

Forschungszentrum Karlsruhe

Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6327

Indikation von Strukturelementen durch Dimensionsbetrachtungen

Uwe Getzlaff und Lutz Gröll

Institut für Angewandte Informatik

Arbeitsbericht zum DFG-Fördervorhaben

Modellstrukturierung von sicherheitsrelevanten technischen Systemen mittels tensororientierter Mustererkennung und Genetischen Algorithmen (BR 1303/3-1)

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2000

Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe

Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)

ISSN 0947-8620

Zusammenfassung

Dies ist ein Arbeitsbericht zum DFG-Fördervorhaben „Modellstrukturierung von sicherheitsrelevanten technischen Systemen mittels tensororientierter Mustererkennung und Genetischen Algorithmen“ (BR 1303/3-1). In der Arbeit werden zwei Bewertungsmaße zur Indikation von Strukturelementen für lineare SISO-Systeme vorgestellt und deren Möglichkeiten anhand von Simulationsbeispielen demonstriert. Die Besonderheit dieser beiden Bewertungsmaße ist, dass für ein $PT_nT'_m$ -System **eine** Polstelle und/oder **eine** Nullstelle als Modell angesetzt wird. Die Bewertungsmaße dienen also nicht der Parameteridentifikation, sondern der Indikation von Strukturelementen.

Die generelle Vorgehensweise ist für beide Bewertungsmaße gleich, basiert auf einer Dimensionsbetrachtung an einem Fehlermodell und wurde im Bericht FZR-244 eingeführt.

Das erste Bewertungsmaß ist der Verlauf des MKQ-Schätzfehlers. Der MKQ-Schätzfehler ist hier der Fehler der MKQ-Schätzung der Parameter des dimensionsreduzierten Fehlermodells. Für den Fall, dass das angesetzte Modellelement Bestandteil des zu modellierenden Systems ist, ist das dimensionsreduzierte Fehlermodell exakt und der Schätzfehler wird im ungestörten Fall Null.

Das zweite Bewertungsmaß ist der Verlauf der Singulärwerte einer vom Fehlermodell abhängigen Matrix. Die Matrix ist so konstruiert, dass ihre Spalten linear abhängig werden, wenn das angesetzte Modellelement Bestandteil des zu modellierenden Systems ist.

Beide Verfahren benötigen einen geschätzten Frequenzgang. Dabei sind 10 bis 20 logarithmisch verteilte Frequenzpunkte ausreichend und 5% bis 15% Störung kann noch toleriert werden. Die Indikation mittels der Singulärzahl ist der Indikation mittels MKQ-Schätzfehler vorzuziehen, da die Bestimmung der Singulärzahl weniger numerische Probleme bereitet. Mit Hilfe der Indikation von Strukturelementen kann ein System schrittweise modelliert werden. Die hier vorgestellten Methoden lassen sich überall dort anwenden, wo das Fehlermodell als lineare Beziehung formuliert werden kann.

Abstract

Indication of structure elements through consideration of dimensions

The report describes a new method and two criteria of quality for the estimation of structure elements of continuous linear dynamic systems. With the usual system identification methods it is necessary to pretend a fitting system order. In contrast to that, our method is able to estimate a single structure element in a system with many structure elements (e.g. a single zero of a linear dynamic system with four poles and two zeroes). For our method the knowledge about the order of the system is not necessary.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Allgemeine Vorgehensweise	3
3	MKQ-Schätzfehler als Indikator	5
3.1	Bewertungsmaß ohne Beachtung von Nullstellen	5
3.1.1	Herleitung des Bewertungsmaßes	5
3.1.2	Simulationsbeispiele für Systeme ohne und mit Nullstellen	7
3.2	Bewertungsmaß mit Beachtung von Nullstellen	12
3.2.1	Indikation von Polstellen	12
3.2.2	Indikation von Nullstellen	14
4	Singulärwerte als Indikator	16
4.1	Bewertungsmaß ohne Beachtung von Nullstellen	16
4.1.1	Herleitung des Bewertungsmaßes	16
4.1.2	Simulationsbeispiele für Systeme ohne und mit Nullstellen	19
4.2	Bewertungsmaß mit Beachtung von Nullstellen	22
4.2.1	Indikation von Polstellen	22
4.2.2	Indikation von Nullstellen	25
5	Diskussion der Ergebnisse	32
6	Zusammenfassung	34

1 Einleitung

Diese Arbeit stellt zwei Algorithmen zur Indikation von Strukturelementen vor und dokumentiert deren simulative Erprobung. Beide Algorithmen dienen als Maß für die Richtigkeit eines Teilsystems, ohne dass das Gesamtsystem bekannt sein muss. Die Informationen dazu werden aus einem Fehlermodell abgeleitet, dass im Bericht FZR-244 [Hop98] eingeführt wurde.

Die Arbeit ist ein Schritt im DFG-Forschungsprojekt „Modellstrukturierung von sicherheitsrelevanten technischen Systemen mittels tensororientierter Mustererkennung und Genetischen Algorithmen“ (BR 1303/3-1). Ziel dieses Forschungsprojektes ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Strukturermittlung für sicherheitsrelevante technische Systeme. Die Literatur zeigt, Verfahren zur Parameterschätzung sind gut ausgearbeitet. Auch die Modellordnung kann für einige Modellklassen geschätzt werden, d.h. die Anzahl der Parameter für eine Modellklasse wird nach einem Kriterium optimal festgelegt. Voraussetzung für die Bestimmung der Modellordnung und die Parameterschätzung ist jedoch eine richtige Struktur. Aus diesem Grund ist ein Verfahren zur Modellstrukturierung von zentraler Bedeutung für die Regelungstechnik und die Systemtheorie.

Die Struktur kann durch

- theoretische Modellbildung aus physikalischen, chemischen u. a. Gesetzmäßigkeiten und/oder
- experimentelle Modellbildung aus Messwerten gewonnen werden.

In diesem Projekt wird überwiegend die experimentelle Modellbildung betrachtet. Dazu müssen Daten für das Eingangs-Ausgangsverhalten des Prozesses vorliegen. A-priori-Informationen sind notwendig, um den Suchraum einzuschränken. Die Begrenzung des Suchraumes wird bewusst auf ein notwendiges Minimum beschränkt, um subjektive Fehler möglichst auszuschließen. Das ist besonders bei Annahmen über sicherheitsrelevante Anlagen wichtig. Als Informationsquelle werden Prozesssignalen bevorzugt, da sie eine objektive Bewertung ermöglichen.

Jedes System lässt sich in zwei Teilsysteme zerlegen [MT75], in ein Eingangs-(Teil-)System und ein Ausgangs-(Teil-)System. Eingangssystem und Ausgangssystem sind durch Zustände miteinander gekoppelt. Die Zustandsdarstellung, eines durch sein Eingangs-Ausgangsverhalten definierten Systems, ist nicht eindeutig. Durch äquivalente Transformation können die verschiedenen Zustandsdarstellungen ineinander überführt werden. Aus diesem Grund wird hier nicht von Strukturidentifikation, sondern von **Modellstrukturierung** gesprochen. Wenn für die innere Struktur des Systems nichts a-priori vorgegeben wird, kann nur die Eingangs-Ausgangsdarstellung zur eindeutigen Definition des Systems genutzt werden. Diese Eingangs-Ausgangsdarstellung ist im allgemeinsten Fall eine Abbildung der Menge der Eingangswerte auf die Menge der Ausgangswerte. Diese Darstellung ist aber eine nichtparametrische Darstellung und damit ohne Struktur. Die Tatsache, dass die Struktur eines Systems aus den Daten nicht eindeutig bestimmt werden kann, unterstreicht die Bedeutung der theoretischen Modellbildung und führte dazu, dass die Modellstrukturierung in den letzten Jahrzehnten wenig untersucht wurde. Der Begriff Systemidentifikation ist schon fast ein Synonym für Parameteridentifikation geworden (siehe z. B. [Ise88, Unb93]).

Bei der theoretischen Modellbildung ist für jeden Anwendungsfall fachspezifisches Wissen notwendig. So ist z.B. für die Modellierung eines chemischen Reaktors anderes Wissen erforderlich als für die Modellierung einer Krananlage. Einen Eindruck, wie vielfältig die theoretische Modellbildung für Regelaufgaben ist, gibt [Foe94]. Das Spezialwissen ist nicht immer in ausreichendem Maße vorhanden oder die theoretische Modellbildung ist mitunter zu aufwendig. Dann wird die experimentelle Modellbildung genutzt.

Die übliche Vorgehensweise ist, ein Modell mit einer bestimmten Struktur und Ordnung anzunehmen, gegebenenfalls das Objekt mit geeignet ausgewählten Testsignalen anzuregen und einen für die angenommene Struktur und die vorhandenen Daten geeigneten Algorithmus zur Parameteridentifikation auszuwählen oder zu entwickeln und anzuwenden. Das die (auf der Grundlage von A-priori-Informationen) angenommene Struktur und Ordnung richtig sind, also dem Objekt wirklich entsprechen, ist eine mitunter schwer zu überprüfende Grundvoraussetzung. In einigen Fällen aber ist die Struktur des Systems völlig unbekannt, die Systemstruktur explizit gesucht oder die Einschränkung auf eine bestimmte Klasse unbefriedigend oder unerwünscht. Dann muss das Modell auf der Grundlage der Daten strukturiert werden. Diese bisher wenig bearbeitete Aufgabe ist Gegenstand des Projektes.

Um keine Strukturannahmen treffen zu müssen, wird seit Mitte der 90-er Jahre praktiziert, Strukturen zu würfeln, zu bewerten und auszuwählen. Zum geschickten Würfeln werden Methoden der evolutionären Berechnung (EC), (Evolutionary Computation) [HB98] genutzt. Der Rechenaufwand ist allerdings beträchtlich [MBC95]. Die vorgestellten Ergebnisse [Bet96, Ign96] weisen darauf hin, dass mit theoretischem Grundverständnis des zu modellierenden Systems und einer manuellen, interaktiven Vorgehensweise zumindest gleichwertige Ergebnisse erzielbar sind. Bekannte Bewertungsmaße liefern nur Aussagen darüber, wie das gesamte Modell das gemessene Eingangs-Ausgangsverhalten abbildet. Wünschenswert sind jedoch Bewertungsmaße, die Aussagen über die Richtigkeit eines Teiles des Modellansatzes liefern. Dann können die richtigen Modellelemente aus unterschiedlichen Ansätzen separiert werden und das Modell aus diesen als richtig indizierten Elementen zusammengesetzt werden. Das verringert das Problem von einer nahezu unbegrenzten Variation auf eine stark eingeschränkte Kombination. Besonders die EC-Algorithmen arbeiten erst richtig effektiv, wenn die Bewertungsmaße gute Teilmodelle oder richtige Modellelemente anzeigen.

Im Bericht FZR-244 [Hop98], der im Rahmen dieses Projektes entstanden ist, wurde ein Bewertungsmaß zur Indikation von Linearfaktoren von SISO-Systemen vorgestellt. Dieses Bewertungsmaß ist aus Dimensionsbetrachtungen am Fehlermodell hervorgegangen. Es wendet abgewandelte Maße der fraktalen Liniendimension auf die Ortskurve an. Im vorliegenden Bericht werden zwei weitere Maße für Linearfaktoren von SISO-Systemen vorgestellt. Das erste Maß ist der Fehler der MKQ-Parameterschätzung für ein dimensionsreduziertes Schätzproblem. Das zweite Maß sind die Singulärwerte einer Matrix, die die Linearität des dimensionsreduzierten Fehlermodells abbildet.

Ziel der Arbeit ist es, Maße zu entwickeln, die die Richtigkeit von Strukturelementen anzeigen, ohne dass das Gesamtsystem oder die Struktur des gesamten Systems bekannt sind. Eine vollständige Unkenntnis über das System schließt die Annahme der Linearität aus. Die hier vorgestellten Maße sind vorerst auf lineare Systeme beschränkt. (Sie nutzen die Systembeschreibung im Frequenzbereich.) In soweit sind sie nur ein erster Schritt in die Richtung der Zielstellung. Ohne dass die Ordnung des linearen Systems (Zählergrad und Nennergrad) berücksichtigt wird, können beide Maße Polstellen oder Nullstellen anzeigen. Dabei dient als Modellansatz eine **einzelne** Polstelle bzw. Nullstelle.

Die Theorie der linearen SISO-Systeme ist gut ausgearbeitet. Die Annahme der Linearität kann mit Linearitätstests überprüft werden. Es gibt Verfahren, die Ordnung des Systems zu bestimmen und zuverlässige Methoden zur Parameteridentifikation. Die hier beschriebene Methode ist nicht als Alternative oder Konkurrenz zur bewährten Parameteridentifikation zu sehen. Sie stellt vielmehr eine neue Denkweise dar, die der Absicht entspricht, bestimmte Strukturelemente möglichst in beliebigen Systemen zu erkennen.

2 Allgemeine Vorgehensweise

Ausgangspunkt ist der geschätzte Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ des zu untersuchenden Prozesses. Dieser wird mit dem berechneten Frequenzgang $G_M(j\omega)$ des angesetzten Modellelementes an den Stellen $j\omega_i$ verglichen. Daraus resultiert, wie weiter unten noch näher erläutert wird, der geschätzte Frequenzgang eines Fehlermodells $\hat{G}_F(j\omega_i)$. Für dieses Fehlermodell können Dimensionsmaße berechnet werden. Wenn die Dimension des Fehlermodells $\hat{G}_F(j\omega_i)$ für ein bestimmtes Modellelement $G_M(j\omega)$ deutlich, gegenüber dem Fehlermodell mit anderen Modellelementen abfällt, dann ist das ein Zeichen dafür, dass das Modellelement richtig angenommen wurde. Diese grundlegende Vorgehensweise wurde im Bericht FZR-244 [Hop98] eingeführt.

Für die hier vorgestellte Methode ist der geschätzte Frequenzgang des zu untersuchenden Prozesses notwendig. Dieser Frequenzgang muss aus den zu diskreten Zeitpunkten nT_A gemessenen Eingangs- und Ausgangssignalen $u[k]$ und $v[k]$ für repräsentative Frequenzpunkte $j\omega_i$ geschätzt werden (siehe dazu z.B. [Wer89]). Damit steht der geschätzte Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ des zu untersuchenden Prozesses zur Verfügung. Ausreichende Erregung des Prozesses, große Messdauer und hohe Messgenauigkeit werden vorausgesetzt.

Der Modellansatz erfolgt für ein Modellelement analytisch im Frequenzbereich in der Form:

- für Polstellen

$$G_M(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T_M} \quad (1)$$

- für Nullstellen

$$G_M(j\omega) = (1 + j\omega \cdot T'_M) \quad (2)$$

- für Pol- und Nullstellen

$$G_M(j\omega) = \frac{1 + j\omega \cdot T'_M}{1 + j\omega \cdot T_M} \quad (3)$$

Für die Frequenzen $j\omega_i$, an denen der geschätzte Frequenzgang geschätzt wurde, wird für die angesetzten Modellelemente (1), (2) bzw. (3) der Frequenzgang exakt berechnet.

Das Fehlermodell sei wie folgt definiert.

Definition 1 Gegeben sei ein System G_P und ein Modell G_M . Das Fehlermodell G_F ist das System, das verknüpft mit G_M eine zu G_P äquivalente Abbildung der Eingänge U auf die Ausgänge Y realisiert. •

Für lineare Systeme enthält G_F unter der Annahme, dass G_M Bestandteil von G_P ist, den Teil von G_P der in G_M nicht enthalten ist. Das stellt Abbildung 1 allgemein für ein lineares System im Bildbereich dar.

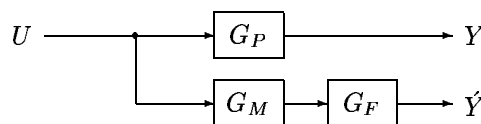


Abbildung 1: Fehlermodell, mit G_F so, dass $G_M \cdot G_F = G_P$ und $Y = \hat{Y}$

Diese Arbeit ist auf lineare Systeme beschränkt. Mithin gilt

$$\frac{Y}{U} = G_P = G_M \cdot G_F \quad (4)$$

und speziell für G_F im (geschätzten) Frequenzbereich

$$\hat{G}_F(j\omega_i) = \frac{\hat{G}_P(j\omega_i)}{G_M(j\omega_i)} \quad . \quad (5)$$

An diesem Fehlermodell werden die weiteren Untersuchungen durchgeführt. Das Strukturelement im angesetzten Modell wird indiziert, durch die Reduktion der Dimension des Fehlermodells. Dazu wird als Dimension des Fehlermodells definiert:

Definition 2 Als Dimension des Fehlermodells eines linearen, zeitinvarianten SISO-Systems wird die Summe aus Zähler- und Nennergrad, d. h. die Anzahl der von Null verschiedenen Zeitkonstanten der Linearfaktoren, bezeichnet. •

Für die Reduktion der Dimension gelte die

Definition 3 Das Fehlermodell eines linearen, zeitinvarianten SISO-Systems heißt gegenüber dem System des zu modellierenden Prozesses dimensionsreduziert, wenn das Fehlermodell mindestens einen Linearfaktor des Systems des zu modellierenden Prozesses enthält und somit mindestens ein Linearfaktor im Fehlermodell entfällt und sich damit Zähler- und/oder Nennergrad des Fehlermodells reduzieren. •

Ziel ist es, für verschiedene Modellansätze eine Dimensionsreduktion des Fehlermodells zu erkennen. Dafür werden im Folgenden zwei Maße vorgestellt.

3 MKQ-Schätzfehler als Indikator

3.1 Bewertungsmaß ohne Beachtung von Nullstellen

3.1.1 Herleitung des Bewertungsmaßes

Zunächst werden zeitinvariante lineare Eingrößensysteme ohne Totzeit und Nullstellen betrachtet. Diese bestehen aus einer statischen Verstärkung und n Verzögerungsgliedern erster Ordnung. Durch entsprechende Skalierung der Messgrößen, kann die Verstärkung immer auf Eins festgelegt werden. Eine Verstärkung beeinflusst die Dimension eines Problems nicht. Dementsprechend wird als Modell **ein** Verzögerungsglied erster Ordnung angesetzt. Damit wird beabsichtigt, dass das resultierende Fehlermodell ein, gegenüber dem Prozess, dimensionsreduziertes System darstellt. Im Frequenzbereich ist das Fehlermodell mit dem Modellansatz (1) durch

$$G_F(j\omega) = \frac{G_P(j\omega)}{G_M(j\omega)} = \frac{1 + j\omega T_M}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) \cdots (1 + j\omega T_n)} \quad (6)$$

definiert. Dabei ist der Nennergrad n offen. Er muss jedoch größer sein, als der zu erwartende Nennergrad des Systems des zu modellierenden Prozesses. Für den Fall, dass das Modell G_M mit einem Element des Systems übereinstimmt, muss T_M mit einer Verzögerungszeitkonstante des Prozesses übereinstimmen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, das sei T_n . Für diesen Fall gilt

$$G_F(j\omega, T_M) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots (1 + j\omega T_{n-1})} \quad (7)$$

Die Abhängigkeit des Fehlermodells vom Modellansatz spiegelt sich nun in der Abhängigkeit vom Parameter T_M wieder. Mit der Schreibweise¹ $j^a \cdot \omega^a = (j\omega)^a = j\omega^a$ ergibt sich umgeformt

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_F(j\omega, T_M)} &= 1 \\ &+ j\omega \quad (T_1 + T_2 + \dots + T_{n-1}) \\ &+ j\omega^2 \quad (T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3 + \dots + T_{n-2} \cdot T_{n-1}) \\ &\vdots \\ &+ j\omega^{n-1} (T_1 \cdot T_2 \cdots T_{n-1}) \\ &= 1 + j\omega \cdot a_1 + j\omega^2 \cdot a_2 + \dots + j\omega^{n-1} \cdot a_{n-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Mit dem geschätzten, nichtparametrischen Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ und dem für die Frequenzen $j\omega_i$, $i = 1, \dots, N$ berechneten Frequenzgangpunkten $G_M(j\omega_i)$ kann der geschätzte, nichtparametrische Frequenzgang des Fehlermodells (5)

$$\hat{G}_F(j\omega_i) = \frac{\hat{G}_P(j\omega_i)}{G_M(j\omega_i)}$$

aus Gleichung (8) berechnet werden. Dabei entsteht der Term

$$\frac{1}{\hat{G}_F(j\omega_i, T_M)} - 1 = j\omega_i \cdot a_1 + j\omega_i^2 \cdot a_2 + \dots + j\omega_i^{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (9)$$

mit der Form

$$y = R \theta \quad (10)$$

¹Für den geschätzten Frequenzgang wird stationäres Verhalten (ohne Dämpfung) vorausgesetzt. Darum wird nicht die komplexe Variable s bzw. $p = j\omega + \sigma$ des Laplace-Bildbereiches nutzen.

Hier ist y ein komplexwertiger Spaltenvektor, der aus den Elementen $1/\hat{G}_F(j\omega_i, T_M) - 1$ besteht. R ist eine Matrix mit den Elementen $(j\omega_i)^\nu$, $i = 1, \dots, N$, $\nu = 1, \dots, n - 1$ und $\theta = (a_1, \dots, a_{n-1})^T$ ist der Parametervektor. Die MKQ-Schätzung für den Parametervektor ist

$$\hat{\theta} = (R^T R)^{-1} R^T y \quad . \quad (11)$$

Der Ausgangsfehler K der Schätzung ist²

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y - \hat{y} \\ &= y - R(R^T R)^{-1} R^T y \end{aligned} \quad (12)$$

$$K = \varepsilon^T \varepsilon = y^T (I - R(R^T R)^{-1} R^T) y \quad . \quad (13)$$

Dieser Fehler wird im ungestörten Fall Null, wenn die obige Annahme $T_M = T_\nu$ richtig ist. Falls für alle $\nu = 1, \dots, n$ gilt, $T_M \neq T_\nu$, ist (7) nicht erfüllt, $\hat{\theta}$ wird $\neq \theta$ und der Fehler wird größer Null. Er ist somit ein Maß für die Richtigkeit der Annahme.

Grundlage für die Indikation eines Strukturelementes sind:

- ein in den Punkten $j\omega_i$ geschätzter, nichtparametrischer Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ des zu modellierenden Prozesses,
- eine Matrix R , die das dimensionsreduzierte Fehlermodell entsprechend (9) abbildet und
- ein Modellansatz entsprechend (1) für ein Strukturelement, der mit einem Parameter die Anpassung des Strukturelementes an den zu modellierenden Prozess ermöglicht.

Wird T_M aus (1) Null gesetzt, ist der Modellansatz identisch Eins und damit ohne Wirkung. Für $T_M = 0$ ist also $G_F = G_P$. Das Fehlermodell G_F hat dann die gleiche Dimension wie G_P . Für die Matrix R wurde aber das dimensionsreduzierte Fehlermodell (7) formuliert. Für $T_M \neq T_\nu \forall \nu$ ist (9) nicht erfüllt und der Schätzfehler K aus (13) der MKQ-Parameterschätzung (11) wird auch im ungestörten Fall größer Null. Im gestörten Fall ist der Wert von K für $T_M = 0$ ein geeigneter Vergleichswert für den Verlauf des MKQ-Schätzfehlers $K(T_M)$ in Abhängigkeit von T_M .

Betrachtet wird der Verlauf von K , der entweder durch Berechnung für ein geeignetes Raster oder durch Minimierung von $K(T_M)$ mit gerasterten Startwerten ermittelt wird. So oft $T_M = T_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$ wird, ist im ungestörten Fall (9) erfüllt, (10) hat eine eindeutige Lösung, (11) liefert den richtigen Parametervektor und K wird Null.

Da es für (9) egal ist für welches ν $T_M = T_\nu$ wird, kann der MKQ-Schätzfehler K nicht nur anzeigen dass eine Polstelle im System vorhanden ist und wo diese liegt d. h. welche Zeitkonstante sie aufweist, sondern am Verlauf von $K(T_M)$ kann im ungestörten Fall auch der Nennergrad von G_P abgelesen werden. Voraussetzung ist natürlich, dass das Intervall über T_M , für das $K(T_M)$ berechnet wird, alle Zeitkonstanten T_ν , $\nu = 1, \dots, n$ enthält. Praktisch ist dieses Intervall durch Abtastzeit und Abtastintervall begrenzt. Durch grundlegende Prozesskenntnis kann das Intervall oft noch stärker eingengt werden.

Je stärker $\hat{G}_P(j\omega_i)$ gestört ist, um so weniger hängt der Schätzfehler K von der Gültigkeit der Gleichung (9) ab. Darum ist der MKQ-Schätzfehler K für starke Störungen nicht geeignet Strukturelemente anzuzeigen. Unter welchen Bedingungen mit dem MKQ-Schätzfehler Strukturelemente erkannt werden können, zeigen die folgenden Simulationsbeispiele.

² $(I - R(R^T R)^{-1} R^T) \cdot (I - R(R^T R)^{-1} R^T) = (I - R(R^T R)^{-1} R^T)$

3.1.2 Simulationsbeispiele für Systeme ohne und mit Nullstellen

Die in diesem Abschnitt folgenden Abbildungen stellen den Fehler K der MKQ-Schätzung (11) des dimensionsreduzierten Problems (9), in Abhängigkeit von der Zeitkonstante T_M des angesetzten Modellelements dar. In Abbildung 2 ist zu sehen, dass im ungestörten Fall für ein PT_6 System alle sechs Verzögerungsglieder mit der richtigen Zeitkonstante indiziert werden.

Liegen die Zeitkonstanten dichter zusammen, gibt es bei Systemen höherer Ordnung numerische Probleme. Die beiden Verzögerungsglieder eines PT_2 werden allerdings im ungestörten Fall immer erkannt, solange die Auflösung des Rasters über T_M , für das $K(T_M)$ berechnet wird, den Unterschied abbilden kann. In Abbildung 3 liegen T_1 und T_2 10% auseinander.

Fallen die Zeitkonstanten aufeinander, z. B. bei einem PT_4 mit $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 30$ kann nur ein Verzögerungselement indiziert werden (siehe Abbildung 4).

Bei 10% Differenz zwischen den Zeitkonstanten und einer normalverteilten Störung mit einer 98% Störintervallbreite von $\eta = 5\%$ des Betrages des simulierten Frequenzgangpunktes $G_P(j\omega_i)$, liefert der Algorithmus nur noch ein Verzögerungselement mit der Summenzeitkonstante, wenn sehr viele (z. B. 500) Frequenzpunkte in die Berechnung eingehen (siehe Abbildung 5).

Werden nur 10 Frequenzpunkte betrachtet, indiziert der Algorithmus zwei Verzögerungselemente. Die Werte weisen aber große Fehler auf, besonders für die kleinere Zeitkonstante (siehe Abbildung 6). Da der Algorithmus mit wenigen Frequenzpunkten auskommt und meist deutlich mehr Frequenzpunkte vorhanden sind, ist es möglich, Störungen auszumitteln. Ein solcher Filter muss jedoch den Eigenschaften des Frequenzganges angepasst sein und wird hier nicht weiter untersucht. Bei richtiger Wahl der Anzahl von Frequenzpunkten kann auch ohne Filter bei 5% Störung ein PT_3 -System noch indiziert werden (siehe Abbildung 7).

Bei obigem Ansatz wirken Nullstellen wie Störungen, da Nullstellen im Ansatz nicht berücksichtigt wurden. Pole, die in der Nähe von Nullstellen liegen, können nicht mehr erkannt werden. In Abbildung 8 ist das Ergebnis für ein $PT_3T'_1$ -System mit innen liegender Nullstelle ($T_2 < T'_1 < T_3$) und in Abbildung 9 für ein $PT_3T'_2$ -System mit außen liegenden Nullstellen ($T'_1 < T'_2 < T_1 < T_2 < T_3$) dargestellt.

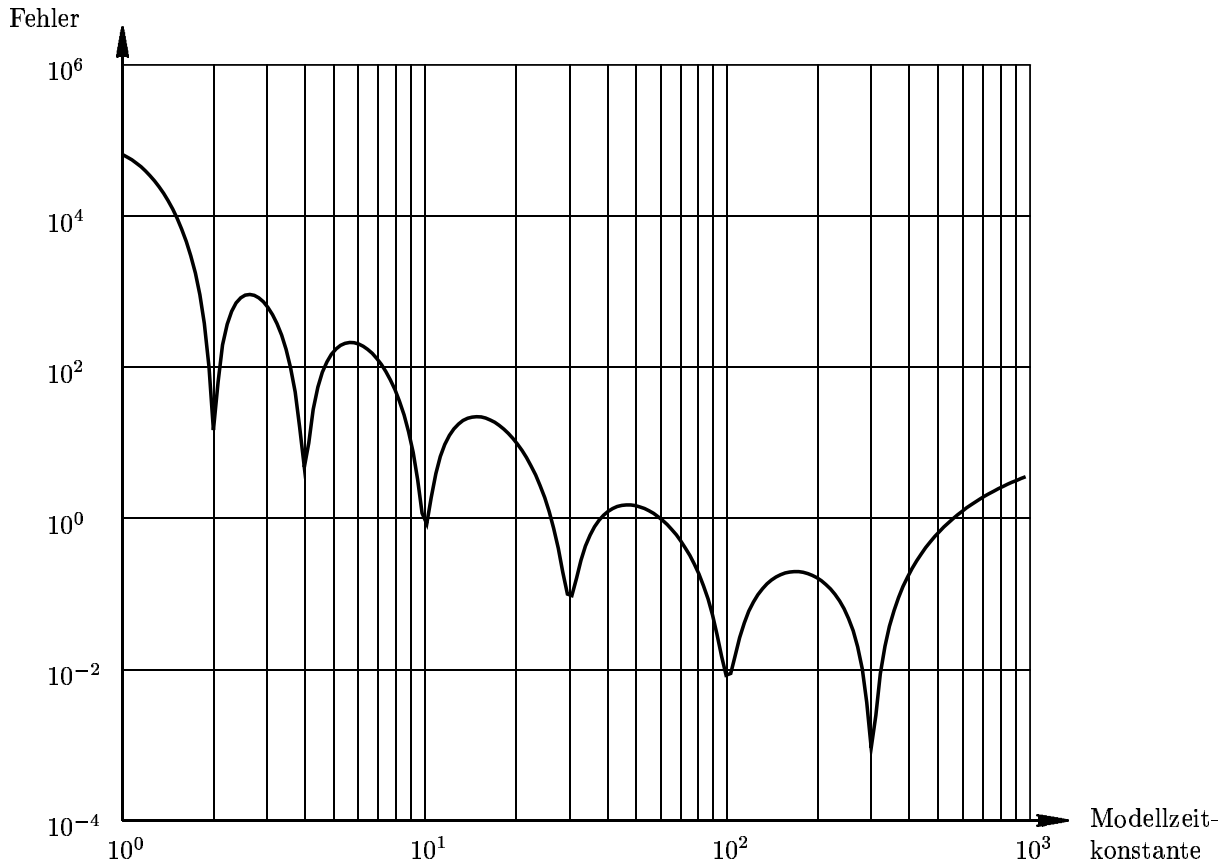


Abbildung 2: Verlauf des Schätzfehlers für PT_6 -System ($T_1 = 2, T_2 = 4, T_3 = 10, T_4 = 30, T_5 = 100, T_6 = 300$) bei einem Ansatz mit $n = 8$

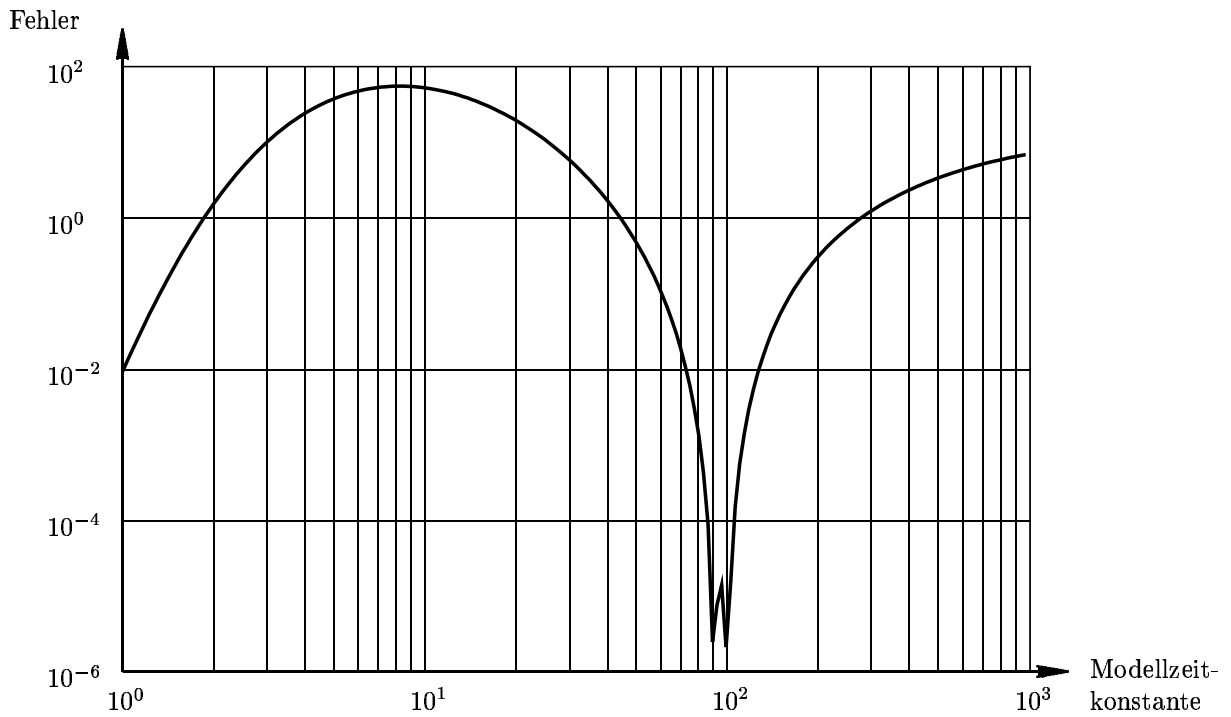


Abbildung 3: Verlauf des Schätzfehlers für PT_2 -System ($T_1 = 90, T_2 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 8$

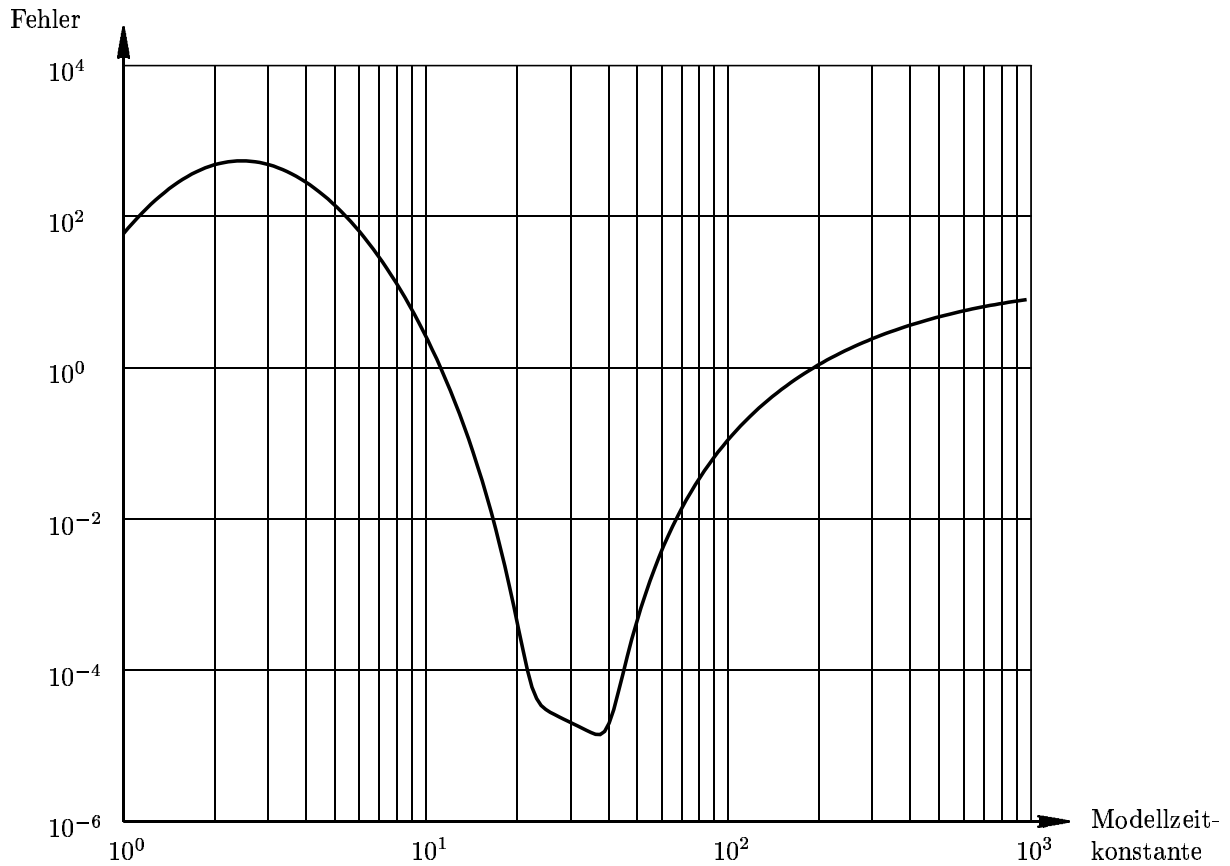


Abbildung 4: Verlauf des Schätzfehlers für PT₄-System ($T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 30$) bei einem Ansatz mit $n = 8$

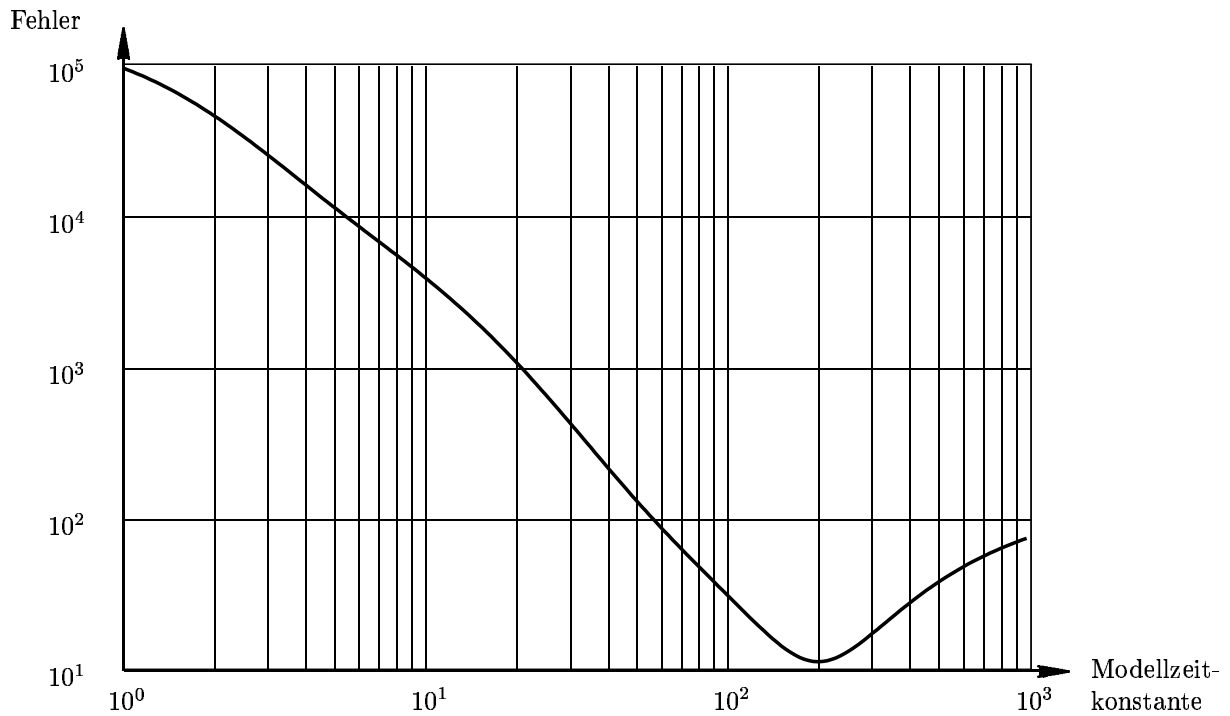


Abbildung 5: Verlauf des Schätzfehlers für PT₂-System ($T_1 = 90, T_2 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 500 Frequenzpunkte

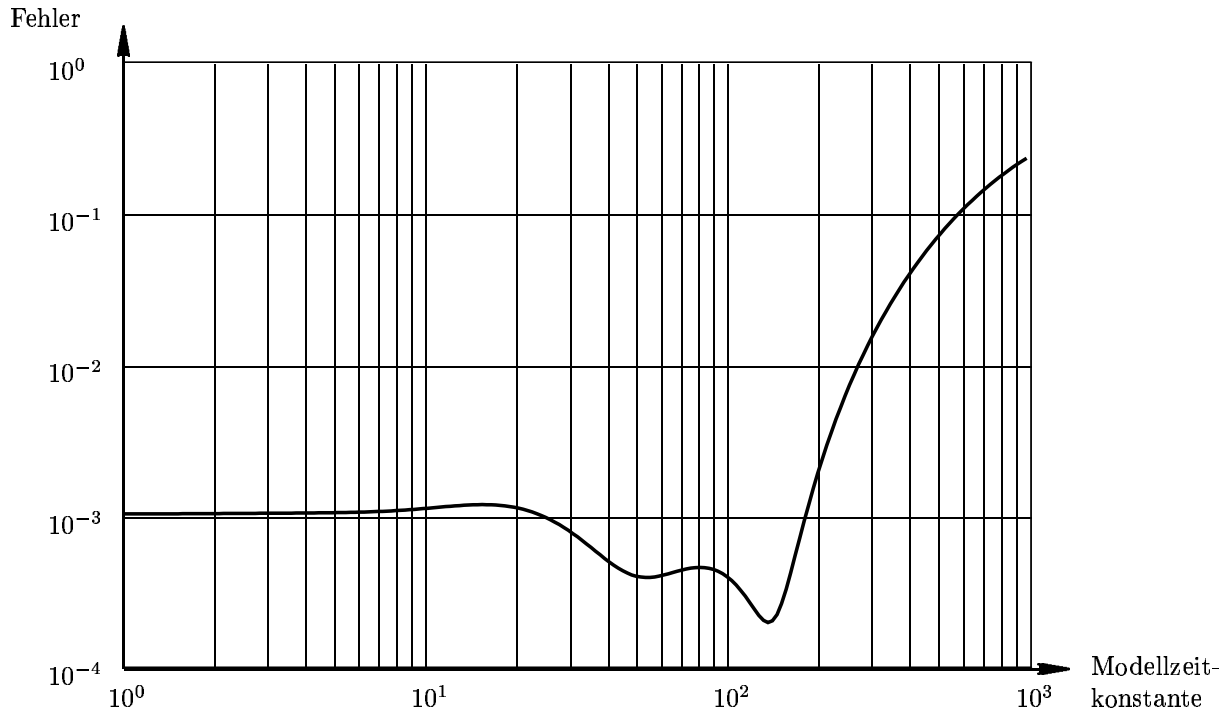


Abbildung 6: Verlauf des Schätzfehlers für PT_2 -System ($T_1 = 90$, $T_2 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

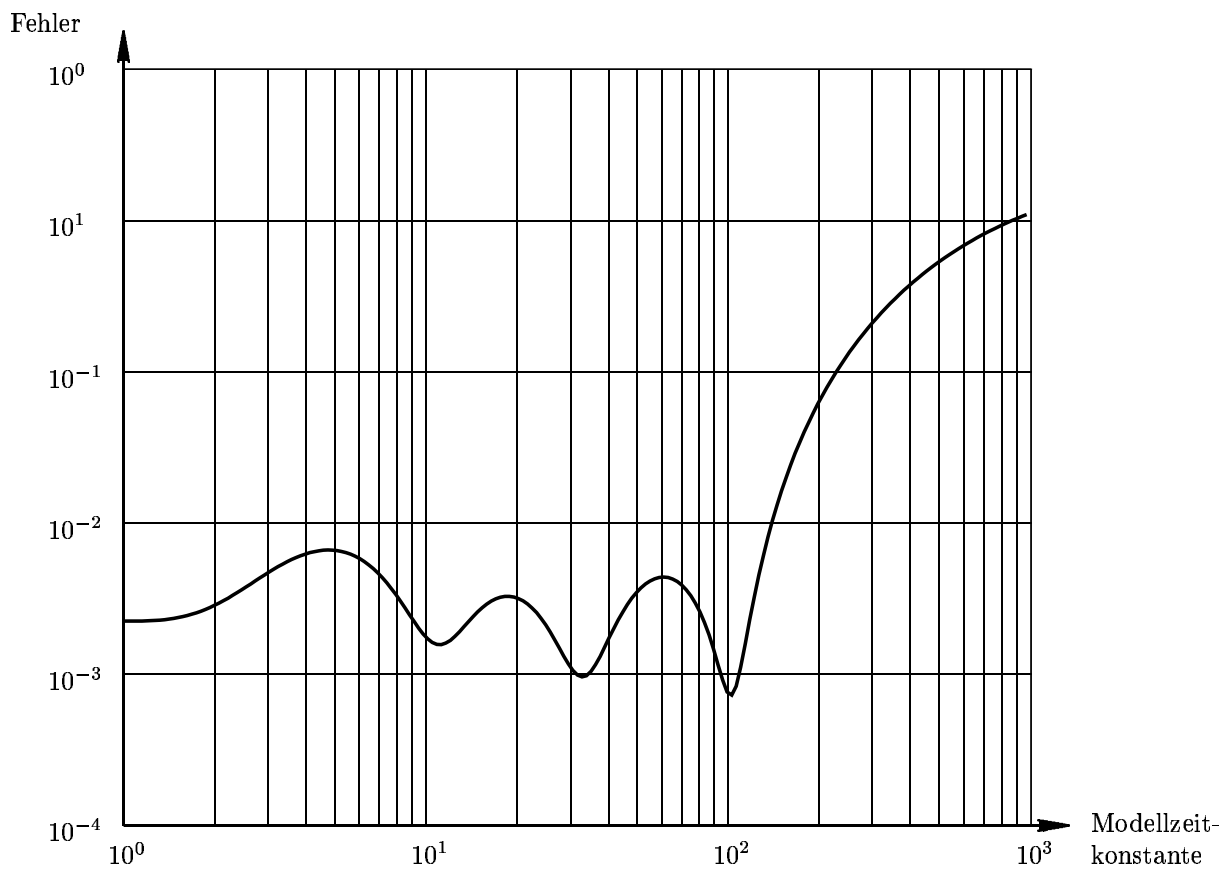


Abbildung 7: Verlauf des Schätzfehlers für PT_3 -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $T_3 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 6$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

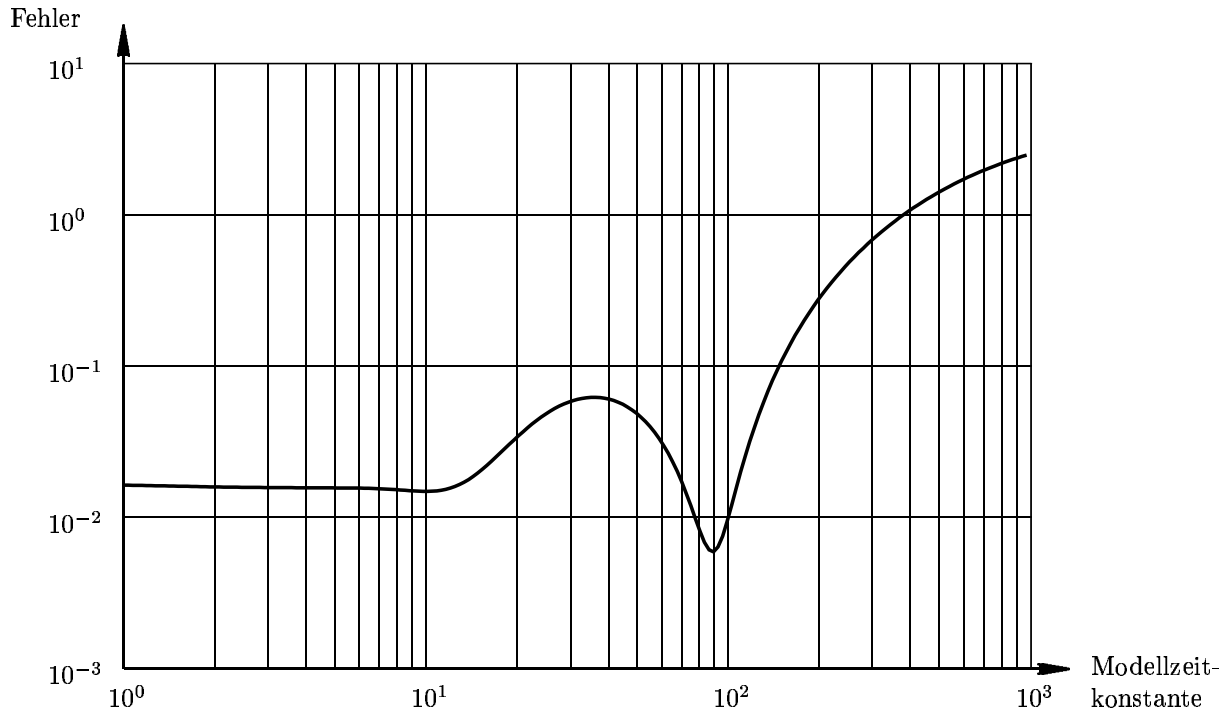


Abbildung 8: Verlauf des Schätzfehlers für $PT_3T'_1$ -System ($T_1 = 10, T_2 = 30, T_3 = 100, T'_1 = 50$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 20 Frequenzpunkten

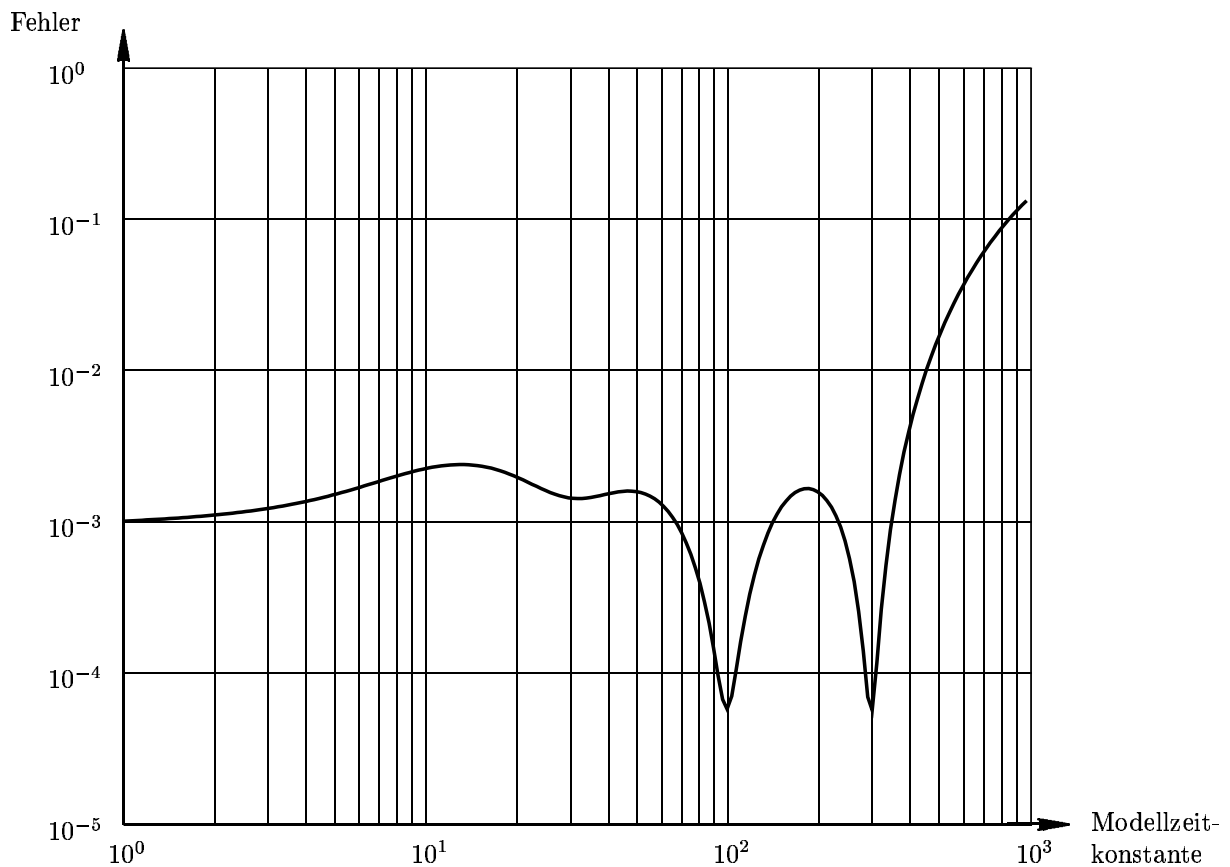


Abbildung 9: Verlauf des Schätzfehlers für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30, T_2 = 100, T_3 = 300, T'_1 = 10, T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

3.2 Bewertungsmaß mit Beachtung von Nullstellen

Bisher wurden bei der Herleitung des Bewertungsmaßes Nullstellen nicht beachtet. Für Systeme ohne Nullstellen konnten die Polstellen gut erkannt werden. Für Systeme mit Nullstellen wurden die Polstellen nicht zuverlässig angezeigt. Darum werden im Folgenden zusätzlich die Nullstellen betrachtet. Nach der Herleitung des Bewertungsmaßes unter Berücksichtigung von Pol- und Nullstellen, werden für Systeme mit Pol- und Nullstellen als erstes mit dem Modellansatz (1) Polstellen, und danach mit dem Modellansatz (2) Nullstellen indiziert. Die Aufgabe nur unter Berücksichtigung von Nullstellen Nullstellen zu indizieren, wird nicht betrachtet. Diese Aufgabe ist einerseits technisch unsinnig und andererseits mathematisch der im vorigen Abschnitt untersuchten Aufgabe äquivalent, nur unter Berücksichtigung von Polstellen Polstellen zu indizieren.

3.2.1 Indikation von Polstellen

Das Fehlermodell nach Abbildung 1 mit dem Modellansatz (1) für Polstellen wird im Frequenzbereich für Systeme mit Pol- und Nullstellen durch

$$G_F(j\omega) = \frac{G_P(j\omega)}{G_M(j\omega)} = \frac{1 + j\omega T_M}{1} \cdot \frac{(1 + j\omega T'_1)(1 + j\omega T'_2)(1 + j\omega T'_3) \cdots (1 + j\omega T'_m)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3) \cdots (1 + j\omega T_n)} \quad (14)$$

allgemein beschrieben. Die aus der Kausalität realer Systeme abgeleitete Forderung $m < n$ ist zwar für (14) genauso sinnvoll, aber nicht notwendig. Der Nennergrad n und der Zählergrad m müssen jedoch größer sein, als der zu erwartende Nennergrad bzw. Zählergrad des Systems des zu modellierenden Prozesses.

Es wird wieder angenommen, dass $T_M = T_n$ ist. Dann gilt mit der Abkürzung $G_F() = G_F(j\omega, T_M)$

$$G_F() = \frac{(1 + j\omega T'_1)(1 + j\omega T'_2)(1 + j\omega T'_3) \cdots (1 + j\omega T'_m)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots (1 + j\omega T_{n-1})} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 1 + j\omega \sum_{\nu_1}^{n-1} T_{\nu_1} + j\omega^2 \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{n-1} T_{\nu_1} T_{\nu_2} + \cdots + j\omega^{n-1} \prod_{\nu}^{n-1} T_{\nu} \\ = \frac{1 + j\omega \sum_{\mu_1}^m T'_{\mu_1} + j\omega^2 \sum_{\mu_1 < \mu_2}^m T'_{\mu_1} T'_{\mu_2} + \cdots + j\omega^m \prod_{\mu}^m T'_{\mu}}{G_F()} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 1 + j\omega a_1 + j\omega^2 a_2 + \cdots + j\omega^{n-1} a_{n-1} \\ = \frac{1}{G_F()} - \frac{j\omega}{G_F()} b_1 - \frac{j\omega^2}{G_F()} b_2 - \cdots - \frac{j\omega^m}{G_F()} b_m \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

Für den geschätzten Frequenzgang des Fehlermodells $\hat{G}_F() = \hat{G}_F(j\omega_i, T_M)$ aus (5) ergibt sich für die Frequenzgangpunkte $j\omega_i$

$$\left(\frac{1}{\hat{G}_F()} - 1 \right) = \left(\frac{j\omega_i}{\hat{G}_F()}, \frac{j\omega_i^2}{\hat{G}_F()}, \dots, \frac{j\omega_i^m}{\hat{G}_F()}, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^{n-1} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{=} \quad y = R \theta \quad . \quad (19)$$

Als Maß für die Richtigkeit der Annahme $T_M = T_n$ dient der Schätzfehler nach (13) für den Parametervektor θ . In der Abbildung 10 ist der Fehler der MKQ-Schätzung des dimensionsreduzierten Problems, in Abhängigkeit von der Zeitkonstante T_M des angesetzten Modellelementes dargestellt.

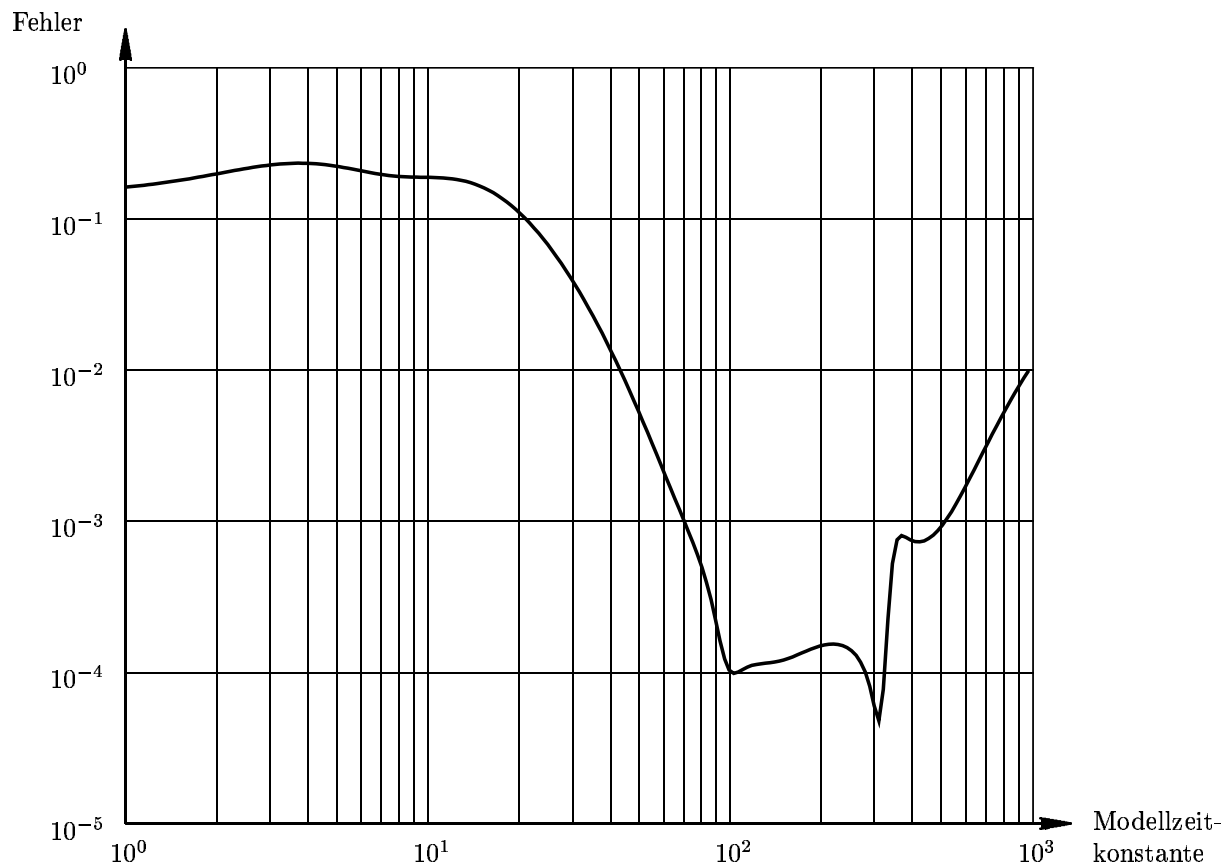


Abbildung 10: Verlauf des Schätzfehlers zur Indikation von Polstellen für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

Für die Matrix R wurden $m = 4$ und $n = 5$ gewählt, d. h. R besteht aus 8 Spalten. Das Ergebnis ist nicht besser als in Abbildung 9, bei der die Nullstellen im Ansatz (6) nicht berücksichtigt wurden. Außerdem ist die Matrix nach Ansatz (14) vom Modell abhängig und der Algorithmus deshalb numerisch wesentlich aufwendiger.

3.2.2 Indikation von Nullstellen

Als nächstes werden mit dem Ansatz, der Pol- und Nullstellen berücksichtigt, Nullstellen indizieren. Wird in (14) statt einer Polstelle eine Nullstelle als Modell angesetzt (2), sind

$$R = \left(\frac{j\omega_i}{\hat{G}_F(\cdot)}, \frac{j\omega_i^2}{\hat{G}_F(\cdot)}, \dots, \frac{j\omega_i^{m-1}}{\hat{G}_F(\cdot)}, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^n \right) \text{ und} \quad (20)$$

$$\theta = (b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, a_1, a_2, \dots, a_n)^T . \quad (21)$$

Die gleiche Matrix, die bei der Indikation von Polstellen einem Zählergrad von $m = 4$ und einem Nennergrad von $n = 5$ entspricht, stellt jetzt einen Zählergrad von $m = 5$ und einen Nennergrad von $n = 4$ dar. Trotz der quantitativen Abweichung der Zeitkonstanten für die Nullstellen ist die Indikation beider Nullstellen in Abbildung 11 als gutes Ergebnis zu werten, weil die Pole stark dominieren. Da in technisch realen Systemen immer die Pole dominieren, führt ein Ansatz ohne Polstellen nicht zum Erfolg. Zur Indikation von Nullstellen ist der Ansatz (14) mit Null- und Polstellen sinnvoll.

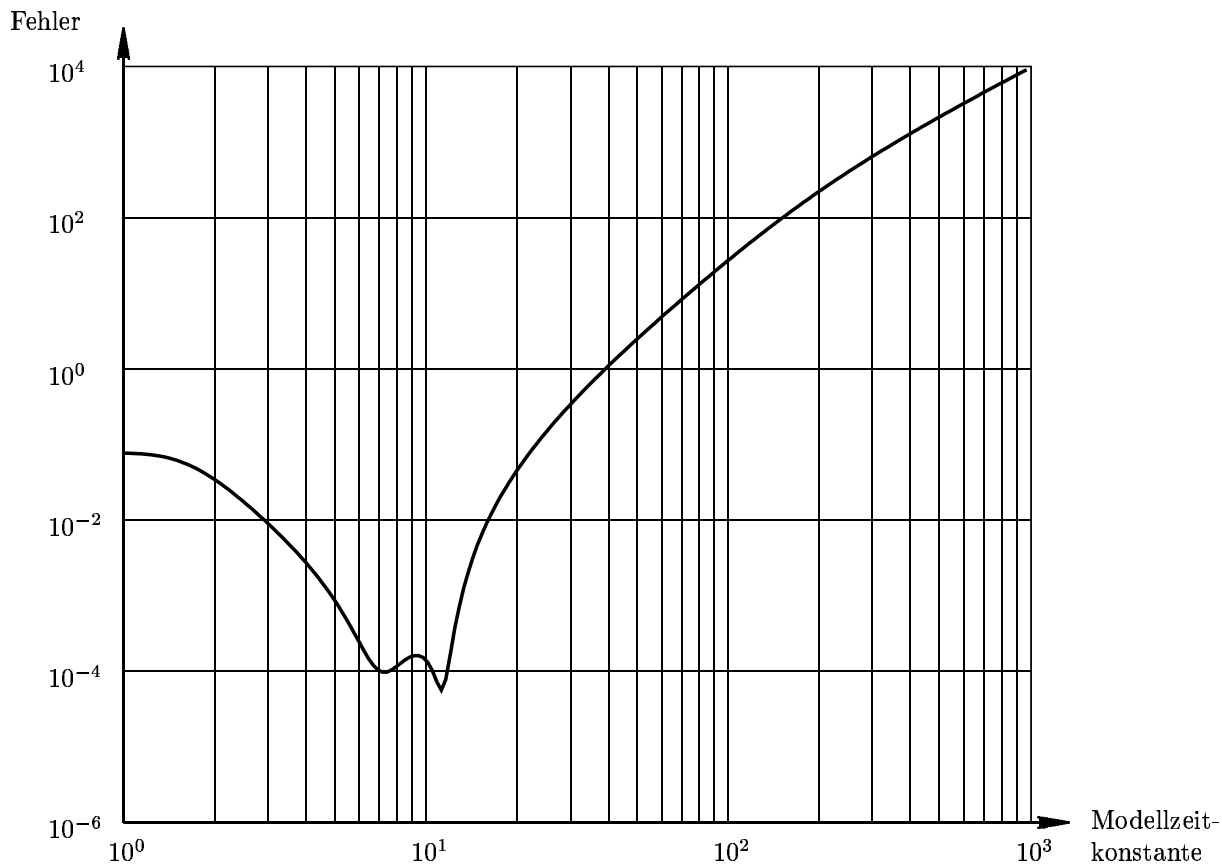


Abbildung 11: Verlauf des Schätzfehlers zur Indikation von Nullstellen für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 4$ und $m = 5$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

Ohne Störung oder bei sehr geringer Störung ist die Matrix R an den Stellen der richtigen Modellzeitkonstanten schlecht konditioniert. Das wird in Abbildung 12 durch die Unstetigkeiten im Verlauf des Schätzfehlers bei den Zeitkonstanten der drei Nullstellen deutlich.

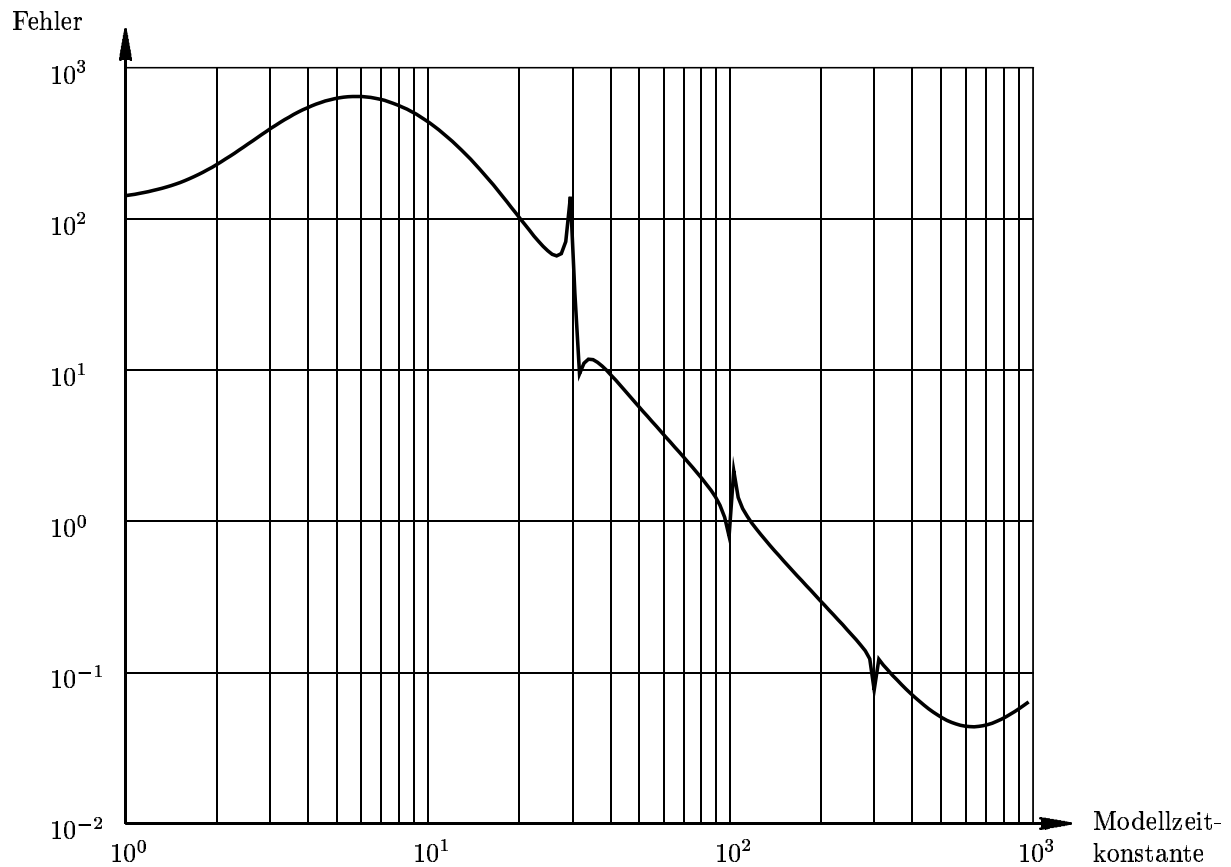


Abbildung 12: Verlauf des Schätzfehlers zur Indikation von Polstellen für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 0,05% Störung und 10 Frequenzpunkten

Dieser Effekt ist der Ansatzpunkt für ein weiteres Maß zur Indikation von Systemelementen, welches im nächsten Abschnitt beschrieben wird. Das Maß basiert auf den Singulärwerten einer das Problem beschreibenden Matrix.

4 Singulärwerte als Indikator

4.1 Bewertungsmaß ohne Beachtung von Nullstellen

4.1.1 Herleitung des Bewertungsmaßes

Die Indikationsaufgabe wird durch die Dimensionsreduktion des Fehlermodells nach Abbildung 1 gelöst. Wird ein Problem als lineares Gleichungssystem formuliert, gibt der Rang des linearen Gleichungssystems an, welche Dimension das Problem hat. Der Rang der Koeffizientenmatrix des homogenen Gleichungssystems ist gleich dem Rang des Gleichungssystems. Dementsprechend wird das Fehlermodell als Koeffizientenmatrix formuliert und der Rang dieser Matrix untersucht. Wenn der Rang abfällt, wird das angesetzte Strukturelement angezeigt.

In das Fehlermodell gehen ein,

- der geschätzte Frequenzgang,
- das zu indizierende Modellelement und
- ein allgemeiner Ansatz für lineare Systeme.

Mit diesem Fehlermodell und dem Ansatz (6) ergibt sich

$$\frac{1}{G_F(j\omega, T_M)} = \frac{1}{G_P(j\omega) \cdot (1 + j\omega T_M)} = \frac{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2) \cdots (1 + j\omega T_{n-1})(1 + j\omega T_n)}{1 + j\omega T_M} \quad (22)$$

Unter der Bedingung $T_M = T_n$ folgt daraus die lineare Beziehung

$$\frac{1}{G_P(j\omega) \cdot (1 + j\omega T_M)} = 1 + j\omega \sum_{\nu_1}^{n-1} T_{\nu_1} + j\omega^2 \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{n-1} T_{\nu_1} T_{\nu_2} + \cdots + j\omega^{n-1} \prod_{\nu}^{n-1} T_{\nu} \quad (23)$$

Diese lineare Beziehung kann für alle bekannten Frequenzpunkte $j\omega_i$ mit dem geschätzten Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ in der Matrix R

$$R(T_M) = \left(1 - \frac{1}{\hat{G}_P(j\omega_i) \cdot (1 + j\omega_i T_M)}, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^{n-1} \right) \quad (24)$$

abgebildet werden. Für den ungestörten Fall gilt, wenn r den Rang der Matrix $R(T_M)$ für $T_M \neq T_\nu$ bezeichnet, dann nimmt $R(T_M)$ für $T_M = T_\nu$ den Rang $r - 1$ an.

In Abbildung 13 ist der Rang der Matrix R mit $n = 9$ in Abhängigkeit von der Zeitkonstante T_M des angesetzten Modellelements für ein PT_3 -System dargestellt. Der Rangabfall erfolgt genau an den Stellen der Prozesszeitkonstanten. Da der Rang aber keine stetige Funktion der Matrixelemente ist, muss die Modellzeitkonstante genau die Prozesszeitkonstanten treffen. Für eine Simulation ist das kein Problem, in der Praxis jedoch fast ausgeschlossen. Darum werden im folgenden die Singulärwerte betrachtet, die stetige Funktionen der Matrixelemente sind. Für das gleiche Beispiel liefern diese ein ähnlich scharfes Maß wie der Rang (siehe Abbildung 14).

Die Auswertung mehrerer Singulärwerte ist kompliziert. Darum wird die Summe der Logarithmen der Singulärwerte gebildet.

$$S = \sum \log \sigma_i(R) \quad (25)$$

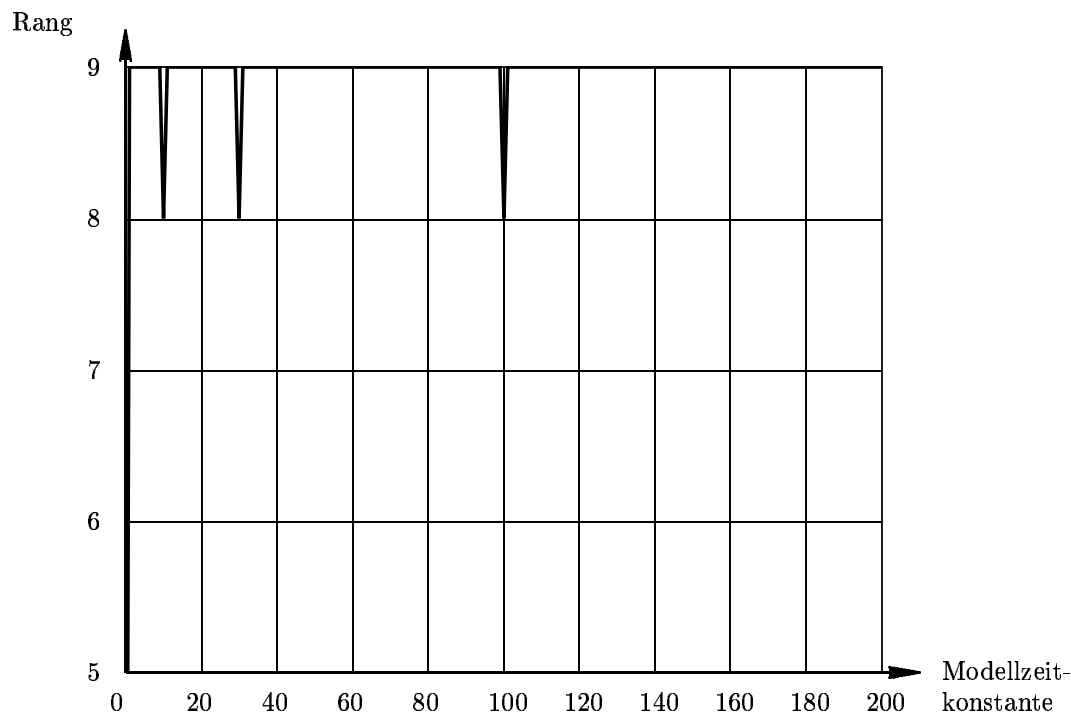


Abbildung 13: Verlauf des Ranges für PT₃-System ($T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $T_3 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 9$

Die Summe der Logarithmen der Singulärwerte wird im weiteren der kürzeren Schreibweise wegen Singulärzahl S genannt, ohne dass damit ein bekanntes Maß gemeint ist.

Für $T_M = T_\nu$ gilt

$$0 = R\theta \tag{26}$$

da (23) erfüllt ist.

Der Vektor

$$\theta = \left(1, \sum_{\nu_1}^{n-1} T_{\nu_1}, \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{n-1} T_{\nu_1} T_{\nu_2}, \dots, \prod_{\nu}^{n-1} T_{\nu} \right)^T \tag{27}$$

spiegelt die lineare Abhängigkeit der Spalten von R wieder. Wegen dieser linearen Abhängigkeit wird mindestens ein Singulärwert $\sigma_i(R)$ Null und die Singulärzahl S wird unendlich klein. Wenn $T_M \neq T_\nu$, ist (23) nicht erfüllt, die Spalten von R sind nicht linear Abhängig und die Singulärzahl S bleibt endlich.

Das eben erwähnte gilt natürlich nur im ungestörten Fall und unendlicher numerischer Genauigkeit. Die Simulationsbeispiele im folgenden Abschnitt zeigen die praktische Anwendbarkeit der Singulärzahl.

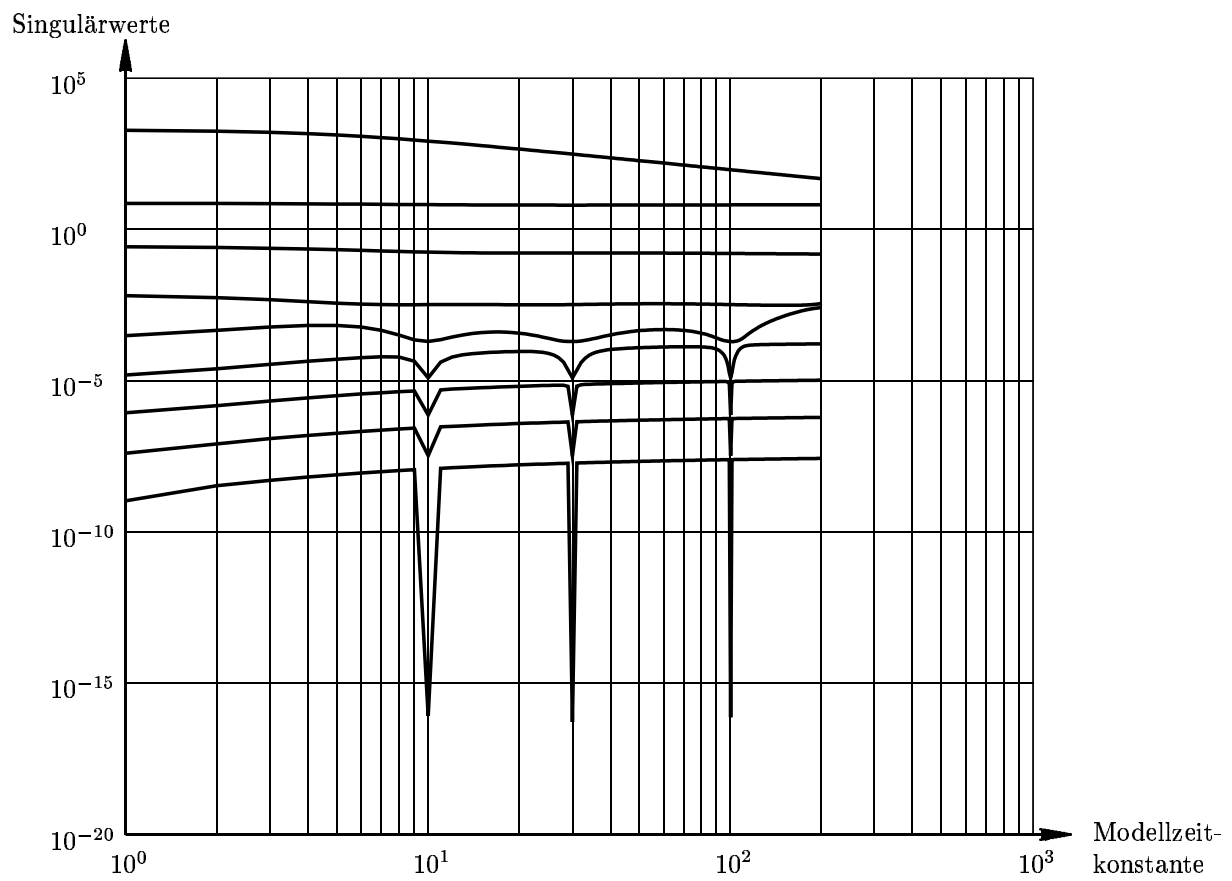


Abbildung 14: Verlauf der Singulärwerte für PT_3 -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $T_3 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 9$

4.1.2 Simulationsbeispiele für Systeme ohne und mit Nullstellen

Der Verlauf der Singulärzahl ist dem Verlauf des MKQ-Schätzfehlers sehr ähnlich. Das zeigen Abbildung 15 im Vergleich mit Abbildung 2 für den ungestörten Fall. Auch der Verlauf der Singulärzahl in Abbildung 16 für ein gestörtes PT_3 -System entspricht in etwa dem Verlauf des MKQ-Schätzfehlers in Abbildung 7. Bei den Simulationen erwies sich die Singulärzahl jedoch als das numerisch wesentlich stabilere Maß.

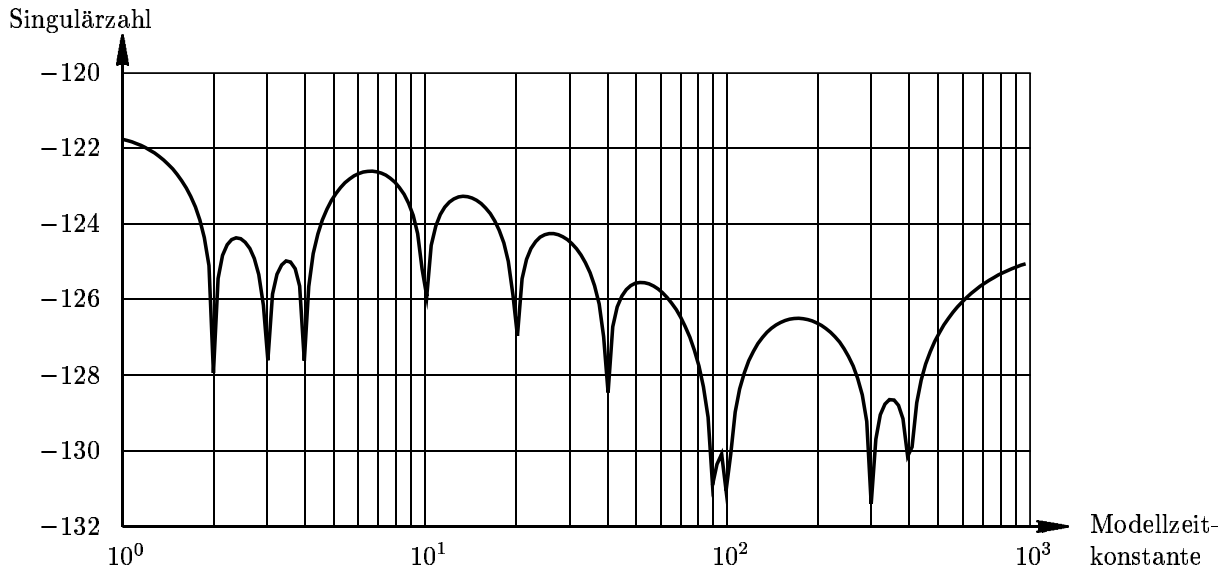


Abbildung 15: Verlauf der Singulärzahl für PT_{10} -System ($T_1 = 2, T_2 = 3, T_3 = 4, T_4 = 10, T_5 = 20, T_6 = 40, T_7 = 90, T_8 = 100, T_9 = 300, T_{10} = 400$), bei einem Ansatz mit $n = 12$ und 20 Frequenzpunkten

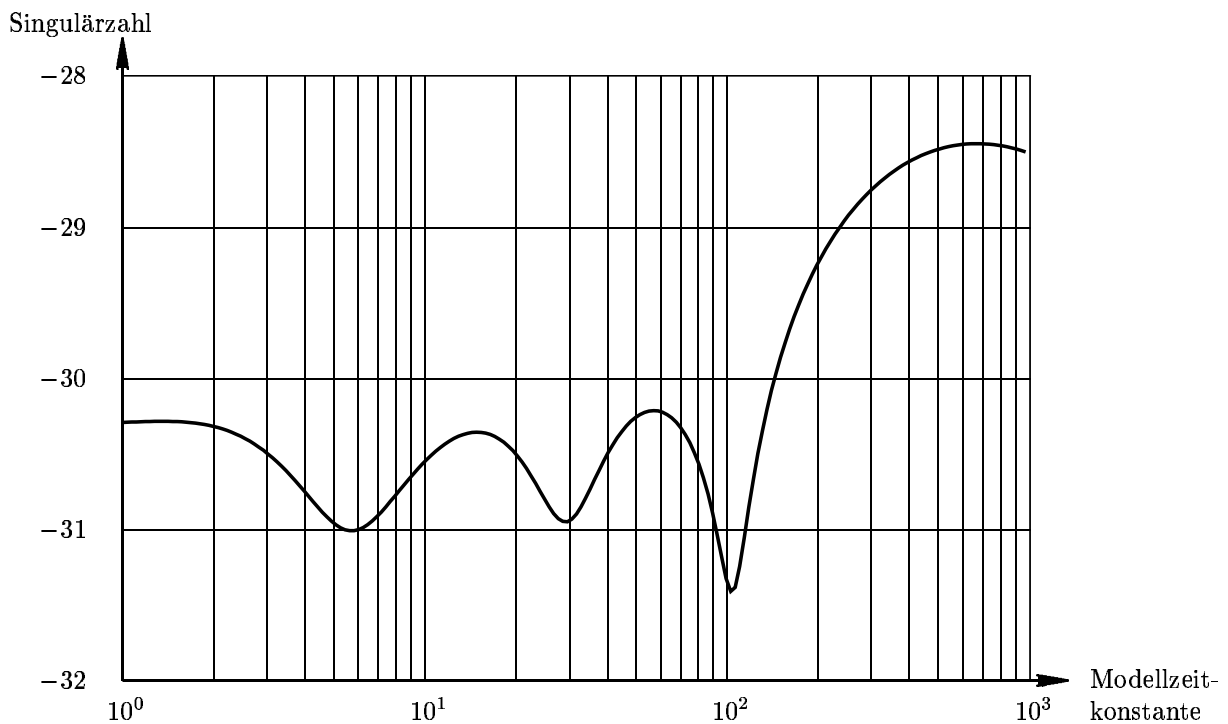


Abbildung 16: Verlauf der Singulärzahl für PT_3 -System ($T_1 = 10, T_2 = 30, T_3 = 100$) bei einem Ansatz mit $n = 6$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

Die Simulationen lieferten einige empirische Hinweise, wie die Anzahl der zu betrachtenden Frequenzpunkte festzulegen ist.

- Eine geometrische Verteilung der Frequenzpunkte ist günstig.
- Wenn ein einzelner Singulärwert bessere Ergebnisse liefert als die Singulärzahl, dann ist die Anzahl der betrachteten Frequenzpunkte zu hoch.
- Die Anzahl der Frequenzpunkte sollte etwa doppelt so groß sein, wie die Anzahl der Spalten von R . Das ist zumindest ein guter Startwert.
- Die lokalen Maxima im Verlauf der Singulärzahl, sollen etwa gleich hoch sein. Sind die lokalen Maxima bei niedrigen Frequenzen höher, ist die Anzahl der betrachteten Frequenzpunkte zu hoch. Sind sie bei hohen Frequenzen höher, ist die Anzahl der betrachteten Frequenzpunkte zu klein.

Nun werden Nullstellen zugelassen. Wie im vorigen Abschnitt werden die Nullstellen zunächst als Störungen betrachtet, d. h. für einen Prozess der auch Nullstellen aufweist, wird versucht Polstellen zu indizieren, mit einem Ansatz in dem Nullstellen nicht berücksichtigt wurden. Die Ergebnisse sind sehr ähnlich. Die Unterschiede zum Verlauf des MKQ-Schätzfehlers sind nicht größer, als die Unterschiede aufgrund der zufälligen Störung. Pole die in der Nähe von Nullstellen liegen können nicht mehr erkannt werden. (Vergleiche Abbildung 17 und 8 für innen liegende Nullstelle und Abbildung 18 und 9 für außen liegende Nullstellen.)

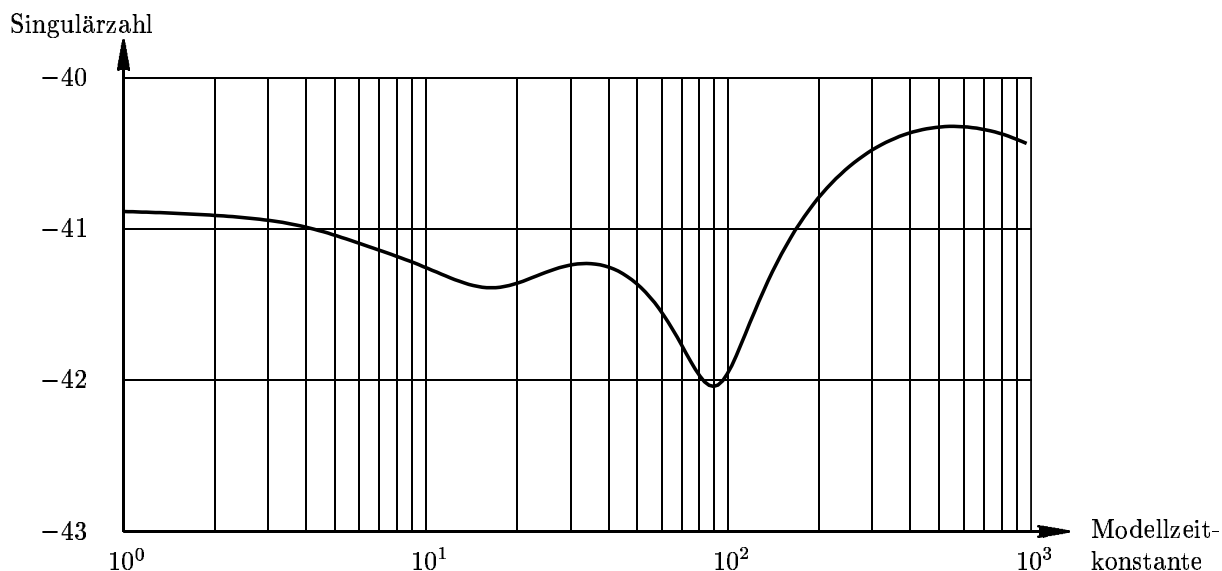


Abbildung 17: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_1$ -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $T_3 = 100$, $T'_1 = 50$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 20 Frequenzpunkten

Die Zeitkonstante der ersten Polstelle T_1 in Abbildung 18 weist durch die Nähe der beiden Nullstellen T'_1 und T'_2 einen großen Fehler auf. Wenn Wert auf den Zahlenwert der Zeitkonstanten gelegt wird, sollte die Singulärzahl ein scharfes Minimum wie bei T_3 aufweisen. Andernfalls ist eine iterative Vorgehensweise (wie im Abschnitt 4.2.2 noch demonstriert wird) oder eine echte Parameteridentifikation ratsam.

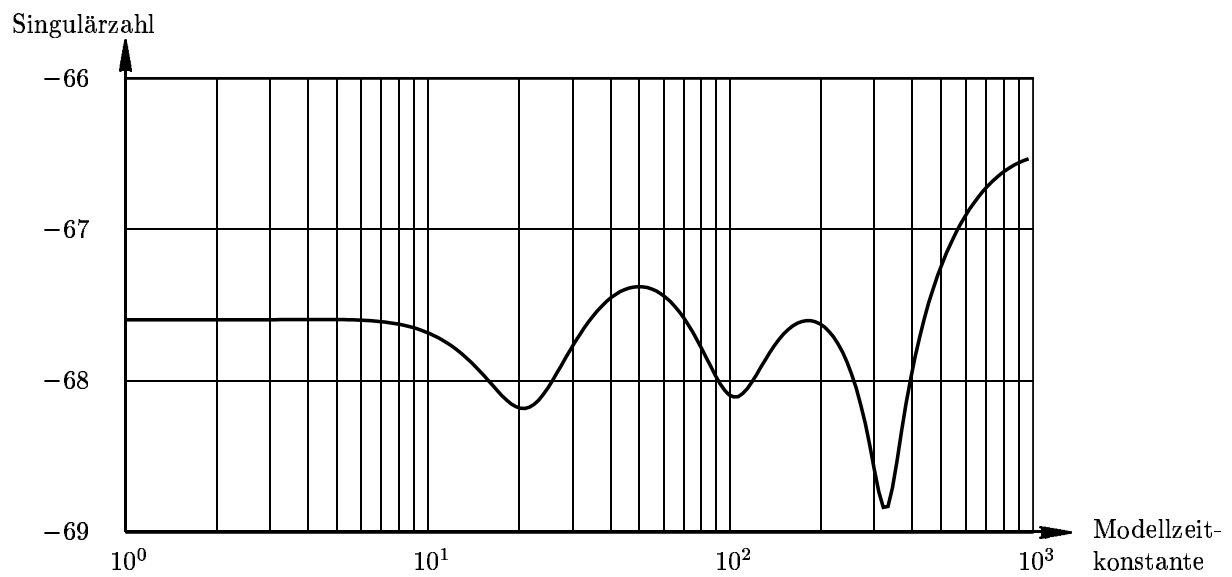


Abbildung 18: Verlauf der Singularzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 8$, 5% Störung und 20 Frequenzpunkten

4.2 Bewertungsmaß mit Beachtung von Nullstellen

Im vorigen Abschnitt wurden bei der Herleitung des Bewertungsmaßes Nullstellen nicht berücksichtigt. Im Folgenden werden die Nullstellen zusätzlich betrachtet. Wie im Abschnitt 3 werden für Systeme mit Pol- und Nullstellen als erstes mit dem Modellansatz (1) Polstellen, und danach mit dem Modellansatz (2) Nullstellen indiziert.

4.2.1 Indikation von Polstellen

Um Nullstellen im Ansatz mit zu berücksichtigen, wird der Ansatz (14) genutzt. Mit der Abkürzung

$$\hat{G}_F() = \hat{G}_P(j\omega_i) \cdot (1 + j\omega_i T_M) \quad (28)$$

ergibt sich die Matrix

$$R(T_M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{G}_F()} - 1, \frac{j\omega_i}{\hat{G}_F()}, \frac{j\omega_i^2}{\hat{G}_F()}, \dots, \frac{j\omega_i^m}{\hat{G}_F()}, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Die Ergebnisse sind jetzt deutlich besser als beim MKQ-Schätzfehler. In der Abbildung 19 zeigt die Singulärzahl zwei Polstellen deutlich an. Die Minima sind scharf ausgebildet. Dagegen ist die Polstelle in der Nähe der beiden Nullstellen durch die Störungen nicht mehr zu erkennen.

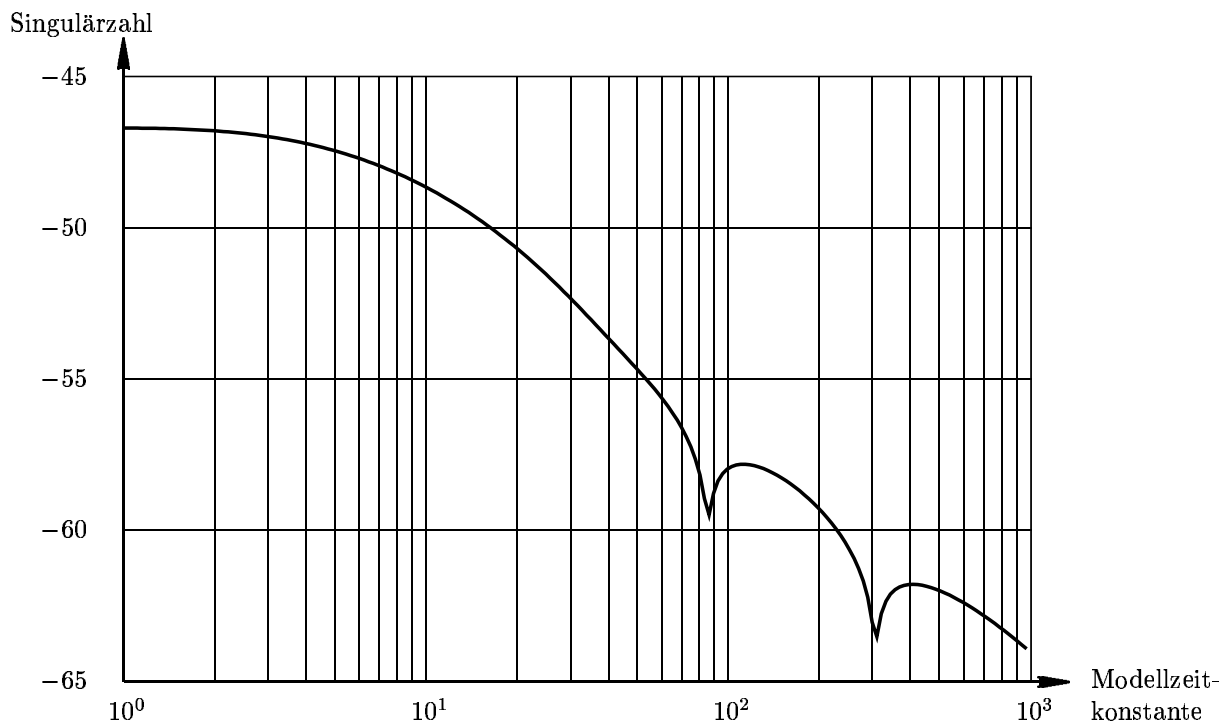


Abbildung 19: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

Bei größeren Störungen kann es notwendig werden, die einzelnen Singulärwerte auszuwerten. Obwohl die Singulärzahl für das $PT_3T'_2$ -System bei 25% Störung kein brauchbares Ergebnis mehr liefert (Abbildung 20), zeigt der zweite Singulärwert aus Abbildung 21 zwei Polstellen deutlich an (siehe Abbildung 22). Dabei besteht jedoch das Problem, den richtigen Singulärwert richtig zu interpretieren.

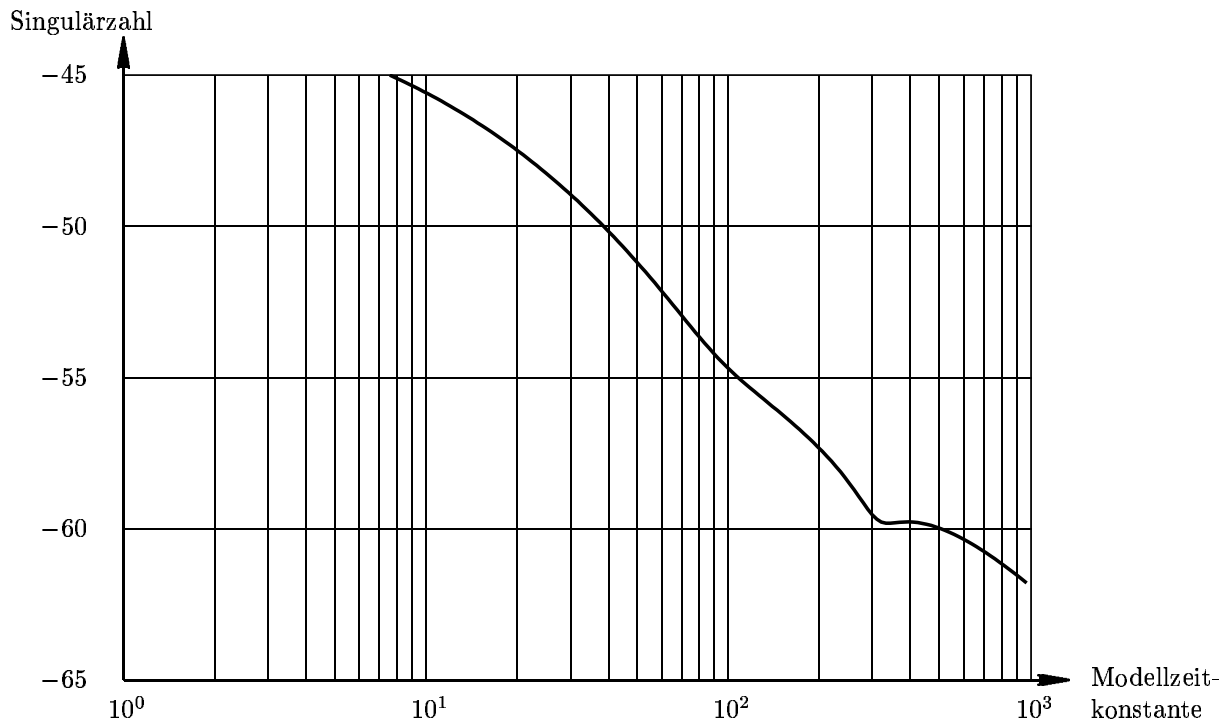


Abbildung 20: Verlauf der Singularzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 25% Störung und 10 Frequenzpunkten

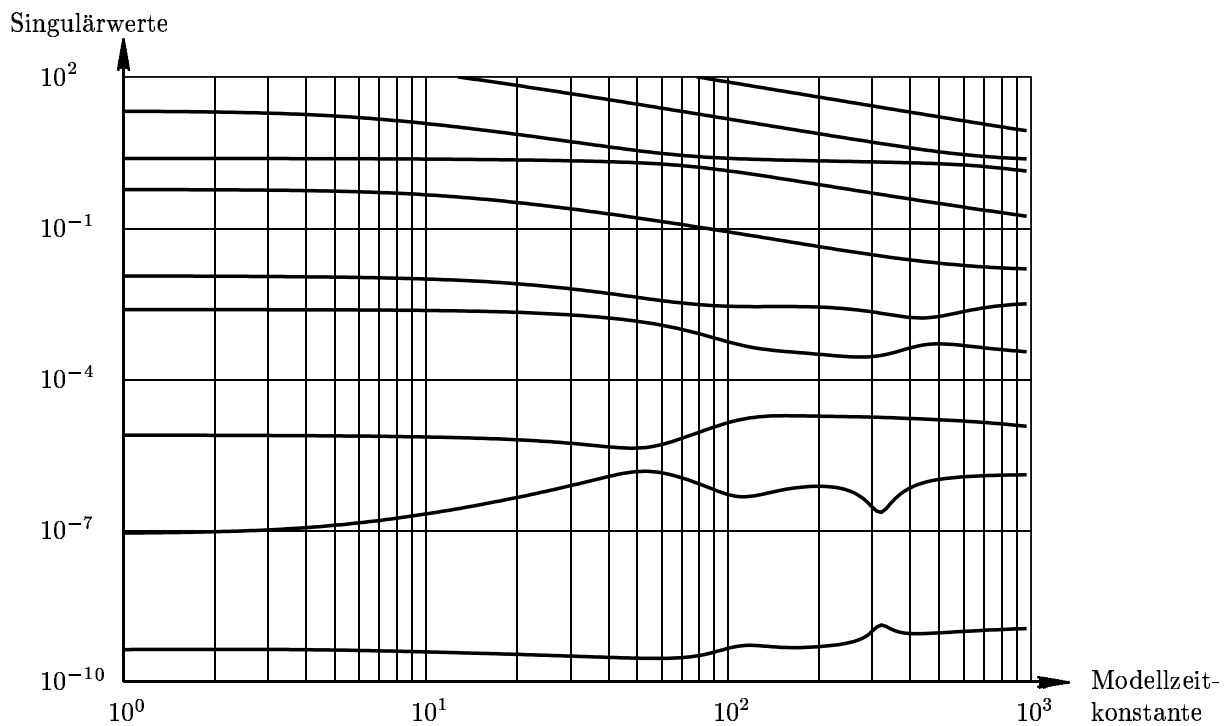


Abbildung 21: Verlauf der Singularwerte für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 25% Störung und 10 Frequenzpunkten

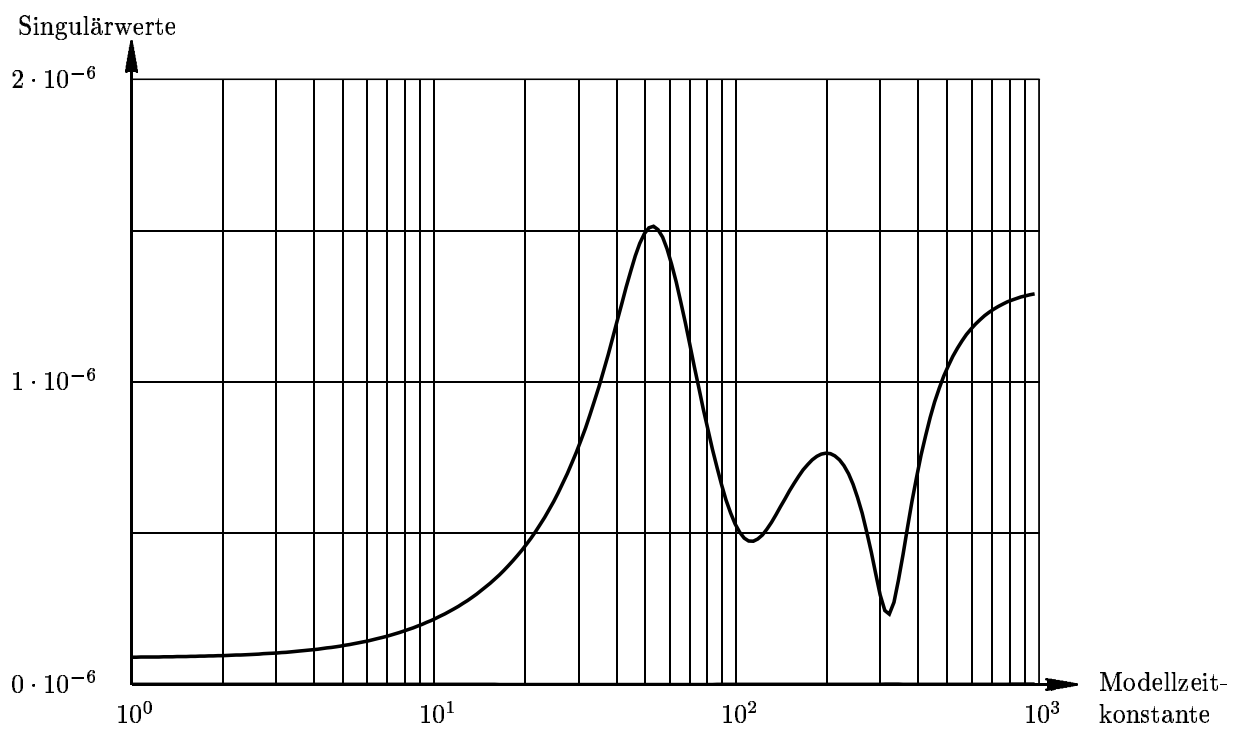


Abbildung 22: Verlauf des zweiten Singulärwertes für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 4$, 25% Störung und 10 Frequenzpunkten

4.2.2 Indikation von Nullstellen

Als nächstes wird eine Nullstelle als Modell angesetzt (2). Mit der Abkürzung

$$\hat{G}_F = \frac{\hat{G}_P(j\omega_i)}{1 + j\omega_i T'_M} \quad (30)$$

lautet dann die Matrix

$$R_1 = \left(1 - \hat{G}_F, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^{m-1}, j\omega_i \hat{G}_F, j\omega_i^2 \hat{G}_F, \dots, j\omega_i^n \hat{G}_F \right) \quad (31)$$

oder

$$R_2 = \left(\frac{1}{\hat{G}_F} - 1, \frac{j\omega_i}{\hat{G}_F}, \frac{j\omega_i^2}{\hat{G}_F}, \dots, \frac{j\omega_i^{m-1}}{\hat{G}_F}, j\omega_i, j\omega_i^2, \dots, j\omega_i^n \right) \quad (32)$$

oder

$$R_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{G}_F}} - \sqrt{\hat{G}_F}, \frac{j\omega_i}{\sqrt{\hat{G}_F}}, \frac{j\omega_i^2}{\sqrt{\hat{G}_F}}, \dots, \frac{j\omega_i^{m-1}}{\sqrt{\hat{G}_F}}, j\omega_i \sqrt{\hat{G}_F}, j\omega_i^2 \sqrt{\hat{G}_F}, \dots, j\omega_i^n \sqrt{\hat{G}_F} \right). \quad (33)$$

Als günstigste Variante erwies sich R_3 . Im ungestörten Fall können die Nullstellen mit dieser Matrix gut bestimmt werden (Abbildung 23). Das „Rauschen“ im Verlauf der Singulärzahl entsteht durch numerische Effekte auf Grund der Überdimensionierung der Matrix. Die Singulärzahl erhält einen glatten Verlauf, sobald alle Singulärwerte ignoriert werden, die immer ≈ 0 sind. In diesem Beispiel sind die „verrauschten“ Singulärwerte immer $< 10^{-17}$ und der kleinste verwertbare Singulärwert wird $> 10^{-10}$.

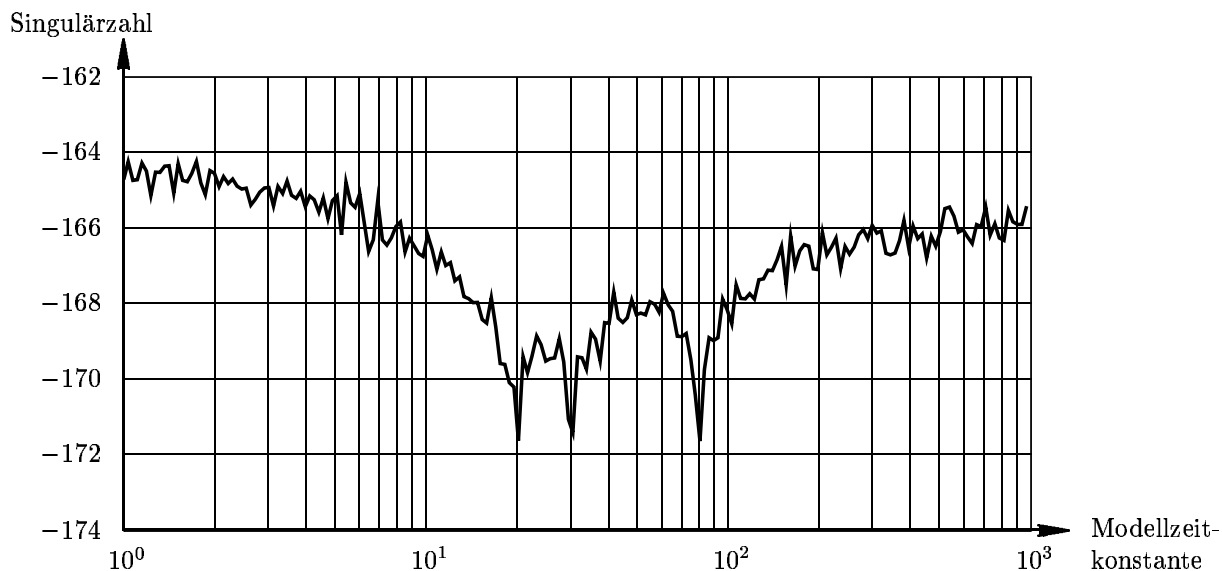


Abbildung 23: Verlauf der Singulärzahl für $PT_4T'_3$ -System ($T_1 = 50$, $T_2 = 60$, $T_3 = 100$, $T_4 = 300$, $T'_1 = 20$, $T'_2 = 30$, $T'_3 = 80$) bei einem Ansatz mit $n = 8$ und $m = 5$ und 20 Frequenzpunkten

Im gestörten Fall ist die Indikation der Nullstellen schwierig. Die Singulärzahl lieferte bessere Ergebnisse als die einzelnen Singulärwerte. In Abbildung 24 kann die Nullstelle T'_2 , die in der Nähe der Polstelle T_1 liegt nicht mehr indiziert werden.

Etwas besser sieht das Ergebnis bei schrittweisem Vorgehen aus. Bei der Simulation eines Beispiels lieferte der Ansatz

$$G_M(j\omega, T_M) = \frac{1}{1 + j\omega T_M} \quad (34)$$

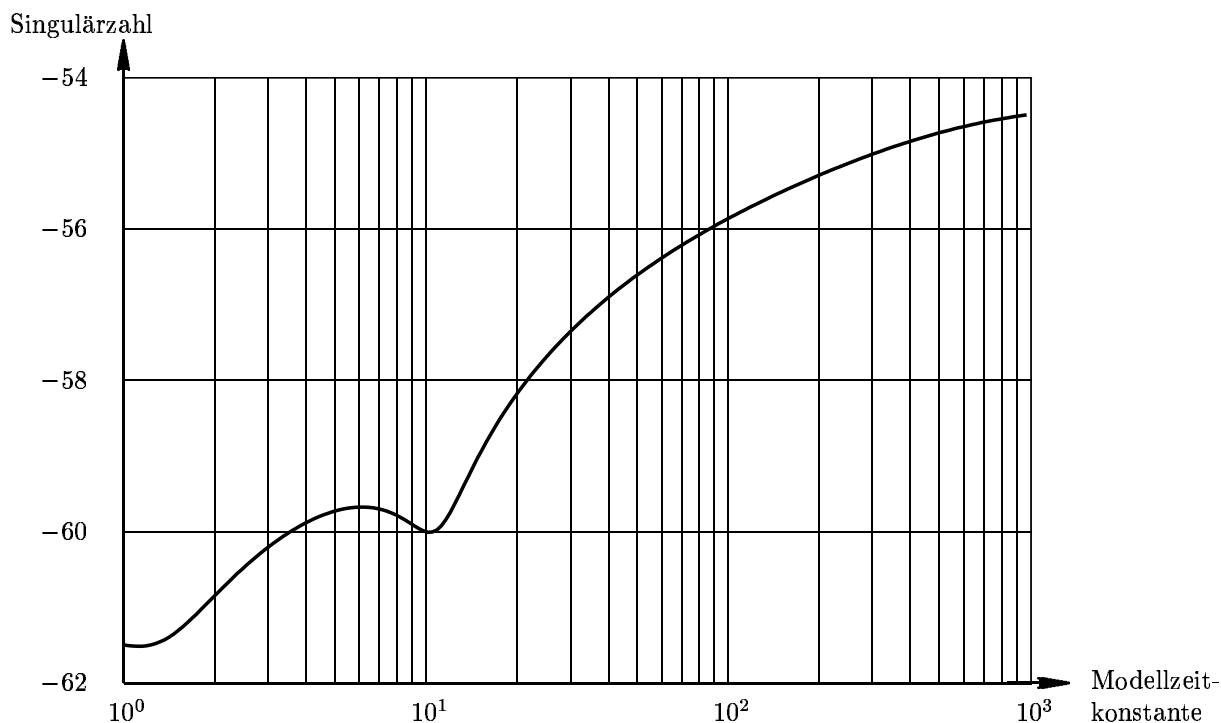


Abbildung 24: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei einem Ansatz mit $n = 4$ und $m = 5$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

für die dominierende Polstelle $T_1 = 290$, der zweiten Ansatz

$$G_M(j\omega, T_M) = \frac{1}{(1 + j\omega T_M)(1 + j\omega \cdot 290)} \quad (35)$$

für die zweite Polstelle $T_2 = 96$ und der dritte Ansatz

$$G_M(j\omega, T_M) = \frac{1}{(1 + j\omega T_M)(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)} \quad (36)$$

konnte keine Polstelle mehr anzeigen. Der vierte Ansatz soll eine Nullstelle indizieren, lautet

$$G_M(j\omega, T'_M) = \frac{1 + j\omega T'_M}{(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)} \quad (37)$$

und liefert die Nullstelle $T'_1 = 9$. Der fünften Ansatz

$$G_M(j\omega, T'_M) = \frac{(1 + j\omega T'_M)(1 + j\omega \cdot 9)}{(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)} \quad (38)$$

liefert eine Nullstelle bei $T'_2 = 27$ und der sechste Ansatz

$$G_M(j\omega, T'_M) = \frac{(1 + j\omega T'_M)(1 + j\omega \cdot 9)(1 + j\omega \cdot 27)}{(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)} \quad (39)$$

ergibt kein auswertbares Resultat. Als Kontrolle folgt ein siebenter Ansatz für eventuelle weitere Polstellen.

$$G_M(j\omega, T_M) = \frac{(1 + j\omega \cdot 9)(1 + j\omega \cdot 27)}{(1 + j\omega T_M)(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)} \quad (40)$$

Dieser liefert, wie in Abbildung 25 dargestellt, sehr deutlich eine weitere Polstelle bei $T_3 = 40$.

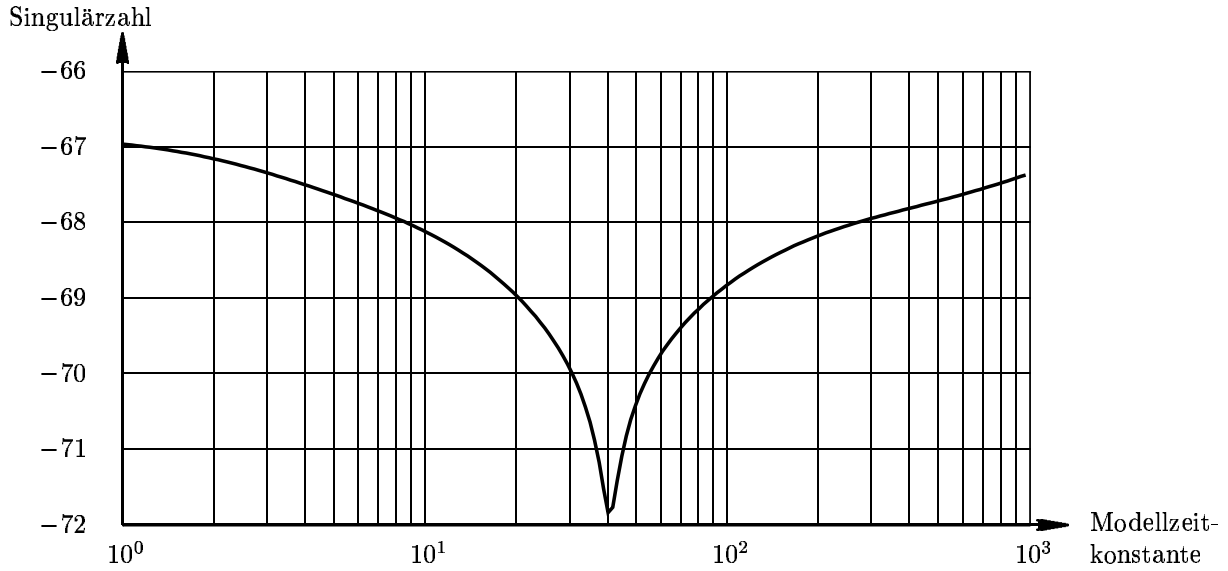


Abbildung 25: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei Modellansatz 40

Demgegenüber zeigt der Ansatz acht

$$G_M(j\omega, T_M) = \frac{(1 + j\omega \cdot 9)(1 + j\omega \cdot 27)}{(1 + j\omega T_M)(1 + j\omega \cdot 290)(1 + j\omega \cdot 96)(1 + j\omega \cdot 40)} \quad , \quad (41)$$

dass keine weiteren Polstellen existieren (Abbildung 26).

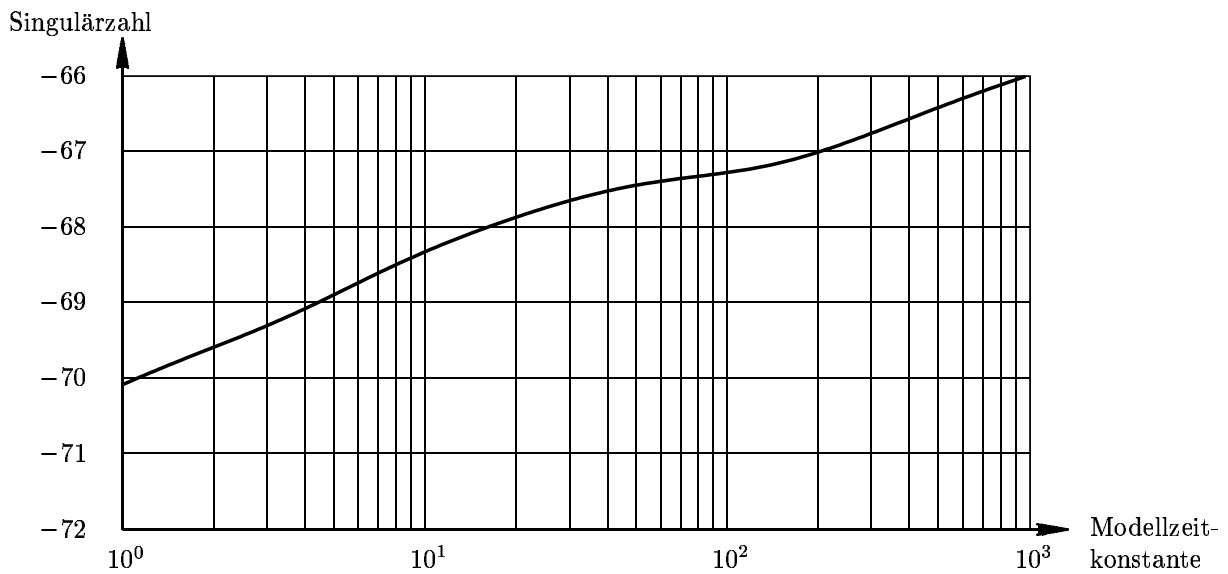


Abbildung 26: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_2$ -System ($T_1 = 30$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 10$, $T'_2 = 20$) bei Modellansatz (41)

Obwohl die Zahlenwerte für die Zeitkonstanten erheblich voneinander Abweichen, weist die Ortskurve in Abbildung 27 eine brauchbare Übereinstimmung zwischen Prozess und Modell aus.

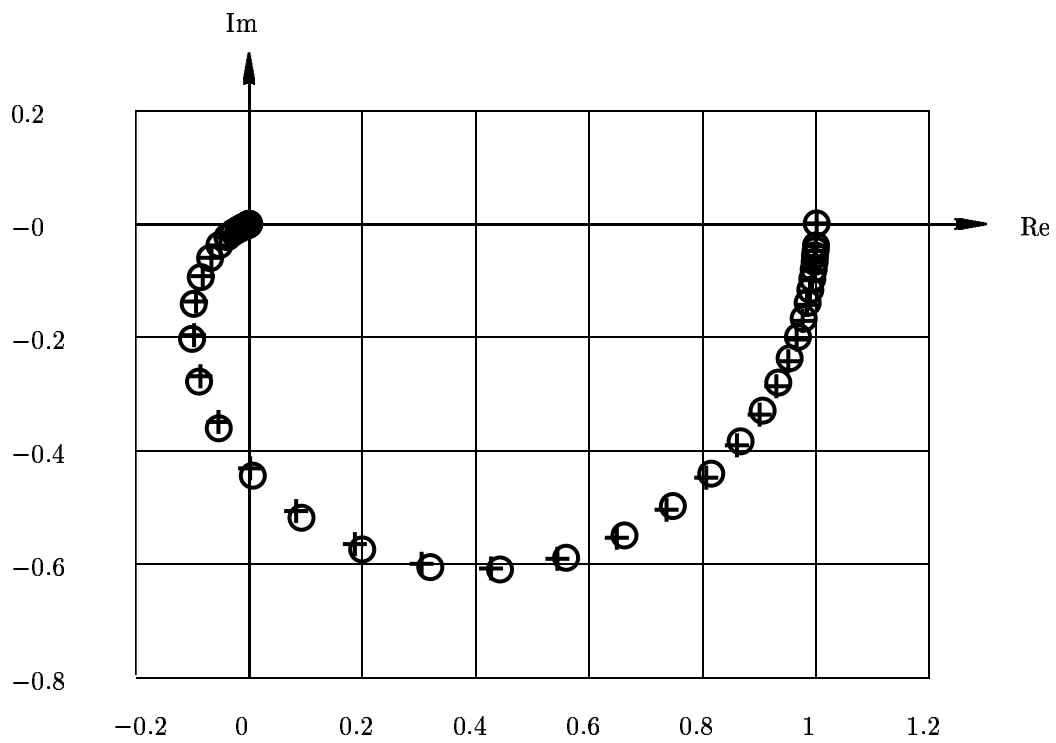


Abbildung 27: Ortskurve $PT_3T'_2$ -System, „+“ System mit $(T_1 = 30, T_2 = 100, T_3 = 300, T'_1 = 10, T'_2 = 20)$, „o“ Modell mit $(T_1 = 40, T_2 = 96, T_3 = 290, T'_1 = 9, T'_2 = 27)$

Eine andere Möglichkeit, den gegenseitigen Einfluß von Pol- und Nullstellen zu berücksichtigen, ist ein zweidimensionales Modellelement (3).

$$G_M = \frac{1 + j\omega T'_M}{1 + j\omega T_M}$$

Das Ergebnis für ein $PT_3T'_1$ -System wird in den Abbildungen 28 und 29 gezeigt. In Abbildung 28 ist der Verlauf der Singulärzahl als Graustufung dargestellt. Die schwärzesten Stellen sind Minima. Die Graustufung entlang der Abszisse entspricht einem eindimensionalen Modellansatz mit einer Nullstelle und die Graustufung entlang der Ordinate einem eindimensionalen Modellansatz mit einer Polstelle. Die Graustufung in der Fläche sind wesentlich deutlicher als entlang der Koordinatenachsen.

Das Modell ist nun nicht mehr für $T_M = 0$ bzw. $T'_M = 0$ identisch 1, sondern für alle $T_M = T'_M$, d. h. für diese Zeitkonstanten ist das Modell ohne Wirkung und G_F hat die gleiche Dimension wie G_P . Die Singulärzahl ist für alle $T_M = T'_M$ gleich und damit ein geeigneter Bezugswert. Das ist in Abbildung 28 an der gleichen Graustufe entlang der Diagonalen und in Abbildung 29 an den Kreisen für $T_M = T'_M$ zu erkennen, die die gleichen Ordinatenwerte haben.

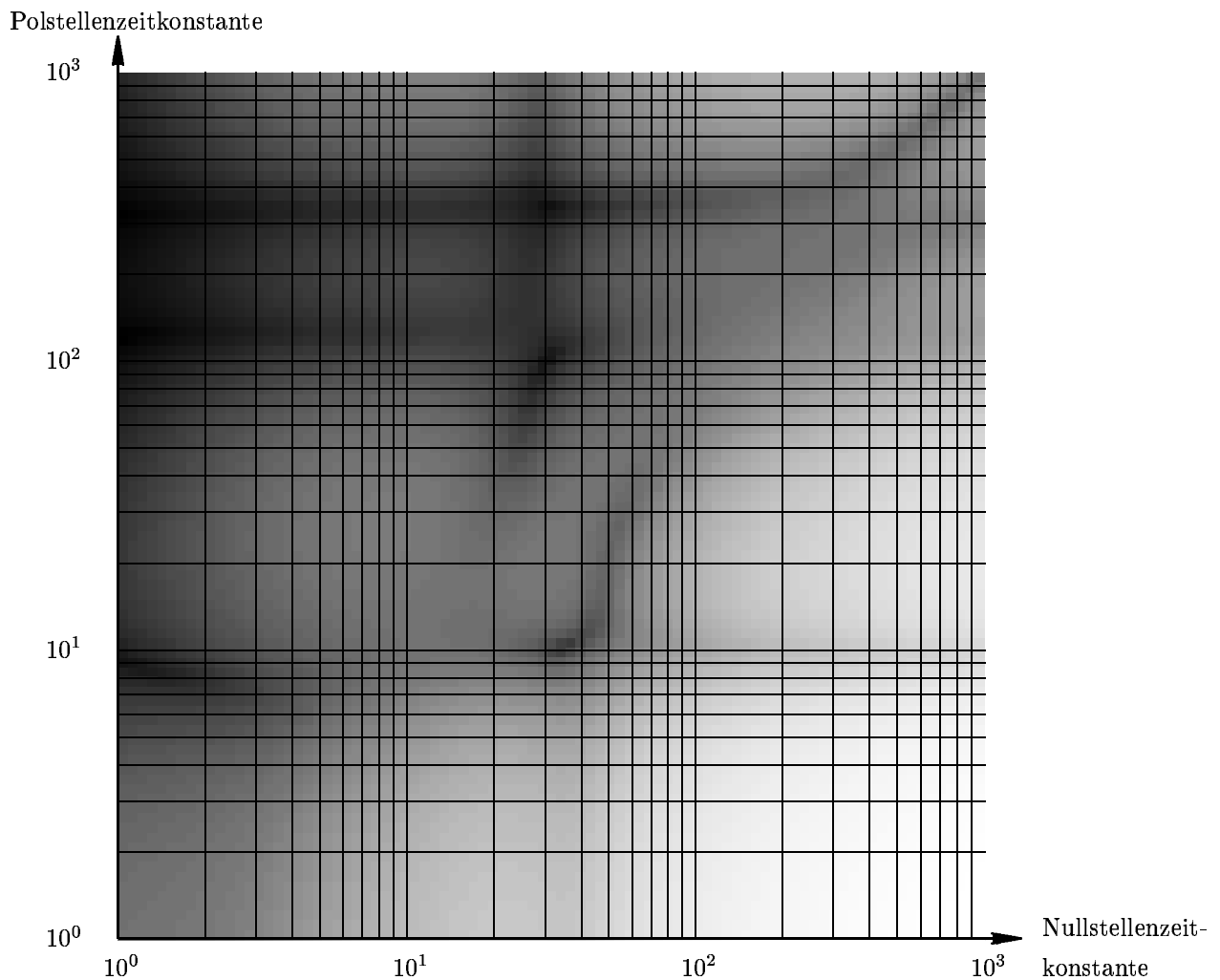


Abbildung 28: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_1$ -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 30$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 5$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten

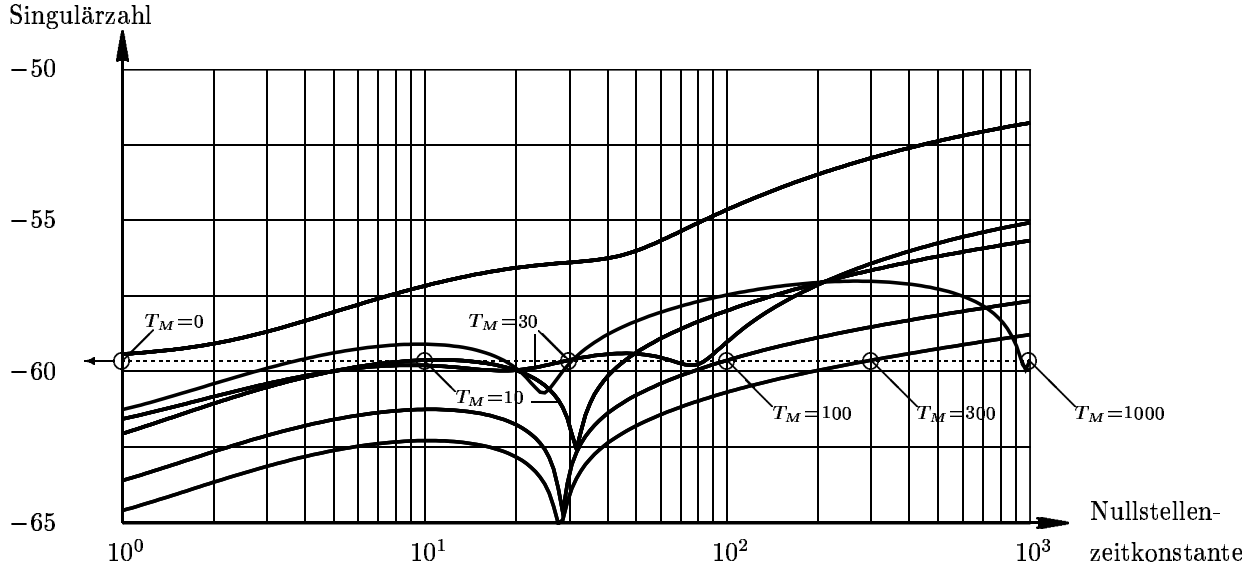


Abbildung 29: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_1$ -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 30$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 5$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten, für die Polstellenzeitkonstanten $T_\nu = \{0, 10, 30, 100, 300, 1000\}$

Die Restriktion $S(T_M = T'_M) = \text{const}$ bewirkt im gestörten Fall, dass die Minima von der Diagonalen weg verschoben werden. Das ist in Abbildung 29 an dem Verlauf der Kurven für $S(T_M = 10, T'_M)$, $S(T_M = 100, T'_M)$ und $S(T_M = 300, T'_M)$ zu sehen. Für $T_M = 10$ liegt das Minimum bei $T'_M > 30$ und für $T_M = 100$ und $T_M = 300$ liegt das Minimum bei $T'_M < 30$. Die Kurve $S(T_M = 30, T'_M)$ weist zwei Minima auf, da an der Stelle $T'_M = 30$, wo ohne Pole ein Minimum zu erwarten wäre, wegen $S(T_M = T'_M) = \text{const}$ kein Minimum sein kann.

Die Singulärzahl im schwach ausgeprägten, lokalen Minimum bei $T'_M = 30$, $T_M = 10$ ist immer noch deutlich kleiner als entlang der Diagonalen $T'_M = T_M$. Für von Null verschiedene Zeitkonstanten sind entlang der Ordinate drei Bereiche mit Minima und entlang der Abszisse ein Bereich mit Minima zu erkennen. Das heißt es werden drei Polstellen und eine Nullstelle angezeigt. Die Täler der Fläche der Singulärzahl verlaufen etwa achsenparallel. Das zeigt, die Singulärzahl ist ein Maß, mit dem Pol- und Nullstellen relativ³ unabhängig voneinander bestimmt werden können.

Abbildung 28 zeigt, dass für eine Polstellenzeitkonstante $T_M = 10^0$ die Nullstelle nicht angezeigt wird. Dagegen hat $S(T_M = 10^3, T'_M)$ für $T'_M \approx 30$ ein Minimum, das die Nullstelle anzeigt. Auch der Vergleich des Verlaufs der Kurven $S(T_M = 0, T'_M)$ und $S(T_M = 10^3, T'_M)$ in Abbildung 29 zeigt, dass für $T_M = 0$ die Nullstelle nicht erkannt werden kann, aber für $T_M = 10^3$ indizierbar ist. Sollen die Nullstellen unabhängig von den Polstellen angezeigt werden, ist der Modellansatz

$$G_M(T'_M) = \frac{1 + j\omega T'_M}{1 + j\omega T^*}, \quad T^* = \text{const} \gg \max_{\nu=1, \dots, n} T_\nu \quad (42)$$

dem Modellansatz (2) vorzuziehen. Abbildung 30 zeigt, dass mit dem Modellansatz (42) die Nullstellen unabhängig von den Polstellen T_ν indiziert werden können. Der Verlauf der fünf Graphen ist qualitativ gleichwertig.

³Bei der Parameteridentifikation können Pol- und Nullstellen nicht unabhängig voneinander bestimmt werden. Im gestörten Fall können mit der Singulärzahl Pol- und Nullstellen mit $T'_\mu \approx T_\nu$ nur schwer unabhängig voneinander bestimmt werden.

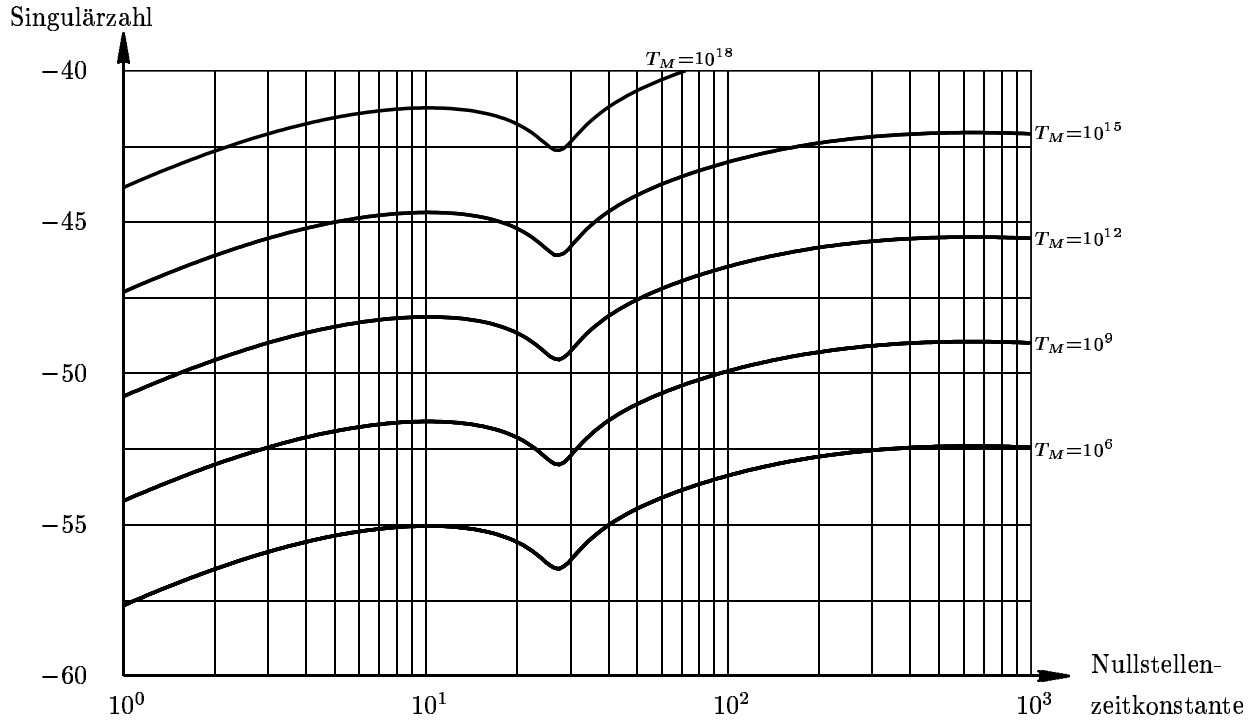


Abbildung 30: Verlauf der Singulärzahl für $PT_3T'_1$ -System ($T_1 = 10$, $T_2 = 100$, $T_3 = 300$, $T'_1 = 30$) bei einem Ansatz mit $n = 5$ und $m = 5$, 5% Störung und 10 Frequenzpunkten, für die Polstellenzeitkonstanten $T_\nu = \{10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, 10^{18}\}$

Diese Simulationsbeispiele sind nicht verallgemeinerbar. Sie zeigen jedoch den Unterschied zur Parameteridentifikation. Bei der Parameteridentifikation ist es nicht sinnvoll das Ergebnis, das eine PT_1 -Approximation für ein $PT_3T'_2$ System für T_1 liefert, festzuhalten und als schon bestimmten Wert für eine PT_2 -Approximation zu nutzen. Bei einer Indikation von Systemelementen ist aber genau das möglich. Der PT_1 -Ansatz stellt keine Approximation des Gesamtsystems dar, sondern eine Hypothese für ein Systemelement bzw. Teilsystem.

5 Diskussion der Ergebnisse

In diesem Bericht wurden zwei Maße zur Indikation von Strukturelementen linearer Eingrößensysteme betrachtet. Im Abschnitt 3 wurde der Schätzfehler der MKQ-Schätzung genutzt und im Abschnitt 4 wurde eine Singulärzahl formuliert.

Die Singulärzahl ist die Summe der Logarithmen der Singulärwerte (25).

$$S = \sum \log \sigma_i(R)$$

Die Singulärwerte σ_i sind auf der Grundlage der Eigenwerte λ_i definiert als

$$\sigma_i(R) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda_i(R^T R)} \quad . \quad (43)$$

Da die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist,

$$\det(M) = \prod \lambda_i(M) \quad , \quad (44)$$

gilt

$$S = \sum \log \sqrt{\lambda_i(R^T R)} \quad (45)$$

$$= 1/2 \log \prod \lambda_i(R^T R) \quad (46)$$

$$= 1/2 \log \det(R^T R) \quad . \quad (47)$$

Die Singulärzahl von R kann also aus der Determinante von $R^T R$ auf einfache Weise berechnet werden.

Im folgenden wird eine Parallele zur Theorie der optimalen Versuchsplanung [BBJR76] gezogen. Ein Vektor aus bekannten, gegebenen Funktionen $f_k(x)$ wird als wahrer Regressionsansatz vorausgesetzt. Das ist im hiesigen Fall für den Modellansatz (3) der Vektor von Funktionen f_0 bis f_{m+n-2}

$$\begin{aligned} f_0 &= x_1^0 \cdot x_2^{-1} - x_1^0 \cdot x_2^1 \\ f_1 &= x_1^1 \cdot x_2^{-1} \\ f_2 &= x_1^2 \cdot x_2^{-1} \\ &\vdots \\ f_{m-1} &= x_1^{m-1} \cdot x_2^{-1} \quad . \\ f_{m-1+1} &= x_1^1 \cdot x_2^1 \\ f_{m-1+2} &= x_1^2 \cdot x_2^1 \\ &\vdots \\ f_{m-1+n-1} &= x_1^{n-1} \cdot x_2^1 \end{aligned} \quad (48)$$

Dabei stellen x_1 die diskreten Frequenzpunkte $j\omega_i$ und x_2 die Wurzel aus dem geschätzten Frequenzgang $\sqrt{\hat{G}_F(j\omega_i)}$ dar (vergleiche (33)).

Der Parametervektor θ ist analog (16) und (17)

$$\begin{aligned} \theta &= \left(1, \sum_{\mu_1}^m T'_{\mu_1}, \sum_{\mu_1 < \mu_2}^m T'_{\mu_1} T'_{\mu_2}, \dots, \prod_{\mu}^{m-1} T'_{\mu}, \sum_{\nu_1}^{n-1} T_{\nu_1}, \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{n-1} T_{\nu_1} T_{\nu_2}, \dots, \prod_{\nu}^{n-1} T_{\nu} \right)^T \\ &= \left(1, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \right)^T \quad . \end{aligned} \quad (49)$$

Die zufälligen Realisierungen

$$\eta_i = y(x_{1i}, x_{2i}) = y \left(j\omega_i, \sqrt{\hat{G}_f(j\omega_i, T_M, T'_M)} \right) \quad (50)$$

des Zufallsvektors \mathfrak{N} lassen sich durch die Wahl der Einflussgrößen x beeinflussen. Zufällig ist x_{2i} durch den gestörten geschätzten Frequenzgang $\hat{G}_P(j\omega_i)$ des Prozesses, der in G_F eingeht.

Bei der optimalen Versuchsplanung besteht die Aufgabe, die Einflussgrößen x (bei gegebener Anzahl n von Versuchen) so zu wählen, dass die Schätzung des Parametervektors hinsichtlich eines Kriteriums optimal ist. Die Anzahl n der Versuche ist hier gleich der Anzahl der betrachteten Frequenzen $j\omega_i$. Die Freiheit bei der Versuchsplanung ist die Wahl der Zeitkonstanten T_M und T'_M für das angesetzte Systemelement für G_M .

Als Optimalitätskriterium wird die sogenannte D-Optimalität betrachtet. Die Matrix

$$M(V_n) = \frac{1}{n} R^T R \quad (51)$$

heißt Informationsmatrix des konkreten Versuchsplanes V_n . Ein konkreter Versuchsplan V_n^* ist D-optimal, wenn gilt:

$$\min_{V_n \in \{V_n\}} \det(M^{-1}(V_n)) = \det(M^{-1}(V_n^*)) \quad . \quad (52)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Zufallsvektors \mathfrak{N} normalverteilt ist, minimiert die D-Optimalität das Volumen des Streuungsellipsoiden der Parameterschätzung θ .

Ein Strukturelement wird nicht durch ein Minimum von $\det(M^{-1})$, sondern durch ein Minimum von $\det(M)$ angezeigt. Das heißt, ein Strukturelement wird dann indiziert, wenn das Volumen des Streuungsellipsoiden der Parameterschätzung θ maximal wird. Die Parameter des Fehlermodells sollen auch gar nicht bestimmt werden. Das Verfahren entspricht der Wahl eines Versuchsplanes, bei dem die Parameter θ linear abhängig werden und daher jeden Wert annehmen können. Unter dieser Bedingung ist die meiste Information aus dem vor dem Versuch bekannten Frequenzgang in den Versuchsplan geflossen.

So ähnlich die mathematischen Terme der beiden Maße MKQ-Schätzfehler und Singulärzahl aussehen mögen, beinhalten sie doch eine gegensätzliche Vorgehensweise. Bei dem MKQ-Schätzfehler wird ein Parametervektor formuliert, der im ungestörten Fall dann fehlerfrei geschätzt werden kann, wenn das angesetzte Modellelement richtig ist. Dagegen wird bei der Singulärzahl das Schätzproblem für den Parametervektor so formuliert, dass wenn im ungestörten Fall das angesetzte Modellelement richtig ist, der Parametervektor nicht mehr eindeutig ist. In Folge linearer Abhängigkeiten, wird das Gleichungssystem zur Bestimmung des Parametervektors unterbestimmt.

6 Zusammenfassung

In der Arbeit wurden zwei Bewertungsmaße zur Indikation von Strukturelementen für lineare SISO-Systeme vorgestellt und deren Möglichkeiten anhand von Simulationsbeispielen demonstriert. Die Besonderheit dieser beiden Bewertungsmaße ist, dass für ein System mit n Polstellen und m Nullstellen **eine** Polstelle und/oder **eine** Nullstelle als Modell angesetzt wird. Die Bewertungsmaße dienen also nicht der Parameteridentifikation, sondern der Indikation von Strukturelementen. Dass die Indikation von Strukturelementen bisher wenig untersucht wurde, aber sehr bedeutsam für die Regelungstechnik und die Systemtheorie ist, wurde in Abschnitt 1 dargelegt.

Die generelle Vorgehensweise ist für beide Bewertungsmaße gleich und wurde in Abschnitt 2 beschrieben. Die Methode beruht auf einer Dimensionsbetrachtung an einem Fehlermodell, die im Bericht FZR-244 [Hop98] eingeführt wurde.

Im Abschnitt 3 wurde gezeigt, wie Strukturelemente indiziert werden können, in dem der Verlauf des MKQ-Schätzfehlers betrachtet wird. Der MKQ-Schätzfehler ist hier der Fehler, der MKQ-Schätzung der Parameter des dimensionsreduzierten Fehlermodells. Für den Fall, dass das angesetzte Modellelement Bestandteil des zu modellierenden Prozesses ist, ist das dimensionsreduzierte Fehlermodell exakt und der Schätzfehler wird im ungestörten Fall Null. Die Simulationen zeigen, dass 10 bis 20 logarithmisch verteilte Frequenzpunkte für den geschätzten, nichtparametrischen Frequenzgang ausreichend sind und dass 5% Störung auf den Betrag des Frequenzganges toleriert werden können.

Im Abschnitt 4 wurden die Strukturelemente durch den Verlauf der Singulärwerte indiziert. Dazu wurde eine Matrix konstruiert, deren Spalten linear abhängig werden, für den Fall, dass das angesetzte Modellelement Bestandteil des zu modellierenden Prozesses ist. Auch hier sind 10 bis 20 logarithmisch verteilte Frequenzpunkte ausreichend und 5% bis 15% Störung kann noch toleriert werden. Es wurde gezeigt, wie mit Hilfe der Indikation von Strukturelementen ein Prozess schrittweise modelliert werden kann. Die gleichzeitige Indikation von Pol- und Nullstellen ist vorteilhaft, da die Minima stärker ausgeprägt sind und so auch Pol-Nullstellen-Paare mit ähnlichen Zeitkonstanten erkannt werden können. Bei der Betrachtung von Pol- und Nullstellen lieferte die Matrix, bei der $\sqrt{\hat{G}_F(j\omega_i)}$ in allen Spalten entweder im Zähler oder im Nenner auftritt, die besten Ergebnisse.

Die Indikation mittels der Singulärzahl ist der Indikation mittels MKQ-Schätzfehler vorzuziehen. Die Simulationen zeigten zwar keine großen Unterschiede in der Genauigkeit, aber die Bestimmung der Singulärzahl bereitet numerisch weniger Probleme als die Abschätzung des MKQ-Schätzfehlers. Der Vorteil der Singulärzahl wird noch deutlicher, wenn sie, wie in Abschnitt 5 beschrieben, über die Determinante bestimmt wird.

Die hier vorgestellten Methoden lassen sich überall dort anwenden, wo das Fehlermodell (siehe Abschnitt 2) als lineare Beziehung formuliert werden kann. Für einige der nichtlinearen Systeme, die als Volterra-Systeme [Kal93] darstellbar sind, ist das z. B. möglich, wenn der Modellansatz die Nichtlinearität enthält. Allerdings muss dazu ein mehrdimensionaler Frequenzgang geschätzt werden [Rug81]. Bei der numerischen Simulation mit der Singulärzahl konnten auch hier Modellelemente indiziert werden. Die dominierenden Zeitkonstanten in einfachen Zweigrößensystemen können ebenfalls ermittelt werden. Die Ergebnisse haben aber keine praktische Bedeutung, da sie zu hohe Anforderungen an das Datenmaterial stellen.

Auf Grund des Verzichtes auf weitere Strukturannahmen (Zählergrad und Nennergrad) müssen sehr genaue Messwerte vorausgesetzt werden (auch für lineare SISO-Systeme). Bei Mehrgrößensystemen oder nichtlinea-

ren Systemen wird die Freiheit bei der Modellierung noch einmal um ein vielfaches größer. Um Indikatoren für Systemelemente solcher Systeme zu finden, ist die Informationstheorie unverzichtbar. Wenn für n_1 Parameter in einem bestimmten Wertebereich eine bestimmte Genauigkeit gefordert wird, (wie bei der Parameteridentifikation,) kann einfach berechnet werden, wie viel Information notwendig ist. Für die Strukturermittlung ist zu erforschen, wie viel Information für die Indikation eines bestimmten Strukturelementes erforderlich ist.

Literatur

- [BBJR76] H. Bandemer, A. Bellmann, W. Jung und K. Richter. *Optimale Versuchsplanung*, Band 131 aus *Wissenschaftliche Taschenbücher*. Berlin: Akademie-Verlag Berlin, 1976.
- [Bet96] D. Bettenhausen. *Automatische Struktursuche für Regler und Strecke*, Band 574 aus *VDI-Fortschr.-Ber. Reihe 8*. Düsseldorf: VDI Verlag, 1996.
- [Foe94] O. Foellinger. *Regelungstechnik : Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Heidelberg : Huethig, 1994.
- [HB98] J. Heitkötter und D. Beasley. The Hitch-Hiker's Guide to Evolutionary Computation: A list of Frequently Asked Questions (FAQ), 1998. USENET: comp.ai.genetic, anonymous FTP rftm.mit.edu/pub/usenet/news.answers/ai-faq/genetic 110 pages.
- [Hop98] D. Hoppe. *Modellbildung durch Auswertung von Fehlerdimensionen*, Band FZR-244 aus *Forschungsberichte*. Forschungszentrum Rossendorf, PF 51 01 19, D-01314 Dresden, Dezember 1998.
- [Ign96] T. Ignatious. Control System Identification Using the Population Based Incremental learning (PBIL). *UKACC International Conference on CONTROL*, IEE Conference Publikation(427):1309–1314, Exeter, 2-5 September 1996.
- [Ise88] R. Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme*, Band I und II. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1988.
- [Kal93] J. C. Kalkkuhl. Volterra Theory of Nonlinear Systems, A Tutorial with Applications to the Control of Nonlinear Systems. *Tutorial, ICC/40/July, 1993*, Seiten 1–65, 1993.
- [MBC95] P. Marenbach, K. D. Bettenhausen und B. Cuno. Selbstorganisierende Generierung strukturierter Prozeßmodelle. *at - Automatisierungstechnik*, 43(6):277–288, 1995.
- [MT75] M. D. Mesarovic und Y. Takahara. *General Systems Theory: Mathematical Foundations*, Band 113 aus *Mathematics in Science and Engineering*. New York: Academic Press, 1975.
- [Rug81] W. J. Rugh. *Nonlinear System Theory*. London: The Johns Hopkins University Press, 1981.
- [Unb93] R. Unbehauen. *Systemtheorie*. München/Wien: R. Oldenbourg Verlag, 1993.
- [Wer89] J. Wernstedt. *Experimentelle Prozeßanalyse*. Berlin: Verlag Technik, 1989.