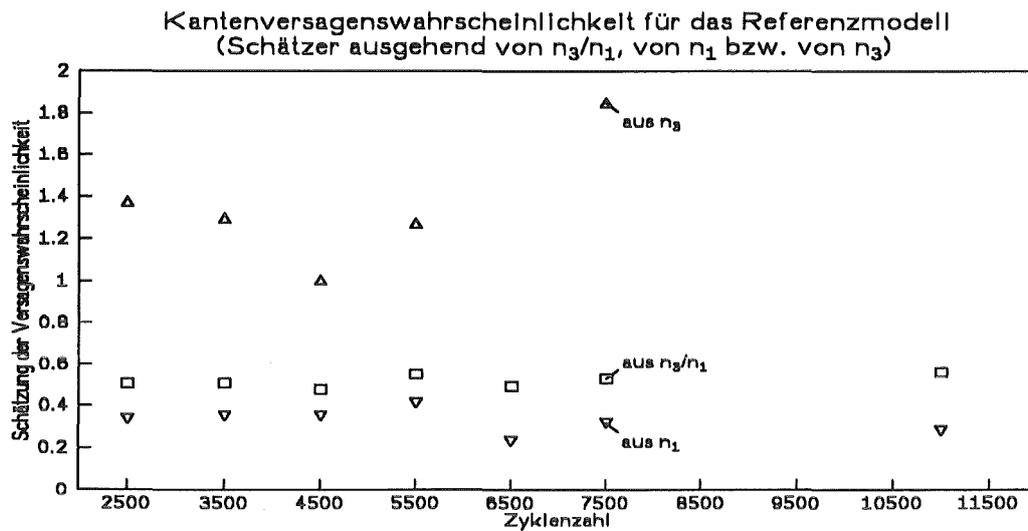
Aus dem digitalisierten Rißmuster werden die kumulative Länge aller Risse pro Flächeneinheit,  $l_A$ , die mittlere Anzahl von Verzweigungsknoten pro Flächeneinheit,  $n_3$ , und die mittlere Anzahl von Außenknoten pro Flächeneinheit,  $n_1$ , bestimmt. Es werden drei verschiedene Schätzungen der Versagenswahrscheinlichkeit  $p$  ermittelt:

- $\tilde{p}$  aus dem Quotienten  $n_3 / n_1$  (Formel (4.9))
- $\hat{p}$  aus  $n_1$  und  $l_A$  (Formel (4.13))
- $\bar{p}$  aus  $n_3$  und  $l_A$  (Formel (4.14)).

Abb. 7.7 zeigt die Ergebnisse der drei Schätzer. Sie sollten bei Unabhängigkeit des Kantenvertragens verträglich sein. Die Unterschiede zwischen den Schätzwerten sind darauf zurückzuführen, daß in dem Modell, das den Schätzern zugrundeliegt, keine Wechselwirkung beim Kantenversagen berücksichtigt wird. Die verschiedenen Schätzer sind unterschiedlich empfindlich gegenüber den Wechselwirkungseffekten. Die bei allen Zyklenzahlen festgestellte Relation  $\hat{p} < \tilde{p} < \bar{p}$  ist auf den unterschiedlich großen Einfluß der Anzahl der Verzweigungspunkte  $n_3$  pro Flächeneinheit auf die Schätzer zurückzuführen. Diese Größe  $n_3$  wächst bei Rißwechselwirkung besonders stark, denn durch das bevorzugte Versagen an schon bestehenden Rissen entstehen vergleichsweise häufiger Verzweigungen als bei rein zufälligem Versagen. Durch die größere Anzahl von Verzweigungen wird der Schätzwert für die Versagenswahrscheinlichkeit angehoben.

Bei der Interpretation des globalen Niveaus der Schätzwerte ist zu berücksichtigen, daß das Mosaik-Modell mit unabhängigem Kantenversagen ein einstufiges Versagensmodell ist. Der gesamte Schädigungsprozeß bis zu der entsprechenden Lastzyklenzahl wird in diesem Modell als ein einmaliges Versagen bzw. Nichtversagen der einzelnen Kanten simuliert. Deshalb erhält man mit allen Schätzern große Versagenswahrscheinlichkeiten.

Der Schätzwert  $p$  größer als Eins für die Versagenswahrscheinlichkeit bedeutet, daß es lediglich eine reelle Zahl  $p$  gibt, die das Gleichungssystem (4.14) erfüllt. Sie bedeutet gleichzeitig, daß das zugrunde gelegte Modell des unabhängigen Kantenversagens nicht in Einklang mit dem am Rißmuster beobachteten Paar von Werten  $n_3$  und  $l_A$  zu bringen ist.



**Abb. 7.10: Vergleich mit dem Referenzmodell des Mosaiks mit unabhängigem Kantenversagen.**  
 Oben: Drei verschiedene Schätzungen der Kantenversagenswahrscheinlichkeit (jeweils Angabe des Mittelwerts), unten: Anzahl "zusätzlicher" Verzweigungen bezogen auf die Anzahl aller Verzweigungen (Mittelwert, Minimum und Maximum).

Die Überschätzung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit bei Zugrundelegung der Anzahl der Verzweigungen  $n_3$  bedeutet: Es gibt zu viele Verzweigungen im Vergleich zum unabhängigen Kantenversagen. Es gibt abhängiges Kantenversagen.

Anhand der Anzahl der Verzweigungspunkte  $n_3$  könnte ein Maß für die Verstärkung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit gebildet werden. Die beobachtete Anzahl  $n_3$  wird mit der bei unabhängigem Kantenversagen zu erwartenden Anzahl  $\hat{n}_3$  verglichen. Zur Schätzung von  $\hat{n}_3$  wird die vorher aus  $n_1$  und  $I_A$  ermittelte Kantenversagenswahrscheinlichkeit verwendet.

Ein Schätzer  $\hat{n}_3$  wird aus den Gleichungen (4.7) und (4.12) hergeleitet, wobei die Versagenswahrscheinlichkeit  $p$  in (4.7) durch den Schätzwert  $\hat{p}$  (Formel (4.13)) und die Punktprozeß-Intensität  $r$  in (4.12) durch den Schätzwert  $\hat{r}$  (wiederum (4.13)) ersetzt werden:

$$\hat{n}_3 = \hat{p}^3 \cdot 2\hat{r} \quad (7.2)$$

Falls tatsächlich unabhängiges Kantenversagen eintritt, erwartet man, daß  $n_3$  mit  $\hat{n}_3$  übereinstimmt.

Der Quotient

$$\frac{\Delta n_3}{n_3} = \frac{(n_3 - \hat{n}_3)}{n_3} \quad (7.3)$$

beschreibt demzufolge den relativen Anteil von durch Verstärkung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit zusätzlich entstandenen Verzweigungen bezogen auf die beobachtete Anzahl von Verzweigungen. Bei Wechselwirkungsfreiheit erwartet man  $\Delta n_3 = 0$ .

Die Ergebnisse in Abb. 7.10 unten weisen auf das bevorzugte Versagen an bestehenden Rissen hin, das zum Entstehen von vergleichsweise vielen Verzweigungen führt. Entsprechende Modelle, die solche Effekte berücksichtigen, wurden im Kapitel 6 erläutert; mit diesen Modellen simulierte Rißmuster werden im folgenden Abschnitt 8 analysiert (siehe auch [30]). Die Größe der Verstärkung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit nimmt erwartungsgemäß mit wachsender Zyklenzahl ab, da mit zunehmender Ausfüllung des Mosaiks durch versagte Kanten nicht nur Verstärkungen, sondern zunehmend auch Abschirmungen eintreten.

Die Erkenntnisse aus der Untersuchung der ebenen Rißmuster können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Die Entwicklung der Schädigung erfolgt in den Phasen Rißentstehung - Rißwachstum - Rißzusammenlagerung, die nebeneinander ablaufen können.
- Das typische Rißmuster an der Oberfläche ist früher als erwartet ausgeprägt. Danach erfolgt nur noch eine geringe Zunahme der Schädigung an der Oberfläche.
- Die statistischen Kenngrößen der Rißmuster können zwischen verschiedenen Proben mit gleicher Zyklenzahl stark streuen.
- Die Ergebnisse der statistischen Auswertung sind mit dem Modell eines Mosaiks mit schrittweise versagenden Kanten konsistent.
- Globale statistische Kenngrößen der Rißmuster, die den Grad der Schädigung charakterisieren, sind relativ unempfindlich gegenüber einer Digitalisierung der Muster. Lokale Kenngrößen, die beispielsweise die Anzahl und Form der Risse betreffen, sind mehr empfindlich.
- Modellunabhängige Kenngrößen der einfachen Rißstatistik erlauben eine Charakterisierung der Schädigungsentwicklung in anschaulicher und komprimierter Form. Die drei Kenngrößen "Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit", "Länge eines Einzelrisses" und "Gesamtlinienlänge pro Flächeneinheit" müssen gemeinsam bewertet werden.
- Vergleichbare Aussagen sind anhand entsprechender, aber für das Mosaik-Modell spezifischer Kenngrößen möglich (z.B. Rißkantenanzahl statt Rißlänge). Darüberhinaus charakterisieren diese Kenngrößen Eigenschaften der lokalen Schädigungsentwicklung.

- Mit zunehmender Schädigung treten neben den Verstärkungseffekten des Versagens an vorhandenen Rissen auch Abschirmungseffekte durch benachbarte Risse ein.
- Aufgrund von Reißwechselwirkung treten vergleichsweise mehr Reißverzweigungsknoten als bei unabhängigem Kantenversagen auf.
- Charakteristisch ist die unterschiedliche Verteilung des Winkels zwischen versagten Kanten an Knickpunkten bzw. Verzweigungen der Risse. Es entstehen bevorzugt langgestreckte Risse, wenn keine Verzweigung eintritt.

## 7.4 Zusätzliche Ergebnisse zur Rißtiefenausdehnung

Der Hauptteil der vorgenommenen Untersuchungen zur Charakterisierung und Modellierung des Schädigungsprozesses erfolgte anhand der Oberflächenrißmuster. Darüberhinaus ist es möglich, auch vergleichbare Untersuchungen zur Rißtiefenausdehnung vorzunehmen. Die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Projektbearbeitung, die auf dem Vergleich von Simulation und Experiment beruht, könnte dann prinzipiell wiederum angewendet werden. Ihre Realisierung gestaltet sich aber wegen der räumlichen Dimension der Risse sehr viel komplizierter. Das betrifft sowohl die statistische Auswertung als auch die Entwicklung des bruchmechanischen Simulationsmodells. Dieser Effekt ist generell in der stochastischen Geometrie wie in der Bruchmechanik bekannt. Im beantragten Projekt erfolgte deshalb aus Zeitgründen eine weitestgehende Beschränkung auf die Untersuchung des ebenen Problems. Die Rißtiefe wurde im Simulationsmodell überhaupt nicht berücksichtigt, allerdings wurde sie in geringem Umfang in die statistische Auswertung mit einbezogen. Das betraf die zusätzlichen Teilaspekte

- Rißachsenverhältnis und
  - Zunahme der Schädigung in der Tiefe,
- die die statistischen Aussagen zu den ebenen Rißmustern ergänzen.

### 7.4.1 Vorbereitungen für die Analyse der Rißtiefenausdehnung

Die Probenstücke wurden schichtweise abgetragen und die Rißmuster analog zu den Oberflächenbildern fotografiert und anschließend digitalisiert. Die Messung der Abtragtiefe geschah über Vickershärteeindrücke, die an drei Stellen der Probe angebracht wurden. Aus der Änderung der Länge der Diagonalen des Härteeindrucks nach dem Abschleifen kann der Abtrag berechnet werden. Somit liegen die Schnittbilder der räumlichen Rißkonfiguration in einer Folge von parallelen Ebenen vor. Werden die End-, Knick- und Verzweigungspunkte der digitalisierten Risse in den benachbarten Ebenen einander zugeordnet, ist die gesamte dreidimensionale Ausdehnung des Risses vollständig erfaßt [1].

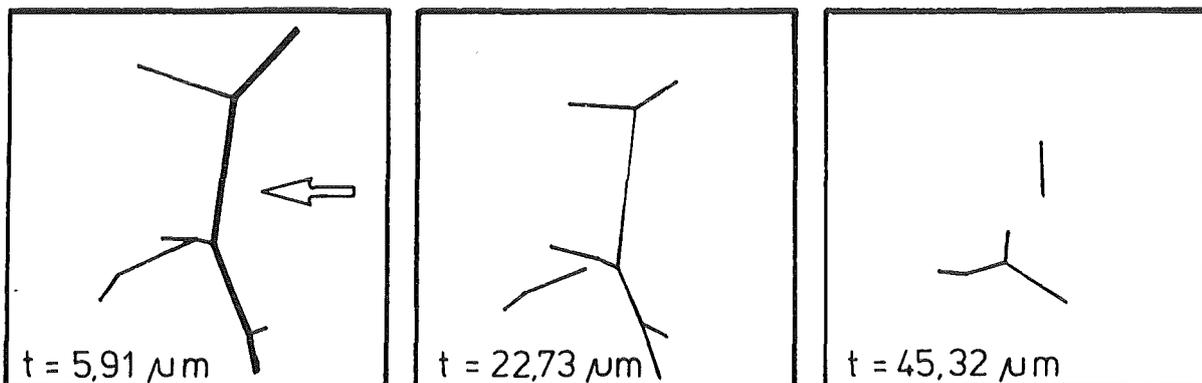


Abb. 7.11: Einzelriß in unterschiedlicher Tiefe der Schnittebenen.

In Abb. 7.11 ist ein Einzelriß in verschiedenen Ebenen gezeigt. Man sieht, daß die einzelnen Teile des Risses unterschiedlich tief gewachsen sind. Hieraus lassen sich Anhaltspunkte zu möglichen Rißverzweigungen oder -zusammenlagerungen ableiten.

Wichtige Informationen zur räumlichen Ausdehnung der Risse lassen sich aus der Seitenansicht der Risse aus beliebiger Richtung gewinnen. Ein erstelltes Auswerteprogramm ermöglicht neben der Darstellung als Glasmodell, d.h. es werden auch die verdeckten Kanten gezeichnet, die Vorgabe eines Linienzuges an der Oberfläche, für den allein die Tiefenausdehnung gezeichnet wird. In Abb. 7.12 ist als Beispiel dargestellt, wie sich der dick gezeichnete Linienzug der ersten Ebene in Abb. 7.11 in die Tiefe fortsetzt. Der Pfeil gibt die gewählte Blickrichtung an. Die Kontur des Risses wird durch eine Halbellipse angenähert, die ebenfalls in Abb. 7.12 dargestellt ist. Wird diese Auswertung auf eine große Anzahl von Rissen angewendet, lassen sich empirische Verteilungsfunktionen der Achsenverhältnisse ermitteln. Die so erhaltenen Verteilungsfunktionen dienen einerseits zu einer reinen geometrischen Beschreibung der experimentellen räumlichen Rißmuster und andererseits zur Weiterentwicklung des Simulationsalgorithmus bzw. des bruchmechanischen Modells.

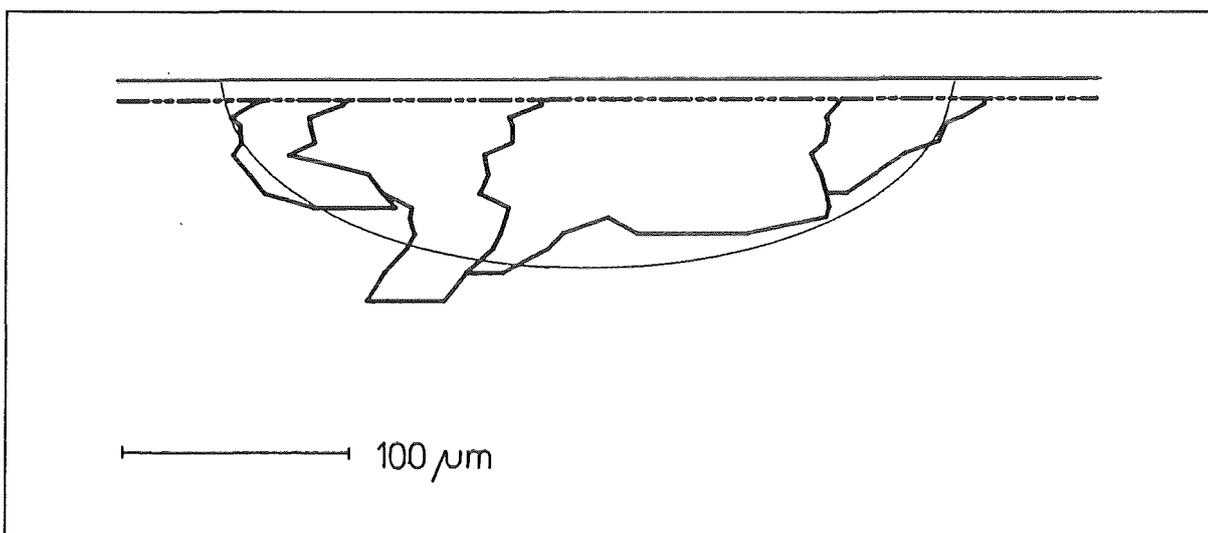


Abb. 7.12: Seitenansicht des Risses aus Abb. 7.11.

#### 7.4.2 Rißtiefe und Rißachsenverhältnis der experimentellen Risse

Für die Auswertung der Rißachsenverhältnisse sind jeweils die Linienzüge der Risse an der Oberflächen sowie die zugehörige Blickrichtungen geeignet festzulegen. Eine Möglichkeit der Festlegung ergibt sich im Zusammenhang mit der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren an Rißend- bzw. Knickpunkten. Formal wird der verzweigte Riß durch einen geraden Riß der Länge  $a_{eff}$  ersetzt. Dieser verläuft in Richtung der Randkante, damit die Winkelverhältnisse am Endpunkt zu den noch nicht versagten Kanten unverändert bleiben.

Diesem halb elliptischen Ersatzriß muß neben der effektiven Rißlänge an der Oberfläche ein entsprechendes Achsenverhältnis in Tiefenrichtung so zugeordnet werden, daß der damit berechnete Spannungsintensitätsfaktor dem des tatsächlich vorhandenen dreidimensionalen und verzweigten Risses entspricht. Da eine Zuordnung anhand berechneter K-Faktoren eines räumlichen verzweigten Risses wegen des kaum zu bewältigenden Rechenaufwandes nicht möglich ist, sind plausible Annahmen festzulegen. Plausibel ist sicher die Ermittlung der Achsenverhältnisse der experimentellen Risse in denselben Richtungen, in denen die Ersatzrisse liegen. Dazu kann jeder Riß aus den Blickrichtungen senkrecht zu jeder Randkante betrachtet werden und an der Oberfläche ein zugehöriger Linienzug festgelegt werden, der den gesamten Riß senkrecht zur Blickrichtung ausgehend vom Randpunkt möglichst vollständig durchläuft. Eine Unterteilung der Randpunkte entsprechend ihrer Lage in innere und äußere ist aufgrund der zu erwartenden unterschiedlichen Verteilungen notwendig. Der Sachverhalt wird in Abb. 7.13 veranschaulicht. Neben der Unterteilung der Randpunkte ist die Wahl des Linienzuges an der Oberfläche und die Blickrichtung zur Erzeugung der Seitenansicht mit eingetragen.

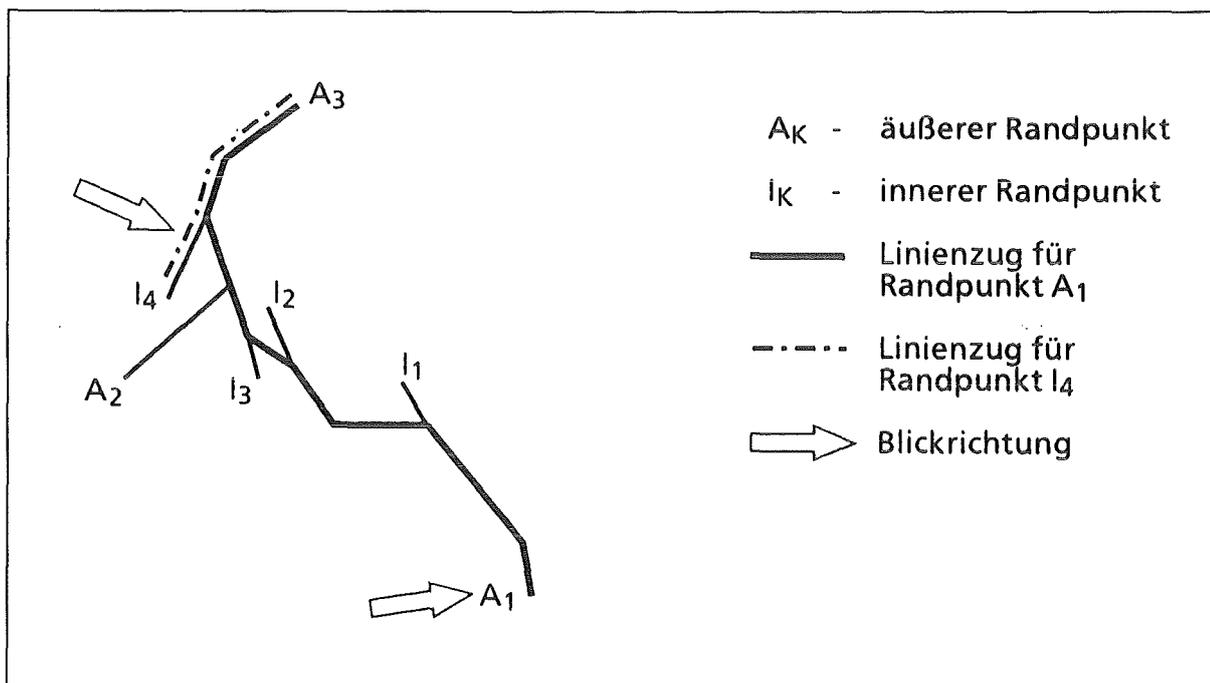


Abb. 7.13: Ermittlung der räumlichen Rißgeometrie.

Mit dem beschriebenen Verfahren ordnet man jedem Endpunkt eines Risses eine Halbellipse zu. Aus den so erhaltenen Achsenverhältnissen wird mit der entsprechenden Unterteilung in innere und äußere Randpunkte jeweils eine gemeinsame empirische Verteilungsfunktion bestimmt. Dieses Vorgehen wird durch die Tatsache nahegelegt, daß auch die Berechnung der Beanspruchungsgrößen in der Simulation für jeden Endpunkt der Risse erfolgt. Während die Blickrichtungen durch die Richtung der Randkanten bestimmt sind, geschieht die Festlegung des Linienzuges an der Oberfläche des Risses jedoch weitestgehend nach optischem Eindruck.

Um eine objektivere Charakterisierung der räumlichen Ausdehnung der Rißmuster zu bekommen, ist eine Klassifizierung der Risse entsprechend dem Oberflächenrißbild sinnvoll. Die Klassifizierung kann beispielsweise nach der Art der Verzweigungen an der Oberfläche geschehen, weil gerade die Verzweigungen die Festlegung des Linienzuges an der Oberfläche nicht mehr eindeutig erscheinen lassen. Eine erste Klasse umfaßt alle Risse ohne Verzweigungspunkt, eine weitere alle Risse mit nur einem Verzweigungspunkt. So kann systematisch der Einfluß der Verzweigungen an der Oberfläche auf die statistischen Merkmale der dreidimensionalen Rißgeometrie untersucht werden, wobei ein Kompromiß zwischen Genauigkeit und Aufwand sinnvoll festzulegen ist.

Ergebnisse für eine Lastzyklenzahl von 6500 sind in Abb. 7.14 dargestellt. Im Bild sind die empirischen Verteilungsfunktionen der Achsenverhältnisse der Halbellipsen einmal für alle äußeren Endpunkte und zum anderen für alle Risse ohne Verzweigungspunkt angegeben. Dabei wurden Oberflächenaufnahmen an zwei Stellen der Probe ausgewertet. Die Stichprobe umfaßt 123 Risse mit 299 Außen- und 70 Innenknoten. Davon waren 56 Risse ohne Verzweigungspunkt.

Die Unterschiede im Bereich kleiner Werte  $b/a$ , d.h. bei langen flachen Rissen, entsprechen der Erwartung, da hier der Einfluß durch Zusammenlagerungen besonders groß ist.

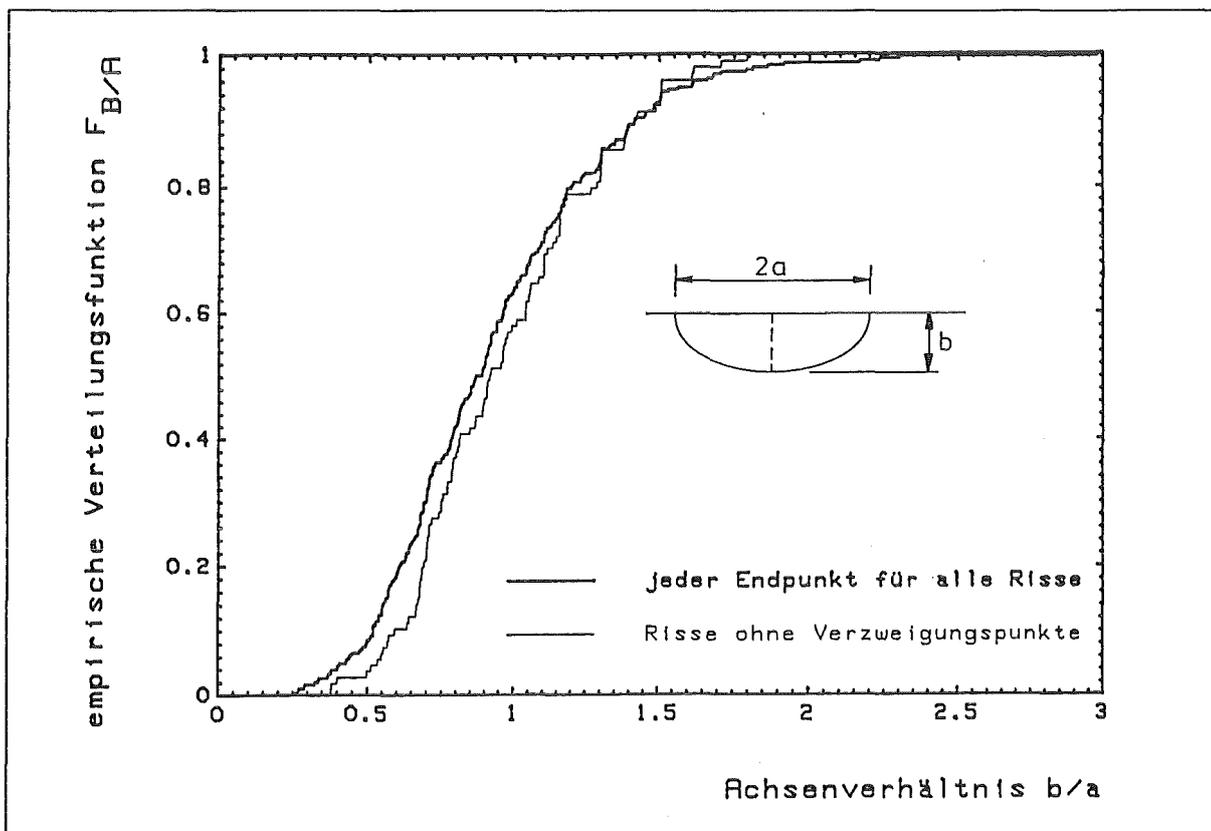


Abb. 7.14: Histogramme der Achsenverhältnisse der gefitteten halbelliptischen Oberflächenrisse.

## Rißtiefe

Die Ermittlung der Rißtiefenverteilungen erfolgte für verschiedene Lastzyklenzahlen aus den Schliffen parallel zur Probenoberfläche. Die empirische Verteilung der relativen Häufigkeit der Rißtiefe ist in Abb. 7.15 dargestellt (siehe auch [29]).

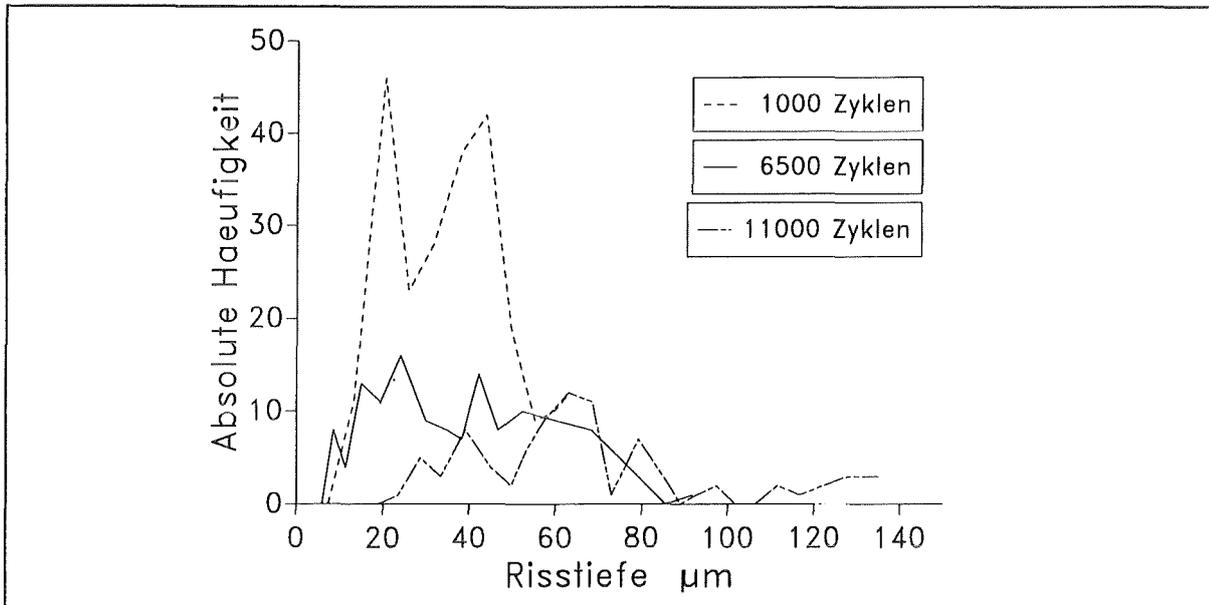


Abb. 7.15: Histogramme der Rißtiefen nach verschiedenen Lastzyklenzahlen.

Man sieht eine deutliche Zunahme der Rißtiefe mit wachsender Zyklenzahl. Diese Schädigungsentwicklung ist stärker als an der Oberfläche (ausgedrückt z.B. in der Gesamtlängelänge aller Risse pro Flächeneinheit). Gleichzeitig wächst die Streubreite der Rißtiefe.

Für eine genauere Interpretation der Zunahme der Schädigung in die Tiefe reichen die vorgestellten Ergebnisse nicht aus. Beispielsweise kann die im Abschnitt 7.4 aufgeworfene Frage nach dem Verhältnis der Zunahme der Schädigung mit wachsender Lastzyklenzahl an der Oberfläche einerseits und in der Tiefe andererseits so nicht beantwortet werden. Der Kenngröße "gesamte Länge aller Risse pro Flächeneinheit" entsprechend müßte beispielsweise eine Kenngröße eingeführt werden, die neben der Tiefe die Ausdehnung der Risse erfaßt. Diese Größe könnte aber nur aus ebenen Bildern (Schliffen parallel zur Probenoberfläche oder Schnitten senkrecht zur Oberfläche) ermittelt werden. Die Entwicklung einer statistischen Auswertung für den räumlichen Fall und der Vergleich mit Ergebnissen anhand eines zu entwickelnden räumlichen bruchmechanischen Modells ist wie schon erwähnt aus Zeitgründen in diesem Projekt nicht möglich.

Die Erkenntnisse aus der Untersuchung der räumlichen Schädigung können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Die Schädigungszunahme erfolgt in stärkerem Maße durch Rißwachstum in die Tiefe als an der Oberfläche. Dieser Effekt tritt früher als erwartet schon bei kleineren Zyklenzahlen ein.
- Die räumliche Form der Risse ist kompliziert.
- Der Vergleich von Schliffbildern parallel zur Probenoberfläche und unterschiedlicher Abtragstiefe zeigt, daß in den Ästen des Risses unterschiedliche Rißtiefen erreicht werden.
- Verzweigte Risse sind demzufolge überwiegend durch Zusammenlagerung entstanden, nicht durch Rißverzweigung.

## 8. Statistische Analyse von simulierten Rißmuster

### 8.1 Vorbereitungen zur Simulation und zur Auswertung der Rißmuster

Im Zwischenbericht [1] wurde die Simulation zunächst mit vereinfachten Modellen durchgeführt. Die Versagenswahrscheinlichkeit einer Kante wurde mit formalen Ansätzen ermittelt, in die nur der Zustand der benachbarten Kanten (versagt oder nicht versagt) einging [30]. In einer ersten Version des bruchmechanischen Modells wurden darüberhinaus zwar Näherungsformeln für die Beanspruchungen an den Knickpunkten oder Endpunkten der Risse verwendet, die von der Form des jeweiligen Risses abhängen. Dagegen wurden Abschirmungseffekte und Rißwechselwirkungen noch nicht berücksichtigt. Durch das im Kapitel 6 vereinbarte Modell werden nunmehr auch diese Einflüsse erfaßt [27].

Hauptbestandteile des bruchmechanischen Versagensmodells sind (siehe Abschn. 6.2.1)

- die Ermittlung der Beanspruchungsgröße  $B$  für eine ungerissene Kante und
- die Herstellung eines Zusammenhangs zwischen Beanspruchungsgröße und Versagenswahrscheinlichkeit.

Die Parameter des bruchmechanischen Modells sind geeignet festzulegen und in ihrem Einfluß auf das Simulationsergebnis zu untersuchen. Das betrifft bei der Ermittlung der Beanspruchungsgröße

- das Gebiet für die Mittelwertbildung, beschrieben durch die Länge  $r_0$  (Formel (6.2)) und bei der Zuweisung der Versagenswahrscheinlichkeit (Formel (5.1), Abb. 5.3)
- die Mindestversagenswahrscheinlichkeit  $p_{\min}$  und
- die Kappungsgrenze  $B_{\max}$  der Beanspruchungsgröße.

Es werden das zugrundeliegende DIRICHLET-Mosaik, die Anfangsschädigung mit der Versagenswahrscheinlichkeit  $p_0 = p(B=0)$  und mit dem im Kapitel 6 vereinbarten Modell weitere sieben Folgeschädigungsschritte mit der für jede Kante neu berechneten Wahrscheinlichkeit  $p_K$  simuliert. Der Schädigungsprozeß wird mit einer festgelegten Parameterkombination mehrmals simuliert, und zwar ausgehend von drei unterschiedlichen Realisierungen des DIRICHLET-Mosaiks für jedes dieser Mosaik dreimal, so daß mit einem Modell (genauer gesagt dem bruchmechanischen Modell aus Abschnitt 6 mit einer ausgewählten Parameterkombination) insgesamt neun Simulationsläufe gestartet werden. Ein einziger Simulationslauf ergibt dabei neun aufeinanderfolgende Rißmuster (die Anfangsschädigung oder "Stufe 1" und weitere acht, sukzessiv auseinander entstehende, Folgeschädigungen, die "Stufen 2 bis 9").

Die Auswertung der simulierten Rißmuster erfolgt in gleicher Weise wie bei den experimentell erhaltenen Mustern, so daß in dieser Beziehung eine Vergleichbarkeit gegeben ist.

Es zeigt sich jedoch bei der Simulation, daß bei bestimmten Parameterkombinationen nach mehreren Folgesimulationsschritten Rißmuster entstehen *können*, die deutlich von den experimentellen Rißmustern abweichen. Das betrifft zum einen das Schließen von Linienzügen (die Entstehung von "Kreisen"). Rißmuster mit mehreren Kreisen werden im Experiment nicht beobachtet. Sind während eines Simulationslaufs ab einer bestimmten Stufe mehrere Kreise entstanden, so wird dieser Simulationslauf von vornherein nicht in die Auswertung einbezogen. Zum anderen können Bilder entstehen, wo die Gesamtrißlänge zum größten Teil auf einen einzigen, sehr großen Riß konzentriert ist. Deshalb konnten bei einigen Parameterkombinationen nicht neun Simulationsläufe ausgewertet. Die Anzahl der auswertbaren Rißmuster gibt, obwohl sie zufällig ist, bereits Hinweise für die Eignung der gewählten Parameterwerte. Tab. 8.1 zeigt die Anzahl der ausgewerteten Serien. Das Modell P mit  $r_0 = 5,0 \cdot 10^{-5}$ ,  $p_{\min} = 3 \cdot 10^{-4}$  und  $B_{\max} = 1,5 \cdot 10^2$  dient bei der Variation der Parameter als Bezugsmodell.

Einige Realisierungen von Rißmustern sind in Abb. 8.1 dargestellt.

	Änderung des Parameters	Bezeichnung des Modells	Bezeichnung für Mosaik	Bezeichnung für Zufallszahlenfolge	Anzahl der ausgewerteten Serien
$r_0$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	Z	1, 2, 3	0, 1, 2	8 von 9
	$5,0 \cdot 10^{-5}$	P	1, 2, 3	0, 1, 2	9
	$5,5 \cdot 10^{-5}$	Y	1, 2, 3	0, 1, 2	8 von 9
	$6,0 \cdot 10^{-5}$	W	1, 2, 3	0, 1, 2	8 von 9
$p_{\min}$	$3 \cdot 10^{-4}$	P	1, 2, 3	0, 1, 2	9
	$4 \cdot 10^{-4}$	S	1, 2, 3	0, 1, 2	9
$B_{\max}$	$1,5 \cdot 10^2$	P	1, 2, 3	0, 1, 2	9
	$2 \cdot 10^2$	T	1, 2, 3	0, 1, 2	8 von 9

Tab. 8.1: Simulierte und ausgewertete Schädigungsverläufe

Untersucht werden die Kenngrößen der einfachen Rißstatistik, Kenngrößen der Rißformstatistik sowie die Verstärkung durch Wechselwirkungseffekte (vgl. die Abschnitte 4.2 und 4.3). Auf die Ermittlung der Kenngrößen des Faserprozesses (Abschn. 4.2.2) wird verzichtet, da keine wesentlichen zusätzlichen Aussagen erwartet werden. Auch die nur das zugrundeliegende Mosaik betreffenden Kenngrößen des Mosaik-Modells (Abschn. 4.3.1) werden nicht bestimmt, weil die Punktprozeß-Intensität des zu Anfang der Simulation erzeugten DIRICHLET-Mosaiks bekannt ist.

Ziel der Auswertung ist die Beantwortung folgender Fragen:

- Geben die Kenngrößen den optischen Eindruck der Rißmuster gut wieder? Erhält man deutlich unterschiedliche Kenngrößen für optisch unterschiedliche Bilder?
- Wie kann anhand der Entwicklung der Kenngrößen der Rißmuster die Entwicklung der Schädigung beschrieben werden? Welche Unterschiede ergeben sich bei der Entwicklung der Kenngrößen zwischen den einzelnen Modellen? Die Kenngrößen sind hierzu als Mittelung aus mehreren Realisierungen zu berechnen.

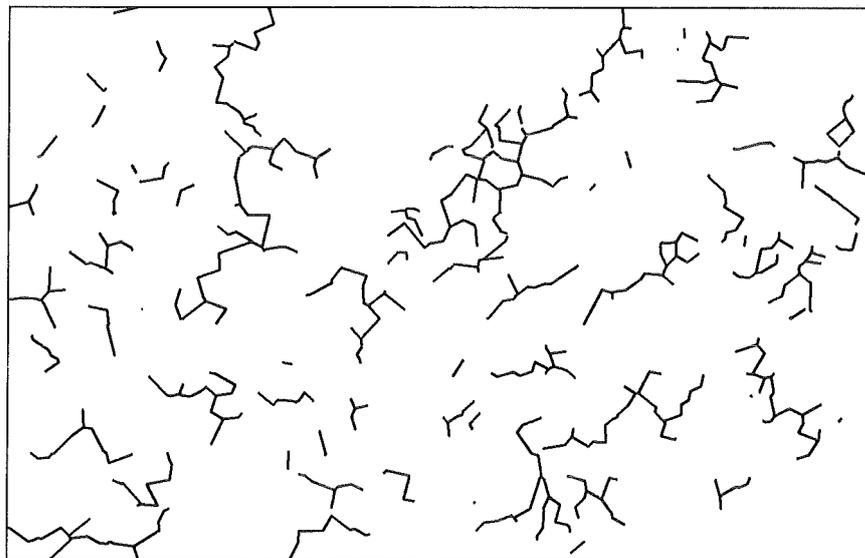
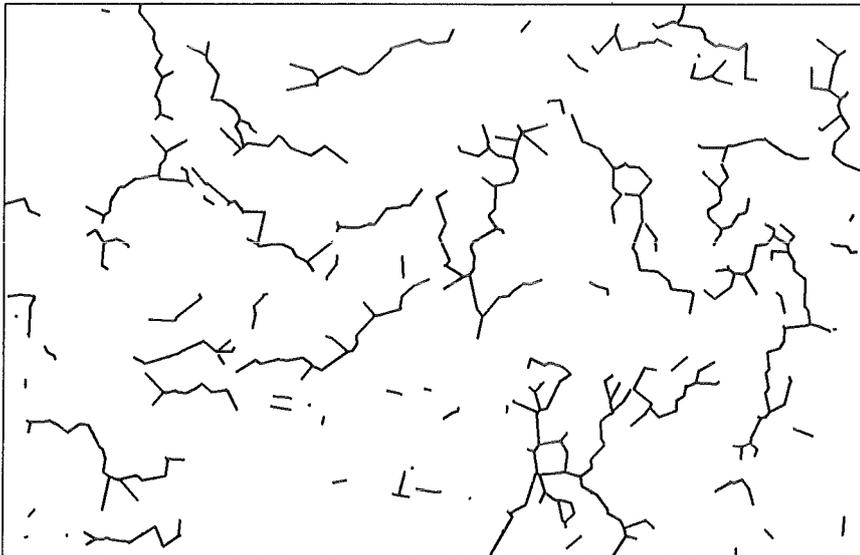
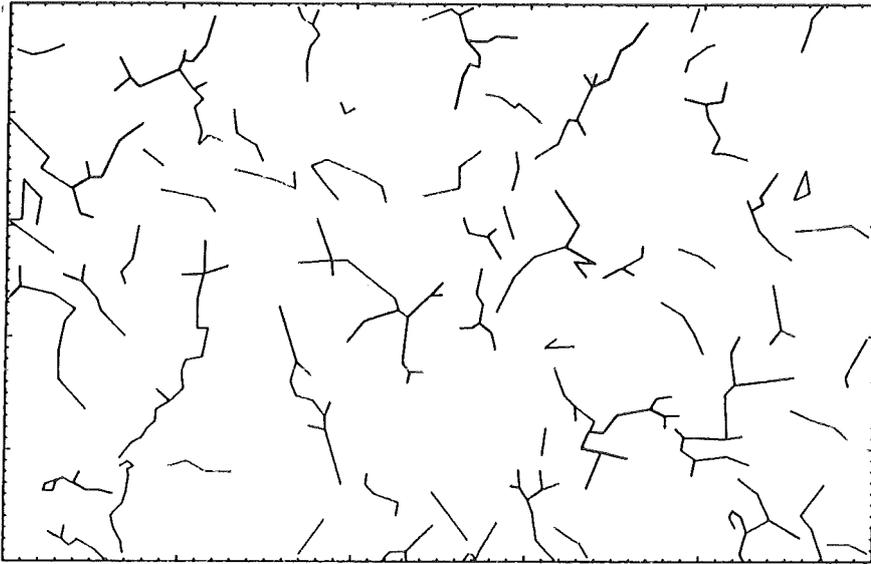
Mögliche Darstellungen der Ergebnisse sind:

- die Darstellung der Kenngrößen der Rißmuster nach dem achten Folgeschädigungsschritt und
- die Entwicklung der Kenngrößen mit wachsender Anzahl von Simulationsschritten.

Dargestellt werden vor allem Mittelwertgrößen, zum Teil darüberhinaus auch Häufigkeitsverteilungen (z.B. zusätzlich zur mittleren Länge eines Risses die Häufigkeitsverteilung der Länge der Risse).

Zunächst werden im Abschnitt 8.2 orientierende Voruntersuchungen angestellt. Das betrifft erstens im Abschnitt 8.2.1 die Demonstration der Vorgehensweise der statistischen Analyse anhand des Vergleichs von drei simulierten Rißmustern. Dabei soll gleichzeitig geprüft werden, ob optisch unterschiedliche Eindrücke der Rißmuster durch die Kenngrößen genauso wiedergegeben werden. Zweitens werden im Abschnitt 8.2.2 die Rißmuster nach dem letzten Folgesimulationsschritt für eine ganze Reihe verschiedener Simulationsläufe ausgewertet und miteinander verglichen. Ausgewertet werden zum einen alle neun Realisierungen des Modells P einzeln (Simulation des Schädigungsprozesses mit den Zufallszahlenfolgen 0, 1 und 2 ausgehend von den Mosaiken 1, 2 und 3 - siehe auch Tab. 8.3). Zum anderen werden jeweils eine Realisierung der Modelle Z, Y, W, S und T mit einer Realisierung des Modells P verglichen (jeweils anhand von Zufallszahlenfolge 2 und Mosaik 1).

In dieser Voruntersuchung soll zunächst ein Überblick über die Streubreite der verschiedenen Kenngrößen von Realisierung zu Realisierung eines Modells einerseits und von Modell zu Modell andererseits erhalten werden, bevor im Abschnitt 8.3 genauere Aussagen anhand mehrerer Realisierungen des gleichen Modells getroffen werden. Das betrifft den Einfluß des zugrundegelegten Mosaiks (Abschnitt 8.3.1), den Vergleich der Simulation mit den verschiedenen Modellen (Abschnitte 8.3.2 und 8.3.3) sowie den Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen (Abschnitt 8.3.4).



**Abb. 8.1:** Vergleich unterschiedlicher Rißmuster. Oben: Bild A (Experiment, 2500 Lastzyklen), Mitte: Bild B, unten: Bild C (jeweils Simulation, 8 Folgeschritte mit unterschiedlichen Modellen).

## 8.2 Orientierende Voruntersuchungen

### 8.2.1 Optischer und statistischer Vergleich von drei Rißmustern

Ziel der in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchung ist die Frage, wie die Kenngrößen die optischen Unterschiede zwischen verschiedenen Bildern wiedergeben. Dazu werden zwei optisch unterschiedliche Bilder A und B sowie ein zu Bild B optisch ähnliches Bild C miteinander verglichen (siehe auch [32]).

Ebene der Modellierung	Mittelwerte der Kenngrößen	Bild A	Bild B	Bild C
Einfache Rißstatistik	• Anzahl von Rissen pro mm <sup>2</sup>	67,44	81,63	82,82
	• Gesamtlänge aller Risse pro mm <sup>2</sup>	10,49	11,04	11,00
	• Länge eines Einzelrisses	0,16	0,13	0,13
Modell eines Mosaiks mit versagten Kanten	• Schätzungen der PP-Intensität	567	2020	2027
	• Anzahl der Rißkanten	5,56	9,12	8,97
	• Anzahl der Rißverzweigungen	0,77	1,25	1,23
	• Verzweigungsgrad eines Risses (alle Risse berücksichtigt)	0,14	0,10	0,15
	• Verzweigungsgrad (ohne isolierte Kanten)	0,16	0,24	0,36
Modell eines Mosaiks mit unabhängig versagten Kanten	• Drei Schätzungen der Kantenversagenswahrscheinlichkeit	0,45	0,52	0,52
		0,35	0,32	0,32
		1,01	1,67	1,68
	• Anteil "zusätzlicher" Verzweigungen	0,65	0,81	0,81

Tab. 8.2: Ausgewählte Mittelwertkenngrößen für die drei Rißmuster aus Abb. 8.1.

Zum optischen Vergleich der Realisierung A mit den Realisierungen B und C: Der Grad der globalen Schädigung scheint in allen Bildern annähernd gleich zu sein, die Rißmuster B und C erscheinen allerdings mehr verästelt und mit einem höheren Anteil sehr kurzer Risse als A. Die mittlere Länge einer Rißkante ist in A deutlich länger, ein Vergleich der mittleren Einzelrißlängen dagegen ist aus dem optischen Bild kaum möglich.

Die Ergebnisse der statistischen Auswertung zeigen (siehe Tab. 8.2): Die mittlere Linienlänge pro Flächeneinheit ist annähernd gleich, sie nimmt bei B und C nur geringfügig zu. A enthält

deutlich weniger, dafür im Mittel längere Risse. Trotzdem ist die mittlere Anzahl von Kanten eines Risses bei A deutlich kleiner.

Der Unterschied im Rißverzweigungsgrad bei der Berechnung mit bzw. ohne isolierte Kanten ist bei B und C deutlich größer, weil dort auch isolierte Kanten auftreten, bei A besteht kaum ein Unterschied, weil hier fast keine solchen Mikrorisse vorliegen. Die größeren Risse sind bei B und C mehr verästelt als bei A.

Zum Vergleich der Realisierungen B und C: Anhand der Mittelwertkenngrößen der einfachen Rißstatistik können keine nennenswerten Unterschiede zwischen B und C festgestellt werden. Das stimmt mit dem optischen Eindruck überein (siehe Abb. 8.1). Unterschiede ergeben sich jedoch bei trennschärferen statistischen Auswertungen, z.B. bei der empirischen Verteilung der Rißlängen. Das obere Bild in Abb. 8.3 zeigt, daß die Realisierung B vergleichsweise sehr viele kurze und auch einige wenige lange Risse enthält, C dagegen mehr gleichförmig verteilte Rißlängen aufweist. Dieser Sachverhalt ist aufgrund der angewendeten unterschiedlichen Simulationsmodelle auch so erwartet worden (siehe [29]). Die Ursache besteht im unterschiedlichen Zusammenhang zwischen Belastungsgröße  $B$  und Versagenswahrscheinlichkeit  $p_k$  (bei C linear, bei B quadratisch). Im zum Bild B gehörenden Modell werden kleinen Werten von  $B$  kleine Versagenswahrscheinlichkeiten und großen Werten von  $B$  große Wahrscheinlichkeiten (im Vergleich zu C) zugeordnet, siehe Abb. 8.2. Initiierte kleine Risse wachsen deshalb langsamer als bei C. Kommt es jedoch zur Bildung eines größeren Risses, z.B. durch Koaleszenz, so wächst dieser Riß dann schneller als bei C.

Die Anzahl sämtlicher Verzweigungsknoten des Rißmusters ist bei B und C annähernd gleich. Sie bestimmt den oben beschriebenen optischen Eindruck stärker als der Verzweigungsgrad der einzelnen Risse. Dieser ist bei C deutlich größer, und zwar auch, wenn die Risse bestehend aus einer isolierten Kanten nicht mit einbezogen werden (siehe Tab. 8.2). Das deutet auf einen größeren Anteil von nicht verzweigten Rissen in B hin, was wiederum durch das angewendete Simulationsmodell erklärt ist.

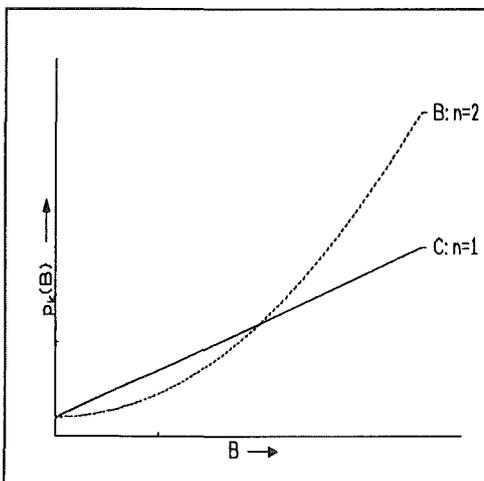
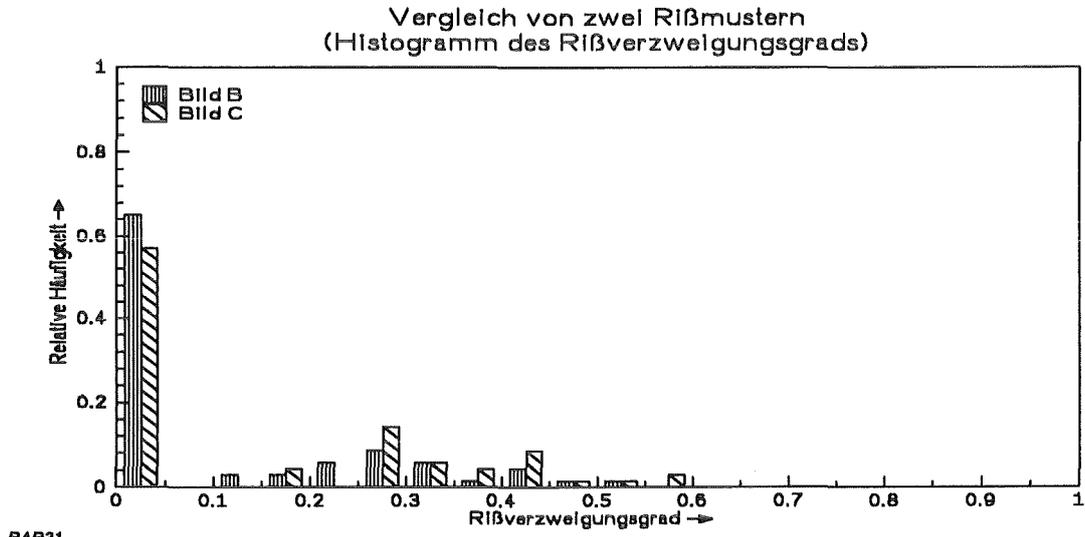
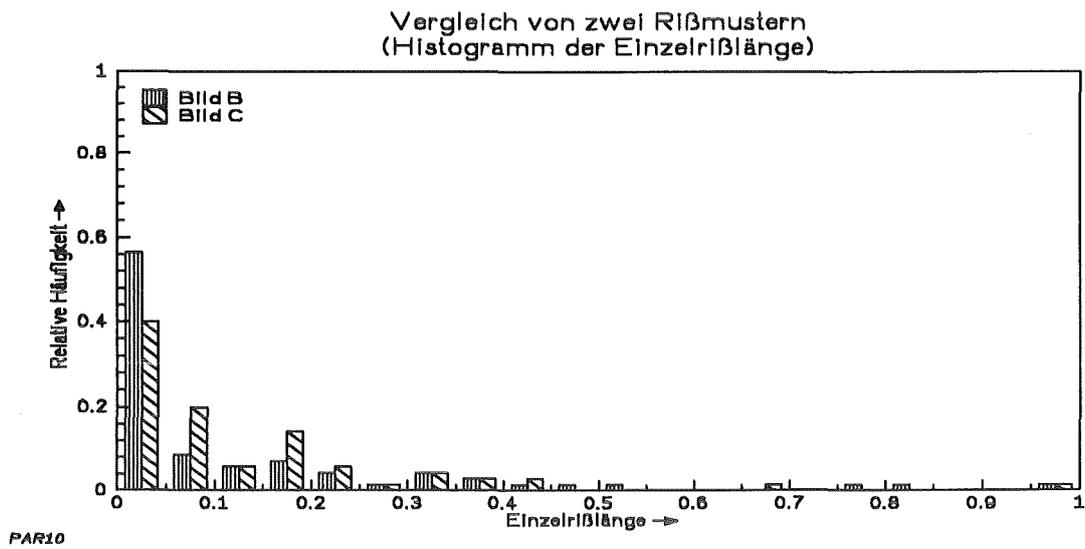


Abb. 8.2: Schematischer Zusammenhang von Beanspruchungsgröße  $B$  und Versagenswahrscheinlichkeit  $p_k(B)$  bei den Realisierungen B und C.



**Abb. 8.3: Histogramme der Rißlänge und des Rißverzweigungsgrads (Auswertung aller Risse der Rißmuster).**

Ein Modellvergleich anhand von einigen wenigen großen Rissen wäre nicht ausreichend, da diese Risse genauso gut rein zufällig durch Koaleszenz entstanden sein können. Für genauere Vergleiche von Rißmustern ist deshalb unter Umständen auch die Beurteilung des Verlaufs der Entstehung der Rißmuster nützlich, siehe Abschn. 8.3. Weiter sei noch einmal hervorgehoben, daß die Unterschiede zwischen den Rißmustern B und C beim optischen Vergleich der Rißmuster nicht festgestellt werden konnten.

### 8.2.2 Vergleich verschiedener Rißmuster nach dem neunten Simulationsschritt

Die Ergebnisse der Auswertung verschiedener Rißmuster werden für jede Kenngröße in einem Bild zusammengefaßt, um Vergleiche anstellen zu können. Den einzelnen Abszissenwerten werden formal unterschiedliche Modelle zugeordnet. Der Schlüssel ist in Tab. 8.3 dargestellt. Zum besseren Verständnis ist der wichtigste Teil des Schlüssels noch einmal in die Darstellungen der Ergebnisse in Abb. 8.4 und Abb. 8.5 eingefügt. In den Darstellungen in diesem Abschnitt haben die Abszissenwerte von links nach rechts folgende Bedeutung:

x-Wert	1	1.5	2	3	3.5	4	5	5.5	6	7.5	8.5	9.5	10.5	12	13	14.5	15.5
--------	---	-----	---	---	-----	---	---	-----	---	-----	-----	-----	------	----	----	------	------

Modell					P					Z	P	Y	W	P	S	P	T
Mosaik	3			2			1			1							
Z.-Folge	0	1	2	0	1	2	0	1	2	2							

Mosaik 3	je 3 Simulationen mit Mosaik 2	Mosaik 1	Variation von $r_0$	Variation von $p_{\min}$	Variation von $B_{\max}$
----------	-----------------------------------	----------	------------------------	-----------------------------	-----------------------------

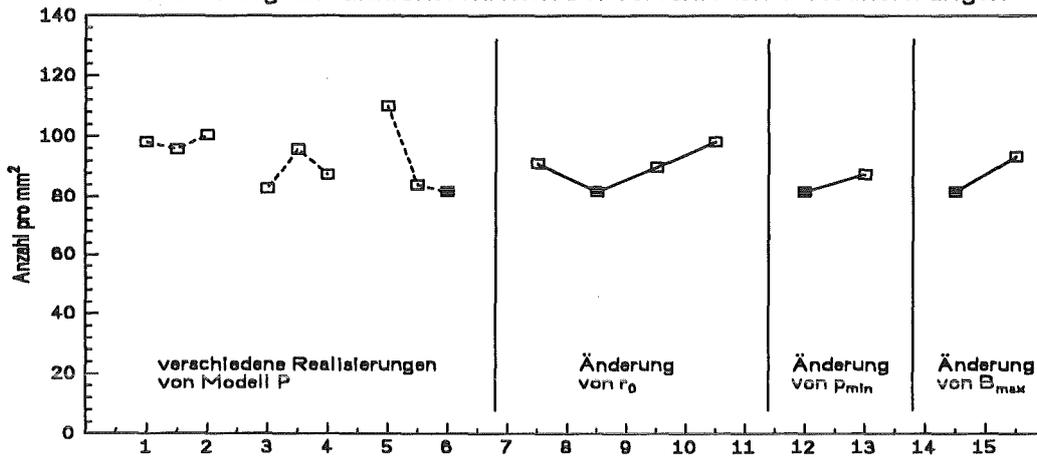
Mehrere Realisierungen eines Modells	Variation von Parametern (gleiches Mosaik, gleiche Zufallszahlenfolge)
---	---

Tab. 8.3: Vergleich mehrerer unterschiedlicher Realisierungen in einem Bild

Auf der linken Seite werden mehrere Realisierungen des gleichen Simulationsmodells dargestellt. Auf der rechten Seite wird jeweils eine Realisierung aus einer bestimmten Belegung der Parameterwerte des Simulationsmodells dargestellt. Die Realisierung P-1-2 aus dem Modell P (genauer gesagt dem bruchmechanischen Modell ohne Wechselwirkung aus Abschnitt 6.2 mit der Parameterkombination P aus Tab. 8.1) angewendet auf Mosaik 1 mit Zufallszahlenfolge 2 dient als Referenzbild und ist deshalb in der rechten Hälfte der Darstellungen mehrfach vertreten. Die Auswahl des genannten Mosaiks und der Zufallszahlenfolge für die Durchführung des Modellvergleichs erfolgte willkürlich.

Für die entsprechenden Rißmuster ergaben die ermittelten Kenngrößen der einfachen Rißstatistik (siehe Abb. 8.4): Die Unterschiede zwischen zwei Realisierungen des gleichen Modells sind teilweise größer als zwischen zwei Modellen. Beispielsweise ist zufällig die Variation zwischen den drei Simulationen mit dem Modell P und Ausgangsmosaik 1 (in Abb. 8.5 über den Abszissenwerten 5, 5.5 und 6 abgetragen, vgl. auch Abb. 8.2) deutlich größer als die zwischen den beiden Simulationen mit dem Modell P und dem Modell S ausgehend vom gleichen Mosaik 1 (Abszissenwerte 12 und 13).

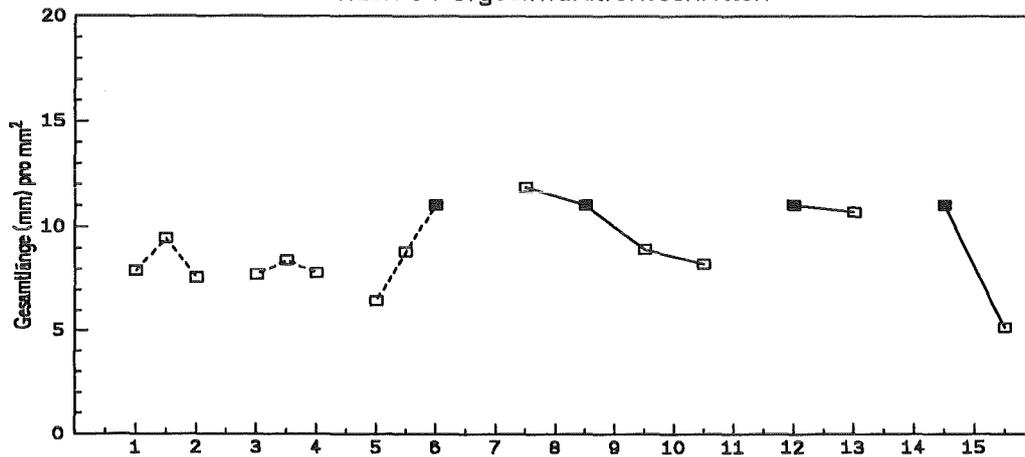
Mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit  
nach 8 Folgesimulationsschritten bei verschiedenen Realisierungen



PAR1L

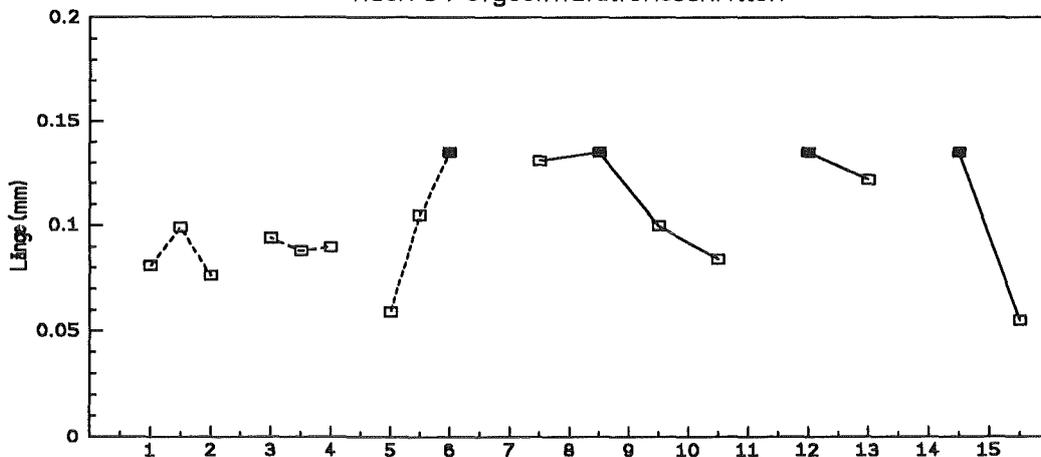
Mehrere Realisierungen eines Modells	Variation von Parametern, gleiches Mosaik und gleiche Zufallszahlenfolge
--------------------------------------	--

Mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit  
nach 8 Folgesimulationsschritten



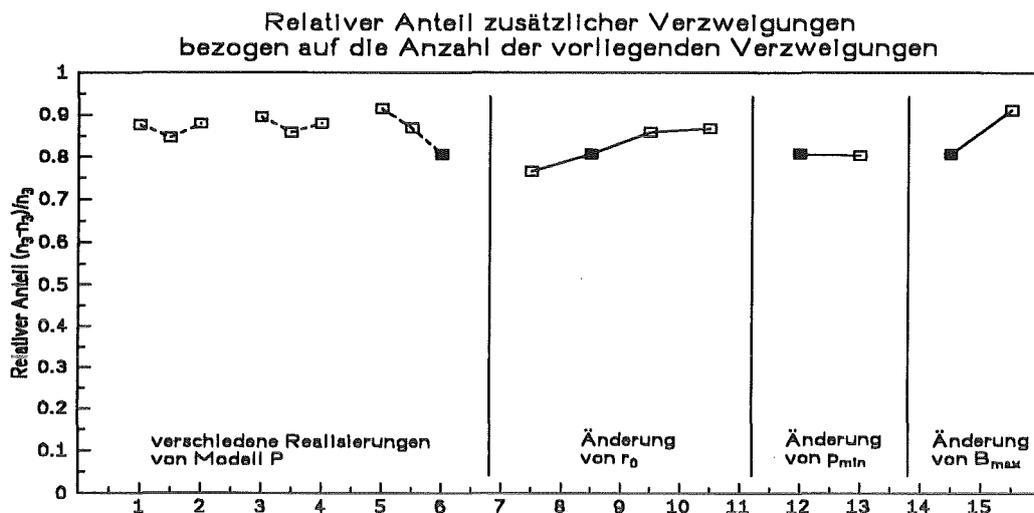
PAR2

Mittlere Länge eines Einzelrisses  
nach 8 Folgesimulationsschritten



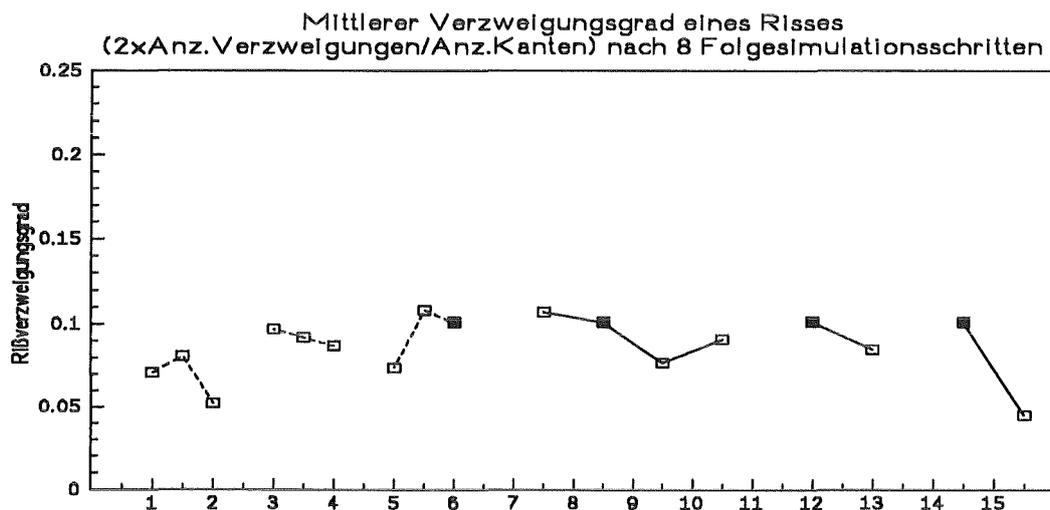
PAR3

Abb. 8.4: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik nach 8 Folgesimulationsschritten. Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses (■ - Referenzbild P-1-2).



PARBZ

Mehrere Realisierungen eines Modells	Variation von Parametern, gleiches Mosaik und gleiche Zufallszahlenfolge
---	---

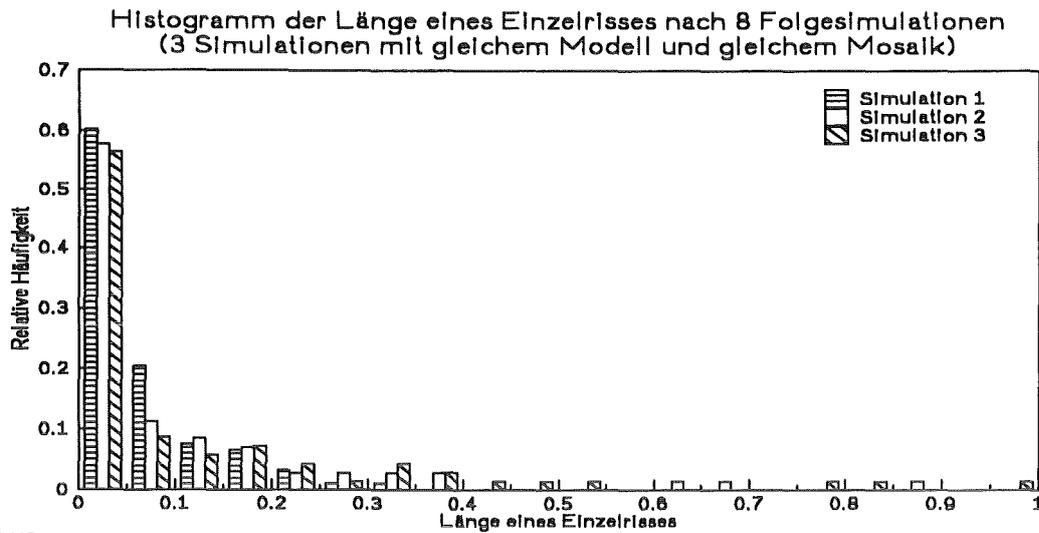


PAR21

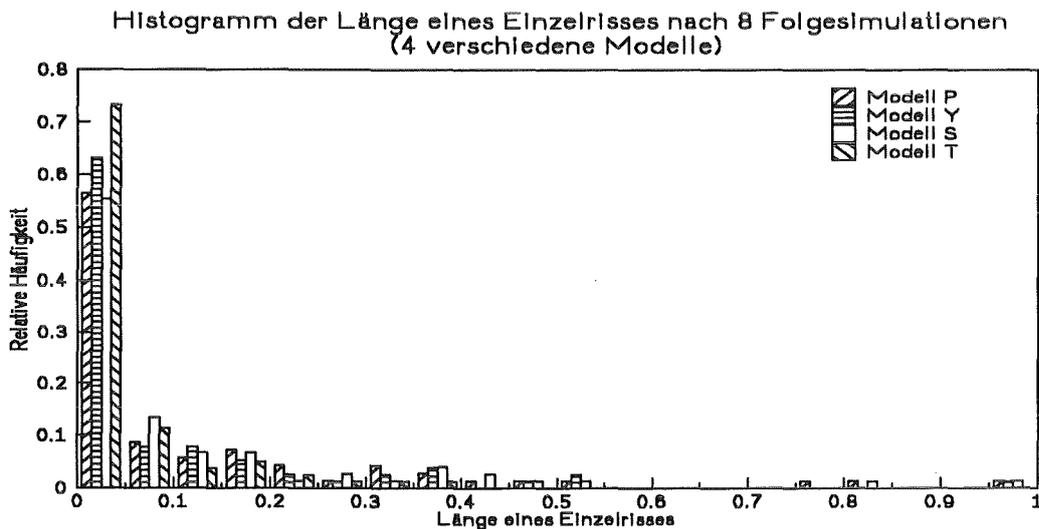
**Abb. 8.5:** Ausgewählte Kenngrößen des Mosaik-Modells nach 8 Folgesimulationsschritten.  
Oben: Anzahl "zusätzlicher" Verzweigungen bezogen auf die Anzahl aller Verzweigungen,  
unten: mittlerer Rißverzweigungsgrad (■ - Referenzbild P-1-2).

Für genauere Aussagen zum Vergleich der Modelle werden wegen der teilweise beträchtlichen zufälligen Streuung der Realisierungen im nachfolgenden Abschnitt 8.3 von jedem Modell alle vorhandenen Realisierungen in die Auswertung einbezogen.

Vergleicht man speziell alle Realisierungen des Rißmusters bei Simulation mit dem Modell P miteinander (Abszissenwerte zwischen 1 bis 6), so erkennt man unterschiedlich großen Variationen in Abhängigkeit vom jeweiligen Mosaik. Dies könnte einen Einfluß des Mosaiks auf die Ergebnisse bedeuten und muß noch genauer untersucht werden (vgl. dazu Abschn. 8.3.1).



PAR10P



PAR10

Abb. 8.6: Histogramm der Länge eines Einzelrisses nach 8 Folgesimulationsschritten. Oben: drei Simulationen mit Modell P ausgehend vom gleichen Mosaik, unten: jeweils eine Simulation mit verschiedenen Modellen ausgehend vom gleichen Mosaik.

Die Darstellung der Häufigkeit der verschiedenen Rißlängen gestaltet sich unübersichtlich, weil in allen Fällen sehr viele kleine Risse und daneben einzelne sehr große Risse auftreten. Dadurch sind die meisten Risse in der kleinsten Klasse von Rißlängen konzentriert. Die großen Risse sind im Histogramm der Rißlänge kaum erkennbar, sie enthalten andererseits einen großen Anteil der Gesamtlinielänge pro Flächeneinheit, die unter anderem optisch den Eindruck vom Grad der Schädigung vermittelt. Insofern ist auch die empirische Verteilung der Rißlänge beschränkt interpretierbar, obwohl sie mehr Information als die mittlere Rißlänge liefert (vgl. Abschn. 8.2.1).

Das Auftreten vieler kleiner und einiger weniger großer Risse bedeutet, daß das Rißwachstum kleiner Risse langsam vor sich geht und größere Risse zunächst vorwiegend durch Koaleszenz entstehen. Diese Risse wachsen dann schneller weiter, oder ihre Größe nimmt durch neue

Rißzusammenlagerung weiter zu. Beide Mechanismen sind möglich. Ihr Verhältnis ist stark zufallsbeeinflusst durch die unmittelbare Rißumgebung. Es kann deshalb durch getrenntes Verfolgen der Rißlänge einzelner, ausgewählter Risse, wie es teilweise in der Fachliteratur bei Auswertungen anderer Ermüdungsexperimente praktiziert wird, zwar illustriert, aber nicht ausreichend aufgeklärt werden.

## 8.3 Spezielle Untersuchungen

### 8.3.1 Untersuchungen zum Einfluß des zugrundeliegenden Mosaiks

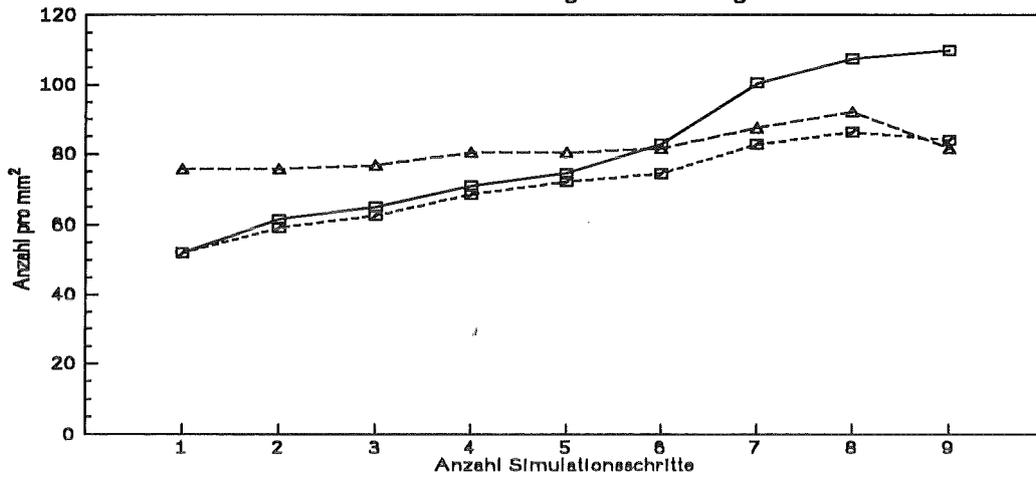
Zur genaueren Untersuchung des Einflusses des zugrundeliegenden Mosaiks werden in diesem Abschnitt die Realisierungen der Simulationsläufe mit dem Modell P gesondert ausgewertet. Zum einen werden drei verschiedene Realisierungen der Simulation mit dem gleichen Modell P ausgehend von ein und demselben Mosaik miteinander verglichen. Zum anderen werden ausgehend von jedem der drei vorhandenen Mosaik je drei Simulationen mit dem gleichen Modell ausgeführt. Die drei zufälligen Mosaik stimmen in den entsprechenden Erwartungswerten, z.B. der mittleren Länge einer Kante, überein. Es wird der Mittelwert der erhaltenen Kenngrößen der Rißmuster aus den drei Simulationsläufen mit dem gleichen Mosaik berechnet. Die zu den drei verschiedenen Mosaiken gehörenden Mittelwerte werden miteinander verglichen. Falls die Mittelwerte übereinstimmen, so würde das bedeuten, daß das Rißmuster nicht von der konkreten Realisierung des Mosaiks selbst, sondern nur von seiner Punktprozeß-Intensität abhängt, wenn man von zufälligen Streuungen absieht.

Zunächst werden drei Simulation mit dem gleichen Modell P ausgehend von ein und demselben Mosaik ausgeführt und die erhaltenen Realisierungen miteinander verglichen. Die Ergebnisse der statistischen Auswertung sind in Abb. 8.7 bis Abb. 8.9 dargestellt.

Man erhält teilweise deutlich unterschiedliche Verläufe bei den Kenngrößen der einfachen Rißstatistik für drei Simulationen mit dem gleichen Modell und ausgehend vom gleichen Mosaik (Abb. 8.7). Noch deutlicher zeigt sich der Unterschied bei den empirischen Häufigkeitsverteilungen (Abb. 8.8). Der Unterschied zwischen den drei Realisierungen ist allerdings bei den ersten Simulationsschritten weniger ausgeprägt, sondern entsteht erst mit wachsender Anzahl von Schritten. Das deutet daraufhin, daß die Unterschiede nicht allein vom Mosaik herrühren können.

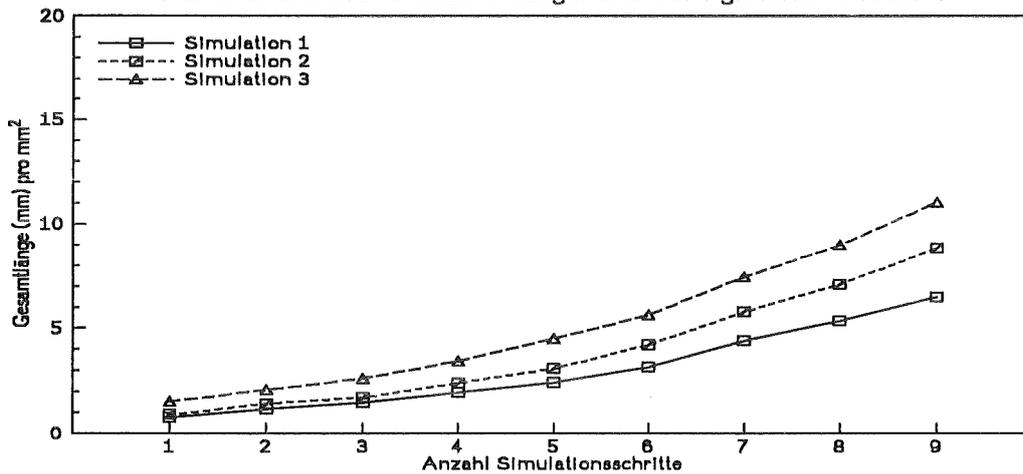
Vergleicht man die Realisierungen miteinander, so zeigt sich: Dasjenige Rißmuster, das nach dem ersten Simulationsschritt den größeren Wert der mittleren Gesamtrißlänge oder auch der mittleren Einzelrißlänge aufweist, besitzt auch in den folgenden Simulationsschritten den größeren Wert (siehe Abb. 8.7 Mitte und unten). Das deutet auf einen Einfluß des Ergebnisses der Simulation der Anfangsschädigung auf das Fortschreiten der globalen Schädigung hin, die durch die zwei genannten Kenngrößen charakterisiert wird. Allerdings kann es während des Simulationsprozesses zeitweise zu Unterschieden bei der Entwicklung der *lokalen* Schädigung kommen (z.B. durch Wechselwirkung, vor allem aber durch Koaleszenz von Rissen). Das zeigt sich in den stärker schwankenden Verläufen der mittleren Anzahl der Risse und des Mittelwerts des Rißverzweigungsgrads (siehe Abb. 8.7 oben und Abb. 8.9 sowie auch Abb. 8.8).

Mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit  
(für drei Simulationsläufe ausgehend vom gleichen Mosaik)



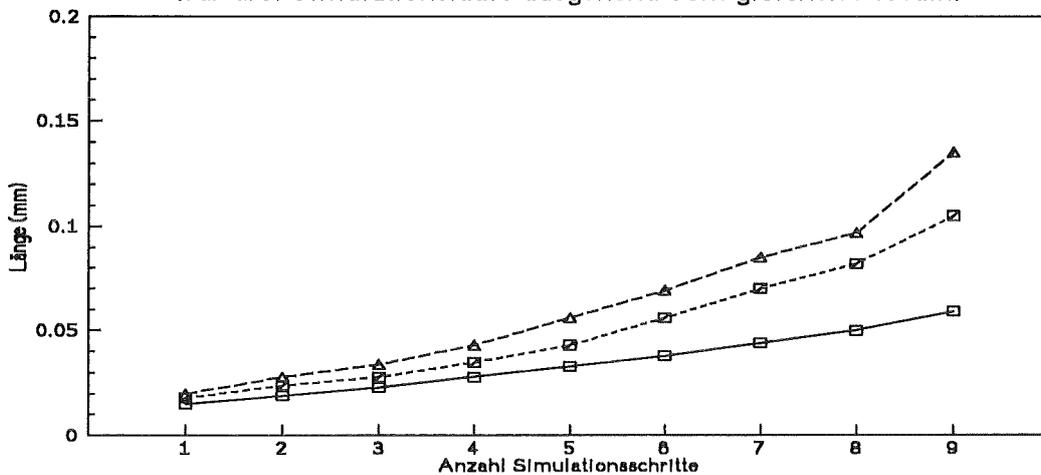
PAR1

Mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit  
(für drei Simulationsläufe ausgehend vom gleichen Mosaik)



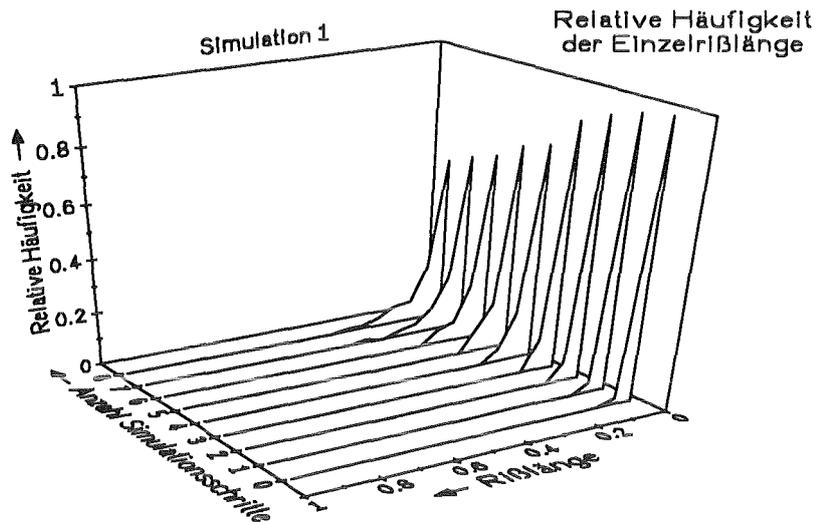
PAR2

Mittlere Länge eines Einzelrisses  
(für drei Simulationsläufe ausgehend vom gleichen Mosaik)

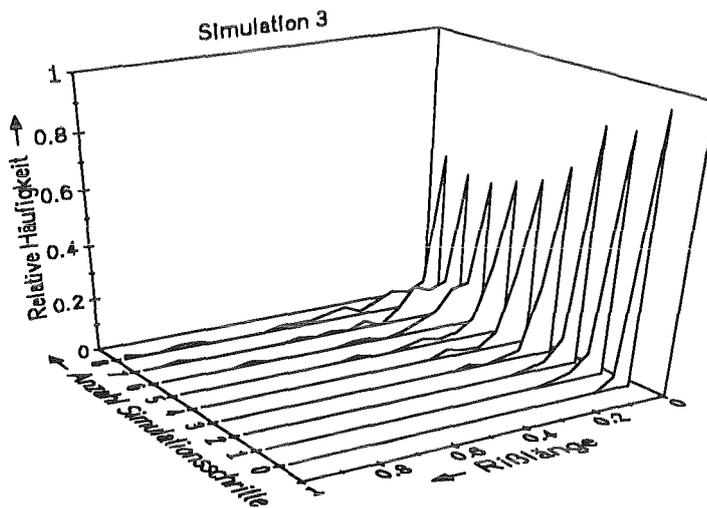


PAR3

Abb. 8.7: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik für drei Realisierungen (gleiches Modell, gleiches Mosaik). Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses.



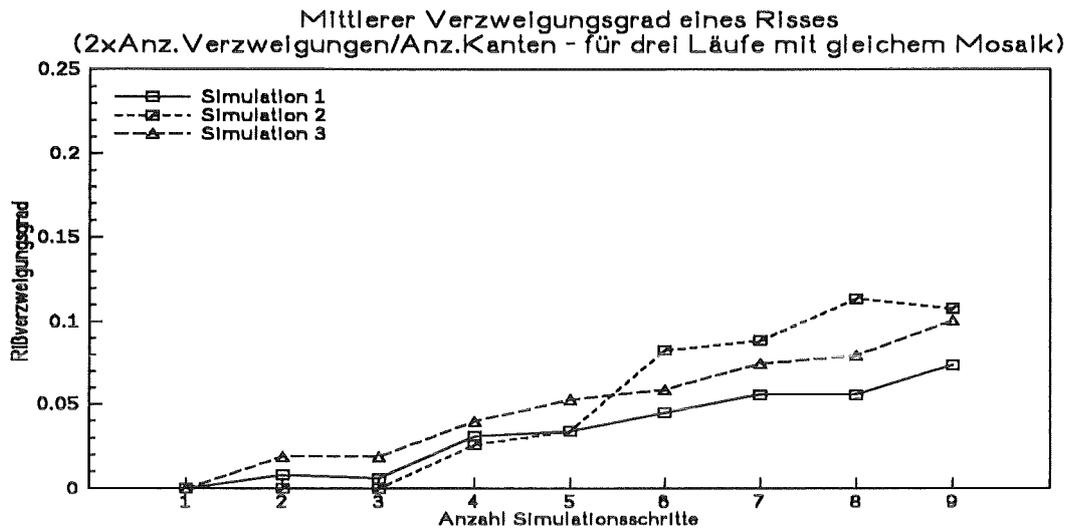
PAR10\_10



PAR10\_12

**Abb. 8.8:** Histogramme der Länge eines Einzelrisses nach den einzelnen Folgesimulationsschritten (zwei ausgewählte Simulationen mit Modell P ausgehend vom gleichen Mosaik). Oben: Simulation 1, unten: Simulation 3.

Die zwei deutlich unterschiedlichen Realisierungen bei Anwendung des gleichen bruchmechanischen Modells (d.h.auch gleicher Modellparameter) auf das gleiche Mosaik werden in Abb. 8.8 anhand der Entwicklung der Rißlängenverteilung deutlich sichtbar. Während in Simulation 1 mit wachsender Zahl von Simulationsschritten nur eine geringe Zunahme der Rißlänge erfolgt, entstehen ab dem 3. Folgesimulationsschritt in Simulation 3 zufällig, vermutlich durch Koaleszenz, ein einzelner oder einige wenige größere Risse. Im weiteren Verlauf der Simulation wachsen diese Risse schneller aufgrund der größeren Werte der Beanspruchungsgröße. Dadurch nimmt der Unterschied zur Schädigungsentwicklung bei Simulation 1 immer mehr zu. Auch der Anteil "mittelgroßer" Risse nimmt im Vergleich bei Simulation 3 zu, da die großen Risse auch das Wachstum der benachbarten kleinen Risse stärker beschleunigen als bei Simulation 1.



PAR21

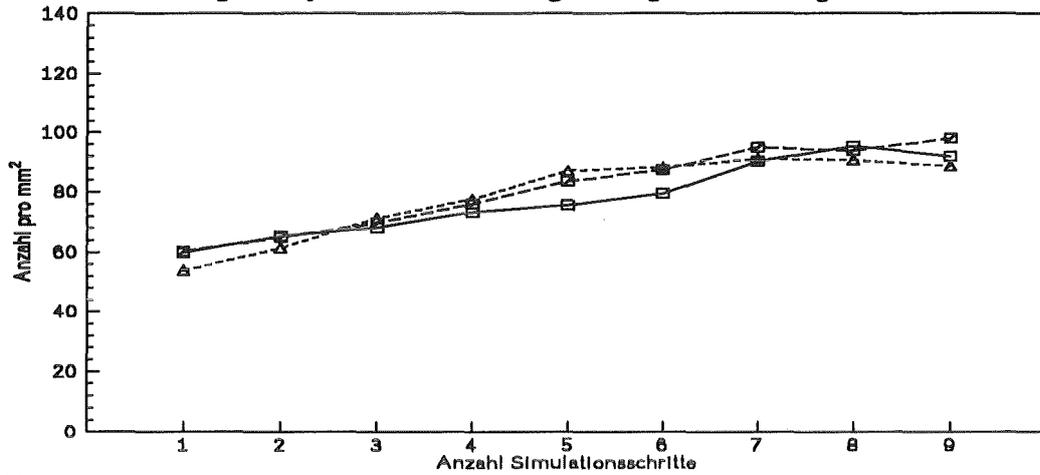
Abb. 8.9: Mittlerer Rißverzweigungsgrad für drei Realisierungen (gleiches Modell, gleiches Mosaik, Einbeziehung aller Risse).

### Gemittelte Kenngrößen (Mittelung über das gleiche Mosaik)

In Abb. 8.7 bis Abb. 8.9 wurden einzelne Realisierungen miteinander verglichen. In einer zweiten Stufe werden ausgehend von jedem der drei vorhandenen Mosaik je drei Simulationen mit dem gleichen Modell ausgeführt. Es wird der Mittelwert der erhaltenen Kenngrößen aus den drei Simulationsläufen mit dem gleichen Mosaik berechnet. Die drei Realisierungen, die in Abb. 8.7 bis Abb. 8.9 gegenübergestellt wurden, werden also jetzt zusammengefat und mit den Realisierungen ausgehend von zwei anderen Ausgangsmosaiken verglichen. Die erhaltenen Kenngrößen der einfachen Rißstatistik über der Anzahl der Simulationsschritte werden in Abb. 8.10 dargestellt. Der Mittelwert aus den in Abb. 8.7 bis Abb. 8.9 noch getrennt betrachteten drei Realisierungen beispielsweise ist nun mit dem Symbol ◻ bezeichnet.

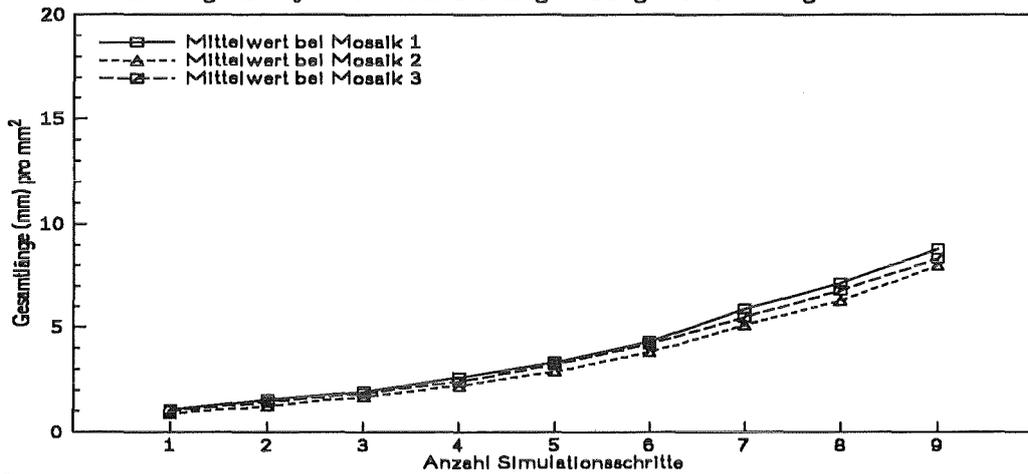
In Abb. 8.10 ist - im Unterschied zu den einzelnen Realisierungen in Abb. 8.7 bis Abb. 8.9 - kein Unterschied mehr zwischen den Verläufen der *gemittelten* Kenngrößen für die verschiedenen Mosaik erkennbar. Zufällige Variationen in der zugrunde gelegten Struktur von Schwachstellen haben also keinen signifikanten Einflu auf die (gemittelte) Schädigungsentwicklung. Aus der oberen Grafik in Abb. 8.10 ist außerdem erkennbar, daß etwa nach dem achten Simulationsschritt die mittlere Anzahl der Risse infolge von Rivereinigungen leicht zurückgeht.

Mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit  
Mittelung über je drei Realisierungen ausgehend vom gleichen Mosaik



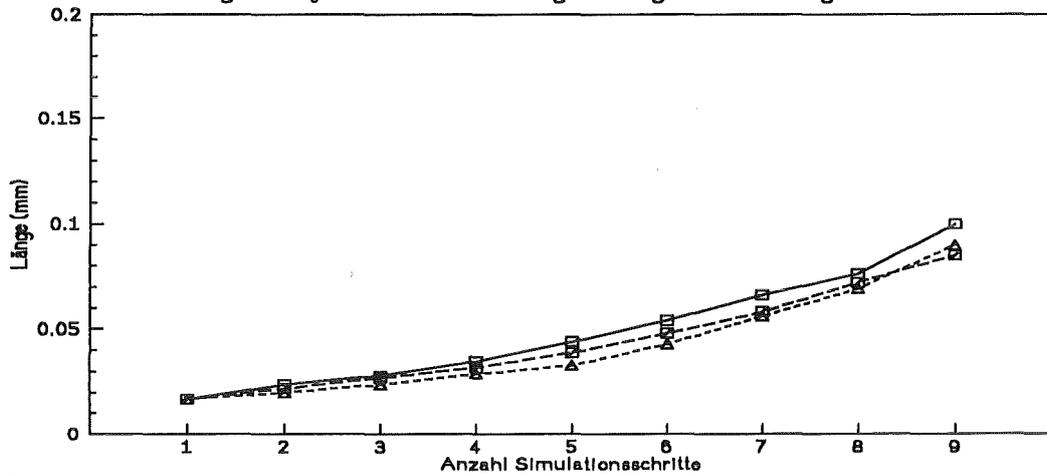
PAR1

Mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit  
Mittelung über je drei Realisierungen ausgehend vom gleichen Mosaik



PAR2

Mittlere Länge eines Einzelrisses  
Mittelung über je drei Realisierungen ausgehend vom gleichen Mosaik



PAR3

Abb. 8.10: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik (Mittelung über jeweils drei Realisierungen ausgehend von einem Mosaik). Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses.

Zusammenfassend können aus dem Ergebnissen dieses Abschnitts folgende Schlußfolgerungen gezogen werden:

- Die verwendete Realisierung des Mosaiks hat keinen signifikanten Einfluß auf die Simulation der Schädigungsentwicklung.
- Die Realisierung der Anfangsschädigung und zufällige Koaleszenz von Rissen im Anfangsstadium der Simulation haben einen gewissen Einfluß auf die weitere Entwicklung des Rißmusters.
- Diese zufälligen Abweichungen von Rißmuster zu Rißmuster können durch Mittelung über wenige Realisierungen beseitigt werden.

### 8.3.2 Untersuchungen zum Einfluß von Parameteränderungen

Untersucht wird die Auswirkung einer Veränderung von Modellparametern auf das Ergebnis der Simulation. Im einzelnen werden modifiziert:

- der Parameter  $r_0$  bei der Berechnung der Beanspruchungsgröße  $B$  einer Kante (die Länge  $r_0$  bestimmt das Gebiet für die Mittelwertbildung, siehe Formel (6.2)) und
- die Parameter  $B_{\max}$  und  $p_{\min}$  bei der Zuweisung der Kantenversagenswahrscheinlichkeit  $p_k = p_k(B)$  aus der Beanspruchungsgröße  $B$  ( $p_{\min}$  ist die Mindestversagenswahrscheinlichkeit und  $B_{\max}$  die Kappungsgrenze der Beanspruchungsgröße, siehe Formel (5.1) und Abb. 5.3).

Bei der Untersuchung der Auswirkung von Parameteränderungen ist zu beachten, daß

- nicht ein einzelner Riß vorliegt, sondern ein Rißfeld mit möglichen Wechselwirkungseffekten,
- die Auswirkung einer Änderung von  $B_{\max}$  und  $p_{\min}$  auch davon abhängt, in welchem Bereich der  $B - p_k(B)$ -Kurve die Mehrzahl der ermittelten  $B$ -Werte liegt,
- einerseits nur geringe Parameteränderungen möglich sind, weil sonst schnell "pathologische" Muster entstehen (z.B. mit Kreisen oder einem einzigen, sehr großen Riß), andererseits ergeben sich bei kleinen Parametervariationen teilweise nur geringe Abweichungen in den Mittelwerten, sodaß Tendenzen der Veränderung von Kenngrößen nicht erkennbar oder durch zufällige statistische Schwankungen verfälscht sein können.

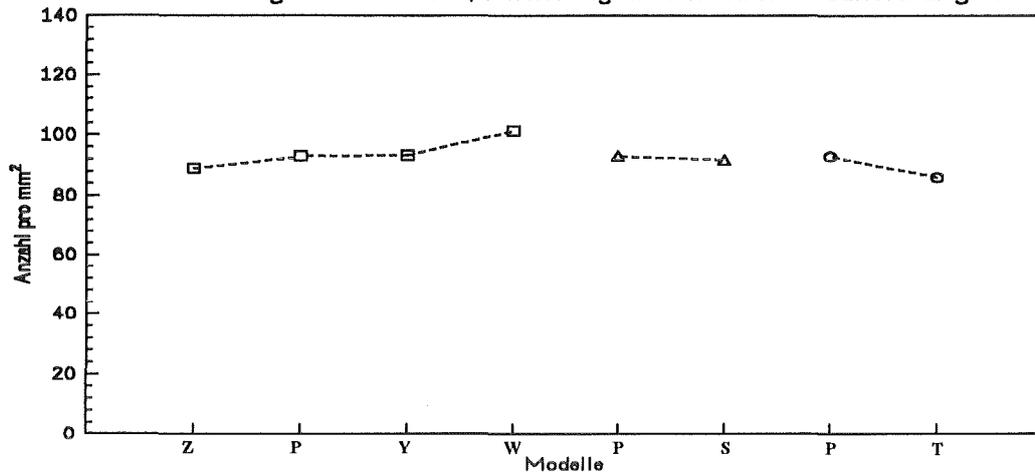
Parameter	Änderung des Parameters	Bezeichnung des Modells
$r_0$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	Z
	$5,0 \cdot 10^{-5}$	P
	$5,5 \cdot 10^{-5}$	Y
	$6,0 \cdot 10^{-5}$	W
$p_{\min}$	$3 \cdot 10^{-4}$	P
	$4 \cdot 10^{-4}$	S
$B_{\max}$	$1,5 \cdot 10^2$	P
	$2 \cdot 10^2$	T

Eine jede der verschiedenen ausgewählten Parameterbelegungen des bruchmechanischen Simulationsmodells wurde im Abschnitt 8.1 vereinfachend als "Modell" bezeichnet. Zur Erinnerung sind die Modelle noch einmal in Tab. 8.3 zusammengestellt.

**Tab. 8.3:** Ausgewählte Parameterkombinationen für das Simulationsmodell

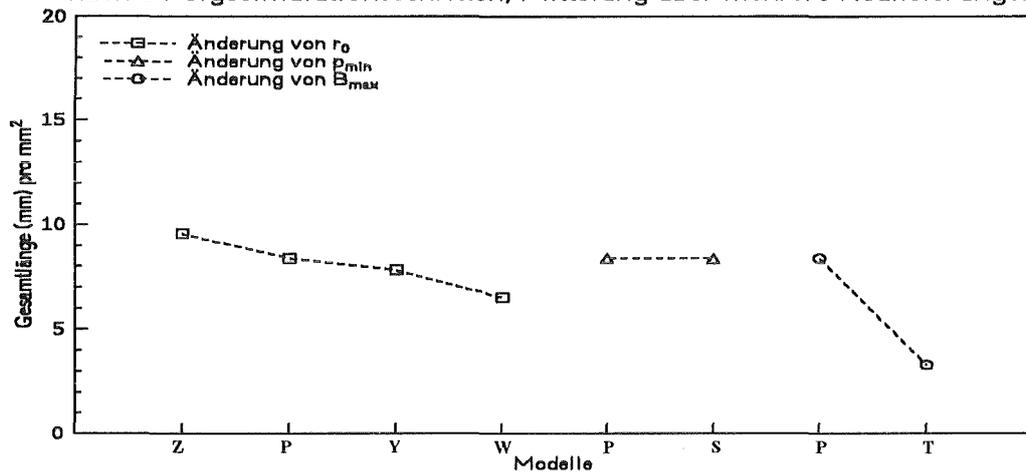
Im folgenden wird der Einfluß der Parameteränderungen anhand der nach dem neunten Simulationsschritt erhaltenen Bilder beurteilt. Die vollständigen Serien der Entwicklung der Rißmuster vom ersten bis neunten Simulationsschritt lieferten keine zusätzlichen Erkenntnisse zum Parametereinfluß und werden deshalb im Bericht nicht dargestellt.

Mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit  
nach 8 Folgesimulationen, Mittelung über mehrere Realisierungen



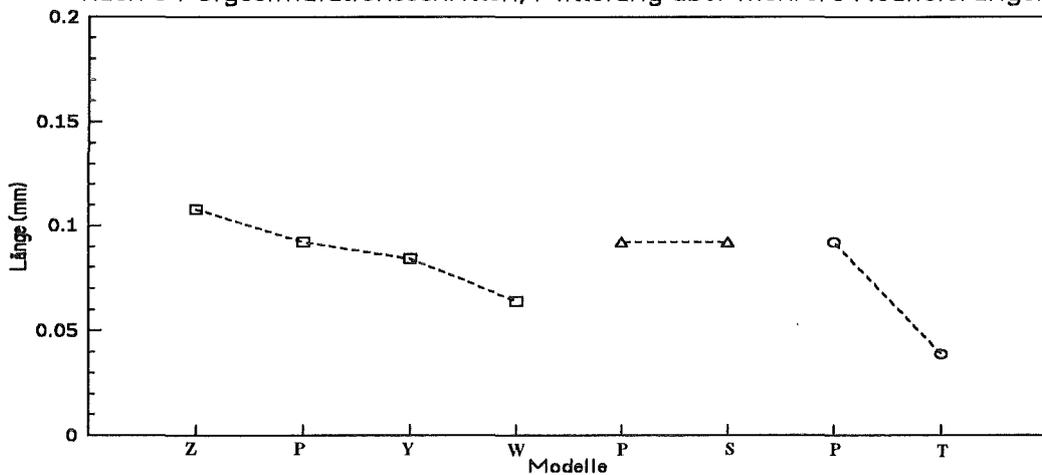
PAR1

Mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit  
nach 8 Folgesimulationsschritten, Mittelung über mehrere Realisierungen



PAR2

Mittlere Länge eines Einzelrisses  
nach 8 Folgesimulationsschritten, Mittelung über mehrere Realisierungen



PAR3

Abb. 8.11: Gemittelte Kenngrößen der einfachen Rißstatistik nach dem neunten Simulationsschritt bei Parameteränderungen der Modelle.

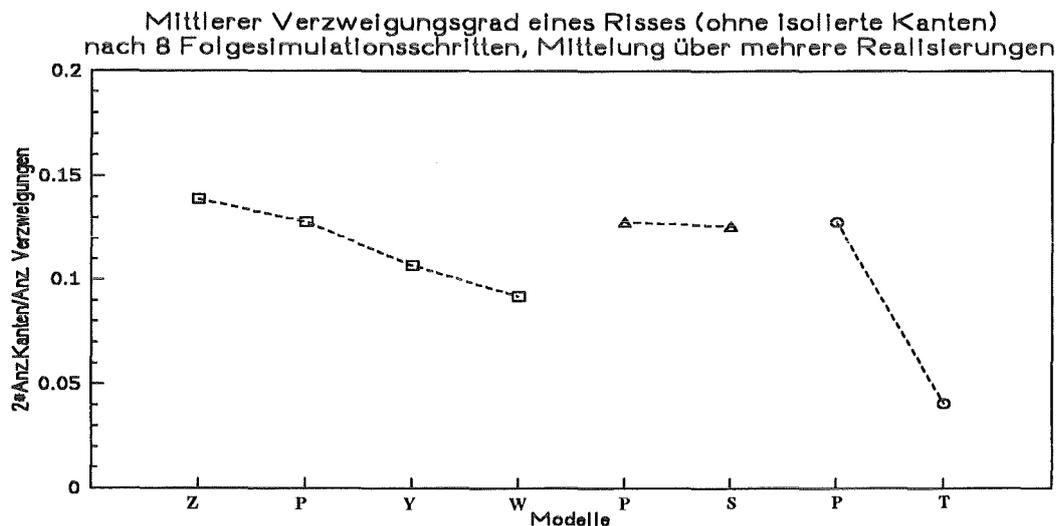
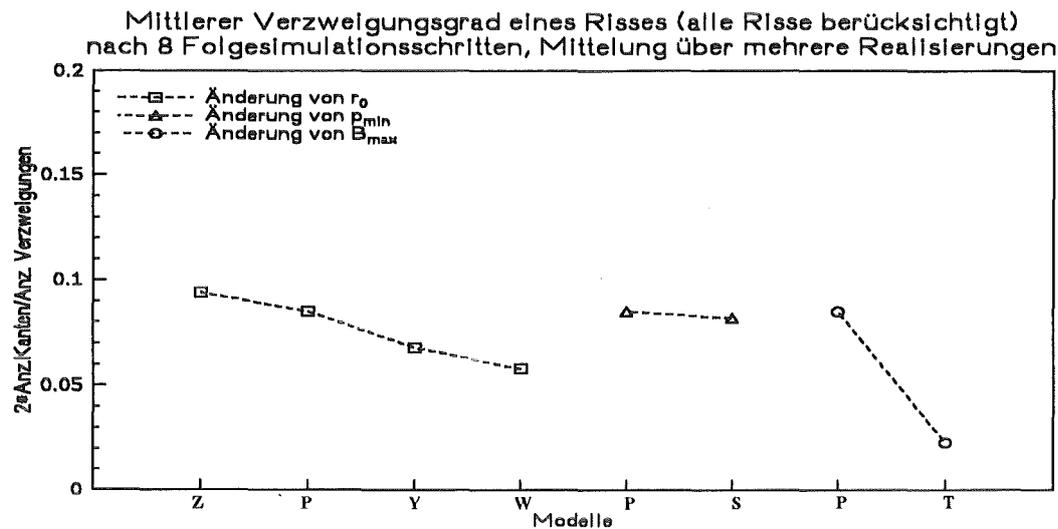


Abb. 8.12: Gemittelter Rißverzweigungsgrad bei Parameteränderungen der Modelle.  
Oben: unter Einbeziehung aller Risse, unten: ohne Berücksichtigung isolierter Kanten.

Aus der Variation der Modellparameter entstehen folgende Veränderungen (siehe Abb. 8.13):  
Bei Vergrößerung von  $r_0$  sinkt der Wert der Beanspruchungsgröße  $B$ , dadurch verringert sich die Versagenswahrscheinlichkeit  $p$ . Außerdem werden die Knickpunkte von Rissen stärker als zuvor gewichtet.

Bei Erhöhung von  $p_{\min}$  werden die Mindestversagenswahrscheinlichkeit und die Versagenswahrscheinlichkeiten  $p$  überhaupt angehoben, letztgenannte allerdings umso weniger, je größer  $B$  ist.

Bei Vergrößerung von  $B_{\max}$  verringert sich die Versagenswahrscheinlichkeit  $p$ , und zwar umso mehr, je größer der Wert von  $B$  ist (für  $B < B_{\max}$ ).

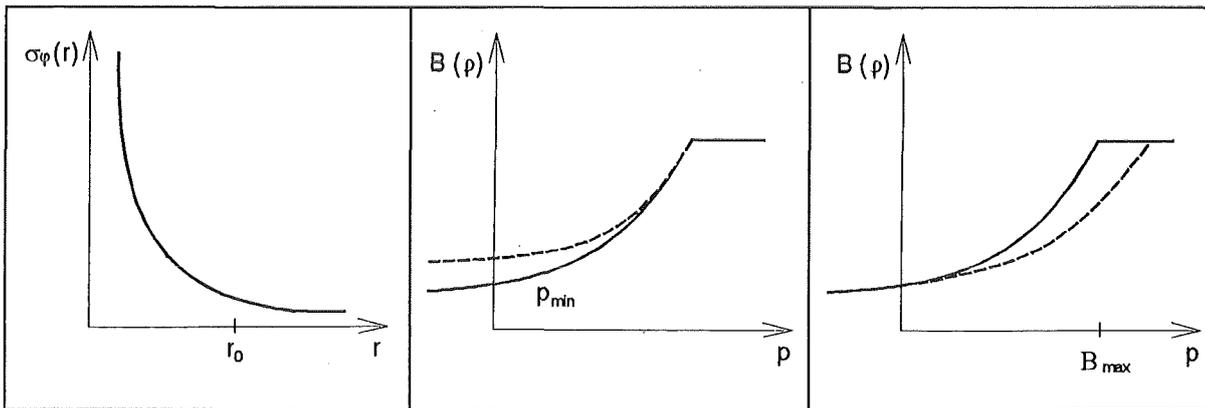


Abb. 8.13: Schematische Darstellung von Parameteränderungen der Modelle. Links:  $r_0$ , Mitte:  $p_{\min}$ , rechts:  $B_{\max}$ .

Die Ergebnisse in Abb. 8.11 und 8.12 stellen Mittelwerte aus jeweils neun Simulationsläufen dar, sofern nicht eines der erhaltenen Rißmuster wegen der Entstehung von Kreisen ausgesondert werden mußte. Man erkennt:

Die Veränderung von  $p_{\min}$  (dargestellt jeweils durch den mittleren Kurvenzug in den Abbildungen) hat kaum Auswirkung auf die Kenngrößen. Im Unterschied dazu ist eine deutliche Wirkung von  $B_{\max}$  (rechter Kurvenzug) erkennbar, obwohl beide Werte  $p_{\min}$  und  $B_{\max}$  im gleichen Verhältnis erhöht wurden im Vergleich zu ihrem Ausgangswert (Tab. 8.3). Eine Erhöhung von  $r_0$  im gleichen Verhältnis (um 33%) liegt zwischen den beiden äußeren Abszissenwerten des linken Kurvenzugs vor. Die Veränderung der Kenngrößen ist ebenfalls deutlich, fällt allerdings nicht so stark wie bei  $B_{\max}$  aus. Die Feststellung über die unterschiedliche Auswirkung der Parametervariationen ist aber vor allem durch die Lage der Werte von  $B$  determiniert (Abb. 8.14).

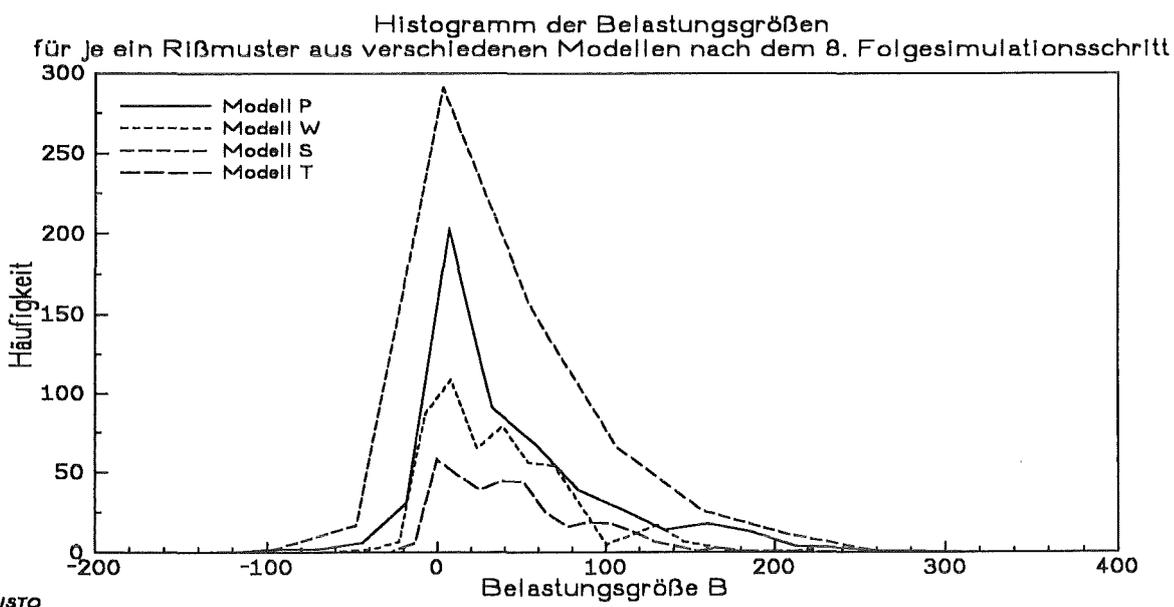


Abb. 8.14: Histogramme der Belastungsgröße  $B$  (4 Bilder, erzeugt nach jeweils 8 Folgesimulationsschritten mit verschiedenen Modellen ausgehend vom gleichen Mosaik).

Die Verringerung der Versagenswahrscheinlichkeit infolge der Erhöhung von  $r_0$  führt zu langsamerem Rißwachstum (sichtbar in kleinerer Gesamtlänge aller Risse sowie in kürzeren Rissen) und dadurch auch zu weniger Rißvereinigungen (folglich größere Anzahl von Einzelrissen, stärkerer Abfall der mittleren Einzelrißlänge gegenüber der Gesamtlänge aller Risse). Die Risse sind einfacher geformt. Durch die verstärkte Wichtung der Knickpunkte wurde eine größere Anzahl von entstehenden Rißverzweigungspunkten erwartet. Die demgegenüber festgestellte Verringerung des Rißverzweigungsgrads (Abb. 8.12) läßt sich dadurch erklären, daß Verzweigungsknoten überwiegend durch Rißvereinigung und weniger durch Verzweigung eines Risses entstehen.

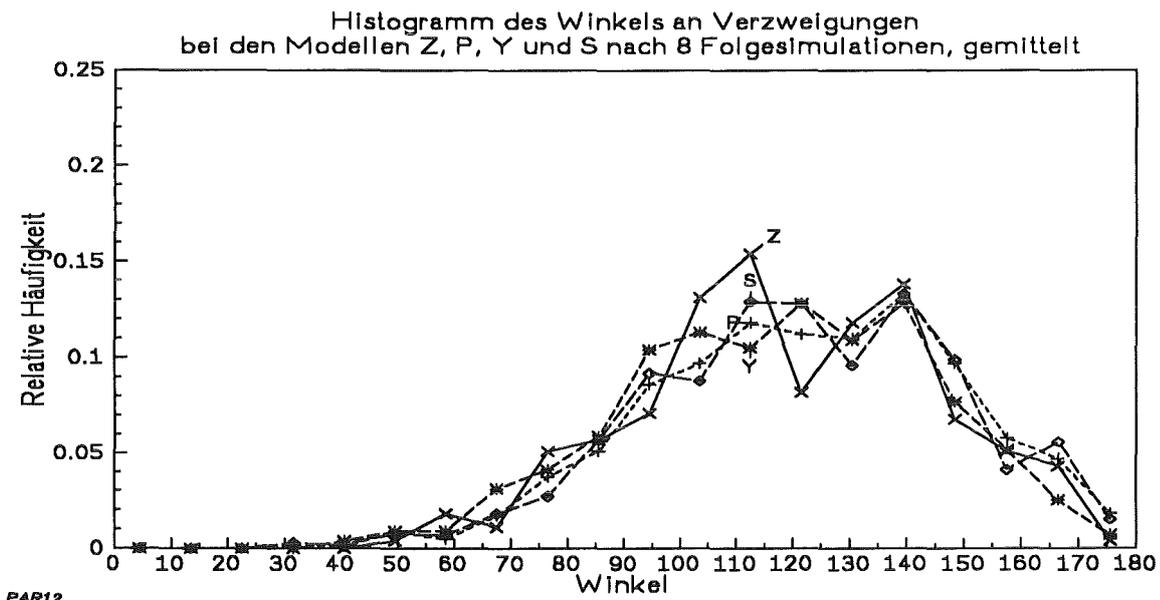
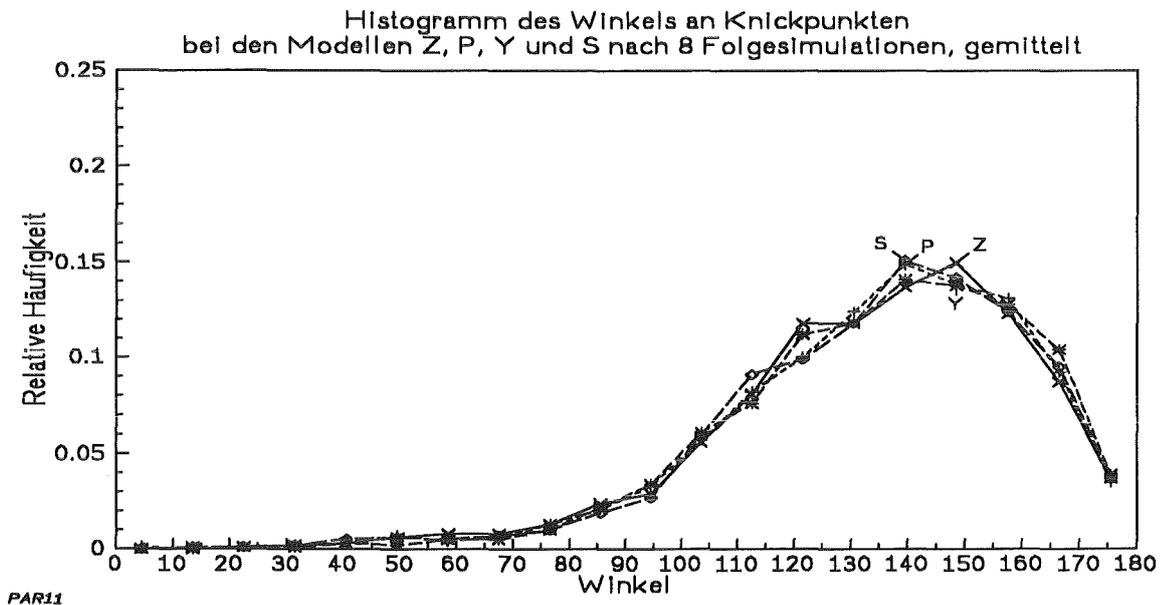


Abb. 8.15: Histogramme des Winkels zwischen versagten Kanten nach dem 8. Folgesimulationsschritt (Mittlung über mehrere Realisierungen der Modelle). Oben: Winkel an Knickpunkten, unten: Winkel an Verzweigungen.

Die im Experiment festgestellte unterschiedliche Verteilung des Winkels zwischen benachbarten versagten Kanten zum einen an Knickpunkten und zum anderen an Verzweigungspunkten wird mit allen angewendeten bruchmechanischen Modellen erreicht (siehe Abb. 8.15).

Die Vorstellungen über die Auswirkung von Parameteränderungen beziehen sich auf den Einzelriß. Die tatsächliche Auswirkung erfolgt aber auf die Rißumgebung und damit auf die sukzessive Entwicklung des gesamten Rißmusters. Durch Wechselwirkungen benachbarter Risse können die ausgehend vom Einzelriß erwarteten Effekte überlagert werden. Eine sichere Voraussage der Auswirkung von Parameteränderungen auf das gesamte Rißmuster ist deshalb nicht möglich, sondern es sind immer statistische Auswertungen nötig.

### 8.3.3 Untersuchungen zum Einfluß der Rißwechselwirkung

Der Einfluß der Rißwechselwirkung auf die Entwicklung der Rißmuster wird anhand von vier Modellen untersucht, die den Einfluß benachbarter Risse auf die Versagenswahrscheinlichkeit unterschiedlich berücksichtigen (siehe Abschn. 6.3):

- Das (bereits im vorigen Abschnitt diskutierte) Modell P berücksichtigt die benachbarten Risse überhaupt nicht.
- Das Modell R0 berücksichtigt nur ein einziges Reißende, und zwar das nächstliegende (das aus der Gesamtheit aller benachbarten Risse ermittelt wird).
- Das Modell R1 berücksichtigt von jedem benachbarten Riss nur das nächstliegende Reißende.
- Das Modell R2 berücksichtigt von jedem benachbarten Riß alle Reißenden.

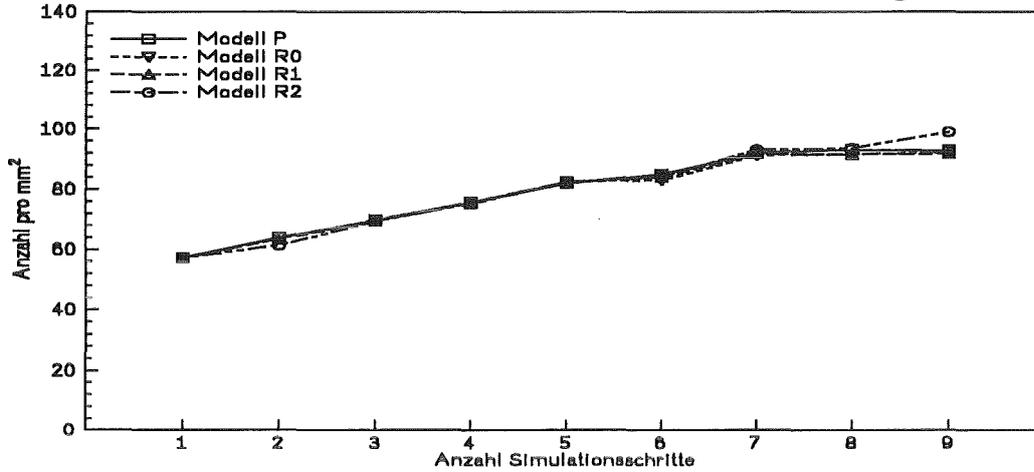
Die Modellparameterwerte  $r_0$ ,  $p_{\min}$  und  $B_{\max}$  sind die gleichen wie beim Modell P (siehe Tab. 8.3).

Ausgewertet wurde wie bisher jeweils ein Satz von neun Realisierungen. Beispiele für Realisierungen sind in Abb. 8.17 gegeben.

Trotz auftretender lokaler Unterschiede in den Rißmustern (siehe ein Beispiel in Abb. 8.17) sind kaum Unterschiede in den globalen Mittelwerten (Abb. 8.16) erkennbar. Der Sachverhalt wurde in dieser Deutlichkeit nicht erwartet.

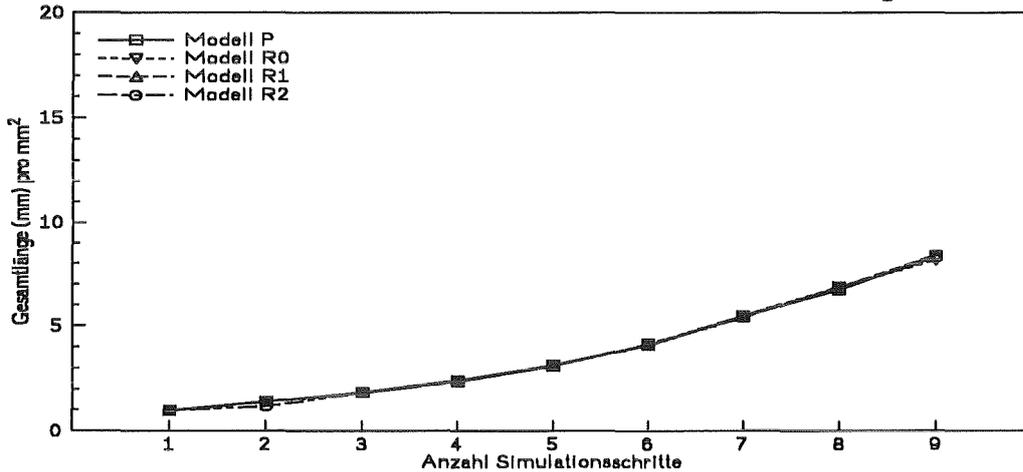
Verstärkung und Abschwächung heben sich offenbar auf bzw. fallen nicht ins Gewicht, wenn nicht nur ein einzelner Riß, sondern das gesamte Rißmuster betrachtet wird.

Mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit  
bei verschiedenen Ansätzen zur Rißwechselwirkung



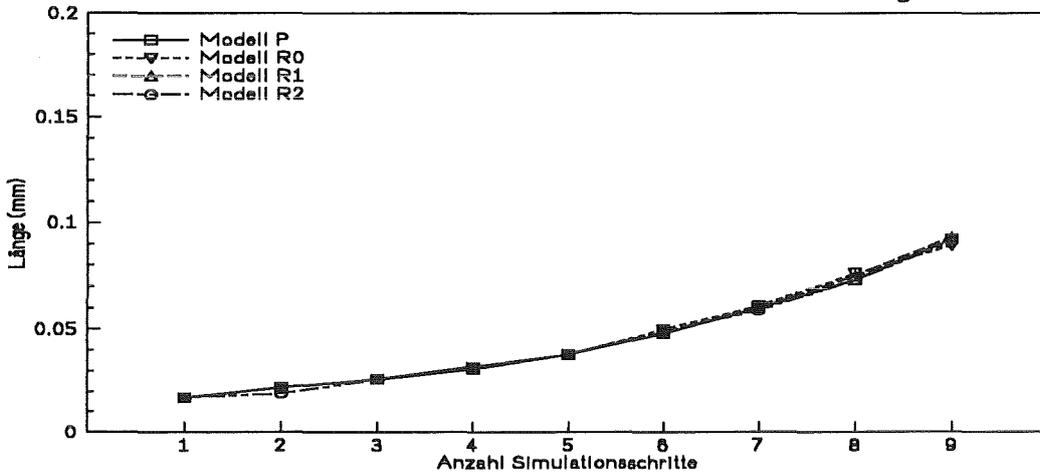
PAR1

Mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit  
bei verschiedenen Ansätzen zur Rißwechselwirkung



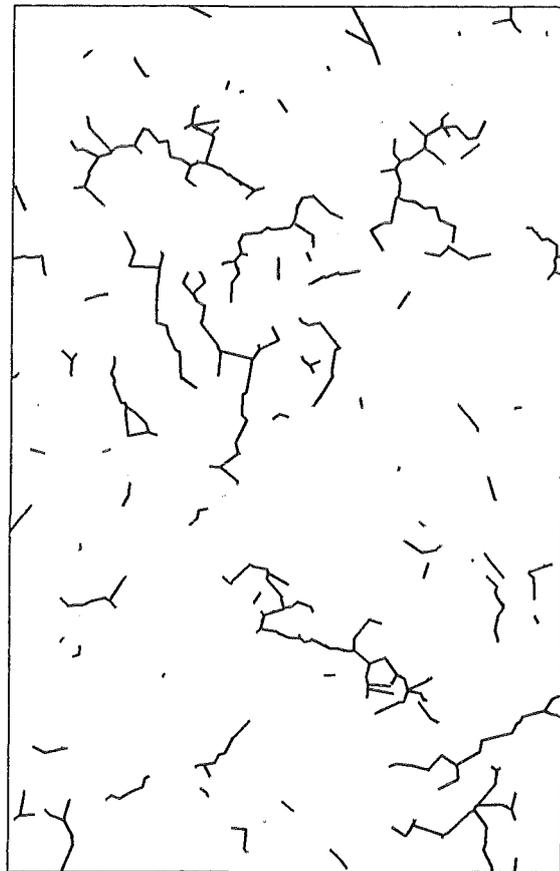
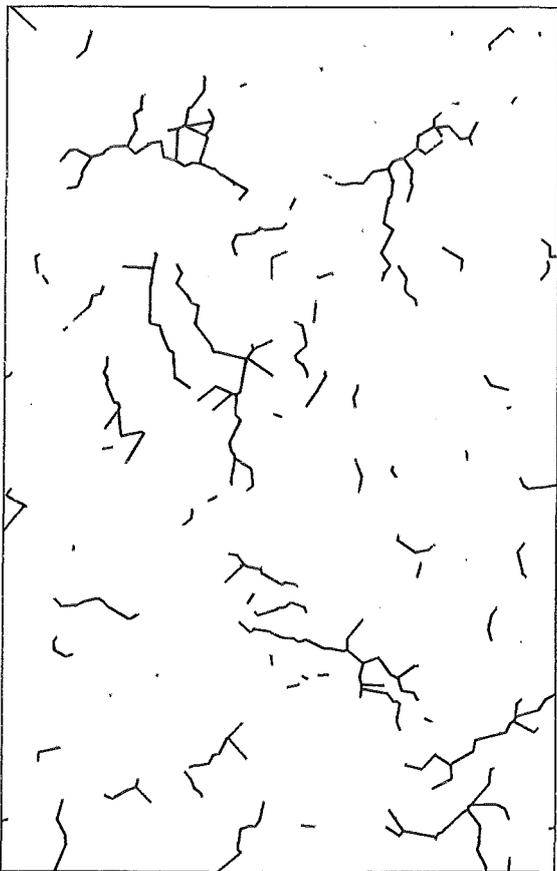
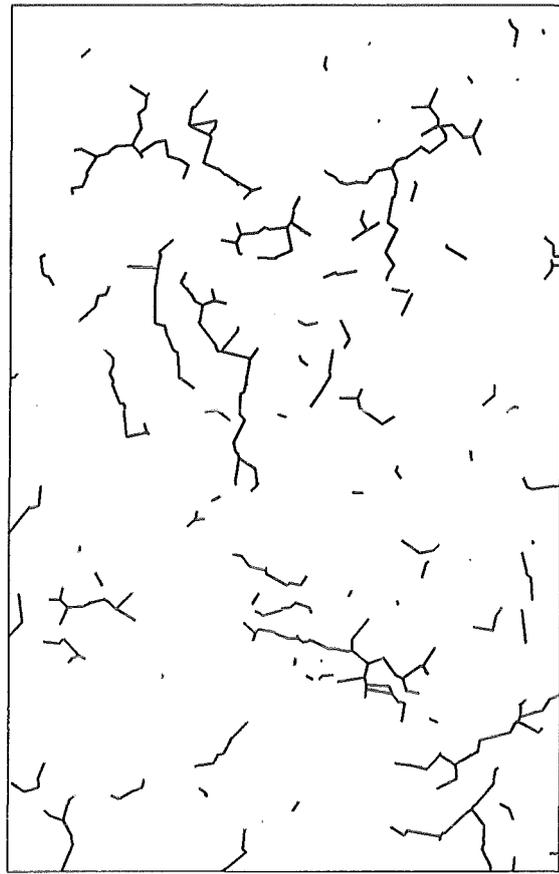
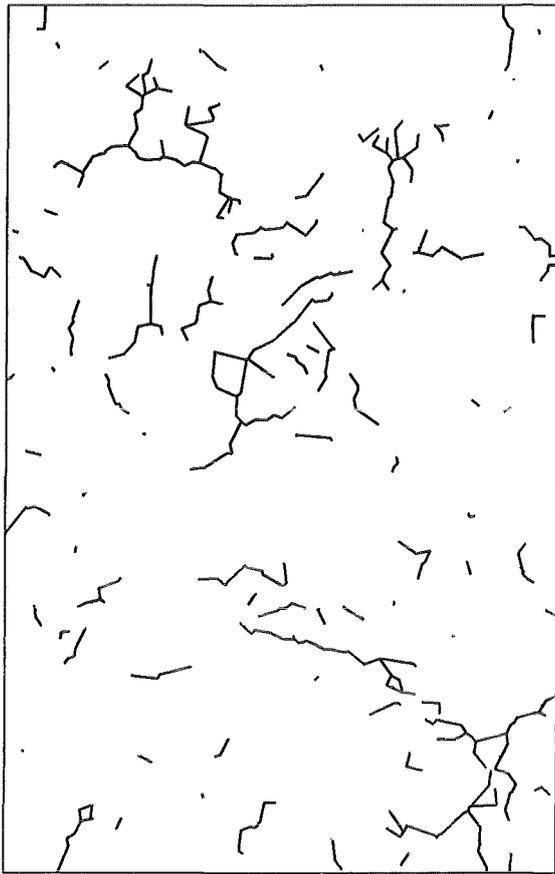
PAR2

Mittlere Länge eines Einzelrisses  
bei verschiedenen Ansätzen zur Rißwechselwirkung



PAR3

Abb. 8.16: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik bei verschiedenen Ansätzen zur Rißwechselwirkung. Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses.



**Abb. 8.17:** Realisierungen nach 8 Folgesimulationsschritten ausgehend vom gleichen Mosaik.  
Oben links: Modell P, oben rechts: Modell R0, unten links: Modell R1, unten rechts: Modell R2.

### 8.3.4 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Mit Ausnahme der Rißformparameter sind die Kenngrößen maßstabsabhängig. Ein Vergleich zwischen experimentellen und simulierten Rißmustern ist deshalb auf verschiedenen Maßstabsebenen möglich.

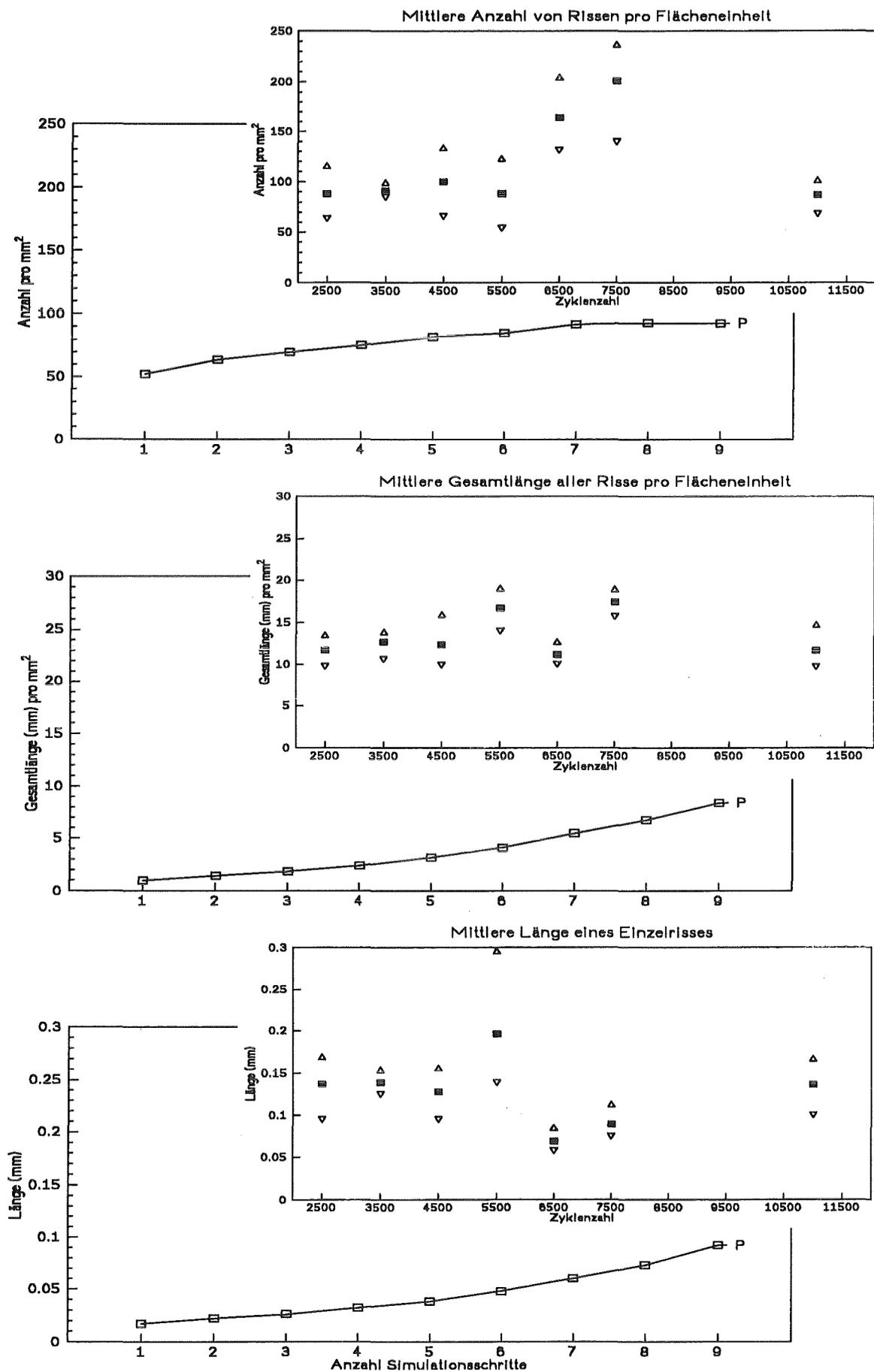
Nachfolgend wird die Simulation des zugrundeliegenden Mosaiks mit der gleichen Punktprozeß-Intensität wie bei der Mittelwertschätzung aus den experimentellen Mustern vorgenommen. Damit werden Rißmuster aus Experiment und Simulation mit vergleichbarer mittlerer Kantenlänge betrachtet. Auf einer vergleichbaren mittleren Kantenlänge aufbauend können die Unterschiede in den anderen Kenngrößen bewertet werden. Zu beachten ist allerdings, daß die tatsächliche Kantenlänge einer Realisierung aus der Simulation zufällig ist und beim Experiment von Probe zu Probe stark schwankt, außerdem durch die Digitalisierung beeinflusst wird (vgl Abschn. 7.2.1).

Der Vergleich der ermittelten Kenngrößen aus experimentellen und simulierten Bildern in Abb. 8.18 und Abb. 8.19 ergibt:

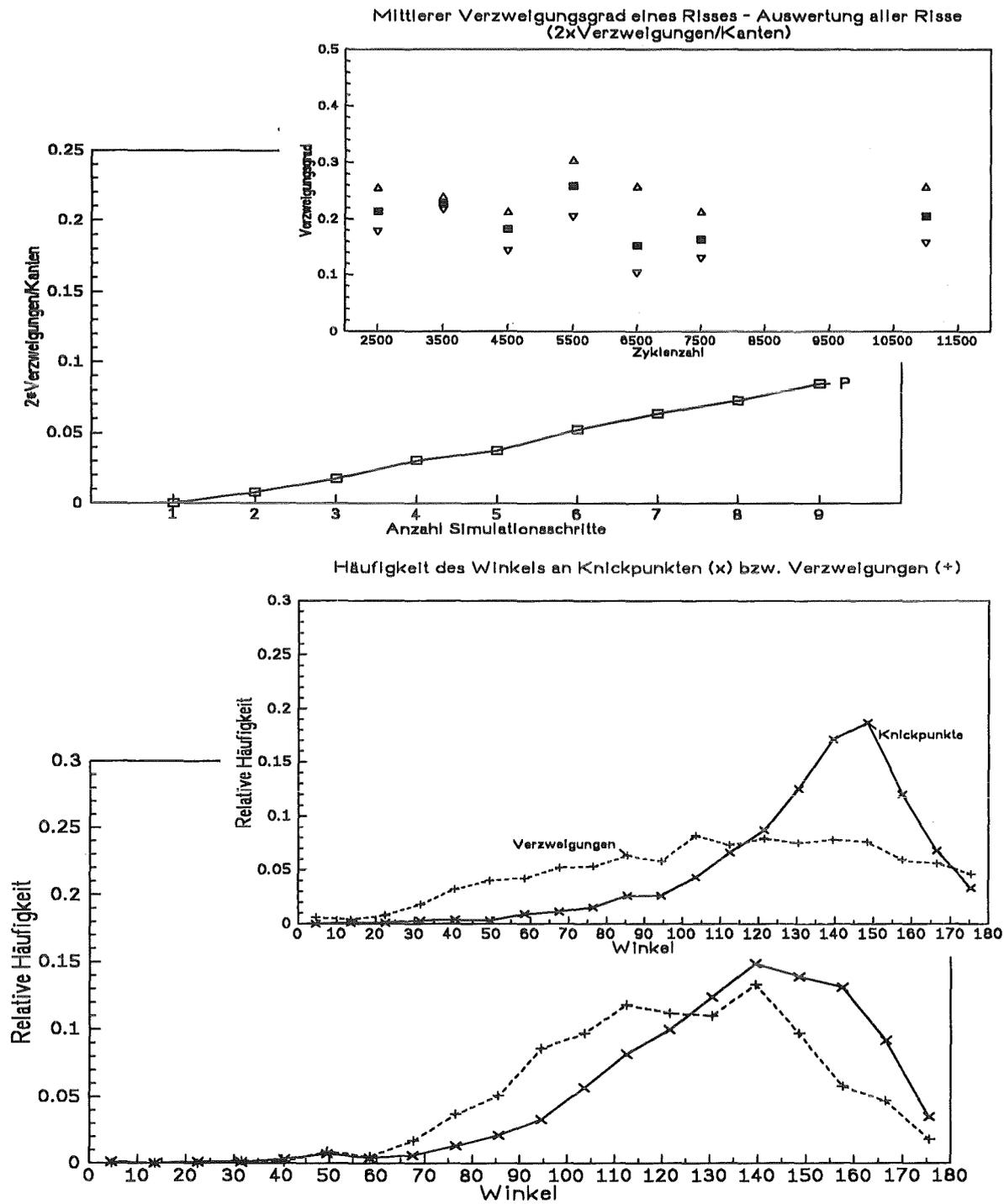
Bei der Simulation nehmen die Werte der Kenngrößen mit der Anzahl der Simulationsschritte deutlich zu. Bei den Kenngrößen der einfachen Rißstatistik werden nach dem neunten Simulationsschritt etwa die gleichen Größenordnungen erreicht wie beim Experiment. Dort ändern sich die Kenngrößen in dem untersuchten Bereich von Lastzyklenzahlen nur in geringem Maße. Das bedeutet, daß das bruchmechanische Simulationsmodell den Prozeß der Entstehung und Entwicklung der Schädigung an der Oberfläche richtig beschreibt, weil es vergleichbare Oberflächenrißmuster erzeugt. Es bedeutet weiterhin, daß dieser Abschnitt der Schädigungsentwicklung im Experiment schon nach wenigen Tausend Lastzyklenzahlen weit fortgeschritten ist. Danach überwiegt Schädigungsentwicklung in die Tiefe. Ein Grund besteht in der Zunahme der gegenseitigen Abschirmung der Risse an der Oberfläche.

Ein deutlicher Unterschied ergibt sich beim Verzweigungsgrad, der im Experiment etwa doppelt so groß ist (Abb. 8.19 oben). Der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Art der Erfassung der Rißmuster für die statistische Auswertung. Bei der Digitalisierung werden möglicherweise einige kurze, nicht oder wenig verzweigte Risse nicht mit berücksichtigt, im Unterschied zur Auswertung der simulierten Rißmuster, wo jede versagte Kante erfaßt wird.

Der Unterschied zwischen den Größenverteilungen des Winkels zwischen versagten Kanten an Knickpunkten einerseits und Verzweigungen andererseits ist bei Experiment und Simulation feststellbar. Das etwas häufigere Auftreten sehr spitzer Winkel an Verzweigungen beim Experiment wird auf Einflüsse der Werkstoffstruktur und den Ätzprozeß zurückgeführt.



**Abb. 8.18: Kenngrößen der einfachen Rißstatistik im Vergleich von Experiment und Simulation.**  
 Oben: mittlere Anzahl von Rissen pro Flächeneinheit, Mitte: mittlere Gesamtlänge aller Risse pro Flächeneinheit, unten: mittlere Länge eines Einzelrisses.



**Abb. 8.19: Kenngrößen der Ribformstatistik im Vergleich von Experiment und Simulation.**  
 Oben: mittlerer Rißverzweigungsgrad, unten: Histogramm des Winkels an Knickpunkten bzw. Verzweigungen.

## 9. Zusammenfassung

Ziel des vorgestellten Projektes war die Erarbeitung eines stochastischen Rißwachstumsmodells zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung im Fall thermozyklisch belasteter glatter Oberflächen von Metallen. Ausgangspunkt bilden experimentelle Untersuchungen aus einem früheren DFG-Vorhaben [8]. Den dort erfaßten experimentellen Rißmustern werden stochastisch simulierte Rißmuster gegenübergestellt.

Zwei zentrale Fragestellungen ergeben sich aus dieser Zielsetzung. Zum einen muß eine sinnvolle Vorschrift gefunden werden, nach der die Simulation abläuft. Zum anderen ist zu klären, anhand welcher statistischer Kenngrößen simulierte und experimentelle Rißbilder ausgewertet und verglichen werden. Dabei soll die Information aus den experimentellen Rißbildern möglichst vollständig verwertet werden.

Im einzelnen waren folgende Teilaufgaben zu bearbeiten:

- Bilder mit Rißmustern an der Oberfläche, wie sie im Experiment beobachtet wurden, wurden statistisch ausgewertet, um sie mit den simulierten Rißmustern vergleichen zu können.
- Verschiedene Möglichkeiten der Charakterisierung zufälliger Rißmuster mit Methoden der stochastischen Geometrie wurden verglichen. Dabei zeigte sich, daß eine qualifizierte Aussage nur durch gemeinsame Analyse von mehreren Kenngrößen erreicht werden kann.
- Die Stochastische Geometrie lieferte gleichzeitig auch eine Vorstellung für die physikalische Modellierung der Schädigungsentwicklung, die zu der Entwicklung der charakteristischen, netzartigen Rißmuster führt:  
Die Kanten eines Mosaiks beschreiben die Stellen potentieller Mikrorißentstehung und möglichen Rißwachstums. Das Rißmuster entsteht durch sukzessives Versagen von Kanten des Mosaiks. Kantenversagen (und damit Rißwachstum) erfolgt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, die von der Beanspruchung der Kante abhängt.
- Zunächst wurde mit einfachen Annahmen zum Kantenversagen das Rißwachstum simuliert. Anhand der simulierten Rißbilder konnte die Interpretierbarkeit der Kenngrößen beurteilt werden.
- Für eine sinnvolle Voraussage der Schädigungsentwicklung wurde schrittweise ein bruchmechanisches Modell erarbeitet und in das Simulationsprogramm eingebaut. Im ersten Schritt erfolgte die bruchmechanische Charakterisierung verzweigter Risse. Im zweiten Schritt wurde auch der Einfluß benachbarter Risse berücksichtigt.
- Zusätzlich wurden mögliche Auswertungen zur Analyse der Ausdehnung der Risse in die Tiefe der Proben getestet.

Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, daß die Grundidee der Simulation und der statistischen Beschreibung, nämlich das Rißmuster als unvollständigen Ausschnitt aus einem ebenen POISSON-VORONOI-Mosaik zu erhalten, wesentliche Eigenschaften des Schädigungs-

prozesses qualitativ richtig beschreibt. Ein großer Vorteil ist außerdem, daß mit dem gewählten Algorithmus zur Erstellung und Abspeicherung des Mosaiks die Nachbarschaft der einzelnen Kanten mit erfaßt wird. Deshalb ist auch die Einbeziehung der Wechselwirkungen zwischen den Rissen elegant ohne exzessiven rechnerischen Aufwand möglich. Ein Vergleich der unter Verwendung des bruchmechanischen Modells simulierten mit den experimentellen Oberflächenrißmustern zeigte ab einer bestimmten Anzahl von Simulationsschritten eine gute optische Übereinstimmung.

Um die Schädigungsentwicklung qualitativ richtig zu simulieren, waren neben einer Weiterentwicklung des bruchmechanischen Modells umfangreiche Simulationen, verbunden mit einer entsprechenden statistischen Auswertung, notwendig. Die Simulationsergebnisse gaben wichtige Hinweise zur Verbesserung des Modells. Außerdem konnte so der Einfluß verschiedener Annahmen und die Auswirkungen von Parametervariationen des Modells gezielt untersucht werden. Und schließlich konnte erst über Simulationen ermittelt werden, wie die einzelnen Kenngrößen bei der Schädigungsentwicklung streuen. Dadurch erhielt man gegenüber den Mittelwerten eine weitere Information für einen Vergleich der bruchmechanischen Modelle untereinander und mit dem Experiment.

Anhand der Ergebnisse der statistischen Auswertung konnten folgende Schlußfolgerungen getroffen werden:

- Die Vorstellung über die Schädigungsentwicklung als sukzessiven Prozeß aus Ribentstehung und Ribwachstum wurde bestätigt.
- Die Ausbildung des Ribmusters erfolgt im Experiment früher als erwartet, die Schädigungsentwicklung in die Tiefe nimmt stärker als erwartet zu.
- Die Streuung der Kenngrößen von Probe zu Probe mit gleicher Zyklenzahl ist teilweise stärker als die Veränderung der gemittelten Kenngrößen mit wachsender Anzahl von Lastzyklen.
- Globale Kenngrößen der Ribmuster, die den Grad der Schädigung beschreiben, sind relativ stabil, während lokale Kenngrößen, die Größe und Form der einzelnen Risse beschreiben, stärker streuen.
- Das bruchmechanische Modell beschreibt die Schädigungsentwicklung von kompliziert geformten, verzweigten Rissen qualitativ richtig.
- Der Einfluß der Wechselwirkungseffekte nimmt mit zunehmender Schädigung ab, weil sich Verstärkung und Abschwächung zunehmend aufheben.
- Die Parameter des Simulationsmodells müssen innerhalb bestimmter Zahlenbereiche gewählt werden, damit bei der Simulation solche Realisierungen von Ribmustern entstehen, die mit den experimentellen Bildern optisch vergleichbar sind.

Das ebene bruchmechanische Simulationsmodell beschreibt die Entstehung der Rißmuster an der Probenoberfläche. Um die Schädigungsentwicklung auch in der experimentell beobachteten Phase des vorrangigen Rißtiefenwachstums quantitativ richtig zu simulieren, ist eine Weiterentwicklung des bruchmechanischen Modells zu einem räumlichen Modell nötig. Analog zur bisherigen Vorgehensweise sind gleichzeitig geeignete statistische Kenngrößen zur Charakterisierung der räumlichen Strukturen bereitzustellen, bezüglich ihrer Aussagekraft zu untersuchen und zur Bewertung des entwickelten Modells zu verwenden.

Eine direkte Beziehung zwischen der Anzahl der Simulationsschritte beim ebenen Simulationsmodell und der Zyklenzahl im Experiment ist schwierig herzustellen. Überlegungen anhand der Entwicklung charakteristischer Größen der Rißmuster zeigen jedoch, daß die Ausbildung der Rißnetze wesentlich schneller erfolgt als angenommen. Die experimentellen Daten zeigen im wesentlichen die Entwicklung nach der Ausbildung der Rißnetze in Oberflächenrichtung, d.h. Rißwachstum erfolgt in erster Linie in Tiefenrichtung, während die Ausbildung an der Oberfläche selbst durch die bruchmechanische Simulation gut dargestellt wird.

Das entwickelte bruchmechanische Simulationsmodell beschreibt den Schädigungsprozeß unter äquibiaxialer Belastung. Die experimentell vorliegende Thermoschockbelastung der Probe führt allein nicht zum Versagen, die Schädigung kann aber für das Versagensverhalten bei überlagerter mechanischer Beanspruchung wesentlich sein. Eine entsprechende Modifizierung des bruchmechanischen Modells ist grundsätzlich möglich.

Die wichtigsten Ergebnisse des gemeinsamen Vorhabens liegen in der Bereitstellung eines methodischen Rahmens zur bruchmechanischen Beschreibung verzweigter Oberflächenrisse unter äquibiaxialer Belastung mit Berücksichtigung von Wechselwirkungseinflüssen, der Bereitstellung fortgeschrittener Methoden zur statistischen Auswertung von Rißmustern anhand geeigneter Kenngrößen sowie der Bereitstellung eines effizienten Simulationsverfahrens zur Identifizierung der Einflüsse verschiedener Größen des stochastischen Rißwachstumsmodells.

## 10. Literaturverzeichnis

- [1] E. Kullig, A. Brückner-Foit, H. Riesch-Oppermann, T. Winkler, Ermittlung der Lebensdauervertelung bei Thermoermüdung mit den Methoden der stochastischen Geometrie, Gemeinsamer Zwischenbericht zu den DFG-Vorhaben Mu-466/20-1 und Mi-362/5-2, August 1992.
- [2] H. Kitagawa, Y. Nakasone, S. Miyashita, Measurement of fatigue damage by randomly distributed small cracks data, in: J. Lankford et.al. (ed.) Fatigue Mechanisms - Advances in Quantitative Measurement of Physical Damage, ASTM STP 811 (1983), 233-263.
- [3] T. Hoshide, M. Miyahara, T. Inoue, Life prediction based on the analysis of crack coalescence in low cycle fatigue, Eng. Fract. Mech. 27 (1987), 91-101.
- [4] C.M. Suh, J.J. Lee, Y.G. Kang, Fatigue microcracks in type 304 stainless steel at elevated temperature, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 13 (1990), 487-496.
- [5] Feng Junyi, Bian Mengxin, Dang Zijou, Thermal fatigue under multiaxial stress, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 13 (1990), 525-534.
- [6] T. Hoshide, D.F. Socie, Crack nucleation and growth modelled in biaxial fatigue, Eng. Fract. Mech. 29 (1988), 287-299.
- [7] K. Tanaka, T. Mura, A dislocation model for fatigue crack initiation, J. Appl. Mech., 48 (1981), 97-103.
- [8] K. Bethge, D. Munz, B. Schinke, Ribbildung bei thermozyklischer Belastung an Platten aus dem austenitischen Stahl 1.4948, Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben Mu466/12, Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau der Universität Karlsruhe.
- [9] K. Bethge, Ausbreitung von halbelliptischen Oberflächenrissen in ferritischen und austenitischen Stahlplatten unter thermozyklischer Belastung, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau, Universität Karlsruhe, 1988.
- [10] J.M. Corum, W.L. Greenstreet, K.C. Liu, C.E. Pugh, R.W. Swindeman, Interim guidelines for detailed inelastic analysis of high-temperature reactor system components, Report ORNL-5014, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, USA, 1974.
- [11] D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, Stochastic geometry and its application. Akademie Verlag, Berlin 1989.
- [12] D. Stoyan, H. Stoyan: Fraktale, Formen, Punktfelder. Methoden der Geometriestatistik, Akademie Verlag, Berlin 1992.
- [13] T. Winkler, B. Michel, H. Voigt: Simulation of random crack initiation, growth, and coalescence. Materials Science Forum 62 (1990), 685-686.
- [14] A. Brakke, Statistics for random plane VORONOI tessellation. Unpublished paper, Susquehanna Univ., Dept. of Math. Sciences, Selinsgrove (USA).

- [15] T. Winkler, H. Riesch-Oppermann, A. Brückner-Foit, Statistical characterization of random crack patterns caused by thermal fatigue, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, **15** (1992) 10, 1025-1039.
- [16] E. Kullig, H. Riesch-Oppermann, T. Winkler, A. Brückner-Foit, Beschreibung der Rißentwicklung bei Thermoermüdung von Stahl durch ein stochastisches Modell, 24. Vortragsveranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Aachen 1992.
- [17] P.J. Green, R. Sibson, Computing Dirichlet tessellation in the plane, *The Computer Journal* **21** (1978), 168-173.
- [18] H. Maschke, R. Schäuble, H.-A. Bahr, H. Riesch-Oppermann, Numerische Simulation der zweidimensionalen Rißmusterbildung mit der Randelementemethode, 25. Vortragsveranstaltung des DVM-Arbeitskreises Bruchvorgänge, Karlsruhe 1993.
- [19] Y. Murakami, *Stress intensity factors handbook*, Pergamon Press 1987.
- [20] G.C. Sih, *Handbook of stress-intensity factors*, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, USA, 1973.
- [21] H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks*, Del Research Corporation, St. Louis, 2nd edition 1985.
- [22] D.P. Rooke, D.J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, London, HMSO, 1976.
- [23] H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985.
- [24] H. Maschke, Programmbeschreibung zum BEM-Programm 'ATHENE', Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik / Außenstelle Halle, unveröffentlicht.
- [25] I. Szabo, *Höhere technische Mechanik*, Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg, 1956.
- [26] T.C.T. Ting, The wedge subjected to tractions: a paradox re-examined, *J. of Elasticity* **14** (1984), 235-247.
- [27] E. Kullig, A. Brückner-Foit, Fracture mechanics assessment of planar branched cracks in an equibiaxial stress field, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* (erscheint demnächst).
- [28] W.T. Ang, A boundary integral solution for the problem of multiple interacting cracks in an elastic material, *Int. J. Fracture* **31** (1986), 259.
- [29] E. Kullig, H. Riesch-Oppermann, T. Winkler, A. Brückner-Foit, A stochastic simulation model for the damage accumulation in thermal fatigue, *Mechanical Engineering Publ.*, London 1995 (erscheint demnächst).
- [30] H. Riesch-Oppermann, A. Brückner-Foit, D. Munz, T. Winkler, Crack initiation, growth and interaction in thermal cyclic loading - a statistical approach. In: *Behaviour of Defects at High Temperatures*, ESIS-Publ. 15 (Eds. R.A. Ainsworth, P.A. Skelton) 1993, Mechanical Engineering Publication, London, pp. 269-276.

- [31] E. Kullig, H. Riesch-Oppermann, T. Winkler, A. Brückner-Foit, Lifetime prediction for thermal fatigue: Development of a stochastic model. In: Low Cycle Fatigue and Elasto-Plastic Behaviour of Materials - LCF3, Ed. K.T. Rie (Proc. of DVM-Conf., Berlin, Sep. 7-11, 1992), Elsevier London, 829- 834.
- [32] T. Winkler, A. Brückner-Foit, E. Kullig, H. Riesch-Oppermann, Analysis of experimentally obtained and simulated crack patterns due to thermal fatigue. Workshop "Monte Carlo Methods and Microstructural Damage Accumulation", Lausanne, May 6-7, 1993.

## Anhang A. Bestimmung der Nachbarschaftsrisse

Bei der Berücksichtigung der Wechselwirkung eines Risses mit anderen Rissen ist es wichtig, die Zahl der zu untersuchenden Risse auf die Risse in unmittelbarer Nachbarschaft des zu bewertenden Risses zu beschränken. Werden alle Risse des Rißmusters untersucht, nimmt die Anzahl der in einem Simulationslauf zu testenden Risse quadratisch mit der Gesamtzahl der Risse zu.

Mit dem im folgenden vorgestellten Verfahren gelingt es, den rechnerischen Aufwand zu beschränken.

Um die Nachbarschaftsrisse zu bestimmen, erfolgt eine Ersatz-Dirichlet-Zerlegung des vorhandenen Rißmusters, wobei die Schwerpunkte der einzelnen Risse als Keimpunkte für die Ersatz-Zerlegung benutzt werden. Im Ergebnis dieser Zerlegung erhält man mit dem entstehenden Dirichlet-Mosaik zu jedem Riß eine Liste benachbarter Risse. Diese Nachbarschaftsliste wird für die Berücksichtigung der Rißwechselwirkung im Simulationsmodell zugrunde gelegt. D.h., wird ein Riß bzgl. der Wechselwirkung mit anderen Rissen untersucht, so werden nur die Risse untersucht, die in dieser Liste enthalten sind. Damit läßt sich der numerische Aufwand minimieren.

Ein Beispiel für die vorgestellte Zerlegung zeigt die Abb. A-1.

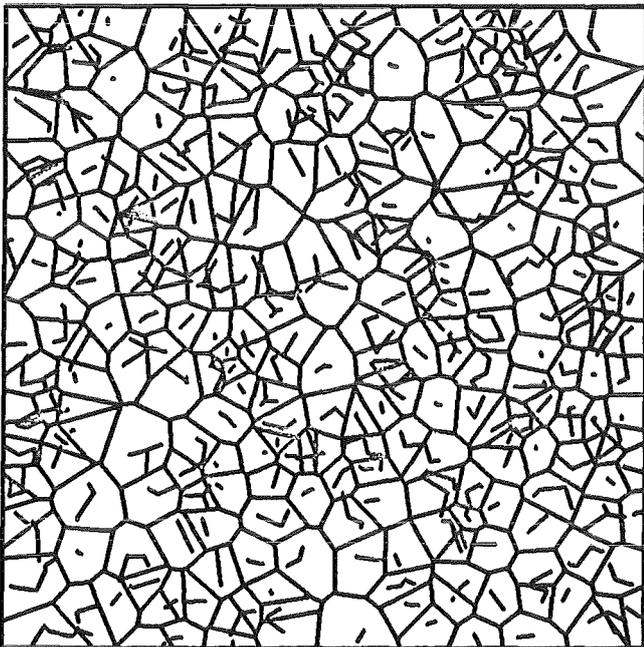


Abbildung A-1. Ersatz-Dirichlet-Zerlegung. Die Schwerpunkte der Risse bilden die Zentren der Ersatz-Zerlegung.

## Anhang B. Formeln für Wichtungsfaktoren (Mode I)

Es erfolgt eine vollständige Zusammenstellung der Formeln (6.14) zur Berechnung der Wichtungsfaktoren aus den Geometriegrößen für Mode I. Eine Fehlerbeurteilung wird anhand des Vergleichs zwischen Näherungsformeln und BEM-Ergebnissen durchgeführt. Zusammen mit den Ansätzen zur Berechnung der effektiven Rißlänge aus Kap. 6 können damit die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  berechnet werden.

Zunächst werden nur Risse betrachtet, die Entlastungspunkte nur auf einer Seite haben. Da bei den BEM-Analysen nur Risse mit höchstens einem Entlastungspunkt auf einer Seite untersucht wurden, muß bei Vorhandensein mehrerer Entlastungspunkte ein maßgebender Entlastungspunkt festgelegt werden, mit dem die Geometriegrößen nach Abschnitt 6.3.3 berechnet werden. Im bruchmechanischen Modell wird als maßgebender Belastungspunkt derjenige mit der größten  $x$ -Koordinate verwendet.

Bei der Anwendung der gefundenen Beziehungen kann es auftreten, daß die effektive Rißlänge negativ wird. In der Regel sind für solche Rißenden die Spannungsintensitätsfaktoren sehr klein und können Null gesetzt werden. Deswegen wurden dazu keine weiteren Untersuchungen angestellt.

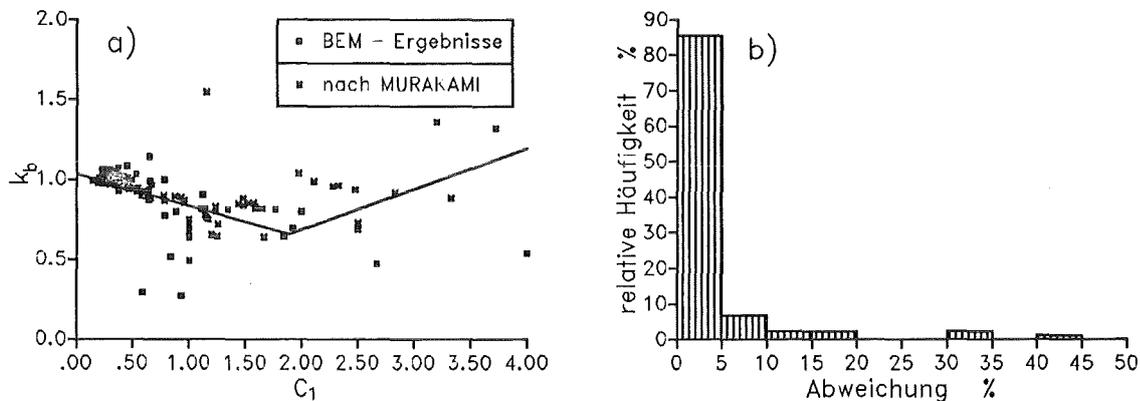


Abbildung B-1. Auswertung der BEM-Analysen für Fall A, Mode I. a) Wichtungsfaktor  $k_b$  in Abhängigkeit von der Geometriegröße  $C_1$ , b) Abweichungen der  $K_I$ -Faktoren zwischen BEM-Ergebnissen und Näherungsformeln.

### Fall A:

Im Fall A ( $p_e = 0$ ) ist in den Gleichungen (6.4) und (6.5) der Wichtungsfaktor  $k_b$  die einzige unbekannte Größe und kann demnach für die in Frage kommenden Rißenden aus den  $K_I$ -Faktoren berechnet werden. Es hat sich herausgestellt, daß  $k_b$  sehr gut mit der Geometriegröße  $C_1$  korreliert, was in Abb. B-1a) dargestellt ist. Mit eingezeichnet ist der bilineare Verlauf der Ausgleichskurve, der durch

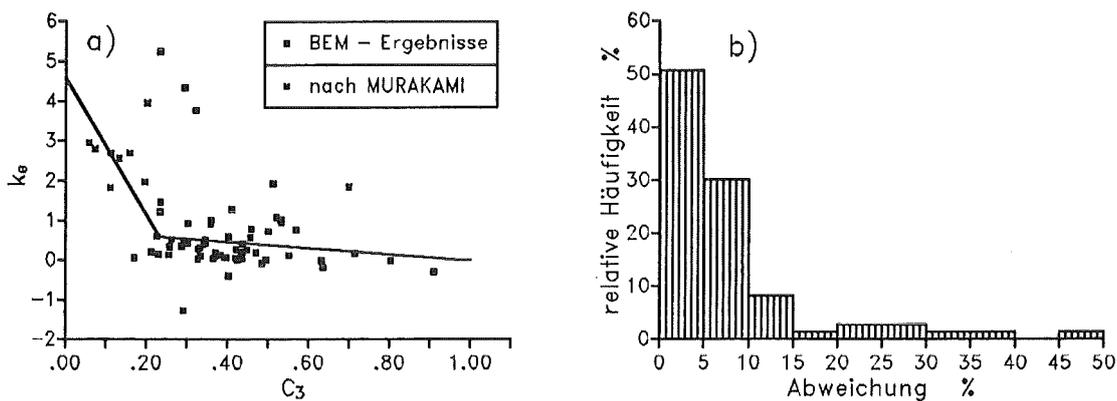


Abbildung B-2. Auswertung der BEM-Analysen für Fall B, Mode I. a) Wichtungsfaktor  $k_e$  in Abhängigkeit von der Geometriegröße  $C_3$ , b) Abweichungen der  $K_I$ -Faktoren zwischen BEM-Ergebnissen und Näherungsformeln.

$$k_b = \begin{cases} 1.035 - 0.197 C_1 & \text{für } C_1 \leq 1.9 \\ 0.178 + 0.254 C_1 & \text{für } C_1 > 1.9 \end{cases} \quad (B.1)$$

gegeben ist. Mit dieser Beziehung lassen sich die Spannungsintensitätsfaktoren sehr genau berechnen, weil entsprechend Gleichung (6.5) die Abweichung bei der Berechnung von  $k_b$  nicht in voller Höhe in die effektive Rißlänge eingeht. In Abb. B-1b) sind die Abweichungen zwischen den  $K_I$ -Faktoren aus den BEM-Rechnungen und den Näherungsformeln (6.4),(6.5) und (B.1) in Form eines Histogramms dargestellt.

### Fall B:

Gegenüber Fall A treten in (6.4) und (6.5) die beiden Wichtungsfaktoren  $k_b$  und  $k_e$  auf. Diese lassen sich bei bekannten  $K_I$ -Faktoren nicht mehr eindeutig bestimmen. Deshalb wird zur Berechnung von  $k_e$  Gleichung (B.1) von Fall A übernommen.  $k_e$  korreliert dann gut mit der Geometrieckenngroße  $C_3$ , was in Abb. B-2a) dargestellt ist. Die Punkte lassen sich annähern durch

$$k_e = \begin{cases} 4.6 - 17.37 C_3 & \text{für } C_3 \leq 0.23 \\ 0.8 (1 - C_3) & \text{für } C_3 > 0.23 \end{cases} \quad (B.2)$$

Auch für diesen Fall sind die Abweichungen der Näherungsformeln gegenüber den BEM-Ergebnissen in Abb. B-2b) dargestellt.

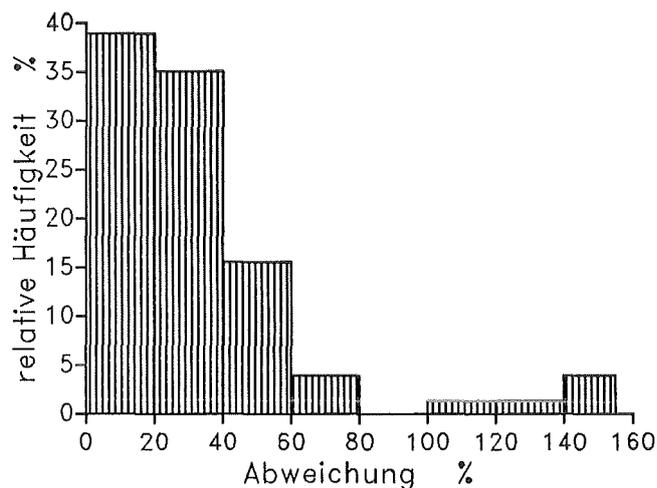


Abbildung B-3. Auswertung der BEM-Ergebnisse für Fall C, Mode I. Abweichungen der  $K_I$ -Faktoren zwischen BEM-Ergebnissen und Näherungsformeln.

**Fall C:**

Der Fall C ist am schwierigsten zu fitten, so daß gegenüber den Fällen A und B weitere Geometriegrößen in die Untersuchungen einbezogen werden müssen. Es soll hier nur das Ergebnis angeführt werden.

$$k_c = 0.0059 f_1(\psi) f_2(\eta) f_3(C_3) f_4(C_4)$$

mit:

$$f_1 = 1 + 0.0783 \bar{\psi} - 0.793 \bar{\psi}^2 \quad , \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{90^\circ} \tag{B.3}$$

$$f_2 = \bar{\eta} + 13.59 \bar{\eta}^{4.625} \quad , \quad \bar{\eta} = \frac{|\eta|}{70^\circ}$$

$$f_3 = 1 + 1.557 C_3$$

$$f_4 = \frac{1}{C_4^{1.074}}$$

Die Abweichungen gegenüber den BEM-Ergebnissen sind wesentlich größer als in den Fällen A und B (vgl. Abb. B-3).

### Entlastungspunkte auf der oberen und unteren Seite des Risses:

Für Risse, die auf beiden Seiten Entlastungspunkte enthalten, wird zunächst jede Seite separat behandelt; d.h. es muß jeweils der maßgebende Entlastungspunkt festgelegt werden, die Geometriegrößen nach den Formeln aus Abschnitt 6.3.3 berechnet werden und die Wichtungsfaktoren entsprechend Gleichungen (B.1-3) ermittelt werden. Danach kann für jede Seite eine 'fiktive' effektive Rißlänge  $a_{eff I}^{oben}$  und  $a_{eff I}^{unten}$  berechnet werden. Die tatsächlich vorhandene effektive Rißlänge wird dann als Funktion

$$a_{eff I} = f(a_{eff I}^{oben}, a_{eff I}^{unten}) \quad (B.4)$$

ermittelt. Diese Vorgehensweise erscheint sinnvoll, da die vorher ermittelten Beziehungen übernommen werden können und qualitative Aussagen über die Form der Fläche (B.4) durch grundsätzliche Überlegungen gefunden werden können. Sie muß zur Geraden  $a_{eff I}^{oben} = a_{eff I}^{unten}$  symmetrisch sein, da durch eine Spiegelung des Risses an der  $x$ -Achse  $K_I$  unverändert bleibt. Für kleine  $a_{eff I}^{oben}$  und/oder  $a_{eff I}^{unten}$ , was einer starken Abschirmung durch Rißzweige auf der jeweiligen Seite bedeutet, muß auch  $a_{eff I}$  klein sein.

Werden bei den hier behandelten Rissen die betrachteten Rißenden (Punkt A in Abb. 6-7) sehr stark abgeschirmt, kann die Lösung des Randwertproblems negative  $K_I$ -Faktoren liefern. Negative  $K_I$ -Faktoren sind mit einem nichtkompatiblen Verschiebungszustand, bei dem sich die Rißflanken gegenseitig durchdringen, verbunden. Das bedeutet dann, daß die gesamte Lösung des Randwertproblems nicht richtig ist. In Wirklichkeit bleibt der Riß in einem gewissen Bereich an der Rißspitze geschlossen und an der Rißspitze herrschen nicht-singuläre Druckspannungen ( $K_I = 0$ ) vor. Die genaue Lösung des Randwertproblems kann mit dem verwendete Programm nur iterativ ermittelt werden, was einen sehr großen Aufwand bedeutet. Deshalb wird für (B.4) eine Näherungsgleichung ermittelt, die im Bereich negativer  $K_I$ -Faktoren auch negative effektive Rißlängen liefert, die anschließend Null gesetzt werden. In Abb. B-4 sind die aus den untersuchten Rissen erhaltenen Punkte zum Fitten der Fläche (B.4) gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, daß negative  $K_I$ -Faktoren erhalten werden, wenn die abschirmende Wirkung eines oder beider Rißzweige groß ist, was zu kleinen Werten für  $a_{eff I}^{oben}$  und  $a_{eff I}^{unten}$  führt. Für Gleichung (B.4) wurde folgende Form ermittelt:

$$\bar{a}_{eff I} = -2.057 \arctan \left[ \frac{1}{(\bar{a}_{eff I}^{oben} \bar{a}_{eff I}^{unten})^{1.48}} + 2.41 \right] + 3.225 \quad (B.5)$$

$$\text{mit } \bar{a}_{eff I} = \frac{a_{eff I}}{l_A}, \quad \bar{a}_{eff I}^{oben} = \frac{a_{eff I}^{oben}}{l_A}, \quad \bar{a}_{eff I}^{unten} = \frac{a_{eff I}^{unten}}{l_A} .$$

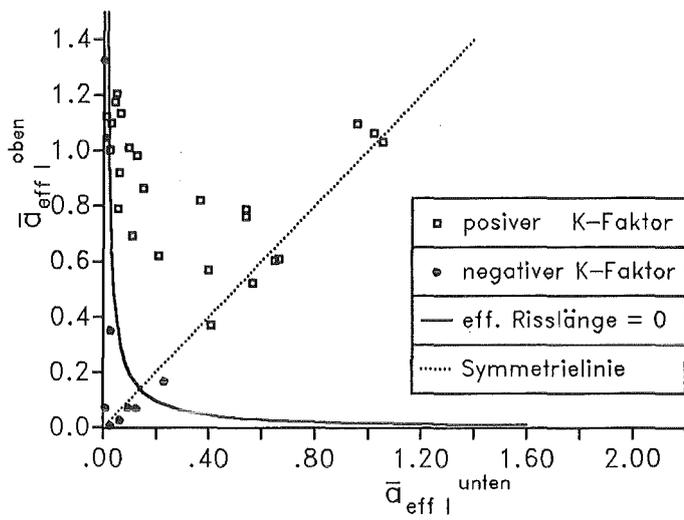


Abbildung B-4. Untersuchter Bereich zur Ermittlung von Gl. (B.5)

## Anhang C. Formeln für Wichtungsfaktoren (Mode II)

Es erfolgt eine vollständige Zusammenstellung der Formeln (6.14) zur Berechnung der Wichtungsfaktoren aus den Geometriegrößen für Mode II. Eine Fehlerbeurteilung wird anhand des Vergleichs zwischen Näherungsformeln und BEM-Ergebnissen durchgeführt. Zusammen mit den Ansätzen zur Berechnung der effektiven Rißlänge aus Kap. 6 können damit die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{II}$  berechnet werden.

Zunächst werden nur Risse betrachtet, die Entlastungspunkte nur auf einer Seite haben und demnach eindeutig in einen der drei Fälle A, B oder C aus Abschnitt 6.3.1. eingeordnet werden können. Danach werden Risse behandelt, die auf beiden Seiten Entlastungspunkte haben.

Die Auswertung der BEM-Ergebnisse muß zwei Aussagen liefern, eine zum Betrag und eine zum Vorzeichen von  $K_{II}$ .

Für alle hier separat aufgeführten Fälle hat sich ergeben, daß es eine recht deutliche Zuordnung der Vorzeichen von  $K_{II}$  zur Richtung  $\varphi$  des Symmetrievektors  $\vec{r}$  gibt. Lediglich in den Übergangsbereichen gibt es auch Abweichungen. Da hier betragsmäßig  $K_{II}$  in der Regel klein gegenüber  $K_I$  ist, ist es sinnvoll im Übergangsbereich  $K_{II}$  zu vernachlässigen. Man erhält folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} K_{II} > 0 & \quad \text{für } 10^\circ \leq \varphi \leq 170^\circ \\ K_{II} < 0 & \quad \text{für } 190^\circ \leq \varphi \leq 350^\circ \\ K_{II} = 0 & \quad \text{sonst} \end{aligned} \tag{C.1}$$

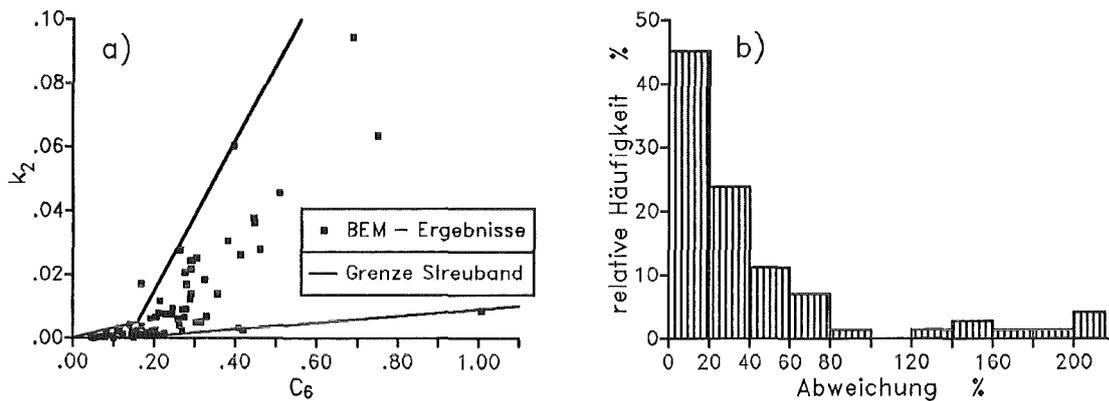
Zur Untersuchung des Betrages von  $K_{II}$  wird zunächst der Wichtungsfaktor  $k_2$  der Geometriegröße  $C_6$  gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß es zwar eine eindeutige Tendenz gibt, aber die Streuungen sehr groß sind.

### Fall A:

Als Bezugslänge in Gleichung (6.7) und (6.12) wurde die gesamte Projektion des Risses auf die x-Achse verwendet:

$$l_{b2} = l_A + p_b \quad . \tag{C.2}$$

In Abb. C-1a) sind die Wichtungsfaktoren  $k_2$ , die sich aus (6.4<sub>2</sub>) und (6.7) eindeutig berechnen lassen, in Abhängigkeit von der Geometriegröße  $C_6$  aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß mit kleineren Werten von  $C_6$ , was eine geringere Abweichung des Risses von der Symmetrie bezüglich der x-Achse bedeutet, die Werte  $k_2$  gegen Null gehen und somit auch  $K_{II}$  kleiner wird. Die Punkte liegen allerdings auf einem sehr breiten Streuband. Wegen des Ansatzes (6.7) für die effektive Rißlänge geht der Fehler beim Fitten von  $k_2$  in voller Höhe in  $a_{effII}$  ein. Deshalb ist es notwendig, zur Beschreibung der Abhängigkeit  $k_2$



**Abbildung C-1. Auswertung der BEM-Analysen für Fall A, Mode II.** a) Wichtungsfaktor  $k_2$  in Abhängigkeit von der Geometriegröße  $C_6$ , b) Abweichungen der  $K_{II}$ -Faktoren zwischen BEM-Ergebnissen und Näherungsformeln

von der Geometrie weitere Kenngrößen einzubeziehen, ohne die Forderungen aus der Symmetrie zu verletzen. Dazu wird folgender Ansatz gemacht:

$$k_2 = f(C_6) + \Delta f(C_6) g \quad . \quad (C.3)$$

Dabei werden  $f$  und  $\Delta f$  so vorgegeben, daß  $k_2$  für  $g = \pm 1$  ungefähr die Grenzen des Streubandes festlegt. Für den Fall A wurde zur Beschreibung des Streubandes folgender bilinearer Verlauf

$$f = \begin{cases} 0.0173 C_6 & \text{für } C_6 \leq 0.16 \\ 0.1236 C_6 - 0.0170 & \text{für } C_6 > 0.16 \end{cases} \quad (C.4)$$

$$\Delta f = \begin{cases} 0.0155 C_6 & \text{für } C_6 \leq 0.16 \\ 0.1132 C_6 - 0.0156 & \text{für } C_6 > 0.16 \end{cases}$$

vorgegeben, der in Abb. C-1 mit eingezeichnet ist. Danach wurde die Korrelation von  $g$  zu verschiedenen anderen geometrischen Kenngrößen untersucht. Als bester Fit wurde folgende Darstellung erhalten:

$$g = -1.0834 + 1.0167 |\sin \varphi| + 0.8629 C_1 - 0.9995 |\sin \varphi| C_1 \quad (C.5)$$

In Abb. C-1b) sind die Abweichungen zwischen den BEM-Ergebnissen und den Näherungsformeln in Form eines Histogramms dargestellt.

**Fall B:**

Die Bezugslänge  $l_{b2}$  wurde wie im Fall A festgelegt. Die Vorgehensweise entspricht der von Fall A, wobei folgendes Ergebnis erhalten wurde:

$$\begin{aligned}
 f &= 0.05 C_6 + 0.155 C_6^2 \\
 \Delta f &= 0.04995 C_6 + 0.145 C_6^2 \\
 \text{mit} & \\
 g &= -1.4624 + 0.5845 |\sin \varphi| + 1.2257 C_1 - 0.1639 |\sin \varphi| C_1 \\
 &\quad + 1.7963 |\sin \varphi|^{3.8} - 1.9426 C_1 |\sin \varphi|^{3.8}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

**Fall C:**

Da im Fall C - wie im Abschnitt 6.3.1. erläutert - nur eine charakteristische Länge existiert, wird diese auch als Bezugslänge verwendet:

$$l_{b2} = l_A \quad . \tag{C.7}$$

Für  $k_2$  wurde folgende Darstellung gefunden:

$$\begin{aligned}
 k_2 &= 0.04 - 0.012 C_6 + 0.03 |\sin \varphi| (\bar{\eta} + 3 \bar{\eta}^{-2.3}) (0.97 C_6 - 0.32) \\
 \text{mit: } \bar{\eta} &= \frac{|\eta|}{75^\circ} \quad .
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

**Entlastungspunkte auf der oberen und unteren Seite des Risses:**

Für Risse, die auf beiden Seiten Entlastungspunkte enthalten, wird noch folgende Unterteilung

- Fall D: oben und unten Fall B
- Fall E: oben oder/und unten Fall C

vorgenommen, weil dadurch ein besserer Fit der BEM-Ergebnisse erreicht werden konnte. Im folgenden werden nur die Näherungsformeln angegeben.

**Fall D:**

Die Bezugslänge ist:

$$l_{b2} = l_A \quad . \tag{C.9}$$

Für  $k_2$  wurde folgende Darstellung gefunden:

$$k_2 = 0.69 \left[ \frac{C_6}{0.721 + 0.77 |\sin \varphi|} \right]^{4.135} \quad (\text{C.10})$$

**Fall E:**

Die Bezugslänge ist:

$$l_{b2} = l_A \quad (\text{C.11})$$

Für  $k_2$  wurde folgende Darstellung gefunden:

$$k_2 = 0.00106 \left( \frac{\bar{\varphi}}{140^\circ} \right)^n C_6$$

mit:

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{für } 0^\circ \leq \varphi < 180^\circ \\ \varphi - 180^\circ & \text{für } 180^\circ \leq \varphi < 360^\circ \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$$n = 4.586 + 22.25 \frac{\bar{\eta}}{90^\circ}, \quad \bar{\eta} = \min\{\eta^{oben}, \eta^{unten}\} .$$

## Anhang D. BEM-Ergebnisse zum Spannungszustand an Knickpunkten

### D.1 Geometriefunktionen des abgeknickten Ersatzrisses

Mit dem BEM-Programm 'ATHENE' [24] wurde für verschiedene Randwinkel  $\varphi_R$  und Längenverhältnisse  $l_1/l_2$  des abgeknickten Ersatzrisses der Spannungszustand auf der Linie  $\varphi = 0$  am Knickpunkt (vgl. Abb. 6-8 im Abschnitt 6.4) berechnet und daraus die Funktionen  $h_s$  und  $h_a$  bestimmt. In Tabelle D-1 sind durch ein x die gewählten Kombinationen der Randbedingungen für die durchgeführten Rechnungen zusammengestellt.

Längenverhältnis der Schenkel $\frac{l_1}{l_2}$	Randwinkel $\varphi_R$ in $[\circ]$					
	100	120	126	130	140	160
1.5	x	x			x	x
2	x	x			x	x
3	x	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x	x
10	x	x	x	x	x	x

Tabelle D-1. Zusammenstellung der mit BEM gerechneten Varianten des abgeknickten Ersatzrisses

Für die Auswertung der BEM-Ergebnisse ist eine dimensionslose Darstellung der Spannungen vorteilhaft. Als Bezugsgrößen wurde die äußere Spannung  $\sigma$  und die Länge  $l_2$  des unteren Schenkels des Ersatzrisses (vgl. Abb. 6-8) verwendet. Damit können die Normalspannung  $\sigma_\varphi$  und Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  auf der Geraden  $\varphi = 0$  wie folgt angegeben werden:

$$\overline{\sigma}_\varphi(r, \varphi = 0) = \overline{K}_s \bar{r}^{-\lambda_s} g_s(\varphi = 0) \quad (D.1)$$

$$\overline{\tau}_{r\varphi}(r, \varphi = 0) = \overline{K}_a \bar{r}^{-\lambda_a} f_a(\varphi = 0)$$

mit den dimensionslosen Größen:

$$\overline{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sigma} \quad , \quad \overline{\tau}_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{\sigma} \quad , \quad \bar{r} = \frac{r}{l_2} \quad , \quad \overline{K}_i = h_i(\varphi_R, \frac{l_1}{l_2}) \quad . \quad (D.2)$$

Die Winkelfunktionen für die Schubspannungen  $f_i(\varphi)$  lassen sich analog zu (6.22) analytisch berechnen. In (D.1) gilt :

$$f_a(\varphi = 0) = -\lambda_a(1 - \lambda_a) \left[ 1 - \frac{\cos \lambda_a \varphi_R}{\cos (2 - \lambda_a) \varphi_R} \right] \quad (D.3)$$

Aus dem Normalspannungsverlauf  $\bar{\sigma}_\varphi$  läßt sich der symmetrische Anteil  $h_s$  und aus dem Schubspannungsverlauf  $\bar{\tau}_{r\varphi}$  der antimetrische Anteil  $h_a$  ermitteln.

Die aus den BEM-Ergebnissen gefitteten Funktionen sind für den symmetrischen Anteil (siehe Abb. D-1):

$$h_s\left(\varphi_R, \frac{l_1}{l_2}\right) = 0.899 \left[ \bar{\varphi}_R - 0.339 \bar{\varphi}_R^2 \right] \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^\alpha$$

mit :

$$\bar{\varphi}_R = \frac{\varphi_R - 90^\circ}{90^\circ}$$

$$\alpha = 0.328 + 0.211 \bar{\varphi}_R$$

(D.4)

und für den antimetrischen Anteil (siehe Abb. D-2):

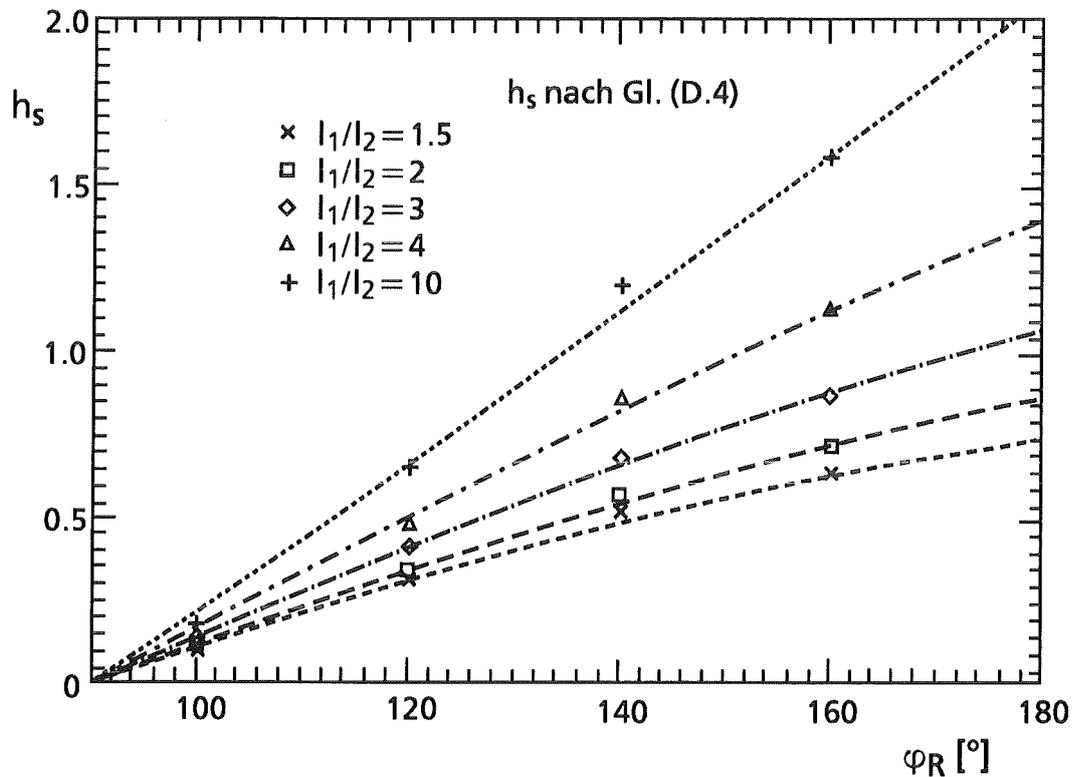


Abbildung D-1. Funktion  $h_s(\varphi_R, l_1/l_2)$  (nach (D-4))

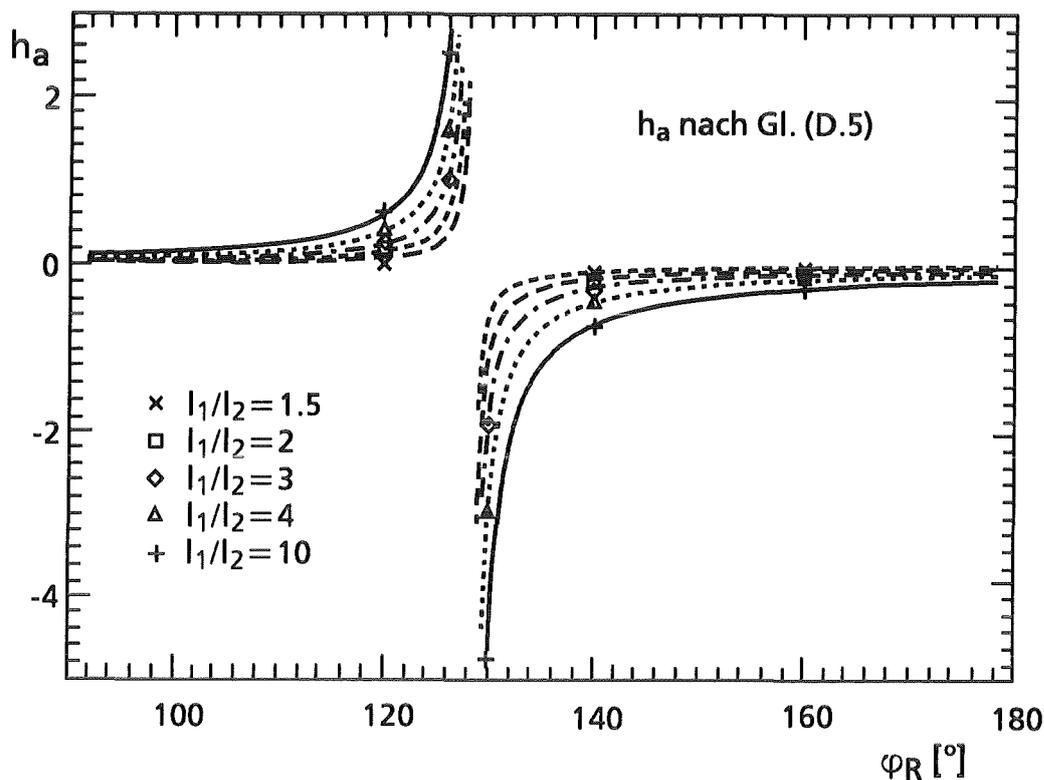


Abbildung D-2. Funktion  $h_a(\varphi_R, l_1/l_2)$  (nach (D-5))

$$h_a\left(\varphi_R, \frac{l_1}{l_2}\right) = 0.0491 \left(\frac{\varphi_0 - \varphi_R}{78.7^\circ}\right)^{-1.17} \left[\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{0.281} - 1\right] \quad \text{für } \varphi_R < \varphi_0$$

$$h_a\left(\varphi_R, \frac{l_1}{l_2}\right) = -0.0795 \left(\frac{\varphi_R - \varphi_0}{127.7^\circ}\right)^{-0.93} \left[\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{0.295} - 1\right] \quad \text{für } \varphi_R > \varphi_0 \quad (D.5)$$

mit

$$\varphi_0 = 128.5^\circ$$

Die Fallunterscheidung beim antisymmetrischen Anteil in (D.5) hängt mit dem Nulldurchgang des Eigenwertes  $\lambda_a(\varphi_R)$  bei  $\varphi_0 \approx 128.5^\circ$  (vgl. Abb. 6-9) zusammen. Bei  $\varphi_0$  haben auch die Winkelfunktionen  $f_a(\varphi)$  und  $g_a(\varphi)$  einen Nulldurchgang. Da sich der Spannungszustand in Abhängigkeit von  $\varphi_R$  nur stetig ändern kann, ergibt sich für die Funktion  $h_a(\varphi_R, l_1/l_2)$  bei  $\varphi_0$  eine Polstelle. Um diesen Verlauf möglichst gut zu erfassen, waren die zusätzlichen BEM-Rechnungen bei  $\varphi_R = 126^\circ$  bzw.  $130^\circ$  (vgl. Tabelle D-1) notwendig.

## D.2 Geometriefunktionen zur Berücksichtigung von Abschirmeffekten

Zur Ermittlung der Funktionen  $k_i = f(p_i)$  ( $i = s, a$ ) sind 46 zusätzliche Risse, bei denen die Geometrie gezielt variiert wurde, mit der BEM analysiert worden. Im folgenden werden die erhaltenen Formeln mit den notwendigen Fallunterscheidungen zusammengestellt.

**a) Keine Entlastungspunkte**

$$\begin{aligned} k_s &= 1 \\ k_a &= 1 \end{aligned} \tag{D.6}$$

**b) Nur Entlastungspunkte auf der längeren Seite (Index 1)**

Symmetrischer Anteil:

$$\begin{aligned} k_s &= 1 - \left( 1.646 + 0.142 \frac{b_1}{l_1} \right) \frac{\alpha_1}{\varphi_R} && \text{für } \frac{b_1}{l_1} > -11.6 \\ k_s &= 1 && \text{für } \frac{b_1}{l_1} \leq -11.6 \end{aligned} \tag{D.7}$$

Antimetrischer Anteil:

wenn  $\varphi_R > 128.5^\circ$ :

$$\begin{aligned} k_a &= 1 - (1.065 + 0.939 C) \frac{\alpha_1}{\varphi_R} + C \left( \frac{\alpha_1}{\varphi_R} \right)^2 && \text{für } \frac{\alpha_1}{\varphi_R} < 0.939 \\ \text{mit } C &= - \frac{19.35}{(l_1/l_2)^{0.921}} && \\ k_a &= 0 && \text{für } \frac{\alpha_1}{\varphi_R} \geq 0.939 \end{aligned} \tag{D.8}$$

wenn  $\varphi_R < 128.5^\circ$ :

$$\begin{aligned} k_a &= 1 - (1.271 + 0.792 C) \frac{\alpha_1}{\varphi_R} + C \left( \frac{\alpha_1}{\varphi_R} \right)^2 && \text{für } \frac{\alpha_1}{\varphi_R} < 0.792 \\ \text{mit } C &= - \frac{16.77}{(l_1/l_2)^{1.112}} && \\ k_a &= 0 && \text{für } \frac{\alpha_1}{\varphi_R} > 0.792 \end{aligned} \tag{D.9}$$

**c) Nur Entlastungspunkte auf der kürzeren Seite (Index 2)**

Symmetrischer Anteil:

$$\begin{aligned} k_s &= 1 - \left( 1.635 + 0.747 \frac{b_2}{l_2} \right) \frac{\alpha_2}{\varphi_R} && \text{für } \frac{b_2}{l_2} > -2.19 \\ k_s &= 1 && \text{für } \frac{b_2}{l_2} \leq -2.19 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Antimetrischer Anteil:

wenn  $\varphi_R > 128.5^\circ$ :

$$k_a = 1 - (1.466 + 0.682 C) \frac{\alpha_2}{\varphi_R} + C \left( \frac{\alpha_2}{\varphi_R} \right)^2 \quad \text{für } \frac{\alpha_2}{\varphi_R} < 0.682$$

mit  $C = \frac{29.59}{(l_1/l_2)^{0.760}}$  (D.11)

$$k_a = 0 \quad \text{für } \frac{\alpha_2}{\varphi_R} \geq 0.682$$

wenn  $\varphi_R < 128.5^\circ$ :

$$k_a = 1 - (1.656 + 0.604 C) \frac{\alpha_2}{\varphi_R} + C \left( \frac{\alpha_2}{\varphi_R} \right)^2 \quad \text{für } \frac{\alpha_2}{\varphi_R} < 0.604$$

mit  $C = \frac{32.41}{(l_1/l_2)^{0.813}}$  (D.12)

$$k_a = 0 \quad \text{für } \frac{\alpha_1}{\varphi_R} > 0.604$$

#### d) Entlastungspunkte auf beiden Seiten

Die Funktionen  $k_i$  werden zunächst nach den angegebenen Formeln für die längere Seite (Index +) und kürzere Seite (Index -) getrennt berechnet. Daraus ergeben sich die endgültigen Funktionen wie folgt:

Symmetrischer Anteil:

$$k_s = \left( -0.381 + 0.079 k_s^- + 1.477 [k_s^-]^2 \right) (1 - 0.149 k_s^+) \quad (D.13)$$

Antimetrischer Anteil:

$$k_a = 1 - (1 - k_a^-) \left( 0.4 + 0.121 k_a^+ - 0.055 [k_a^+]^2 \right) \quad \text{für } \varphi_R > 128.5^\circ$$

$$k_a = 1 - (1 - k_a^-) \left( -0.616 + 1.782 k_a^+ - 0.779 [k_a^+]^2 \right) \quad \text{für } \varphi_R < 128.5^\circ$$

(D.14)

Falls sich aus den Formeln für  $k_i$  Werte größer als Eins ergeben, werden diese Eins gesetzt, d.h. es gibt keine Verstärkung.