

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5958

**Theoretische und experimentelle
Untersuchungen zur zyklischen
Thermoviskoplastizität**

M. Kamlah, R. Kühner, Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Dezember 1997

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5958

**Theoretische und experimentelle Untersuchungen
zur zyklischen Thermoviskoplastizität**

M. Kamlah
R. Kühner
Ch. Tsakmakis
Institut für Materialforschung

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1997

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor
Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe
Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)
ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Viskoplastizitätsmodell nach Chaboche mit ausschließlich kinematischer Verfestigung untersucht. Hierbei wurden auch die Auswirkungen eines Temperaturgeschwindigkeitsterms in der kinematischen Verfestigung betrachtet. Am Werkstoff AISI 316L(N) wurden isotherme Versuche zur Bestimmung der Parameter des Modells sowie nichtisotherme Versuche zur Beurteilung der Möglichkeiten des Modells durchgeführt. Die Versuche haben gezeigt, daß sowohl der E - Modul als auch die Fließgrenze mit steigender Temperatur abnehmen. Der Werkstoff zeigt bei monotoner und bei zyklischer Belastung nennenswerte Verfestigung. Der Betrag der Spannungsrelaxation und somit die Viskosität des Werkstoffs bzw. die sich aufbauende Überspannung nimmt mit steigender Temperatur ab. Es zeigte sich, daß der Werkstoff eine der thermischen Zyklisierung vorangehende Verformung mit zunehmender Lastspielzahl „vergißt“. Die Gegenüberstellung von Versuch und Rechnung macht deutlich, daß die Modellantwort des verwendeten Viskoplastizitätsmodells als gute Näherung einzustufen ist. Dies gilt insbesondere während des ersten Lastwechsels. Zu höheren Lastspielzahlen hin wird die Differenz zwischen Versuch und Rechnung größer, da das Modell nicht in der Lage ist, die bei AISI 316L(N) auftretende zyklische Verfestigung nachzuvollziehen. In Bereichen, in denen der Betrag der Spannung und die Temperatur gleichzeitig zunehmen, kann es aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze zu Unterschieden zwischen Versuch und Rechnung kommen.

Theoretical and experimental investigations of cyclic thermoviscoplasticity

The aim of the present paper is to investigate viscoplasticity laws of Chaboche type exhibiting pure kinematic hardening. The evolution-equations describing kinematic hardening include a term which is dependent on the temperature rate. The investigations are performed with reference to the stainless steel AISI 316L(N). The material parameters appearing in the constitutive equations are determined on the basis of isothermal experiments while responses predicted by the model are calculated for non-isothermal deformation processes in order to check the capabilities of the model. Experimental results indicate that both young's modulus and yield stresses decrease with increasing temperature. Also, for monotonic loading as well as for cyclic loading conditions essential hardening effects in the stress-strain plots were observed. Relaxation effects and thus the value of the corresponding overstress decrease with increasing temperature. After temperature controlled cyclic loading conditions the material response shows fading memory properties with respect to past deformation histories. Calculated responses compared with corresponding experimental findings demonstrate the good performance of the constitutive model in describing the material behaviour during the first cycle of the loading history. However, with increasing number of cycles there are differences between experimental results and calculated model predictions. The reason for this behaviour follows from the fact that no cyclic hardening effects are incorporated in the constitutive model. Some kind of deviations are observed as well for cases where the absolute value of the stress and the value of the temperature are increasing at the same time.

Inhaltsverzeichnis

<u>1. Einleitung</u>	3
<u>2. Theoretische Grundlagen eines Viskoplastizitätsmodells</u>	4
<u>2.1 Allgemeine Bemerkungen</u>	4
<u>2.2 Modellaufbau in eindimensionaler Darstellung</u>	8
<u>2.3 Reduziertes Modell</u>	12
<u>3. Experimentelle Grundlagen</u>	14
<u>3.1 Werkstoffbeschreibung</u>	14
<u>3.2 Versuchsaufbau und Probengeometrie</u>	15
<u>3.3 Versuchsdurchführung und Auswertung</u>	18
<u>4. Ergebnisse aus Versuch und Rechnung</u>	24
<u>4.1 Bestimmung der Parameter</u>	24
<u>4.2 Versuchsbeschreibung</u>	29
<u>4.3 Gegenüberstellung von Versuch und Rechnung</u>	41

<u>5. Zusammenfassung</u>	50
----------------------------------	----

<u>6. Literaturverzeichnis</u>	51
---------------------------------------	----

1. Einleitung

In vielen Bereichen der Technik werden Bauteile, die starken thermomechanischen Belastungen ausgesetzt sind, aus Stahl hergestellt. Bei solch komplexen Lastfällen ist es schwierig, Aussagen über das Verhalten des verwendeten Werkstoffs zu machen. Dies ist jedoch in vielen Fällen aus Gründen der Sicherheit unbedingt erforderlich.

Zur Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens unter thermomechanischer Belastung des austenitischen Stahls AISI 316L, der z.B. im Kraftwerksbau Verwendung findet, bietet sich das „Chaboche- Modell“ an.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in einen theoretischen und einen experimentellen Teil. Der theoretische Teil beschäftigt sich mit Testrechnungen am Großrechner, die auf dem oben erwähnten Chaboche- Modell basieren. Hierbei wird insbesondere der Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter und die Abhängigkeit der Modellantwort von der Temperaturgeschichte betrachtet. Ein weiteres Ziel ist, die Wirksamkeit einiger Terme des Modells aufzuzeigen. Der experimentelle Teil dient der Ermittlung der thermomechanischen Eigenschaften von AISI 316L.

Im Vergleich von Experiment und Modell wird versucht, Materialparameter des Modells zu bestimmen und die Möglichkeiten des Modells mit Hilfe der Versuchsergebnisse abzuschätzen.

2. Theoretische Grundlagen eines Viskoplastizitätsmodells

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Ein Viskoplastizitätsmodell ist gegeben, wenn ein System von Materialgleichungen 1.) für eine bestimmte Lastgeschichte eine Modellantwort liefert, die von der vergangenen Lastgeschichte und insbesondere von deren Geschwindigkeit abhängt, und 2.) Hysteresen in dieser Modellantwort auch bei „unendlich“ langsamer Prozeßführung nicht verschwinden [1].

Wird wie in der vorliegenden Arbeit z.B. die Dehnungsgeschichte vorgegeben, so bedeutet die Geschwindigkeitsabhängigkeit, daß der Spannungswert im betrachteten Dehnungszustand je nach der bis zu diesem Dehnungswert wirksamen Belastungsgeschwindigkeit variiert. In Bild 2.1 sind Spannungs- Dehnungs- Kurven für verschiedene Dehnraten dargestellt. Es wird deutlich, daß ab dem Überschreiten der Fließgrenze die Spannung, die bei einem bestimmten Dehnungswert erreicht wird, mit der Belastungsgeschwindigkeit zunimmt. Für sehr große Belastungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}$ gehen die Spannungs- Dehnungskurven in die elastische Gerade mit dem Elastizitätsmodul E über.

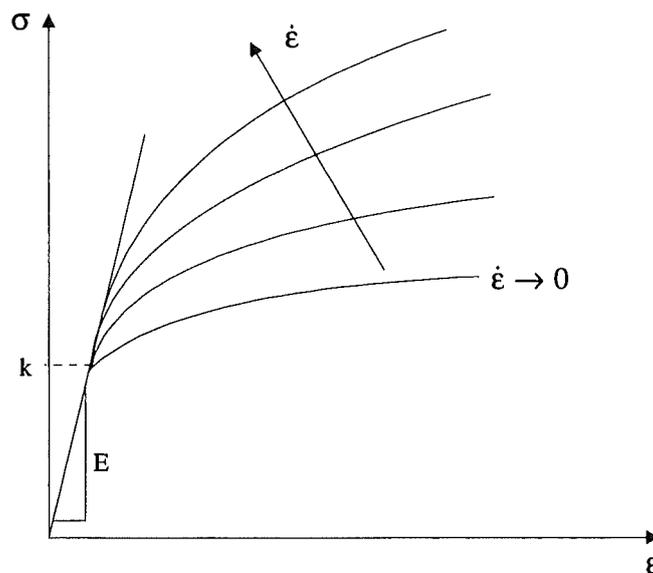


Bild 2.1: Zur Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannungs- Dehnungskurve

Es ergibt sich eine Schar von $\sigma - \epsilon -$ Kurven mit $\dot{\epsilon}$ als Scharparameter [3].

In Bild 2.2 wird schematisch der Spannungs- Dehnungsverlauf für ein Zug/Druck- Experiment gezeigt, bei dem die Fließgrenze k überschritten wird. Es ist eine Zustandstrajektorie Z und die zugehörige Gleichgewichtstrajektorie G dargestellt. Eine Zustandstrajektorie ist die Bahn bzw. Kurve, die die Materialantwort während einer Belastung mit nennenswerter Lastgeschwindigkeit beschreibt. Bei unendlich langsamer Belastungsgeschwindigkeit geht die Zustandstrajektorie in die Gleichgewichtstrajektorie über. Hält man in einem Punkt der Zustandstrajektorie die Belastungsgeschichte lange genug an, so fällt die Materialantwort, auf die Gleichgewichtstrajektorie ab. Dieses Verhalten ist auf Relaxationsprozesse zurückzuführen. Der Zustand des betrachteten Systems nähert sich bei unendlich langer Relaxationsdauer einem bestimmten Grenzzustand, der als relaxierter- oder Gleichgewichtszustand bezeichnet wird. Die Spannungsantwort ist hier also keine Funktion der Dehnung sondern ein Funktional der vergangenen Belastungsgeschichte. Dieses Funktional ist als System von Evolutionsgleichungen (gewöhnliche Differentialgleichungen) für eine Anzahl von Zustandsvariablen festgelegt. Der momentane Zustand dieses Systems ist bei Kenntnis der momentanen Werte sämtlicher Zustandsvariablen bekannt [1, 2, 7].

Die Spannungs Differenz zwischen Zustandstrajektorie und Gleichgewichtstrajektorie wird auch als Überspannung σ_u bezeichnet. Die Größe dieser Überspannung bei gegebener Dehnung und Dehnungsgeschwindigkeit ist charakteristisch für die Viskosität η die dem System zugrunde liegt. Diese Überspannung entsteht, wenn die Mechanismen, die plastische Verformung z.B. bei Metallen ermöglichen, zu träge sind um der anliegenden Verformungsgeschwindigkeit sofort zu folgen. Bei konstant gehaltener Gesamtdehnung fällt σ_u gegen Null, und die inelastische Dehnung $\epsilon_i^{(Z)}$ wächst um $\frac{\sigma_u}{E}$ auf $\epsilon_i^{(G)}$ an. Die erzwungene Gesamtverformung enthält zunächst einen elastischen Anteil $\frac{\sigma_u}{E}$. Bei festgehaltener Gesamtdehnung wird diese elastische Dehnung in plastische Dehnung „umgewandelt“, bis die Überspannung abgebaut ist. Dieser Prozeß wird wie oben angesprochen als Relaxation bezeichnet.

Wird in einem Punkt der Zustandstrajektorie mit endlicher Dehnrates $\dot{\epsilon}$ entlastet, so ergibt sich der gestrichelt eingezeichnete Kurvenverlauf. Die Steigung der Spannungs- Dehnungskurve bis zum Erreichen der Gleichgewichtstrajektorie G ist größer als die Steigung der elastischen Geraden, da sich hier die oben beschriebenen Relaxationsprozesse der Lastumkehr überlagern. Ab Erreichen der Gleichgewichtstrajektorie tritt keine Relaxation mehr auf und die Steigung der $\sigma - \epsilon -$ Kurve entspricht der Steigung der elastischen Geraden.

Beim Entlasten in einem Punkt der Zustandstrajektorie mit „unendlich großer“ Lastgeschwindigkeit ergibt sich der strichpunktiert dargestellte Kurvenverlauf. Hier haben die Relaxationsprozesse keine Zeit um sich auszuwirken.

Abschnittsweise lineare Funktion der Temperatur gebildet wird. Zur Integration von Differentialgleichungssystemen erster Ordnung wurde das numerische Integrationsverfahren von Runge-Kutta gewählt [17, 18].

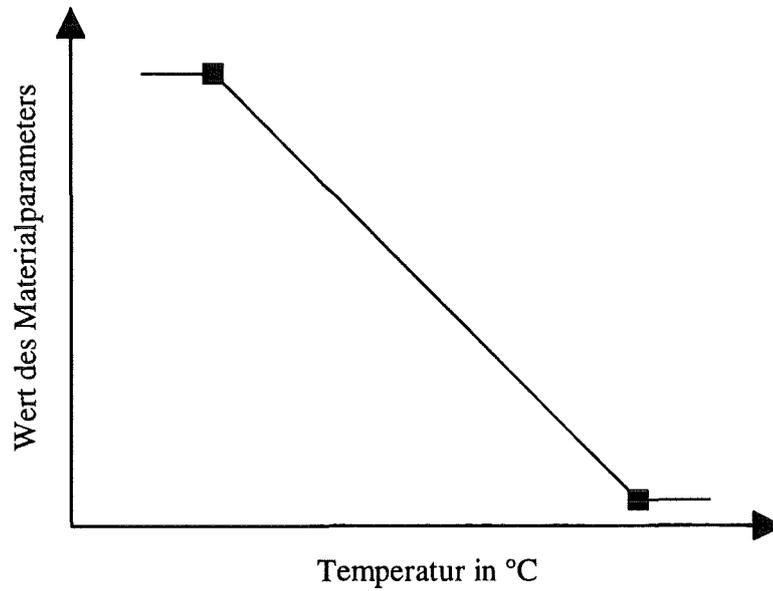


Bild 2.3: Zur Temperaturabhängigkeit der Materialparameter.

2.2 Modellaufbau in eindimensionaler Darstellung

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Viskoplastizitätsmodell wurde für Dehnungs- und Temperatursteuerung angewandt. Die eindimensionale Darstellung wurde gewählt, da hier nur der einachsige Spannungszustand, wie er für Zug / Druck- Proben angenommen wird, betrachtet werden soll.

Die Dehnung ε setzt sich additiv aus der inelastischen Dehnung ε_i , der elastischen Dehnung ε_e und der thermischen Dehnung ε_{th} zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e + \varepsilon_{th} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_i + \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_{th}.$$

Hierbei ergibt sich die Spannungsantwort auf die elastische Dehnung aus dem Hook'schen Gesetz

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad \Rightarrow \quad \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon}_e E + \overset{\circ}{E} \varepsilon_e \dot{\theta}$$

mit dem Elastizitätsmodul E . Hier und im folgenden bedeutet ein $\overset{\circ}{}$ über einem temperaturabhängigen Materialparameter $M_{(\theta)}$ die Ableitung nach der Temperatur $\frac{dM}{d\theta}$.

Für die thermische Dehnung, bzw. Dehnrate wird

$$\varepsilon_{th} = \alpha(\theta - \theta_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{th} = \left[\overset{\circ}{\alpha}(\theta - \theta_0) + \alpha \right] \dot{\theta}$$

definiert. Es ist zu erkennen, daß $\dot{\varepsilon}_{th}$ vom Ausdehnungskoeffizienten α von dessen Temperaturableitung $\overset{\circ}{\alpha}$ sowie von der Temperaturänderung $\theta - \theta_0$ und der Zeitableitung der Temperatur $\dot{\theta}$ abhängt ($\theta_0 =$ Anfangstemperatur).

Innerhalb des Modells wird anhand einer Fallunterscheidung überprüft, ob rein elastische, oder ob auch inelastische Dehnungsänderung vorliegt.

Der elastische Bereich wird durch die Bedingung

$$\left| \sigma - \frac{3}{2} \xi \right| \leq k \quad (*)$$

abgegrenzt. Die kinematische Verfestigung ξ multipliziert mit $\frac{3}{2}$ markiert, wie in Bild 2.1 dargestellt, die Bewegung des Mittelpunktes des elastischen Bereiches und die isotrope Verfestigung k dessen halben Durchmesser.

Erfüllt σ die Bedingung (*), so liegt rein thermoelastische Dehnungsänderung vor. Die inelastische Dehnungsänderung ist $\dot{\epsilon}_i = 0$.

Wenn

$$\left| \sigma - \frac{3}{2} \xi \right| > k$$

gilt, so beträgt die inelastische Dehnungsänderung

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sigma - \frac{3}{2} \xi}{\left| \sigma - \frac{3}{2} \xi \right|} \dot{s}.$$

Ihre Richtung ist identisch mit der Richtung von

$$\sigma - \frac{3}{2} \xi,$$

während der Betrag

$$|\dot{\epsilon}_i| = \dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\left(\left| \sigma - \frac{3}{2} \xi \right| - k \right)^m}{\eta}$$

durch die Ableitung der akkumulierten inelastische Dehnung s nach der Zeit charakterisiert ist.

Der Materialparameter η wird als Viskosität bezeichnet und hat maßgeblichen Einfluß auf die sich bei gegebener Dehnungsgeschwindigkeit einstellende Überspannung. Großes η be-

wirkt große Überspannung und somit große Viskosität. Für kleine η nähert sich die Spannungs- Dehnungskurve der Gleichgewichtskurve.

Der Verlauf der isotropen Verfestigung k wird durch die Evolutionsgleichung

$$\dot{k} = k' \dot{s} + \overset{\circ}{k} \dot{\theta} - \gamma_k |k - k_0 - q_k|^{m_k} \frac{k - k_0 - q_k}{|k - k_0 - q_k|}$$

bestimmt, wobei k' und $\overset{\circ}{k}$ durch

$$k' = \frac{\partial k}{\partial s} = \beta(\gamma - k)$$

und

$$\overset{\circ}{k} = \frac{\partial k}{\partial \theta} = \overset{\circ}{k}_0 + \overset{\circ}{k}_1$$

definiert sind.

Der statischer Recoverytherm $\gamma_k |k - k_0 - q_k|^{m_k} \frac{k - k_0 - q_k}{|k - k_0 - q_k|}$ unterliegt keiner Unterscheidung in elastische und inelastische Belastungsfälle. Er kann auch noch bei $\dot{\epsilon} = 0$ und $\dot{\theta} = 0$ wirksam sein.

Für $\overset{\circ}{k}_1$ wurden die drei Ansätze

$$\text{A: } \overset{\circ}{k}_1 = \frac{\overset{\circ}{\gamma} - \overset{\circ}{k}_0}{\gamma - k_0} (k - k_0) + s(\gamma - k)\overset{\circ}{\beta}$$

$$\text{B: } \overset{\circ}{k}_1 = \left(\frac{\overset{\circ}{\beta}}{\beta} + \frac{\overset{\circ}{\gamma} - \overset{\circ}{k}_0}{\gamma - k_0} \right) (k - k_0)$$

$$\text{C: } \overset{\circ}{k}_1 = \left(\frac{\overset{\circ}{\beta}}{\beta} + \frac{\overset{\circ}{\gamma}}{\gamma} \right) (k - k_0)$$

implementiert, wobei B und C dem bei [10] verwendeten Ansatz entsprechen.

Um die kinematische Verfestigung einzubringen wurde als Evolutionsgleichung die Differentialgleichung

$$\dot{\xi} = c \dot{\epsilon}_i - b |\dot{\epsilon}_i| \xi - q_x \left(\frac{3}{2} |\dot{\xi}| \right)^{m_x - 1} \xi + \frac{c}{c} \xi \dot{\theta}$$

eingeführt. Der Term $c \dot{\epsilon}_i - b |\dot{\epsilon}_i| \xi$ entstammt der Armstrong- Frederick- Gleichung wobei $c \dot{\epsilon}_i$ als erzeugender Term und $b |\dot{\epsilon}_i| \xi$ als begrenzender Term zu verstehen ist [2, 5, 19]. Der Ausdruck $q_x \left(\frac{3}{2} |\dot{\xi}| \right)^{m_x - 1} \xi$ stellt den statischen Recoveryanteil der kinematischen Verfestigung dar.

Durch theoretische Herleitung aus der Clausius- Duham- Ungleichung (zweiter Hauptsatz)

ergibt sich der Beitrag $\frac{c}{c} \xi \dot{\theta}$, zur Entwicklung von ξ [9]. Dieser Term liefert für $\dot{\theta} \neq 0$ einen Anteil zur kinematischen Verfestigung, sobald die Verformung einmal in den inelastischen Bereich vorgedrungen, und somit $\xi \neq 0$ ist. Dieser Anteil ist auch dann noch von Null verschieden wenn sich die Verformung wieder im elastischen Bereich abspielt [4, 6, 13, 14].

2.3 Reduziertes Modell

Da oben dargestelltes Modell für Parameterstudien im Rahmen dieser Arbeit zu umfangreich ist, wurde eine Beschränkung auf folgendes Modell vorgenommen, in dem nur der Elastizitätsmodul $E_{(\theta)}$, die Fließgrenze $k_{0(\theta)}$, die Parameter $b_{(\theta)}$, $c_{(\theta)}$, der Temperaturexpansionskoeffizient $\alpha_{(\theta)}$ und die Viskosität $\eta_{(\theta)}$ als temperaturabhängige Parameter vorhanden sind. Der Parameter m wurde konstant $m = 1$ gesetzt.

Für die Entwicklung der isotropen und der kinematischen Verfestigung werden hier nur die Terme

$$\dot{k} = \overset{\circ}{k}_0 \dot{\theta}$$

$$\dot{\xi} = c \dot{\epsilon}_i - b |\dot{\epsilon}_i| \xi + \frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$$

berücksichtigt.

Hieraus ergibt sich für isotherme Versuchsführung ($\dot{\theta} = 0$), daß

$$\dot{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \text{konst.}$$

und

$$|\xi| \leq \frac{c}{b}.$$

Das heißt, daß sich der Verlauf von ξ , wie in Bild 2.4 dargestellt, für $|\epsilon_i| \rightarrow \infty$ an den Grenzwert $\xi_{\infty} = \frac{c}{b}$ annähert. Die kinematische Verfestigung kann also in diesem Fall nicht beliebig groß werden.

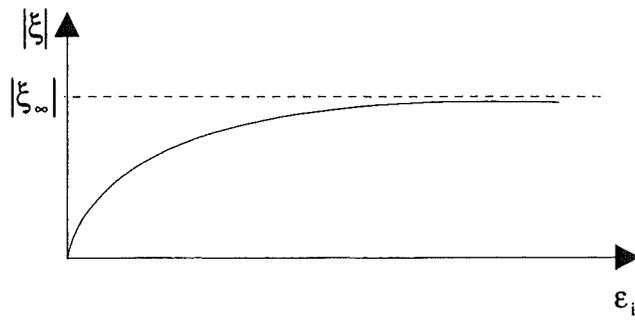


Bild 2.4: Grenzwert der kinematischen Verfestigung.

Das restliche Modell ist identisch mit dem in Kapitel 2.2 dargestellten Modell.

3. Experimentelle Grundlagen

3.1 Werkstoffbeschreibung

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Versuche wurde der Werkstoff AISI 316L verwendet. Hierbei handelt es sich um einen austenitischen Stahl mit folgenden Anteilen an Legierungselementen: '0.03 C, 17 Cr, 12.5 Ni, 2.5 Mo, 1.8 Mn, 0.25 Co, 0.5 Si, 0.03 P, 0.01 V, <0.01 Ti, <0.001 S' [12].

Die folgende Tabelle stellt die bei [12] angegebenen Werte für E , $R_{p0,2}$ und α des Werkstoffs AISI 316L dar.

Parameter	Literaturdaten
$E_{(\theta=200^{\circ}\text{C})}$	178000 [N/mm ²]
$E_{(\theta=400^{\circ}\text{C})}$	161000 [N/mm ²]
$R_{p0,2(\theta=200^{\circ}\text{C})}$	152 [N/mm ²]
$R_{p0,2(\theta=400^{\circ}\text{C})}$	121 [N/mm ²]
$\alpha_{(\theta=200^{\circ}\text{C})}$	17.1E-6 [1/K]
$\alpha_{(\theta=400^{\circ}\text{C})}$	17.8E-6 [1/K]

Tabelle 3.1: Materialparameter.

Die im Rahmen der Experimente erhaltenen Werte für oben angesprochene Parameter liegen auf vergleichbarem Niveau.

3.2 Versuchsaufbau und Probengeometrie

Die Versuche wurden mit einer elektromechanischen Prüfmaschine der Bauart INSTRON 8062 kombiniert mit einer Temperaturzyklereinheit des Herstellers Schuntermann & Bennighoven durchgeführt. Der schematische Versuchsaufbau ist in Bild 3.1 dargestellt.

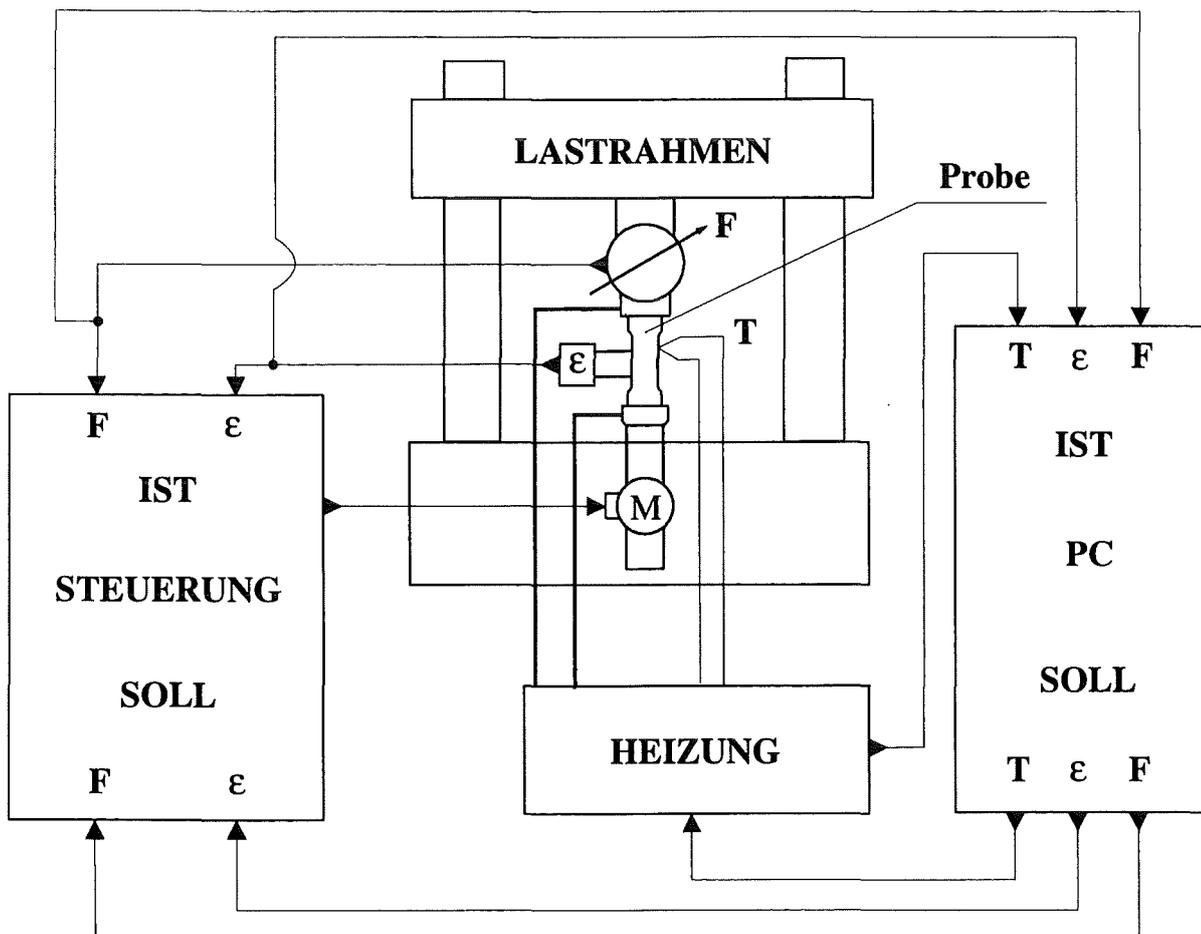


Bild 3.1: Versuchsaufbau (schematisch).

Die INSTRON Prüfmaschine ist mit einer Doli-Steuerungselektronik ausgestattet, die es unter anderem ermöglicht, innerhalb eines Prüfprogrammes die Regelart der Maschine (Kraft- und Wegregelung) beliebig zu wechseln. Diese Steuerungselektronik wird mit Hilfe eines 386er PCs angesprochen, welcher gleichzeitig die Versuchsdaten auf Festplatte protokolliert. Um die Einflüsse der Probenfassungen und der Maschinensteifigkeit auszuschalten, werden die

Probenverformungen unmittelbar an der Probe gemessen. Dies geschieht mit Hilfe eines kapazitiven Dehnungsaufnehmers, der unter Verwendung von vier Federn an die Probe geklemmt wird. Die Geometrie der in den Versuchen verwendeten Proben geht aus Bild 3.2 hervor.

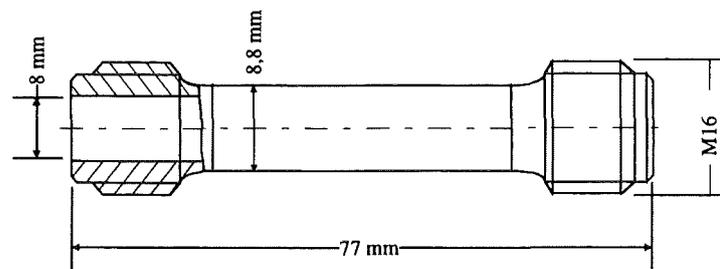


Bild 3.2: Probengeometrie.

Zur Beheizung wird elektrischer Strom über die Fassungen durch die Probe geleitet. Insbesondere die Meßstrecke der Probe besitzt aufgrund ihres im Vergleich zu den übrigen Leitern relativ kleinen Querschnittes einen großen Ohm'schen Widerstand, was zur Abgabe von Wärmeleistung führt. Zur Messung und Regelung der Temperatur dient ein Thermoelement, das außerhalb der Meßstrecke auf die Probe geschweißt wird [16].

Vor Beginn der Versuchsserie wird die Temperatur in der Meßstrecke gegen die Temperatur am Meßpunkt kalibriert, so daß in der Meßstrecke die Solltemperatur $\pm 2^\circ\text{C}$ eingehalten werden kann. Hierbei wurde der in Bild 3.3 dargestellte Zusammenhang zwischen der im Steuerprogramm vorgegebenen Temperatur und der in der Probenmitte tatsächlich erreichten Temperatur für $\dot{\theta} = 2 [\text{K} / \text{s}]$ ermittelt. Danach kann neben der Längenänderung oder der Kraft auch die Temperatur der Probe als Funktion der Zeit vorgegeben werden.

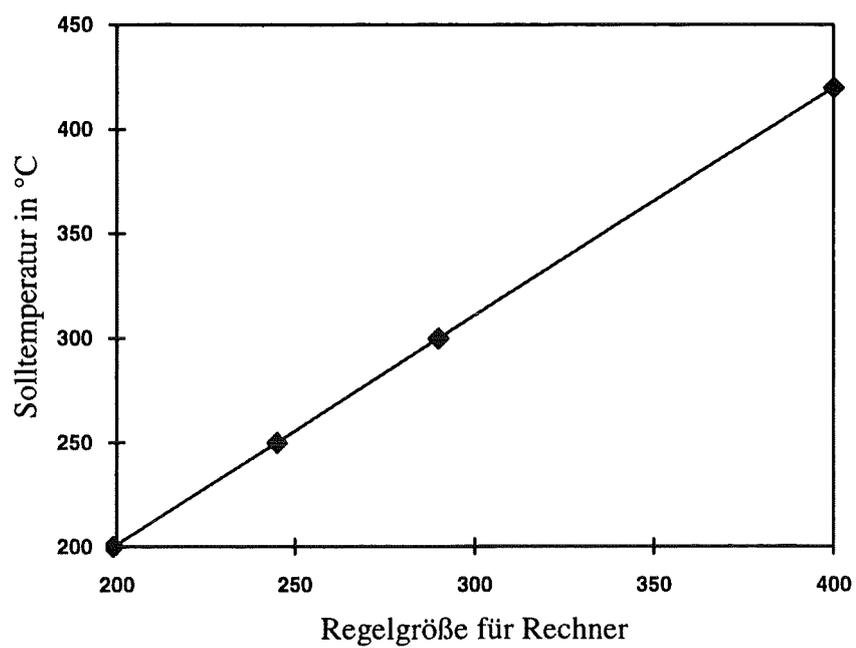


Bild 3.3: Zur Kalibrierung der Temperatursteuerung

3.3 Versuchsdurchführung und Auswertung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden isotherm dehnungsgesteuerte Wechselverformungsversuche bei den Temperaturen $T = 200^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$, isotherm dehnungsgesteuerte Zugversuche mit Haltezeiten bei $T = 23^{\circ}\text{C}$, $T = 200^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$ sowie nicht isotherme dehnungs- und temperaturgesteuerte Wechselverformungsversuche bei $T = 200^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$ durchgeführt. Es wurden bewußt keine Temperaturen größer als 400°C gewählt, um thermisches Kriechen sicher auszuschließen, das für Temperaturen $< 500^{\circ}\text{C}$ vernachlässigbar ist [12].

Während der Versuchsdurchführung wurde immer derselbe Ablauf eingehalten. Zunächst erfolgte der Probeneinbau und gegebenenfalls im Anschluß daran das kraftkontrollierte, kraftfreie Aufheizen. Die Aufheizzeit betrug 100 Sekunden pro 200°C . Im Anschluß an das Aufheizen erfolgte eine Haltezeit von zwei Stunden bei Kraft 0.0 N, um einen stationären thermischen Zustand des Systems zu erreichen [15]. Die dehnungskontrollierte Wechselbeanspruchung wurde dann mit einem dreieckförmigen Dehnungs- Zeit- Verlauf und der Dehnrate $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ durchgeführt.

Zur Auswertung der Versuchsergebnisse wurden Fortranprogramme geschrieben, die von der Doli- Software gelieferten Daten in ein zur Darstellung geeignetes Format bringen.

Zur Bestimmung der Materialparameter sowie um die Möglichkeiten und Grenzen des oben dargestellten Viskoplastizitätsmodells zu erkunden, wurden unterschiedliche Versuchsführungen realisiert.

Die isotherme **Versuchsführung A** ist in Bild 3.4 dargestellt. Es werden dehnungsgesteuerte, durch Haltezeiten unterbrochene, Zugversuche gemacht. Das Ziel dieser Versuchsführung ist die Bestimmung einer Zustandstrajektorie und der zugehörigen Gleichgewichtstrajektorie bei verschiedenen Temperaturen. Mit diesen Ergebnissen können dann durch Parameterstudien am Computer die Parameter $b_{(\theta)}$ und $c_{(\theta)}$ der kinematischen Verfestigung ξ , die Fließgrenze $k = k_{0(\theta)}$, der E-Modul $E_{(\theta)}$ und die Viskosität $\eta_{(\theta)}$ des Viskoplastizitätsmodells bestimmt werden.

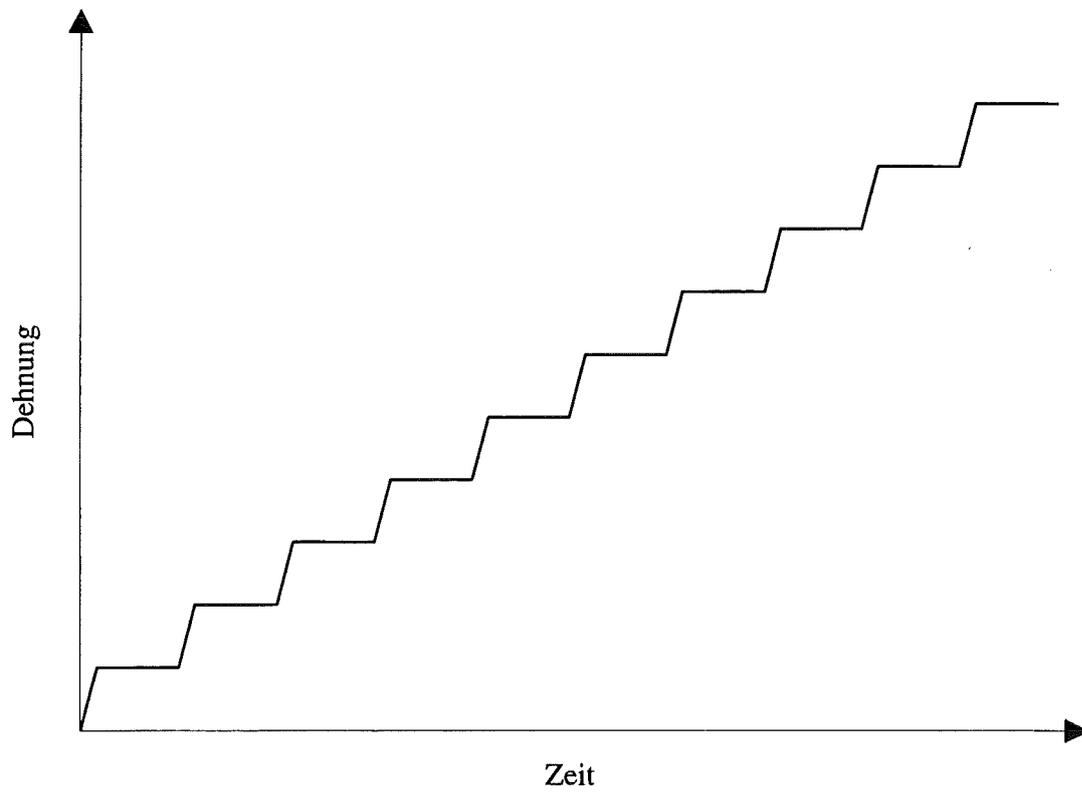


Bild 3.4: Dehnungsgeschichte (qualitativ) der isothermen Versuchsart A.

Bei der isothermen **Versuchsart B** handelt es sich wie in Bild 3.5 dargestellt um eine mittel-dehnungsfreie Zyklierung der Dehnung. Diese wird zu Versuchsbeginn sowie nach bestimmten Zyklenzahlen im weiteren Versuchsverlauf durch Haltezeiten unterbrochen. Die Haltezeiten werden immer nach erhöhen der Dehnung auf die halbe und auf die maximalen Dehnung eingelegt.

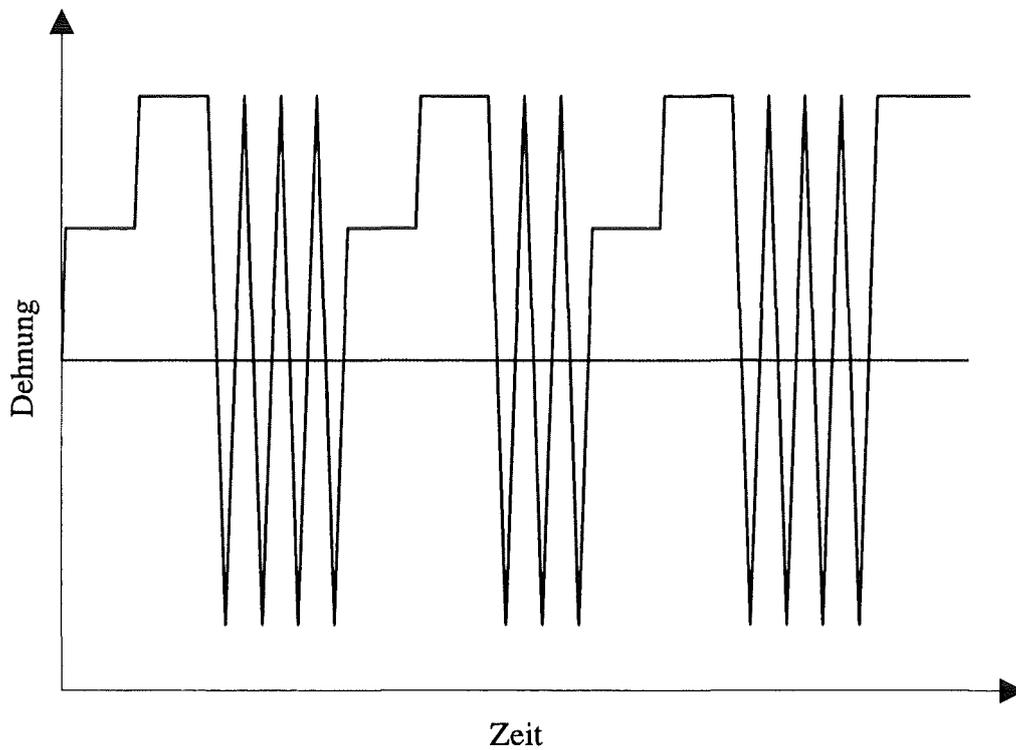


Bild 3.5: Dehnungsgeschichte (qualitativ) der isothermen Versuchsart B.

Bei **Versuchsführung C** wird wie in Bild 3.6 dargestellt, ein bestimmter Dehnungswert angesteuert und im weiteren Verlauf konstant gehalten.

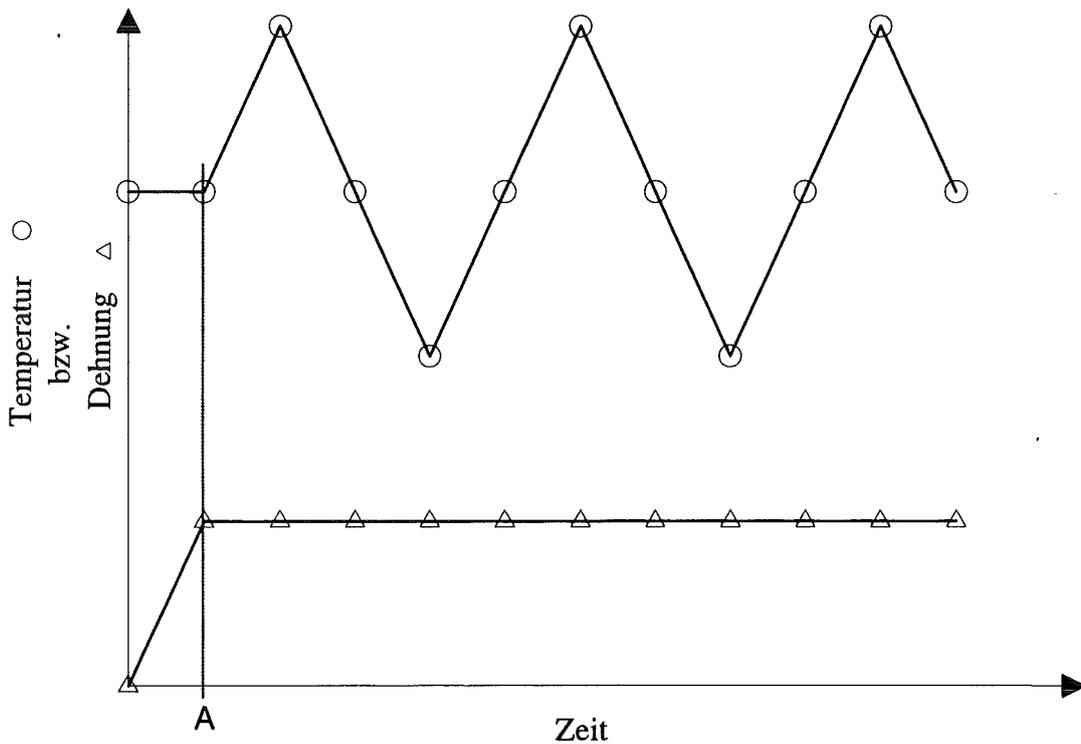


Bild 3.6: Temperatur- bzw. Dehnungsgeschichte (qualitativ) der Versuchsart C.

Der Dehnungswert wird so gewählt, daß gerade inelastische Dehnung auftritt. Bei Erreichen des angestrebten Dehnungswertes wird das Zyklieren der Temperatur begonnen. Mit dieser Versuchsführung soll im Vergleich mit entsprechenden Modellrechnungen die Auswirkung des in Abschnitt 2.2 dargestellten Terms $\frac{\sigma}{c} \xi \dot{\theta}$ auf die Spannungsantwort „beleuchtet“ werden. Vor Versuchsbeginn wird die Probe in Kraftregelung kraftfrei auf die Mitteltemperatur aufgeheizt.

Diese kraftfreie Aufheizung auf eine Mitteltemperatur vor Versuchsbeginn erfolgt auch bei **Versuchsart D**, die in Bild 3.7 dargestellt ist.

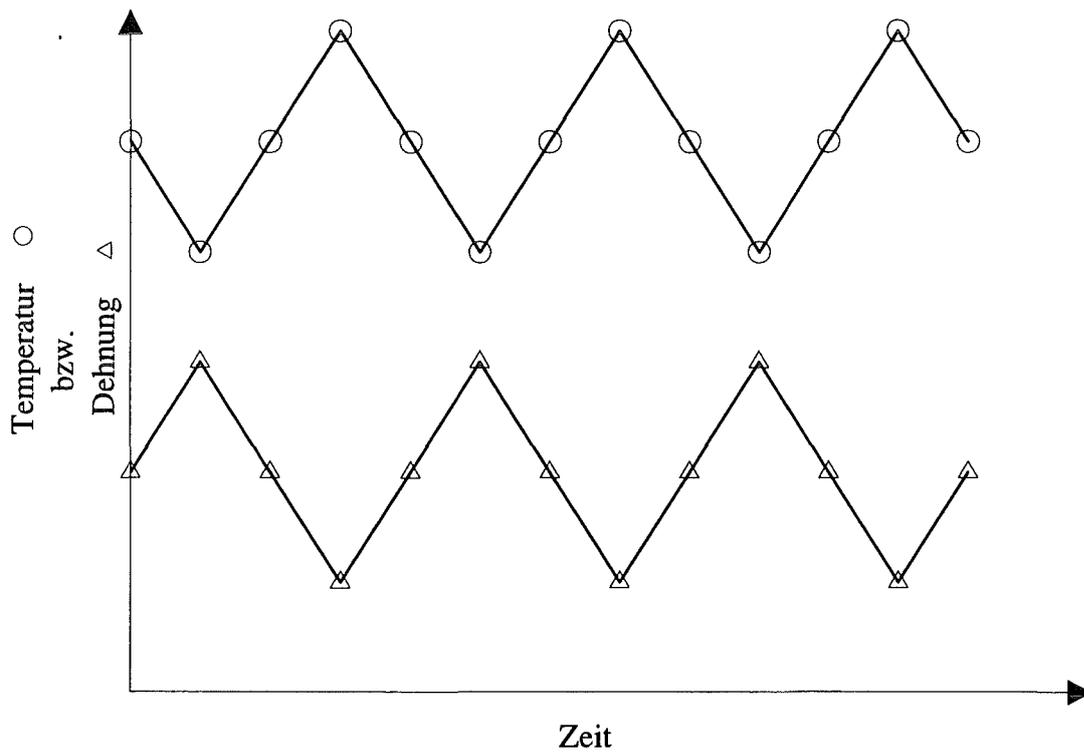


Bild 3.7: Temperatur- bzw. Dehnungsgeschichte (qualitativ) der Versuchsart D.

Hier wird die Temperatur und die Dehnung in Phase zyklert [20] wobei die Versuchsführung immer mitteldehnungsfrei erfolgt.

Bei **Versuchsart E**, die in Bild 3.8 dargestellt ist, wird die Dehnung mitteldehnungsfrei zyklisiert. Die Temperatur wird zur Dehnung in Gegenphase zyklisiert, wobei vor Versuchsbeginn kraftfrei auf die jeweilige Mitteltemperatur aufgeheizt wurde. Der Temperatur- und der Dehnungszyklisierung liegt dieselbe Zyklendauer zu Grunde.

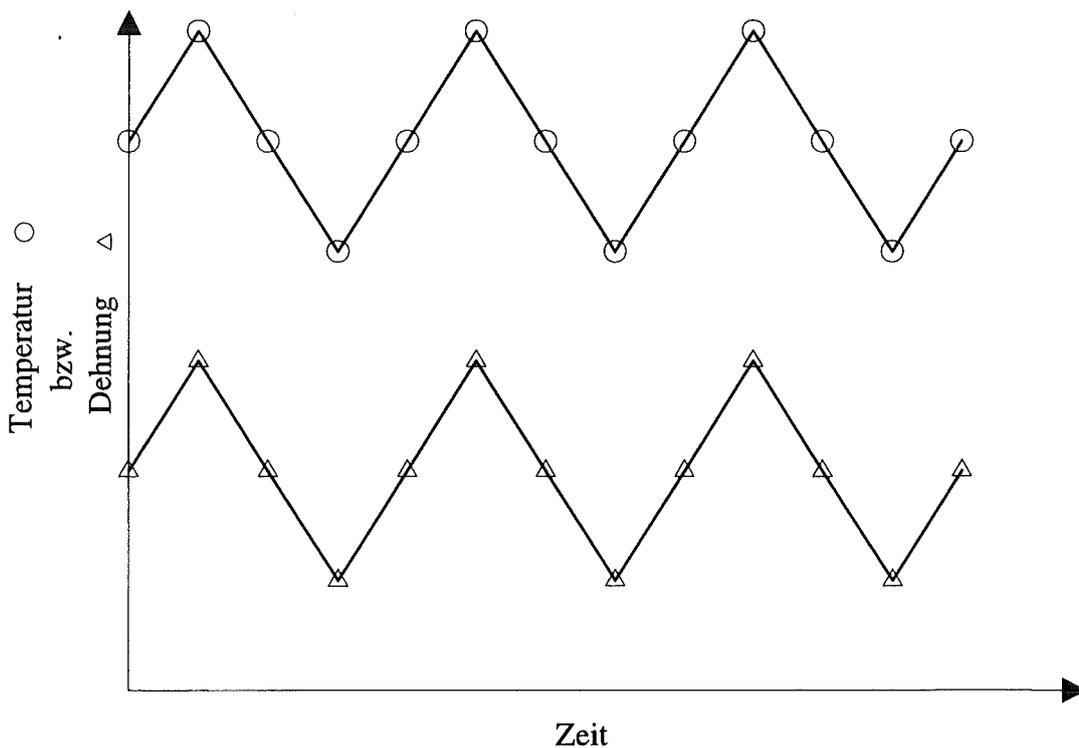


Bild 3.8: Temperatur- bzw. Dehnungsgeschichte (qualitativ) der Versuchsart E.

Die Versuchsarten D und E dienen dem Abschätzen der Möglichkeiten des in Kapitel 2.2 und 2.3 dargestellten Viskoplastizitätsmodells.

4. Ergebnisse aus Versuch und Rechnung

4.1 Bestimmung der Parameter

In Bild 4.1 sind Spannungs- Dehnungskurven nach Versuchsart A für Versuche bei den Temperaturen $T=25^{\circ}\text{C}$, $T=200^{\circ}\text{C}$ und $T=400^{\circ}\text{C}$ dargestellt. Der Betrag der Gesamtdehnung beträgt $|\epsilon| = 2\%$. Die Haltezeiten betragen bei allen drei Versuchen $t_h = 2000$ Sekunden.

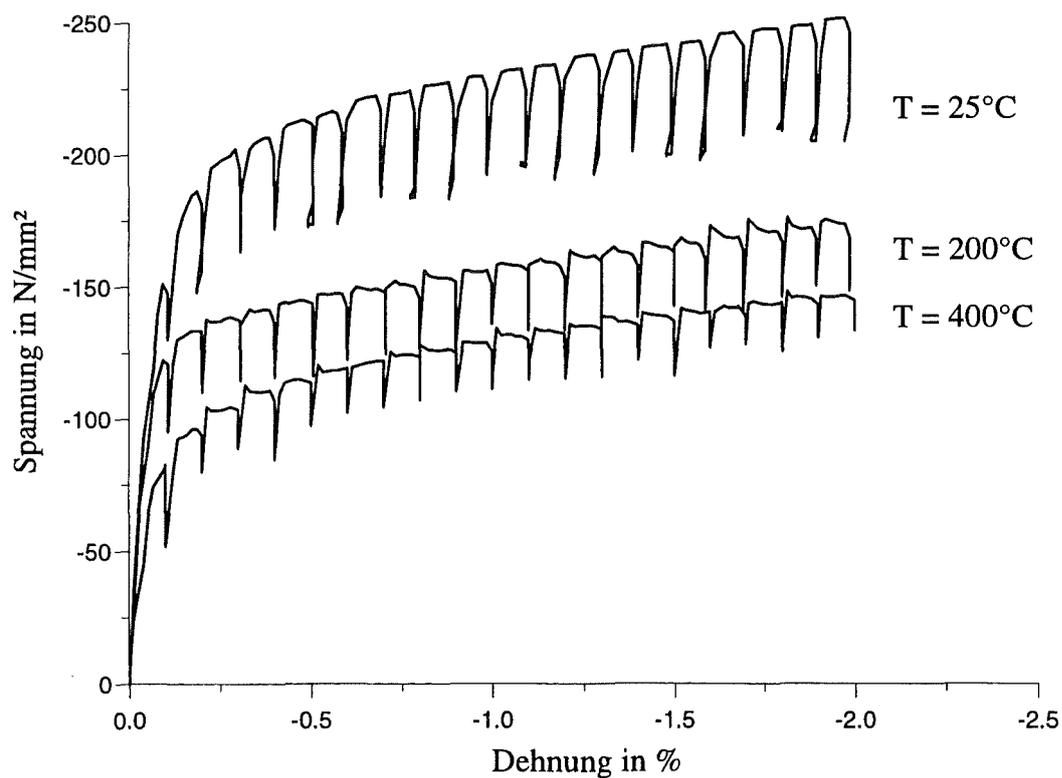


Bild 4.1: Spannungs- Dehnungskurven nach Versuchsart A.

Aus der Darstellung geht hervor, daß der Versuch bei $T = 25^\circ\text{C}$ die größte Fließgrenze zeigt. Die kleinste Fließgrenze besitzt der Versuch, der bei der höchsten Temperatur von $T = 400^\circ\text{C}$ durchgeführt wurde, während die Spannungs- Dehnungskurve des bei $T = 200^\circ\text{C}$ durchgeführten Experiments zwischen den beiden zuvor genannten liegt. Alle drei Versuche zeigen bis zum Versuchsende nennenswerte Verfestigung.

Es wird weiterhin deutlich, daß der Betrag der Relaxation mit steigender Temperatur abnimmt. Das bedeutet, daß die Viskosität des betrachteten Materials und damit die sich aufbauende Überspannung mit zunehmender Temperatur abnimmt.

Bild 4.2 zeigt die Spannungs- Dehnungskurve nach Versuchsart A für $T = 200^\circ\text{C}$, sowie die durch Modellrechnungen an den Versuchsverlauf angepaßte Zustandstrajektorie Z und die zugehörige ebenfalls durch Modellrechnungen an den Versuchsverlauf angepaßte Gleichgewichtstrajektorie G.

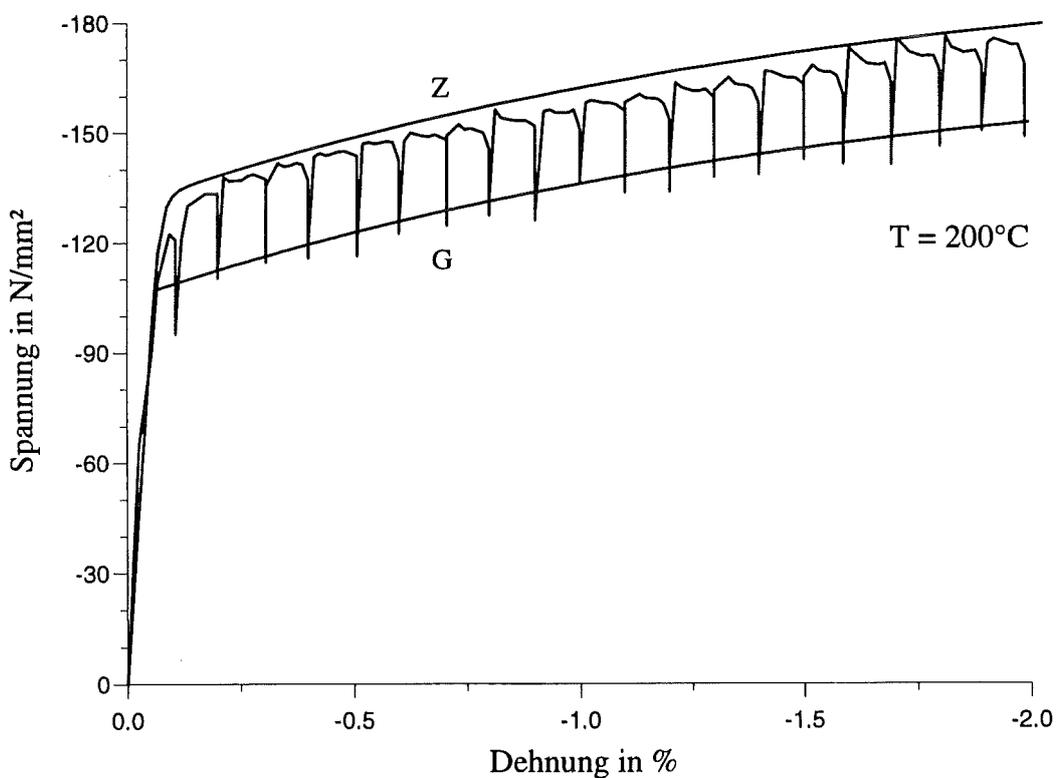


Bild 4.2: Spannungs- Dehnungskurve nach Versuchsart A mit berechneter Zustands- und Gleichgewichtstrajektorie.

Sowohl Kurve Z als auch Kurve G wurde mit Hilfe der in 2.2 bzw. 2.3 angesprochenen Parameter $k_{0(\theta)}$, $b_{(\theta)}$, $c_{(\theta)}$ sowie des E-Moduls $E_{(\theta)}$ und der Viskosität $\eta_{(\theta)}$ angepaßt. Als E-Modul wurde der in der Literatur [12] angegebene Wert

$$E_{(\theta=200^{\circ}\text{C})} = 178000 \text{ N/mm}^2$$

verwendet, der auf selbem Niveau liegt wie die grafisch aus den Versuchsergebnissen bestimmten Daten. Die übrigen Parameter wurden durch Testrechnungen mit verschiedenen Parameterkombinationen zu

$$k_{0(\theta=200^{\circ}\text{C})} = 107 \text{ N/mm}^2$$

$$b_{(\theta=200^{\circ}\text{C})} = 65$$

$$c_{(\theta=200^{\circ}\text{C})} = 2800 \text{ N/mm}^2$$

$$\eta_{(\theta=200^{\circ}\text{C})} = 220000 \text{ Ns/mm}^2$$

bestimmt.

In Bild 4.3 ist die Spannungs- Dehnungskurve nach Versuchsart A für $T = 400^{\circ}\text{C}$ dargestellt. Weiterhin ist die Zustandstrajektorie Z und die Gleichgewichtstrajektorie G aufgetragen, die beide durch Modellrechnungen nach 2.3 ermittelt wurden.

Die Trajektorien Z und G wurden, wie schon bei Bild 4.2 beschrieben, mit Hilfe der in 2.2 bzw. 2.3 angesprochenen Parameter $k_{0(\theta)}$, $b_{(\theta)}$, $c_{(\theta)}$ sowie des E-Moduls $E_{(\theta)}$ und der Viskosität $\eta_{(\theta)}$ angepaßt. Auch hier wurde der in der Literatur [12] angegebene Wert

$$E_{(\theta=400^{\circ}\text{C})} = 161000 \text{ N/mm}^2$$

verwendet, da er im Bereich der in den Versuchsergebnissen ermittelten Werte liegt. Er ist erwartungsgemäß kleiner als bei $T = 200^{\circ}\text{C}$.

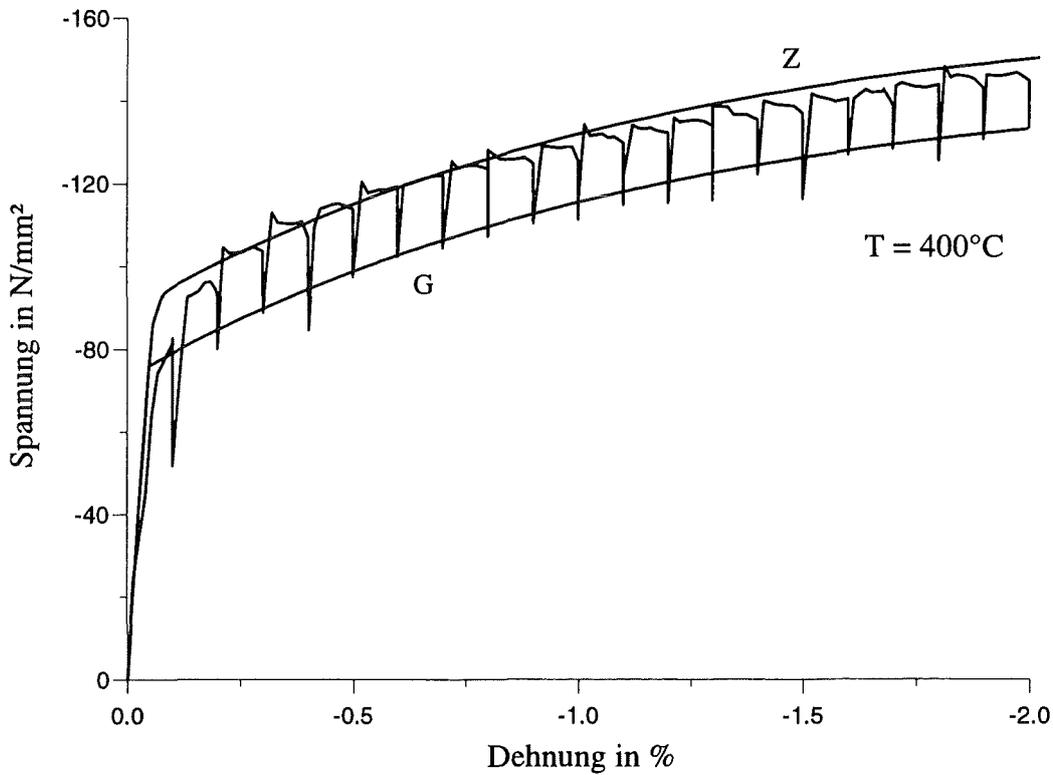


Bild 4.3: Spannungs- Dehnungskurve nach Versuchsart A mit berechneter Zustands- und Gleichgewichtstrajektorie.

Desweiteren wurden durch Testrechnungen mit verschiedenen Parameterkombinationen die Werte

$$k_{0(\theta=400^\circ\text{C})} = 76 \text{ N/mm}^2$$

$$b_{(\theta=400^\circ\text{C})} = 90$$

$$c_{(\theta=400^\circ\text{C})} = 4200 \text{ N/mm}^2$$

$$\eta_{(\theta=400^\circ\text{C})} = 140000 \text{ Ns/mm}^2$$

bestimmt.

Bei Betrachten der soeben dargestellten Ergebnisse läßt sich festhalten, daß die Parameter $b_{(\theta)}$ und $c_{(\theta)}$ mit steigender Temperatur zunehmen. Der E-Modul $E_{(\theta)}$, die Fließgrenze $k_{0(\theta)}$ und die Viskosität $\eta_{(\theta)}$ nehmen mit steigender Temperatur ab. Desweiteren ergibt sich der in Kapitel 2.3 angesprochene Grenzwert für die kinematische Verfestigung ξ_{∞} zu

$$\xi_{\infty} = 43 \text{ N / mm}^2$$

für die Temperatur $T = 200^{\circ}\text{C}$ und zu

$$\xi_{\infty} = 47 \text{ N / mm}^2$$

für $T = 400^{\circ}\text{C}$.

Sowohl bei dem in Bild 4.2 dargestellten als auch bei dem in Bild 4.3 dargestellten Versuch konnte mit Hilfe des in 2.3 erläuterten Viskoplastizitätsmodells rechnerisch eine Kurve an den Versuchsverlauf angenähert werden. Diese Kurve ist im Bereich der elastischen Verformung und im Bereich plastischer Verformung mit Verformungsbeträgen zwischen 0.2 % und 2 % eine gute Annäherung an den Versuchsverlauf. In dem Bereich vom Verlassen der elastischen Geraden bis zu Verformungsbeträgen von 0.2 % weist die rechnerische Annäherung größere Abweichungen zum Versuchsverlauf auf. Hier folgt der gerechnete Verlauf länger als beim Versuch zu beobachten dem Verlauf der elastischen Geraden. Dann knickt der gerechnete Verlauf deutlich schärfer in den plastischen Bereich ab als im Versuch, wo ein kontinuierlicher Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich zu beobachten ist.

Es wurden auch Parameter gesucht, die eine bessere Annäherung des gerechneten Verlaufs an den Versuchsverlauf im Bereich bis zu 0.2 % plastischer Verformung bewirken. Dies wurde auch erreicht, indem die Fließgrenze $k_{0(\theta)}$ extrem klein sowie die Parameter $b_{(\theta)}$ und $c_{(\theta)}$ relativ groß gewählt wurden. Jedoch wichen hier bei Dehnungsbeträgen von $|\varepsilon| \geq 1\%$ die gerechneten und gemessenen Kurven voneinander ab. Aus diesem Grund fiel die Entscheidung auf den oben angegebenen Parametersatz.

4.2 Versuchsbeschreibung

In Bild 4.4 ist die Spannungsantwort einer Probe bei Belastung nach Versuchsart C über der Zeit dargestellt. Die Gesamtdehnung während der Haltezeit beträgt -0.4% . Dieser Dehnungswert wird zum Zeitpunkt A nach 40 Sekunden erreicht. Die Mitteltemperatur ist 300°C , die Temperatur wird mit einer Schwingbreite von 200°C und einer Zyklendauer von 160 Sekunden zyklert. Die Zyklisierung der Temperatur beginnt zum Zeitpunkt A mit Temperaturerhöhung.

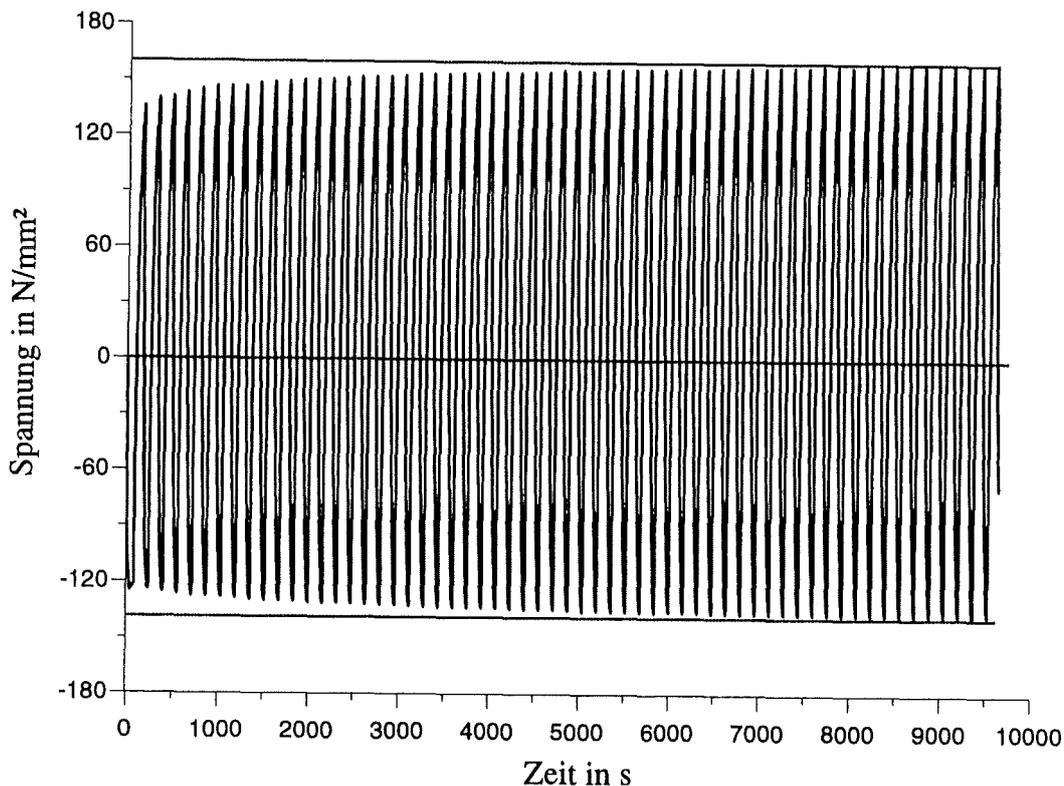


Bild 4.4: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart C.

Die Darstellung zeigt, daß das Material über viele Zyklen hinweg zyklische Verfestigung aufweist, die mit fortschreitender Versuchsdauer zum stehen kommt. Im Druckspannungsbereich,

das heißt im Bereich mit den höheren Temperaturen ist die Rate der Verfestigung zu Versuchsbeginn kleiner und eine Sättigung der Verfestigung tritt später ein als im „kälteren“ Zugspannungsbereich. Insgesamt weisen die Zugspannungen ein höheres Niveau auf als die Druckspannungen. Druckspannungen entstehen in diesem Fall durch Temperaturerhöhung, die Zugspannungen hingegen durch Temperaturabsenkung. Deshalb liegen die Druckspannungen in einem Bereich in dem höhere Temperaturen vorherrschen als in dem Bereich in dem die Zugspannungen liegen. Da der E-Modul und vor allem die Fließgrenze des verwendeten austenitischen Stahls mit steigender Temperatur abnehmen, ist die oben beschriebene Unsymmetrie zwischen Zug- und Druckspannungen zu verstehen.

In Bild 4.5 ist dieselbe Auftragung wie in Bild 4.4 dargestellt. Jedoch werden hier nur die ersten sechs Lastwechsel des Versuchs gezeigt, um detailliertere Aussagen über den Verlauf der Spannungsantwort des Werkstoffs machen zu können.

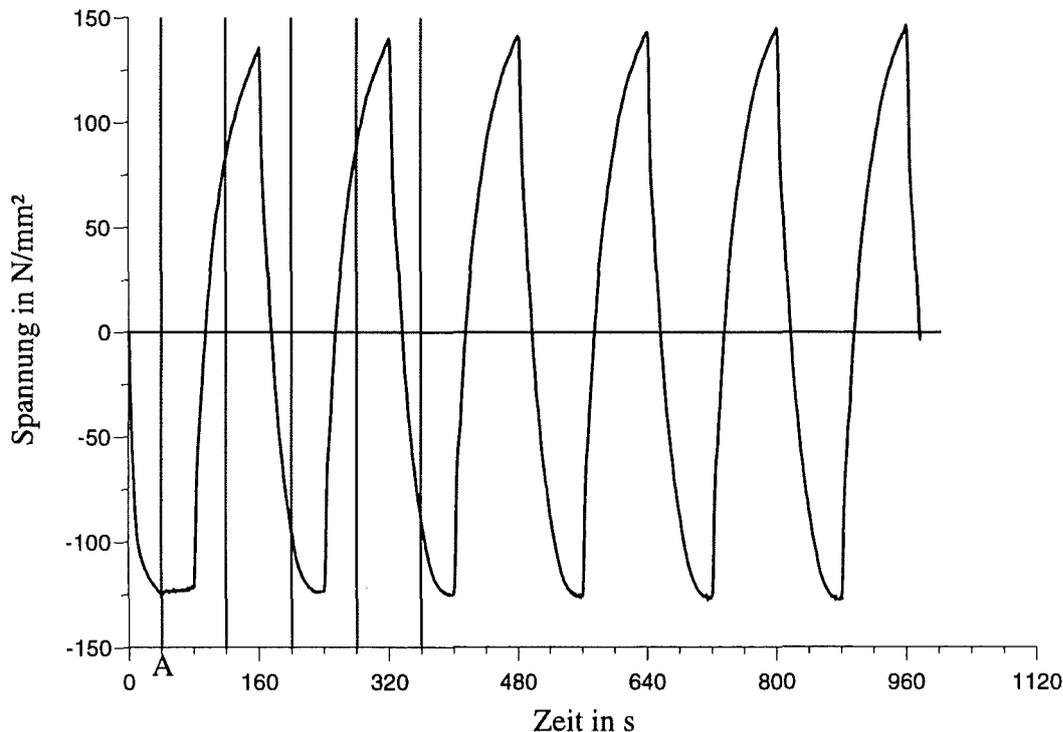


Bild 4.5: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart C.

Zum besseren Überblick sind vertikale unterbrochene Linien eingefügt, die den jeweiligen Durchgang des Temperaturverlaufs durch die Mitteltemperatur kennzeichnen. Der Betrag der

Spannung nimmt bei konstanter Temperatur bis zum Erreichen der Gesamtdehnung $\epsilon = -0.4\%$ zum Zeitpunkt A zu. Hierbei wird die Fließgrenze überschritten. Zum Zeitpunkt A beginnt die Temperaturerhöhung während welcher der Betrag der Druckspannung aufgrund der thermischen Dehnung zunehmen müßte. Aufgrund der Temperaturerhöhung nimmt die thermische Dehnung ϵ_{th} zu. Dies hat bei festgehaltener Gesamtdehnung ϵ zur Folge, daß die mechanische Stauchung $\epsilon_{mech} = \epsilon_i + \epsilon_e$ und mit ihr der Betrag der Druckspannung zunimmt. Wie das Experiment zeigt, nimmt der Betrag der Druckspannung jedoch leicht ab. Dieses Verhalten läßt den Schluß zu, daß die Abnahme des Druckspannungsbetrages aufgrund von Relaxationsprozessen und dem Absinken der Fließgrenze zu höheren Temperaturen hin den Einfluß der thermischen Dehnung auf die Spannung überwiegt. Sobald die Temperatur absinkt, bauen sich die Druckspannungen schnell ab, da die thermische Dehnung und mit ihr die mechanische Stauchung abnimmt. Es entstehen schon vor Erreichen der Mitteltemperatur Zugspannungen. Auch hierbei ist, an der Abweichung vom linearen Verhalten, plastische Verformung zu erkennen. Es wird deutlich, daß in Druckrichtung ausgeprägtere plastische Verformung auftritt als in Zugrichtung, was aufgrund der vorgegebenen Gesamtdehnung von -0.4% im Druckbereich zu erwarten war. Dieser Effekt läßt sich aber auch mit den bei Bild 4.4 erklärten Auswirkungen der höheren Temperaturen im Druck- und der abgesenkten Temperaturen im Zugspannungsbereich erklären.

In Bild 4.6 ist ebenfalls die Spannungsantwort einer Probe bei Belastung nach Versuchsart C über der Zeit dargestellt. Jedoch beträgt hier die Gesamtdehnung während der Haltezeit $+0.4\%$. Dieser Dehnungswert wird wiederum nach 40 Sekunden erreicht. Ansonsten ist die Versuchsführung mit der, des bei den Bildern 4.4 und 4.5 gezeigten Experiments identisch. Auch hier zeigt das Material über viele Lastwechsel hinweg zyklische Verfestigung, die erst mit fortschreitender Versuchsdauer zum stehen kommt. Im Druckspannungsbereich, das heißt im Bereich mit den höheren Temperaturen ist die Rate der zyklischen Verfestigung zu Versuchsbeginn größer und eine Sättigung tritt später ein als im „kälteren“ Zugspannungsbereich. Insgesamt weisen die Zugspannungen ein höheres Niveau auf als die Druckspannungen. Druckspannungen entstehen auch hier durch Temperaturerhöhung, die Zugspannungen hingegen durch Temperaturabsenkung. Deshalb liegen die Druckspannungen wie oben angesprochen im Bereich höherer Temperaturen und die Zugspannungen im Bereich niedrigerer Temperaturen. Dieser Effekt ist nun auch hier damit zu erklären, daß der E-Modul und vor allem die Fließgrenze des verwendeten Materials mit steigender Temperatur abnehmen.

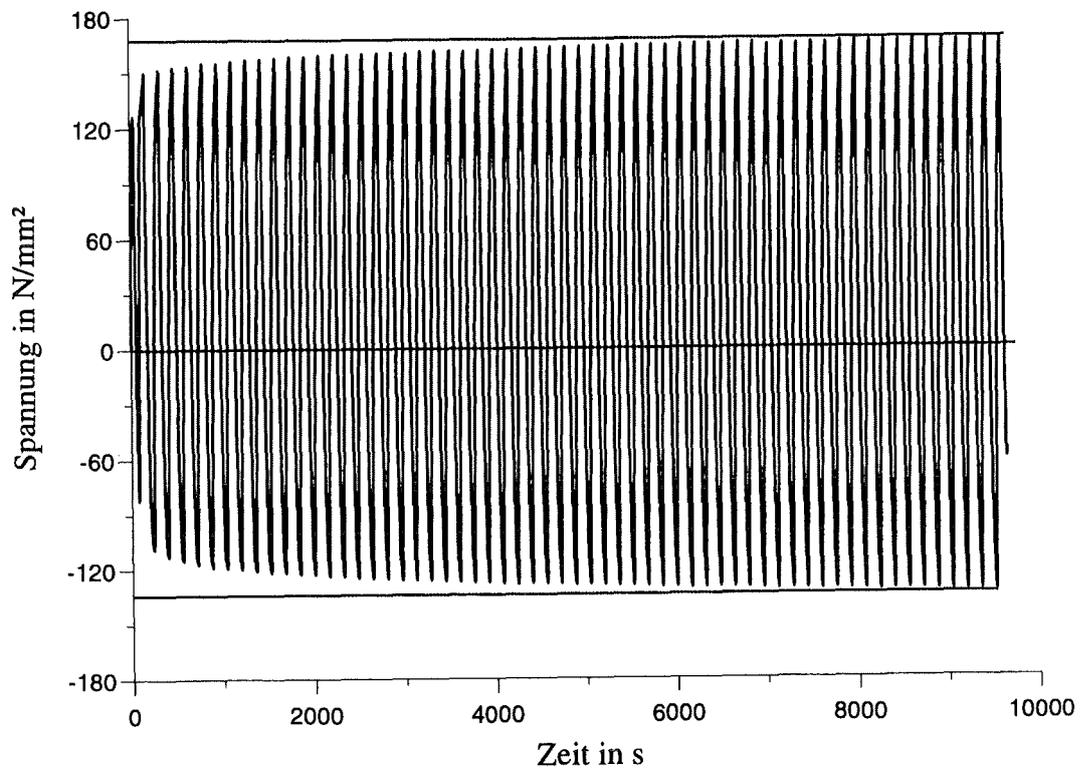


Bild 4.6: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart C.

In Bild 4.7 ist dieselbe Auftragung wie in Bild 4.6 dargestellt. Hier werden die ersten sechs Lastwechsel des Versuchs gezeigt, um Einzelheiten des Verlaufs der Spannungsantwort erkennbar machen zu können. Zum besseren Überblick sind wiederum vertikale unterbrochene Linien eingefügt, die den jeweiligen Durchgang des Temperaturverlaufs durch die Mitteltemperatur kennzeichnen.

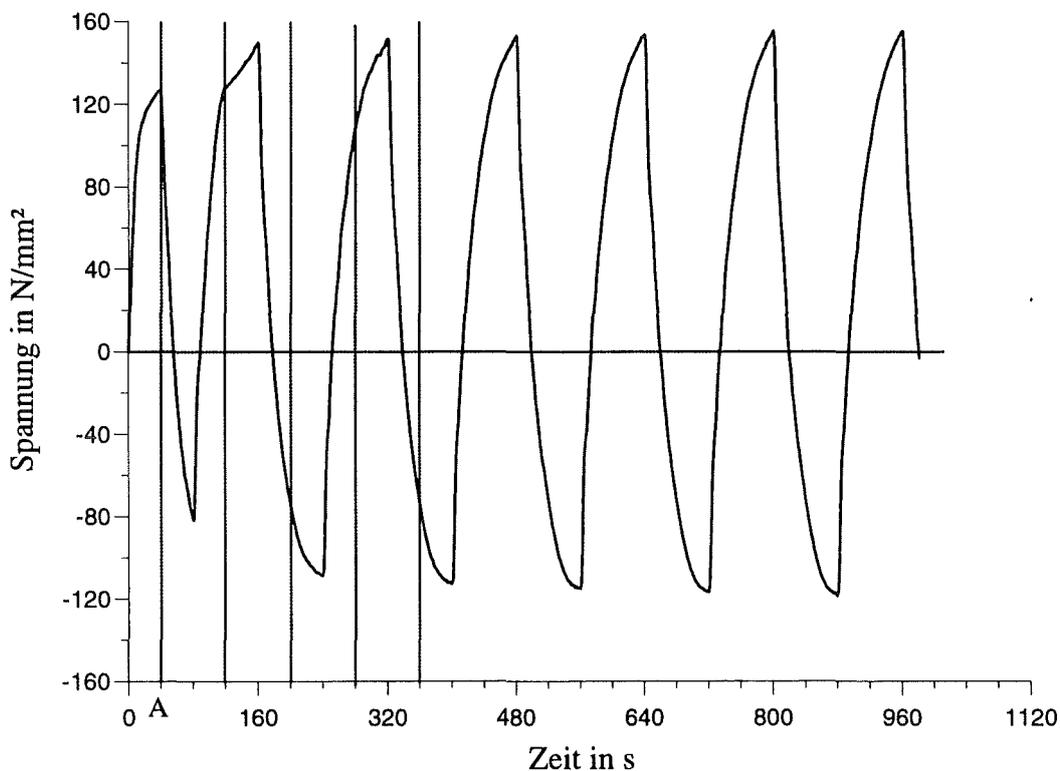


Bild 4.7: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart C.

Die Spannung nimmt bei konstanter Temperatur bis zum Erreichen der Gesamtdehnung $\epsilon = +0.4 \%$ zum Zeitpunkt A zu. Hierbei wird die Fließgrenze überschritten. Zum Zeitpunkt A beginnt die Temperaturerhöhung. Aufgrund der Temperaturerhöhung nimmt die thermische Dehnung ϵ_{th} zu. Deshalb nimmt bei festgehaltener Gesamtdehnung ϵ die mechanische Dehnung $\epsilon_{mech} = \epsilon_i + \epsilon_e$ ab, was zur Abnahme der Spannung führt. Erst bei $t = 80$ Sekunden, wo die Temperatur und mit ihr die thermische Dehnung wieder beginnt abzunehmen, nimmt auch

die Spannung wieder zu. Besonders im ersten Lastwechsel führt die aufgebrachte Gesamtdehnung von $\epsilon = +0.4\%$ zu einer Verschiebung der „Symmetrieachse“ des Spannungsverlaufes in Richtung Zugspannung. Da die zyklische Verfestigung jedoch besonders in den ersten Lastwechseln im Druckbereich stärker ausgeprägt ist als im Zugbereich, verliert sich dieser Effekt mit zunehmender Lastspielzahl zunehmend. Das Material „vergißt“ die der Temperaturzyklisierung vorangehende Verformung.

In Bild 4.8 ist die Spannungsantwort über der Zeit für eine Belastung nach Versuchsart D dargestellt. Die Dehnungsamplitude beträgt 0.4 % wobei der erste Lastwechsel in Druckrichtung gestartet wurde. Die Schwingbreite der Temperaturzyklisierung beträgt 200°C , die Zyklisierung beginnt mit einer Temperaturerhöhung und die Mitteltemperatur ist $T = 300^\circ\text{C}$.

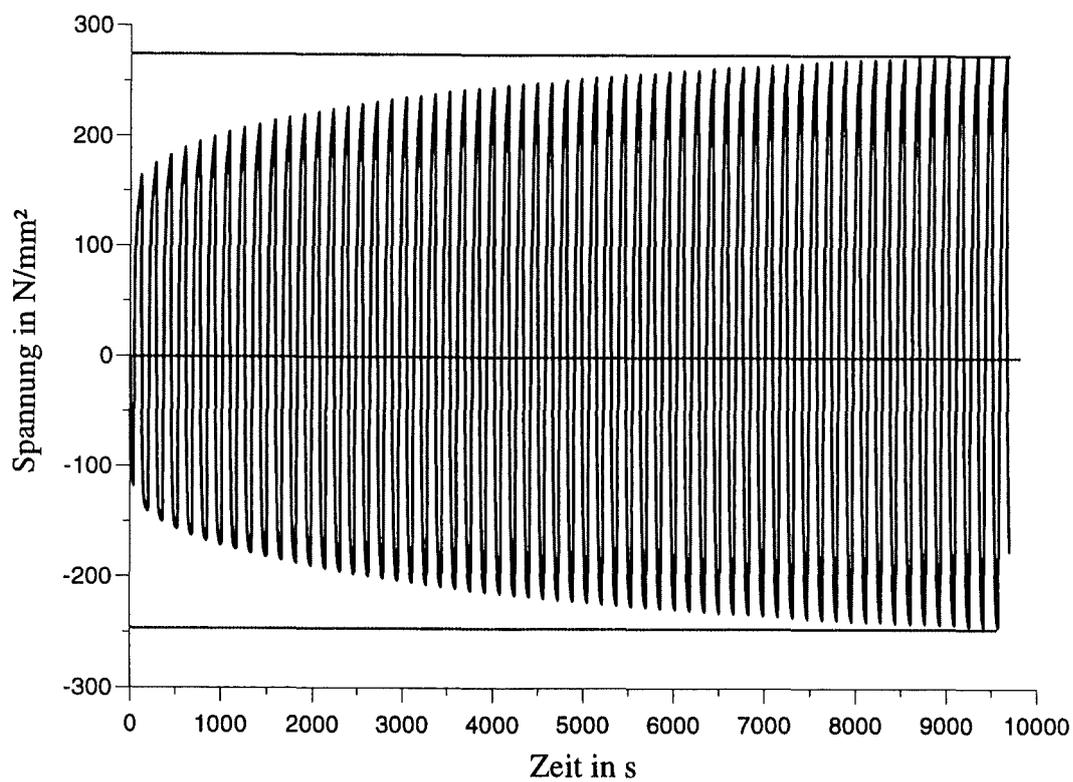


Bild 4.8: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart D.

Im ersten Lasthalbwechsel werden sowohl durch das Verringern der Gesamtdehnung als auch durch das gleichzeitige Erhöhen der Temperatur und somit des thermischen Dehnungsanteils Druckspannungen erzeugt, die sich gleichsinnig überlagern. Im zweiten Lasthalbwechsel werden zum einen durch Vergrößern der Gesamtdehnung und zum anderen durch gleichzeitiges Verringern der Temperatur und somit des thermischen Dehnungsanteils Zugspannungen erzeugt. Diese Überlagerungseffekte setzen sich aufgrund der gleichen Zyklenlänge von Temperatur- und Dehnungszyklisierung während des gesamten Versuchs fort. Es ist eine starke zyklische Verfestigung zu beobachten, die mit zunehmender Zyklenzahl deutlich langsamer wird, die aber auch nach 60 Zyklen noch keine Sättigung aufweist. Es fällt auf, daß die Zugspannungen größer sind als die entsprechenden Druckspannungen, was sich mit den Beobachtungen bei Bild 4.4 deckt.

In Bild 4.9 ist dieselbe Auftragung wie in Bild 4.8 dargestellt. Jedoch werden hier nur die ersten sechs Lastwechsel des Versuchs gezeigt, um auch hier detailliertere Aussagen über den Verlauf der Spannungsantwort des Werkstoffs machen zu können. Zum besseren Überblick sind wieder vertikale unterbrochene Linien eingefügt, die den jeweiligen Durchgang des Temperaturverlaufs durch die Mitteltemperatur bzw. den Nulldurchgang der Dehnung kennzeichnen.

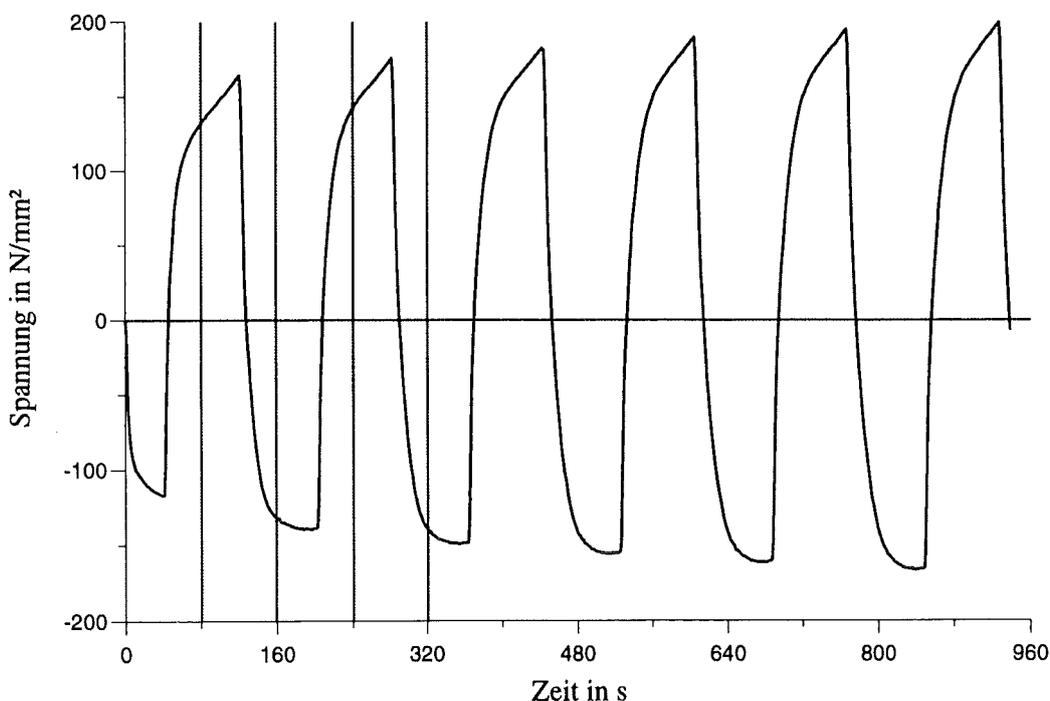


Bild 4.9: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart D.

Auch hier ist zu sehen, daß im Druckspannungsbereich ausgeprägtere plastische Verformung auftritt als im Zugspannungsbereich was mit obigen Beobachtungen übereinstimmt.

In Bild 4.10 ist die Spannungsantwort über der Zeit für eine Belastung nach Versuchsart E dargestellt. Die Dehnungsamplitude beträgt 0,4 % der erste Lastwechsel ist in negativer Dehnungsrichtung gestartet. Die Schwingbreite der Temperaturzyklrierung beträgt 200°C, die Zyklrierung beginnt mit einer Temperatursenkung und die Mitteltemperatur ist $T = 300^{\circ}\text{C}$.

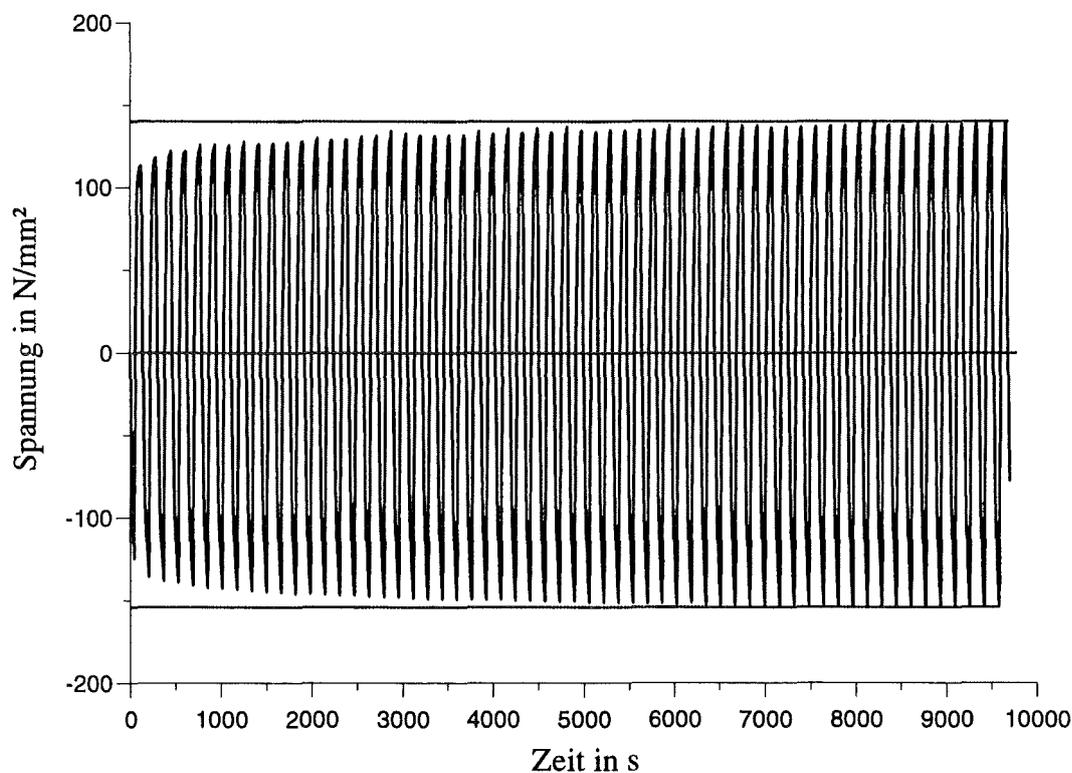


Bild 4.10: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart E.

Bei dieser Versuchsführung sind die Auswirkungen, die Temperatur - und Dehnungszyklrierung auf die Spannungsantwort haben, entgegengesetzt und heben sich teilweise auf. So bewirkt z.B. das Anlegen einer negativen Dehnung das Entstehen von Druckspannungen und das gleichzeitige Absenken der Temperatur Zugspannungen. Hieraus resultiert die Tatsache, daß

bei dieser Versuchsführung deutlich geringere Spannungen erreicht werden und daß eine geringere zyklische Verfestigung stattfindet als in dem bei den Bildern 4.8 bzw. 4.9 beschriebenen Experiment nach Versuchsart D, wo sich die Auswirkungen der Temperatur- und der Dehnungszyklisierung auf die Spannung gleichsinnig überlagern. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Experimenten sind hier die Zugspannungen kleiner als die entsprechenden Druckspannungen. Die Druckspannungen liegen bei diesem Versuch in einem Bereich in dem kleinere Temperaturen vorherrschen als in dem Bereich in dem die Zugspannungen liegen. Die oben beschriebene Unsymmetrie zwischen Zug- und Druckspannungen ist nun dadurch zu verstehen, daß wie schon bei Bild 4.4 erläutert der E- Modul und vor allem die Fließgrenze des verwendeten austenitischen Stahls mit steigender Temperatur abnehmen.

In Bild 4.11 sind die ersten sechs Lastwechsel der Auftragung in Bild 4.10 dargestellt. Zum besseren Überblick sind erneut vertikale unterbrochene Linien eingefügt, die den jeweiligen Durchgang des Temperaturverlaufs durch die Mitteltemperatur bzw. des Nulldurchgangs der Dehnung kennzeichnen.

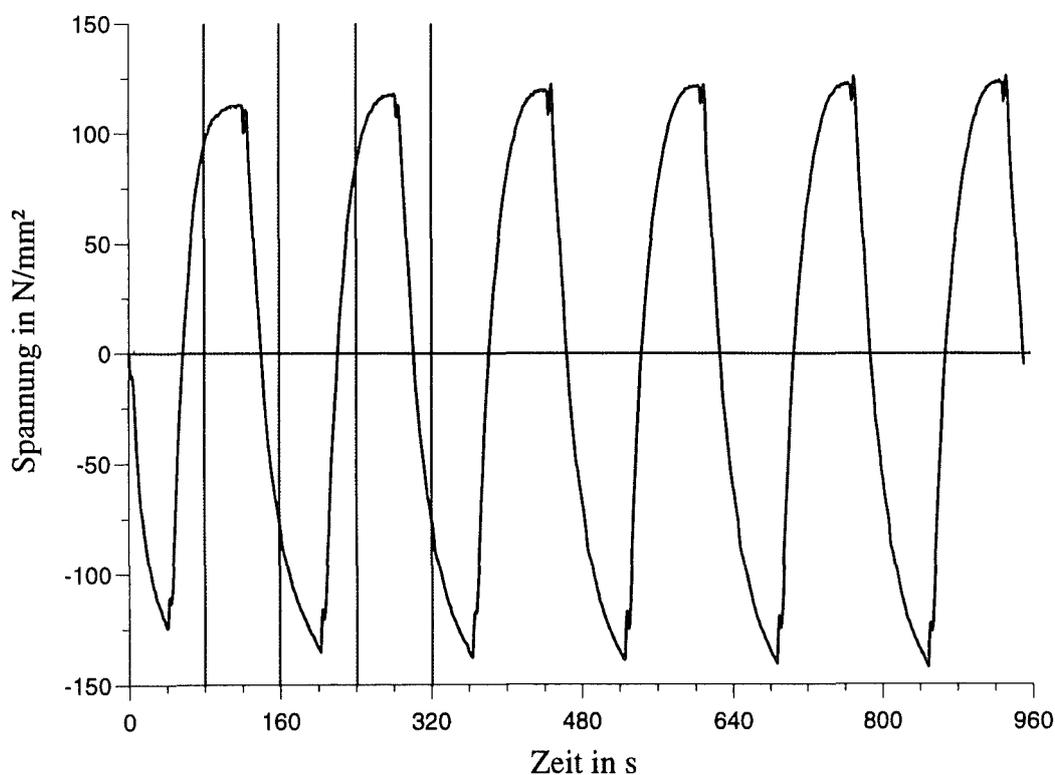


Bild 4.11: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart D.

Es wird deutlich, daß in Zugrichtung ausgeprägtere plastische Verformung auftritt als in Druckrichtung. Die Ursache dieses Verhaltens ist, wie bei Bild 4.10 beschrieben, in den unterschiedlichen Temperaturniveaus im Zug- und im Druckspannungsbereich auf Grund der Temperaturzyklisierung zu sehen. In der Auftragung ist zu erkennen, daß stets nach Beginn des Abfallens des Betrags der Spannung ein kurzer Anstieg desselben erfolgt bevor der Spannungsbetrag wieder abfällt. Dieser Effekt ist damit zu erklären, daß es in diesem Versuch zu einer leichten Faserverschiebung zwischen Temperatur- und Dehnungszyklisierung kommt. Die Temperaturzyklisierung folgt der Dehnungszyklisierung mit kurzer Verzögerung. Wie oben schon erläutert, sind die Auswirkungen von Temperatur- und Dehnungszyklisierung auf die Spannungsantwort entgegengesetzt. Betrachtet man den ersten Lasthalbwechsel, so geht zuerst die Dehnung und mit ihr der Betrag der Spannung zurück. Kurz darauf beginnt die Temperatur anzusteigen, was zum kurzen Anstieg des Betrages der Druckspannung führt, da die thermische Dehnung zunimmt und dadurch die mechanische Stauchung abnehmen muß. Da jedoch der Einfluß der Dehnungszyklisierung stark dominiert, setzt sich dann die Abnahme des Betrages der Spannung fort.

In Bild 4.12 ist die Spannungsantwort einer Probe bei isothermer Belastung nach Versuchsart B, bei $T = 200^{\circ}\text{C}$ über der Zeit dargestellt. Die Dehnungsschwingbreite beträgt 0,8 %. Zu Versuchsbeginn wird die Dehnung -0,2 % angefahren.

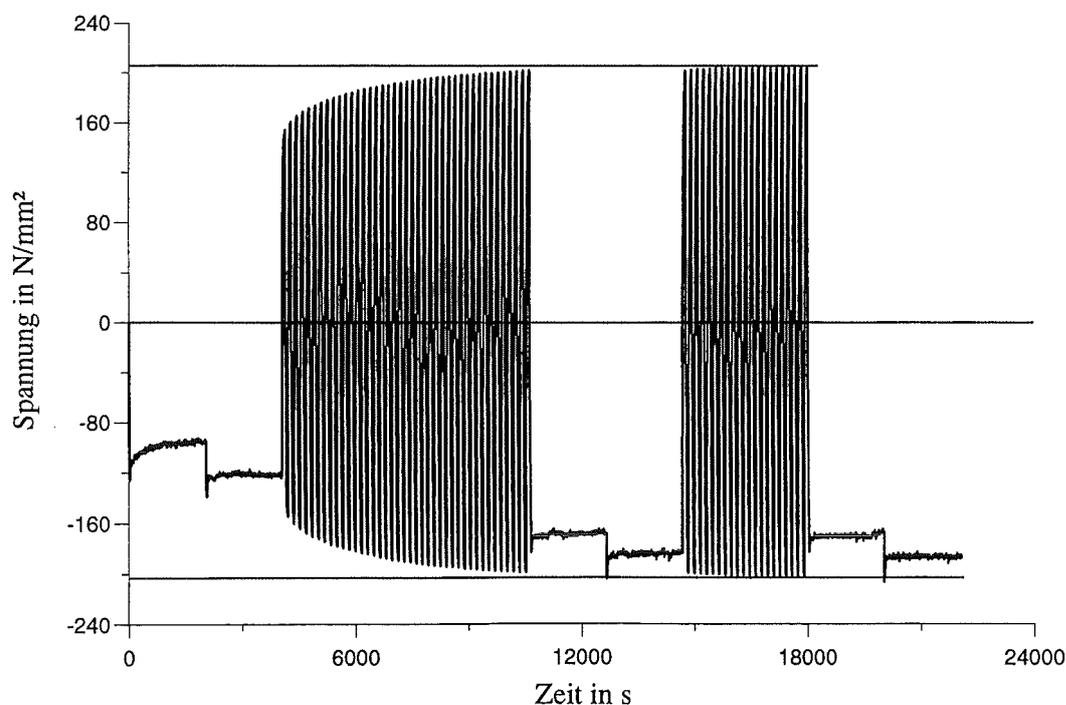


Bild 4.12: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart B.

Die Spannungsrelaxation um $\sigma \cong 40 \text{ N/mm}^2$ in der ersten Haltezeit ist nahezu $\frac{1}{3}$ der bei der Verformung aufgetragenen Spannung. Der Werkstoff zeigt hier über den gesamten Zeitraum der Haltezeit von $t = 2000 \text{ s}$ nennenswerte Relaxation, die auch gegen Ende der Haltezeit noch keine Sättigung aufweist. Die Relaxationen in den weiteren Haltezeiten besitzen alle einen ähnlichen Verlauf. Die einzelnen Beträge, um die die Spannung hier relaxiert, sind deutlich geringer als der Spannungsbetrag, um den die Probe während der ersten Haltezeit relaxiert. Im Gegensatz zur ersten Haltezeit wird in den folgenden Haltezeiten schon nach kurzer Zeit ein Sättigungsbereich erreicht. Der Werkstoff zeigt weiterhin eine zyklische Verfestigung von über 50 N/mm^2 im Zugspannungsbereich und von 60 N/mm^2 im Druckspannungsbereich, die nach 50 Lastwechseln in den Bereich der Sättigung kommt.

In Bild 4.13 ist die Spannungsantwort des Werkstoffs AISI 316L auf isotherme Belastung nach Versuchsart B bei $T = 400^\circ\text{C}$ über der Zeit dargestellt. Die Dehnungsschwingbreite beträgt $0,8\%$. Zu Versuchsbeginn wird die Dehnung $-0,2\%$ angefahren.

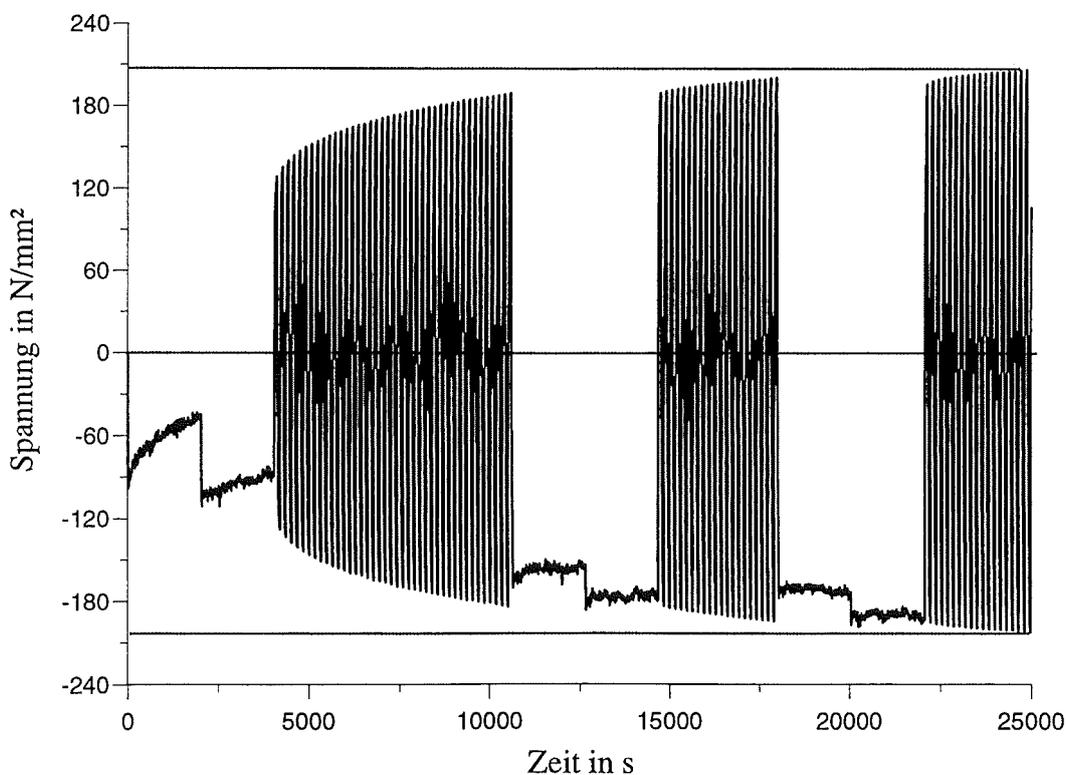


Bild 4.13: Spannungs- Zeitverlauf nach Versuchsart B.

In der ersten Haltezeit findet eine Spannungsrelaxation um $\sigma \cong 50 \text{ N/mm}^2$ statt, was annähernd die Hälfte der bei der Verformung aufgebrachten Spannung ist. Der Werkstoff zeigt hier über den gesamten Zeitraum der Haltezeit von $t = 2000 \text{ s}$ nennenswerte Relaxation, die auch gegen Ende der Haltezeit abnimmt, die jedoch auch hier noch keine Sättigung aufweist. Der Betrag der Relaxation nimmt von Haltezeit zu Haltezeit ab. Im Gegensatz zur ersten und zweiten Haltezeit, wird in den folgenden Haltezeiten schon nach kurzer Zeit ein Sättigungsbereich erreicht. Der Werkstoff zeigt weiterhin eine zyklische Verfestigung von über 70 N/mm^2 im Zugspannungsbereich und von 80 N/mm^2 im Druckspannungsbereich.

4.3 Gegenüberstellung von Versuch und Rechnung

In Bild 4.14 ist dem in den Bildern 4.4 und 4.5 dargestellten Versuch nach Versuchsführung C ein mit dem Viskoplastizitätsmodell nach Kapitel 2.3 berechneter Verlauf gegenübergestellt.

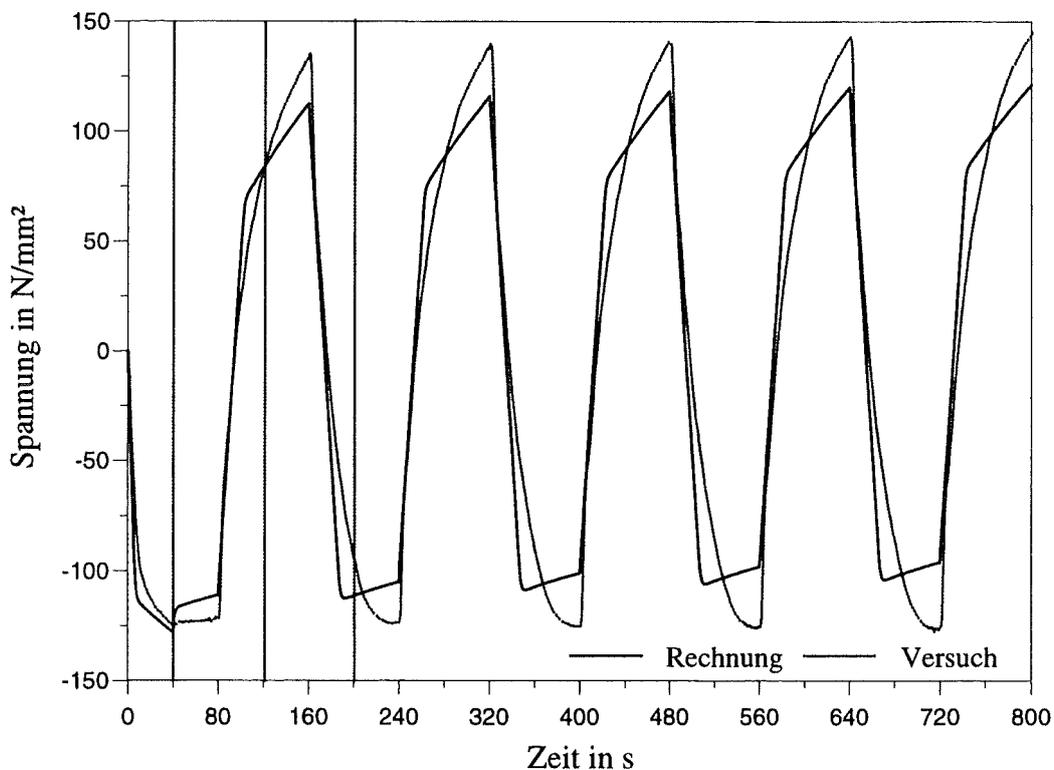


Bild 4.14: Spannungs- Zeitverläufe aus Versuch und Rechnung nach Versuchsart C.

Eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist bis zum Zeitpunkt $t = 40$ s zu verzeichnen, bis wohin bei konstanter Temperatur ($T = 300^\circ\text{C}$) eine Stauchung von -0.4% angefahren wird. In dem Moment ab dem die Dehnung konstant gehalten wird und die Temperatur zu steigen beginnt, fällt der Betrag der berechneten Spannung gegenüber der entsprechenden Versuchsspannung zunächst schnell ab. Auch in der Rechnung überwiegt also

wie in bei den Bildern 4.4 und 4.5 für den Versuch erläutert der Einfluß der Spannungsrelaxation den Einfluß der mit der Temperatur steigenden thermischen Dehnung, die zu einer mechanischen Stauchung führt. In der Rechnung scheint die Relaxation noch dominanter zu sein als im Versuch. Die gemessene und die gerechnete Spannung laufen dann bis zum Erreichen der maximalen Temperatur parallel. Von Beginn des Absinkens der Temperatur bei $t = 80$ s an nehmen beide Spannungen schnell entlang der elastischen Geraden zu. Sie weisen im elastischen Bereich einen nahezu deckungsgleichen Verlauf auf. Sobald beim Versuch plastische Verformung auftritt, tritt die bei der Parameterbestimmung erwähnte Abweichung zwischen Versuch und Rechnung auf, und die Rechnung kann den Versuchsverlauf nicht mehr exakt nachbilden. Bei der Rechnung ist anders als beim Experiment im inelastischen Druckspannungsbereich ein Anstieg der Spannung zu beobachten. Dieser Anstieg hat seine Ursache in der Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze $k = k_{0(\theta)}$, die wie in Kapitel 4.1 dargestellt zu höheren Temperaturen hin abnimmt. Außerdem deutet sich an, daß der errechnete Verlauf die beim Versuch zu erkennenden zyklische Verfestigung nicht aufweist.

Wird in der Rechnung mit konstantem $k = 92 \text{ N/mm}^2$ gerechnet, was in etwa dem Mittelwert aus $k_{0(\theta=200^\circ\text{C})}$ und $k_{0(\theta=400^\circ\text{C})}$ entspricht, so ergibt sich auch im Druckspannungsbereich eine Zunahme des Druckspannungsbetrages. Dieses Verhalten ist in Bild 4.15 zu sehen, in dem diese Rechnung zusammen mit dem Versuch aus Bild 4.14 dargestellt wird. Konstantes k_0 bringt hier Vorteile bei der Nachbildung des Versuchsverlaufs im Druckspannungsbereich vom zweiten Lastwechsel an, jedoch Nachteile im Zugspannungsbereich und beim ersten Lasthalbwechsel im Druckspannungsbereich.

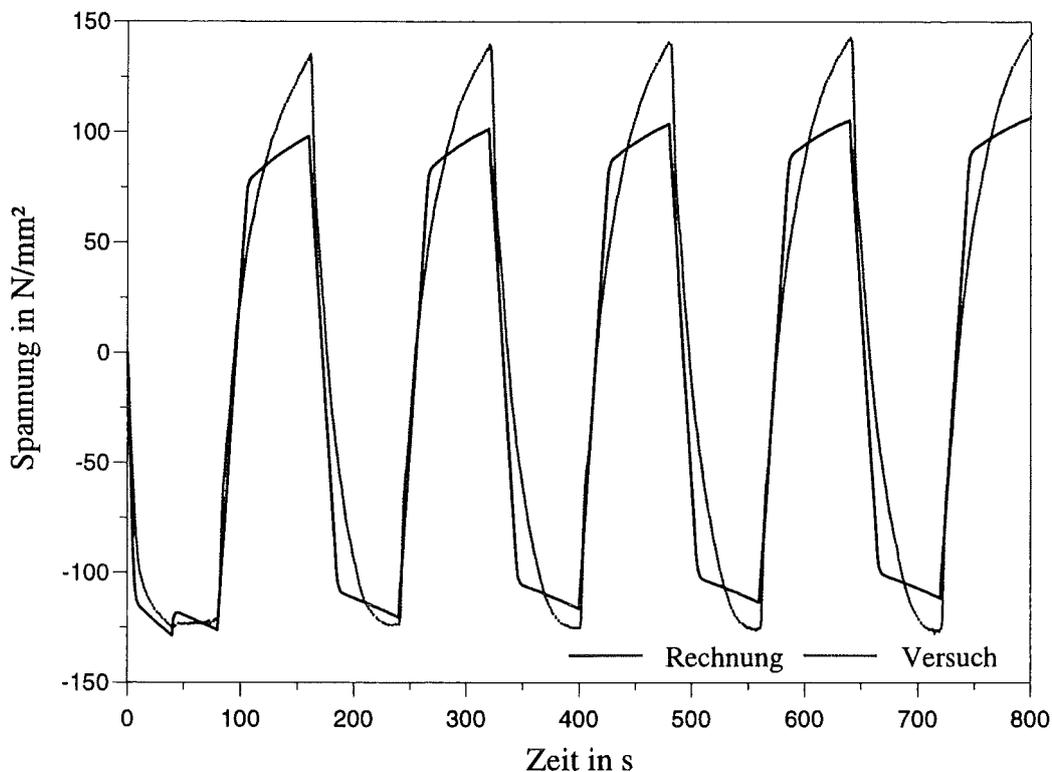


Bild 4.15: Spannungs- Zeitverläufe aus Versuch und Rechnung nach Versuchsart C.

Ein Einfluß des in 2.2 bzw. 2.3 angesprochenen Terms $\frac{\circ}{c} \xi \dot{\theta}$ auf die Spannungsantwort des Viskoplastizitätsmodells ist, bei den in den Bildern 4.14 und 4.15 verwendeten mechanisch-thermischen Belastungen kaum vorhanden.

In Bild 4.16 sind ebenfalls nach Versuchsart C gerechnete Verläufe dargestellt, bei denen jedoch eine größere Stauchung von -2 % Dehnung aufgebracht wurde. Die Darstellung enthält vertikale, gestrichelt eingezeichnete Markierungen, die den Verlauf der Temperaturzyklierung verdeutlichen sollen. Von Markierung 1 bis 2 steigt die Temperatur. Sie fällt ab von Markierung 2 bis 3 und steigt schließlich wieder von Markierung 3 bis 4. Der eine Verlauf wurde mit

dem Term $\frac{\circ}{c} \xi \dot{\theta}$ errechnet, der andere ohne. Hier ist ein Unterschied zwischen beiden Kurven

zu erkennen. Der positive Parameter c ist im betrachteten Bereich zwischen $T = 200^\circ\text{C}$ und $T = 400^\circ\text{C}$ als lineare Funktion von der Temperatur angegeben, die mit steigender Temperatur zunimmt. Folglich ist $\overset{\circ}{c} = \frac{dc}{d\theta}$ immer positiv. Die kinematische Verfestigung ξ ist während der gesamten Rechnung negativ. Da im verwendeten Modell nach Kapitel 2.3 die Rate der kinematischen Verfestigung $\dot{\xi} = c \dot{\epsilon}_i - b |\dot{\epsilon}_i| \xi + \frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$ ist, bewirkt der Term $\frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$ eine Vergrößerung von $\dot{\xi}$ falls $\dot{\theta}$ negativ ist, das heißt wenn die Temperatur sinkt. Steigt die Temperatur so ist $\dot{\theta}$ positiv und der Term $\frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$ verringert $\dot{\xi}$. Dieser Effekt wird sichtbar im Grad der Zunahme der Spannung. Zwischen Markierung 1 und 2 wo $\dot{\theta}$ positiv ist, verläuft die Kurve die mit dem Term $\frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$ gerechnet wurde flacher als die die ohne ihn berechnet wurde. Zwischen den Markierungen 2 und 3, wo $\dot{\theta}$ negativ ist, ist die mit dem Term $\frac{\overset{\circ}{c}}{c} \xi \dot{\theta}$ gerechnete Kurve die steilere. Zwischen Markierung 3 und 4 ist sie wiederum flacher.

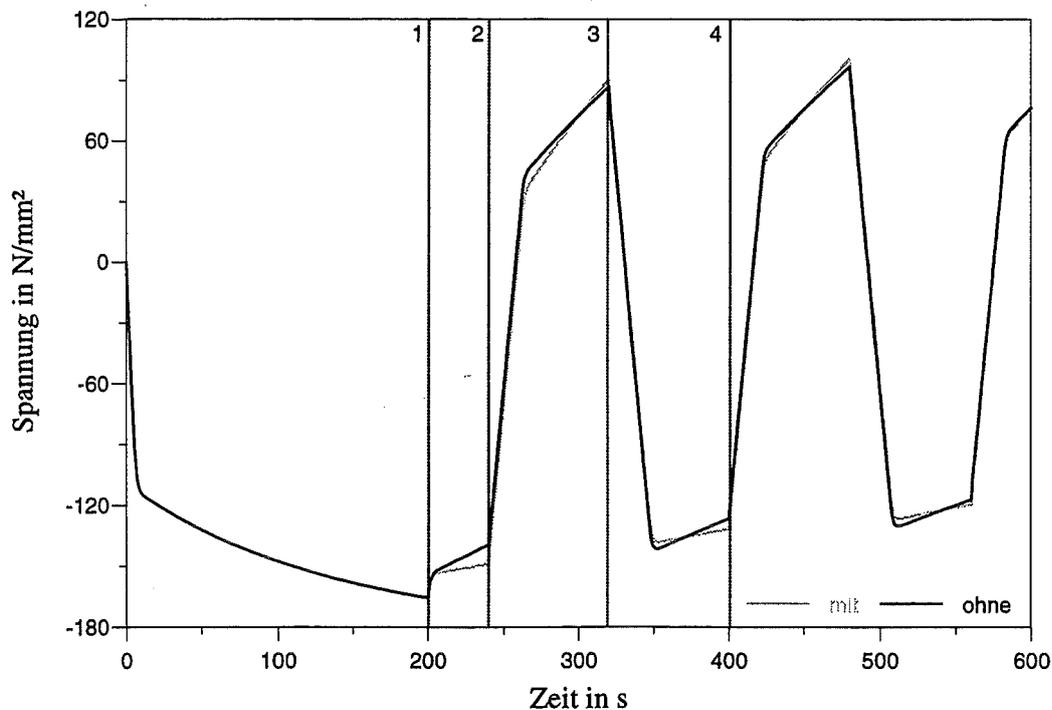


Bild 4.16: Berechnete Spannungs- Dehnungskurven mit unterschiedlicher kinematischer Verfestigung.

In Bild 4.17 ist dem in den Bildern 4.6 und 4.7 dargestellten Versuch nach Versuchsführung C ein mit dem Viskoplastizitätsmodell nach Kapitel 2.3 berechneter Verlauf gegenübergestellt.

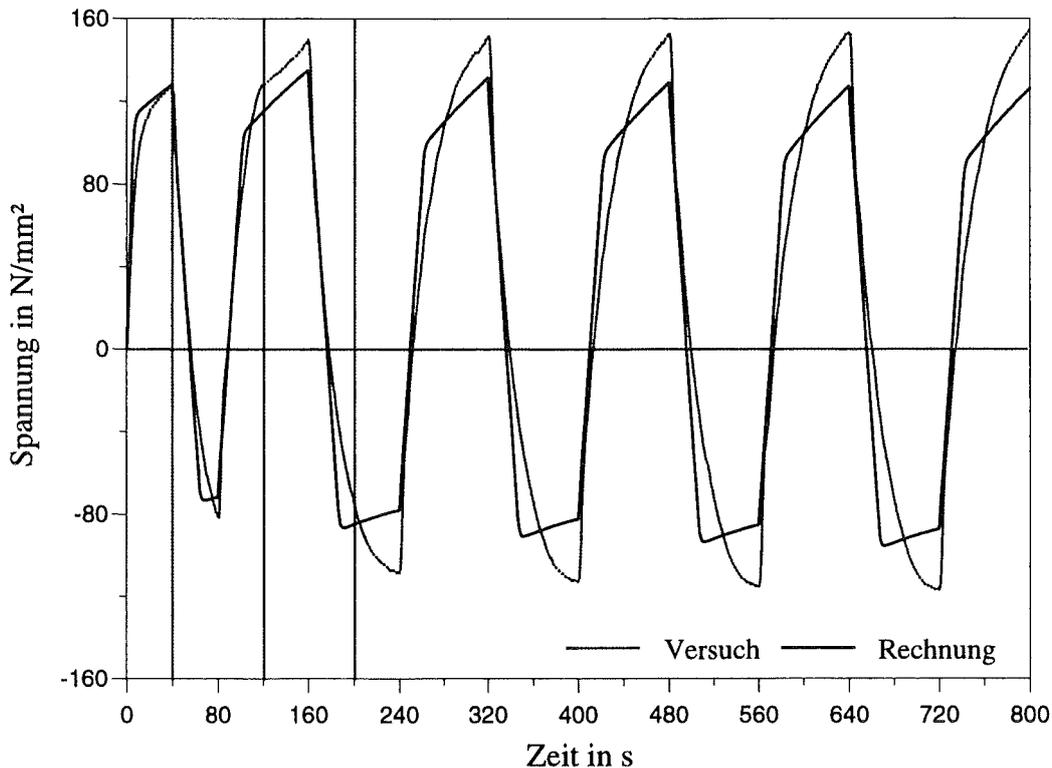


Bild 4.17: Spannungs- Zeitverläufe aus Versuch und Rechnung nach Versuchsart C.

Eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist während des ersten Lastwechsels zu verzeichnen. Im weiteren Verlauf werden im Versuch deutlich höhere Spannungen erreicht als in der Rechnung, da das verwendete Viskoplastizitätsmodell die im Versuch auftretende zyklische Verfestigung nicht nachvollziehen kann. Im zweiten Zughalbwechsel laufen beide Spannungen bis zum Erreichen der minimalen Temperatur parallel. Von Beginn der Zunahme der Temperatur bei $t = 160$ s an nehmen beide Spannungen schnell entlang der elastischen Geraden ab. Sie weisen im elastischen Bereich einen nahezu deckungsgleichen Verlauf auf. Sobald beim Versuch plastische Verformung auftritt, tritt wieder die bei der Parameterbestimmung erwähnte Abweichung zwischen Versuch und Rechnung auf, und die Rechnung kann den Versuchsverlauf nicht mehr exakt nachbilden. Wie bei Bild 4.14 be-

geschrieben ist auch hier bei der Rechnung anders als beim Experiment im inelastischen Druckspannungsbereich ein Anstieg der Spannung zu beobachten. Dieser Anstieg hat wiederum seine Ursache in der Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze $k = k_{0(\theta)}$, die wie in Kapitel 4.1 dargestellt zu höheren Temperaturen hin abnimmt. Auch hier sind Auswirkungen des in Kapitel 2.2 bzw. 2.3 angesprochenen Terms $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ auf die Spannungsantwort des Viskoplastizitätsmodells kaum vorhanden.

In Bild 4.18 sind ebenfalls nach Versuchsart C gerechnete Verläufe dargestellt, bei denen jedoch eine größere Dehnung von +2 % Dehnung aufgebracht wurde. Die Darstellung enthält vertikale gestrichelt eingezeichnete Markierungen, um den Verlauf der Temperaturzyklisierung zu verdeutlichen. Von Markierung 1 bis 2 steigt die Temperatur. Sie fällt ab von Markierung 2 bis 3 und steigt von Markierung 3 bis 4. Ein Verlauf wurde mit dem Term $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ als Beitrag zu $\dot{\xi}$ errechnet, der andere ohne. Es ist ein Unterschied zwischen beiden Kurven zu erkennen. Der positive Parameter c ist wie schon bei Bild 4.16 erläutert im betrachteten Bereich zwischen $T = 200^\circ\text{C}$ und $T = 400^\circ\text{C}$ als lineare Funktion von der Temperatur angegeben, die mit steigender Temperatur zunimmt. Der Term $\frac{\circ}{c} = \frac{dc}{d\theta}$ ist immer positiv und die kinematische Verfestigung ξ ist während der gesamten Rechnung positiv, da die durch die Temperaturzyklisierung aufgebrachte Verformung deutlich kleiner ist als die zu Beginn aufgebrachte Gesamtdehnung von +2%. Da im verwendeten Modell nach Kapitel 2.3 die Rate der kinematischen Verfestigung $\dot{\xi} = c\dot{\epsilon}_i - b|\dot{\epsilon}_i|\xi + \frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ ist, bewirkt der Term $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ eine Verkleinerung von $\dot{\xi}$ falls $\dot{\theta}$ negativ ist, das heißt wenn die Temperatur sinkt. Steigt die Temperatur so ist $\dot{\theta}$ positiv und der Term $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ vergrößert $\dot{\xi}$. Dieser Effekt wird wiederum im Grad der Zunahme der Spannung sichtbar. Zwischen Markierung 1 und 2 wo $\dot{\theta}$ positiv ist, besitzt die Kurve die mit dem Term $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ gerechnet wurde eine größere Steigung als die die ohne ihn berechnet wurde. Zwischen den Markierungen 2 und 3, wo $\dot{\theta}$ negativ ist, ist die mit dem Term $\frac{\circ}{c}\xi\dot{\theta}$ gerechnete Kurve die flachere. Zwischen Markierung 3 und 4 wo die Temperatur steigt ist sie wiederum steiler.

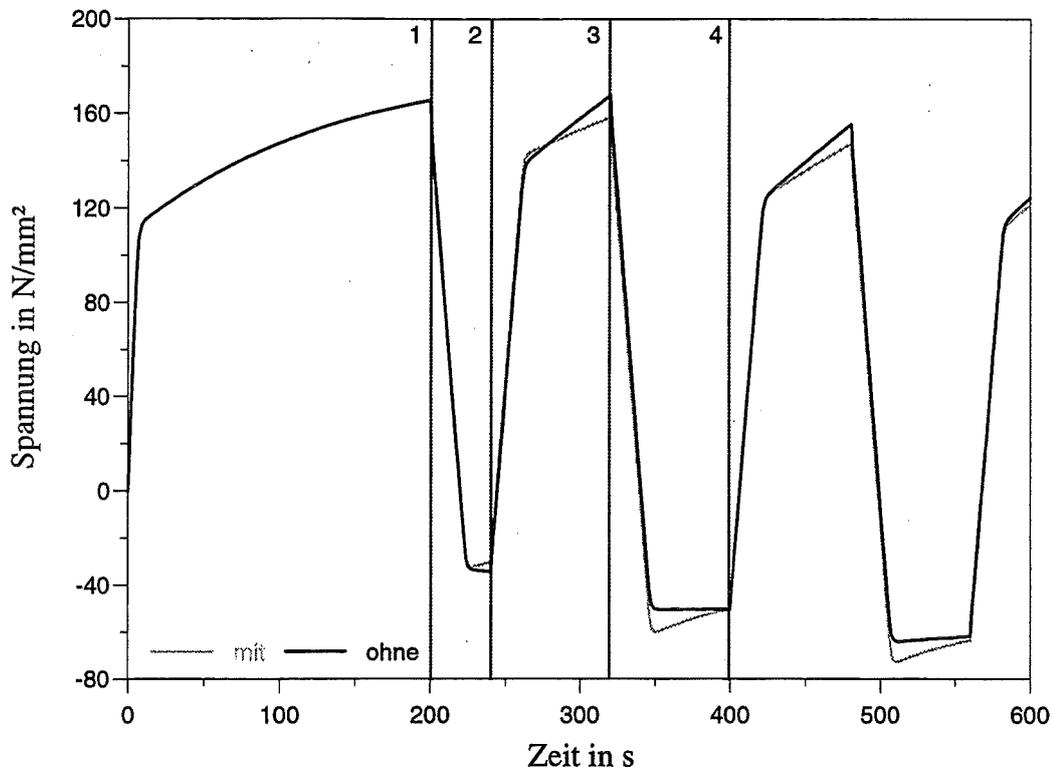


Bild 4.18: Berechnete Spannungs- Dehnungskurven mit unterschiedlicher kinematischer Verfestigung.

In Bild 4.19 ist dem in den Bildern 4.8 und 4.9 dargestellten Versuch nach Versuchsführung D ein mit dem Viskoplastizitätsmodell nach Kapitel 2.3 berechneter Verlauf gegenübergestellt. Auch in der Rechnung wurden Temperatur und Dehnung in Gegenphase zyklert, wobei zu Beginn der Lastgeschichte die Temperatur erhöht und eine negative Dehnung angefahren wird. Während der plastischen Verformung im Druckspannungsbereich des ersten Lastwechsels ist der errechnete Betrag der Spannung größer als der im Versuch ermittelte. Eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist entlang der elastischen Geraden und während der plastischen Verformung im Zugspannungsbereich des ersten Lastwechsels zu beobachten. Da der Versuchsverlauf starke zyklische Verfestigung aufweist, die in der Rechnung nicht berücksichtigt wird, kommen hier vom zweiten Lastwechsel an zunehmende Abweichungen des Spannungsbetrages von Versuch und Rechnung im Bereich plastischer Verformung vor.

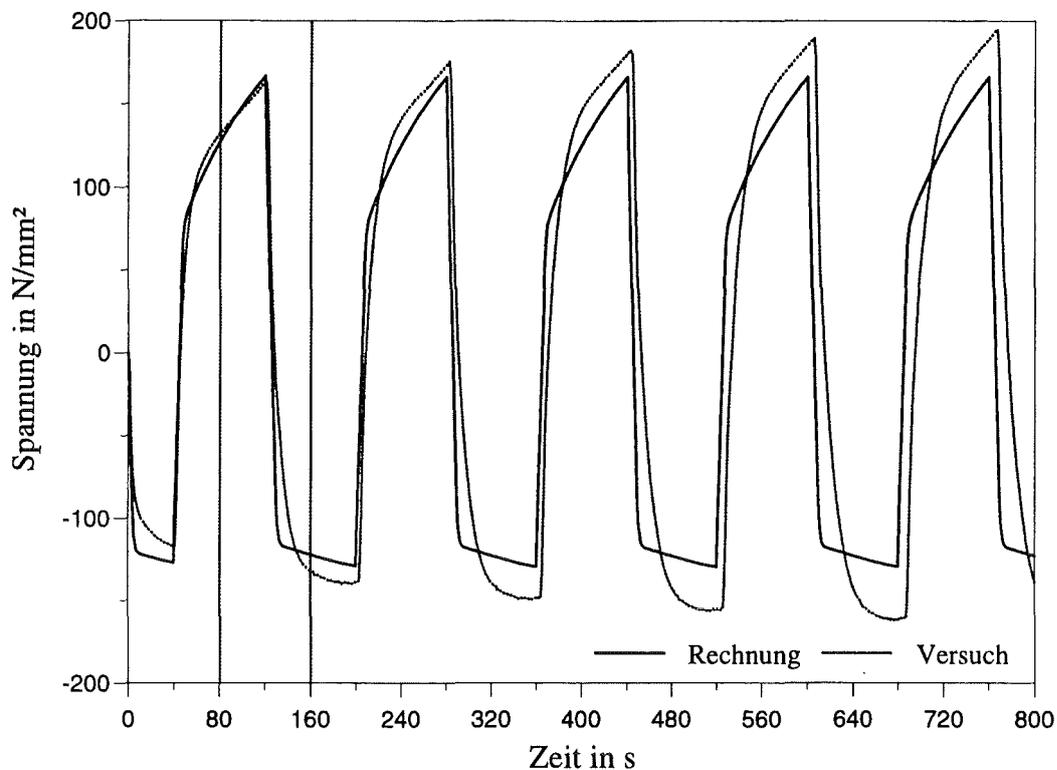


Bild 4.19: Spannungs- Zeitverläufe aus Versuch und Rechnung nach Versuchsart D.

In Bild 4.20 ist dem in den Bildern 4.10 und 4.11 dargestellten Versuch nach Versuchsart E ein mit dem Viskoplastizitätsmodell nach Kapitel 2.3 berechneter Verlauf gegenübergestellt. Eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung ist wiederum in allen Bereichen elastischer Verformung zu erkennen. In Bereichen plastischer Verformung treten die in Kapitel 4.1 begründeten Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung auf. Außerdem ist auch hier eine mit zunehmender Zyklenzahl steigende Abweichung zwischen Versuch und Rechnung festzustellen. Als Ursache ist wiederum anzugeben, daß beim Versuch zyklische Verfestigung auftritt, die im Modell nicht berücksichtigt wird. Anders als beim Experiment ist bei der Rechnung im inelastischen Zugspannungsbereich eine Abnahme der Spannung zu beobachten. Diese Abnahme ist, wie schon bei Bild 4.14 und Bild 4.17 erwähnt, mit der Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze $k = k_{0(\theta)}$ zu erklären, die wie in Kapitel 4.1 dargestellt zu höheren Temperaturen hin abnimmt.

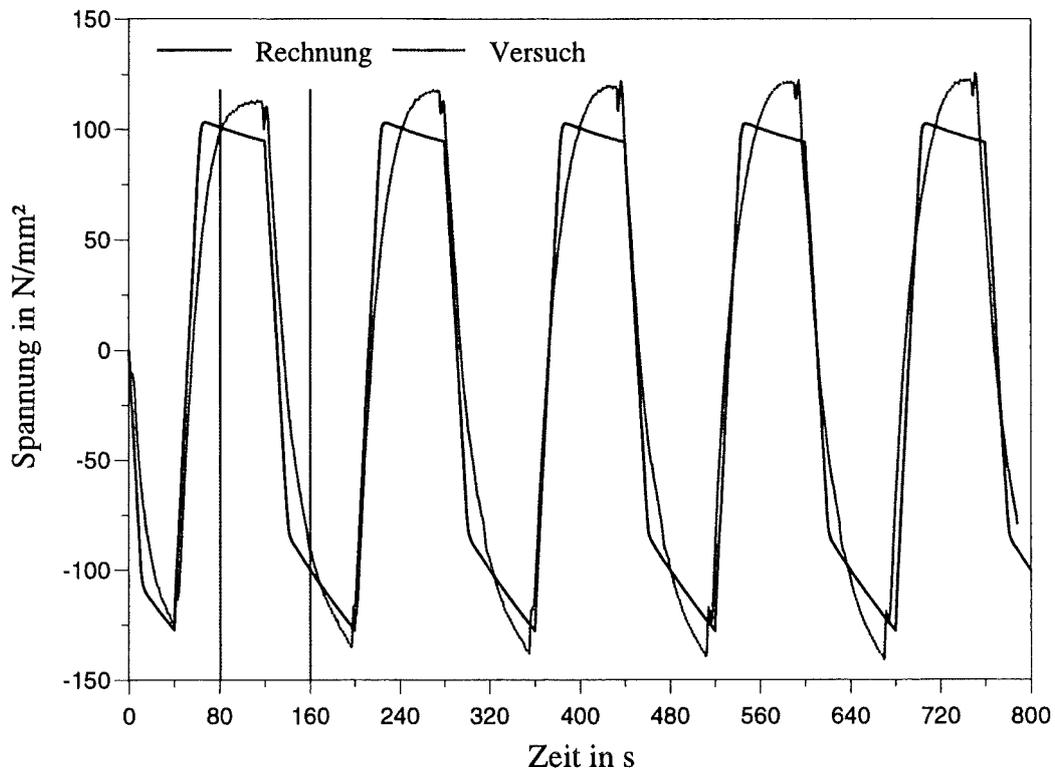


Bild 4.20: Spannungs- Zeitverläufe aus Versuch und Rechnung nach Versuchsart E.

5. Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Viskoplastizitätsmodell nach Chaboche in eindimensionaler Formulierung am Computer implementiert. Es bietet die Möglichkeit verschiedene Dehnungs- und Temperaturverläufe einzeln oder kombiniert vorzugeben. Hierbei können sämtliche Parameter als Funktion der Temperatur vorgegeben werden. Das Modell berücksichtigt sowohl kinematische als auch isotrope Verfestigung.

Es wurden sowohl isotherme Versuche zur Bestimmung der Parameter des Viskoplastizitätsmodells als auch nichtisotherme Versuche zur Beurteilung der Möglichkeiten des Modells durchgeführt.

Die Parameter einer vereinfachten Version des Viskoplastizitätsmodells mit ausschließlich kinematischer Verfestigung wurden für $T = 200^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$ bestimmt, indem errechnete Spannungs- Dehnungsverläufe an im Experiment ermittelte Spannungs- Dehnungskurven durch Variation der Parameter angepaßt wurden.

Die Versuche mit dem Werkstoff AISI 316L haben gezeigt, daß sowohl der E - Modul als auch die Fließgrenze mit steigender Temperatur abnehmen. Weiterhin wurde deutlich, daß der Werkstoff bei monotoner Belastung sowohl bei $T = 25^{\circ}\text{C}$, als auch bei $T = 200^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$ nennenswerte Verfestigung zeigt. Weiterhin war bei zyklischer Belastung eine ausgeprägte zyklische Verfestigung zu beobachten. Diese zyklische Verfestigung ist bei höheren Temperaturen stärker ausgeprägt gewesen und dauerte über eine größere Zyklenzahl an als bei niedrigeren Temperaturen. Es zeigte sich, daß der Betrag der Spannungsrelaxation und somit die Viskosität des Werkstoffs bzw. die sich aufbauende Überspannung mit steigender Temperatur abnimmt. Es konnte gezeigt werden, daß der Werkstoff eine der thermischen Zyklisierung vorangehende Verformung mit zunehmender Lastspielzahl „vergißt“. Weiterhin wurde deutlich, daß bei gegensinniger Überlagerung von Temperatur und Dehnungszyklisierung größere Spannungen und eine größere zyklische Verfestigung auftreten als bei gleichsinniger Überlagerung derselben Belastungsgrößen.

Die Gegenüberstellung von Versuch und Rechnung macht deutlich, daß die Modellantwort des in vereinfachter Form verwendeten Viskoplastizitätsmodells als gute Näherung einzustufen ist. Dies gilt insbesondere während des ersten Lastwechsels. Zu höheren Lastspielzahlen hin wird die Differenz zwischen Versuch und Rechnung größer, da das Modell nicht in der Lage ist, die bei AISI 316L auftretende zyklische Verfestigung nachzuvollziehen. In Bereichen in denen der Betrag der Spannung und die Temperatur gleichzeitig zunehmen, kann es aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Fließgrenze zu Unterschieden zwischen Versuch und Rechnung kommen.

6. Literaturverzeichnis

- [1] Tsakmakis Ch.:
Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen.
Habilitationsschrift, Universität- Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1994.
- [2] Tsakmakis Ch.:
Einführung in die Materialtheorie.
Vorlesung an der TH Karlsruhe, WS 1994/95.
- [3] Tsakmakis Ch.:
Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer Deformationen.
Dissertation, Darmstadt, VDI Reihe 18: Mechanik/Bruchmechanik, Bd. 36., 1987.
- [4] Tsakmakis Ch.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [5] Kamlah M.:
Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik.
Universität- Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1994.
- [6] Kamlah M.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [7] Lion A.:
Materialeigenschaften der Viskoplastizität Experimente, Modellbildung und Parameteridentifikation.
Universität- Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1994.
- [8] Schwertel J.:
Modellierung des einachsigen mechanischen Verhaltens von Werkstoffen durch viskoplastische Stoffmodelle.
Universität Karlsruhe Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau, 1992.

- [9] Lemaitre J. and Chaboche J. L.:
Mechanics of solid materials.
Cambridge University Press, 1990.
- [10] Chaboche J. L.:
Cyclic Viskoplastic Constitutive Equations, Part i: A. Thermodynamically Consistent Formulation.
Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, 1993.
- [11] Macherauch E.:
Praktikum in Werkstoffkunde. Vieweg, 7. Auflage(1987)
- [12] Touron H.:
Initial design equation for 316L austenitic steel, CEA, SRMA, contract Euratom/CEA N. 169/84-9/Fu/NET, 1985.
- [13] Ritter B.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [14] Lämmer H.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [15] Aktaa J.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [16] Rhodrian D.:
Persönliche Erläuterungen.
Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung, 1995/96.
- [17] Bronstein I.N., Semendjajew K.A.:
Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harry Deutsch Thun und Frankfurt/Main, 23. Auflage, 1987.
- [18] Papula L.:
Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Verlag Vieweg, 3. Auflage, 1990.

-
- [19] Armstrong P.J., Frederick C.O.:
Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effekt.
General Electricity Generating Board, Report No. RD/B/731. o. O., 1966.
- [20] Benallal A., Ben Cheik A.:
Constitutive Equations for Anisothermal Elasto- Viscoplasticity
Proceedings of the Second International Conference on Constitutive Laws for
Engineering Materials, Theory and Applications, held January 5-8, 1987, in Tucson,
Arizona, U.S.A.