

BITZENBAUER, J.; SCHWEIZERHOF, K.

Mehrgitterberechnungen von nichtlinearen Hohlstrukturen

Die Finite Elemente Untersuchung von aus Hohlzellen aufgebauten Körpern mit nichtlinearem Materialverhalten führt bei durchgängiger Diskretisierung der Mikrostrukturen üblicherweise auf sehr grosse Gleichungssysteme. Als eine effiziente Lösungsmethode empfehlen sich Mehrgittermethoden. Damit ist im Gegensatz zur rein homogenen makroskopischen Betrachtung die Berücksichtigung lokaler Effekte (z.B. in Grenzschichten) möglich. Anders als bei der Homogenisierung können mit Hilfe des vorgestellten Konzeptes auch komplett aperiodische Strukturen betrachtet werden. Während im klassischen Multigridverfahren die minimale Anzahl der zur Geometriebeschreibung notwendigen Finiten Elemente von der Geometrie selbst abhängig ist, besteht ein größtmögliches Gitter bei der Composite Finite Elemente Methode (CFE, [1,2,3]) aus einem Element. Als Anwendungsbeispiel dient ein Hohlkörper mit aperiodischem nichtlinearem Verhalten.

1. Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE

Gegeben sei ein zu vernetzendes Gebiet Ω mit inneren Rändern. Zur Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE wird von einer das Gebiet Ω komplett überdeckenden Anfangstriangulierung τ_0 mit zugehöriger Netzweite $h_0 = \mathcal{O}(\text{diam}\Omega)$ ausgegangen. Aus dieser wird durch reguläre Verfeinerung eine Gitterfolge $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$ erzeugt. Elemente, die während des Verfeinerungsprozesses komplett ausserhalb des Gebietes Ω landen, werden weggelassen. Die Vernetzungsstrategie entspricht im zweidimensionalen der quadtree- bzw. im dreidimensionalen der octree-Methode [4]. Die Gitter τ_l sind logisch und physisch verbunden: jedes Elternelement aus τ_l hat eine eindeutige Menge an Kinder-elementen in τ_{l+1} , und jedes Kinderelement aus τ_l hat einen eindeutigen Elternteil in τ_{l-1} . Die so erzeugte Folge von Gittern τ_l ist jedoch im allgemeinen keine geeignete Approximation des Gebietes Ω . Im nächsten Schritt wird deshalb das feinste erzeugte Gitter durch kleine Modifikationen an den Rand angepasst. Dabei wird eine Kante XY des FE-Netzes als Randkante betrachtet, falls genau einer ihrer Knoten im Gebiet und einer ausserhalb liegt. In allen Randkanten wird der dem Rand am nächsten liegende Knoten X oder Y auf den Rand geschoben. Dadurch ändert sich die Form aller Elemente auf allen Gittern, die den verschobenen Punkt als Knoten haben. Die physikalische Ordnung der Gitter geht dabei verloren, allerdings bleibt die logische Ordnung der Elter/Kinder-Beziehungen bestehen. Abschliessend werden alle Elemente des feinsten Gitters, die im wesentlichen ausserhalb des Gebietes Ω liegen, und alle Elemente der gröberen Gitter, die komplett ausserhalb des Gebietes Ω liegen, entfernt.

Bei zweidimensionalen Vierecks- oder bei dreidimensionalen Hexaederelementen kann es sinnvoll sein, zur Netzglättung die durch das Entfernen von Elementen entstandenen neuen Randknoten des feinsten Gitters ebenfalls auf den Rand zu schieben. Ferner sollte eine Kontrolle und gegebenenfalls eine Korrektur der Elementformen und Innenwinkel der auf dem feinsten Level veränderten Elemente erfolgen. Fig. 1 zeigt eine Beispielfolge von Gittern τ_0 bis τ_4 , die aus dem aus nur einem Element bestehenden größsten Gitter τ_0 hervorgegangen ist.

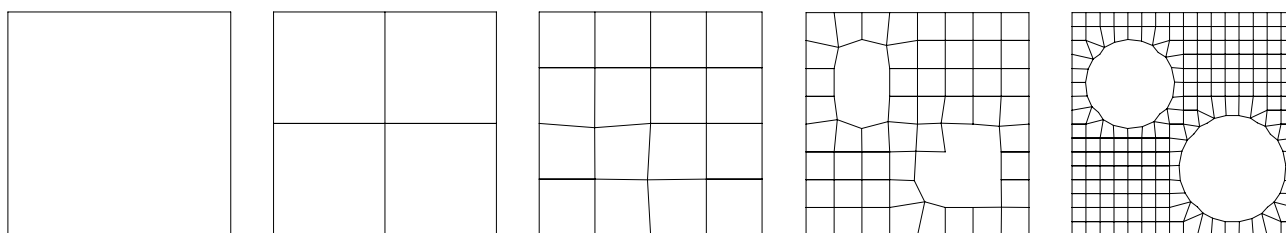


Fig. 1: Gitter τ_0 (links) bis τ_4 (rechts) zur FE-Abbildung einer Struktur mit Hohlräumen

2. Mehrgitteralgorithmus

Entstanden ist eine hierarchisch verschachtelte Folge von Gittern $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$. Im Rahmen der Konstruktion eines

Mehrgitteralgorithmus zur Lösung des Variationsproblems

$$\text{finde } u \in H^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} \langle a \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} (f, v) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (1)$$

kann zunächst die Systemmatrix $K_{l_{\max}}$ auf dem feinsten Gitter $\tau_{l_{\max}}$ auf Standardweise aufgestellt werden. Die Grobgittermatrizen der Levels $l-1, \dots, 0$ entstehen dann rekursiv durch die

$$\text{Galerkinprodukte} \quad K_{l-1} = (P_{l-1}^l)^T K_l P_{l-1}^l \quad (2)$$

mit den zu konstruierenden Prolongationsoperatoren $(P_{l-1}^l)_{1 \leq l \leq l_{\max}}$. Die Interpolation

$$w = P_{l-1}^l v \quad \text{mit} \quad (P_{l-1}^l)_{i,j} = N_{l-1,j}(x_{l,i}) \quad \forall 1 \leq i \leq n_l, 1 \leq j \leq n_{l-1} \quad (3)$$

von Feingitterfunktionen w aus Grobgitterfunktionen v wird dabei aus den zugehörigen Ansatzfunktionen N_l bestimmt. Hierbei kann die hierarchische Struktur der Netze ausgenutzt werden.

In einem Newton-Multigridverfahren für nichtlineare Probleme [5] wird zunächst das nichtlineare Residuum $r_{l_{\max}}$ und die Tangente $K(u_{l_{\max}})$ bestimmt und anschliessend ein linearer Mehrgitterzyklus zur Lösung der Tangentengleichung $K(u_{l_{\max}}) \Delta u = r_{l_{\max}}$ durchgeführt.

3. Beispiele

Als Beispiele dienen zwei Hohlstrukturen aus Neo-Hooke Material (Fig. 2). Die Verzerrungsenergiefunktion lautet

$$W(I_C, J) = \frac{1}{2} \mu (I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{1}{2} \lambda (J - 1)^2 \quad (4)$$

mit $\lambda, \mu = 1$. Zur Lösung der Gleichungssysteme wurde ein Mehrgitter V-Zyklus mit je einem Gauss-Seidel-Schritt zur Vor- und Nachglättung eingesetzt. Als Abbruchkriterium diente $\|\Delta u\|_{\infty} \leq 10^{-4}$. Die Netze in Fig. 2 links und Fig. 2 mitte enthalten 11067 bzw. 24939 Unbekannte. Die Rechenzeiten für den ersten Lastschritt betragen bei Verwendung des Mehrgitterlösers 160 sec bzw. 379 sec und im Vergleich bei Verwendung eines Jacobi-Vorkonditionierten CG-Verfahrens 152 sec bzw. 454 sec. Der sich selbst bei kleineren Beispielen zeigende Rechenzeitvorsprung wird bei grösseren Systemen noch ausgebaut. Fig. 2 rechts zeigt die auf die doppelte Länge gezogene deformierte Struktur aus Fig. 2 links.

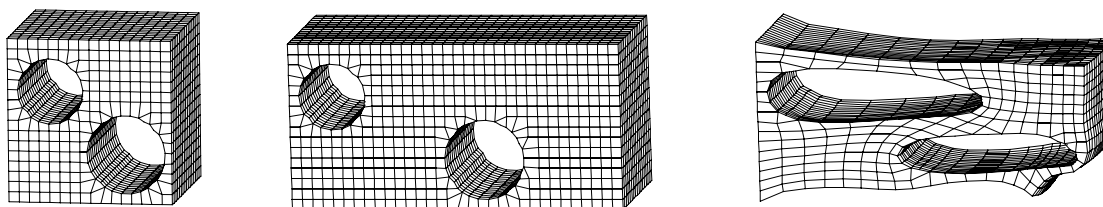


Fig. 2: Ausgangsnetze und deformiertes Netz

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung im Rahmen des Projekts „Schaumstoffe“.

4. Literatur

- 1 HACKBUSCH, W.; SAUTER, S.A.: A new Finite Element Approach for Problems Containing Small Geometric Details. *Archivum Mathematicum* **34** (1998), 105–117.
- 2 HACKBUSCH, W.; SAUTER, S.A.: Adaptive Composite Finite Elements for the Solution of PDEs containing non-uniformly distributed Micro-Scales. *Matematicheskoe modelirovanie* **8** (1996), 31–43.
- 3 HACKBUSCH, W.; SAUTER, S.A.: Composite finite elements for problems containing small geometric details. Part II: Implementation and numerical results. *Computing and Visualization in Science* **1** (1997), 15–25.
- 4 GEORGE, P.L.: Automatic Mesh Generation and Finite Element Computation. *Handbook of Numerical Analysis Vol. IV.* (1996), 69–190.
- 5 HACKBUSCH, W.: *Multi-Grid Method and Applications.* Springer-Verlag Berlin (1985).

DIPL.-ING. JOHANN BITZENBAUER, PROF. DR.-ING. KARL SCHWEIZERHOF, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, Postfach 6980, D-76128 Karlsruhe, Germany