

Ein Reduktionsalgorithmus für die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen

Rainer Keppler*, Pierre Barthels und Wolfgang Seemann

Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe (TH), Germany

Auf der Basis des Roberson-Wittenburg'schen Mehrkörperformalismus wurde ein Programm entwickelt, daß die Bewegungsgleichungen baumstrukturierter Mehrkörpersysteme in analytischer Form generiert. Es wird ein Algorithmus vorgestellt, der den Auswerteaufwand der Bewegungsgleichungen verringert. Grundidee ist dabei, Terme geringen Einflusses zu eliminieren. Die Effizienz des Algorithmus wird anhand räumlicher n -fach Pendel demonstriert.

© 2005 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

1 Einleitung

Eines der großen Ziele der Mehrkörperdynamik ist die Verkürzung von Simulationszeiten. Hierzu gibt es eine Vielzahl an verschiedenen Ansätzen. Die Verwendung rekursiver Mehrkörperalgorithmen, oder aber differential-algebraischer Formulierungen in Kombination mit effizienten numerischen Verfahren sind als momentaner Stand der Technik anzusehen. Neuere Ansätze basieren auf Subsystemtechniken. Dabei werden große Strukturen in kleine effizient behandelbare Subsysteme aufgetrennt und anschließend wieder zusammengefügt.

Wir wollen hier einen alternativen Weg gehen, der sich mit der Subsystemtechnik gut kombinieren lässt. Die Idee dabei ist, Zusatzinformationen über das System zu verwenden, um die Auswertung der mathematischen Modellgleichungen zu verringern. Das Prinzip ist nicht neu. Beispielsweise werden bei sich langsam veränderlichen Mechanismen die Coriolisanteile der Bewegungsgleichungen häufig vernachlässigt.

2 Reduktionsverfahren

Die Grundidee des hier vorgestellten Reduktionsalgorithmus lässt sich an einem einfachen Beispiel erklären. Es sei unsere Aufgabe die Funktion $f(\varphi) = 1 + \sin(\varphi) + 2 \cdot \cos(\varphi + \pi/16) - 0.01 \cdot \sin(3\varphi)$ in $\varphi \in [0, 2\pi]$ auszuwerten. Wie schnell ersichtlich ist, kann $0.01 \cdot \sin(3\varphi)$ als Störung von $f(\varphi)$ betrachtet werden. Verzichtet man bei der Auswertung auf diesen Term, so lassen sich neben der Auswertung eines Sinus, 3 der 7 Elementaroperationen (4 Additionen, 3 Multiplikationen) einsparen, ohne dabei das Gesamtergebnis wesentlich zu verändern.

Mathematisch präzise lässt sich die Vorgehensweise wie folgt beschreiben. Sei f eine Funktion im Bereich D , die dargestellt werden kann als

$$f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot f_i(x), \text{ wobei } f_i \in \mathcal{F} = \{f | f : D \rightarrow [-1, 1], f \text{ surjektiv}\} \text{ für alle } i = 1 \dots n.$$

Die Konstanten c_i beschreiben die Größe des jeweiligen Einflusses von f_i auf f . Die reduzierte Funktion ist gegeben durch

$$f^{(\text{red.})}(x) = c_0 + \sum_{|c_i| \geq C} c_i \cdot f_i(x),$$

wobei C eine geeignete Schranke darstellt. Die Wahl der Schranke C kann auf verschiedene Arten erfolgen. Sinnvolle Ansätze sind $C^{(\infty)}(\mu) = \mu \cdot \max_{i>0} |c_i|$, $C^{(2)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n c_i^2 \right)^{1/2}$, oder aber auch $C(\epsilon, \mu) = \frac{\epsilon \cdot C^{(2)} + C^{(\infty)}(\mu)}{\epsilon + \mu}$. Die Elimination der sogenannten schwachen Terme führt zu einem absoluten Fehler $|f(\varphi) - f^{(\text{red.})}(\varphi)| \leq m \cdot C$, $\forall \varphi \in D$ (m = Anzahl eliminierter Terme). Der relative Fehler kann dagegen sehr groß sein.

3 Anwendung auf Mehrkörpersysteme

Auf der Basis des Roberson-Wittenburg'schen Mehrkörperformalismus [2, S. 163ff] wurde innerhalb der Computeralgebraumgebung *Maple* ein Programm entwickelt, mit dem sich die Bewegungsgleichungen baumstrukturierter Systeme in analytischer

* Corresponding author: e-mail: keppler@itm.uni-karlsruhe.de, Phone: +00 49 721 608-4250

Form generieren lassen. Im Falle von drehgelenkgekoppelten Mechanismen mit bewegtem Grundkörper erhält man Gleichungen der Form

$$\mathbf{M}(\varphi) \ddot{\varphi} = \left[\dot{\varphi}^T \mathbf{R}^{(1)}_i(\varphi) \dot{\varphi} \right]_{i=1\dots n} + \left[\omega_0^T(t) \mathbf{R}^{(2)}_i(\varphi) \dot{\varphi} \right]_{i=1\dots n} + \left[\omega_0^T(t) \mathbf{R}^{(3)}_i(\varphi) \omega_0(t) \right]_{i=1\dots n} \\ + \mathbf{R}^{(4)}(\varphi) \dot{\omega}_0(t) + \mathbf{R}^{(5)}(\varphi) \left[\mathbf{F}_{ext}(t) - \mathbf{m} \ddot{\mathbf{r}}_0(t) \mathbf{1}_n \right] + \mathbf{R}^{(6)}(\varphi) \mathbf{M}_{ext}(t),$$

wobei $(\varphi, \dot{\varphi})$ die Zustandsvariablen des Systems sind, $\mathbf{r}_0(t)$ und $\omega_0(t)$ die Bewegung des Grundkörpers widerspiegeln, und $\mathbf{F}_{ext}(t)$ und $\mathbf{M}_{ext}(t)$ die externen Kräfte und Momente wiedergeben.

Die Bewegungsgleichung ist in der Form dargestellt, dass vergleichbare Terme mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{M}(\varphi)$, $\mathbf{R}^{(5)}(\varphi)$, $\mathbf{R}^{(4)}(\varphi)$, sowie $\mathbf{R}^{(3)}_i(\varphi)$, $\mathbf{R}^{(2)}_i(\varphi)$ und $\mathbf{R}^{(1)}_i(\varphi)$ ($i = 1 \dots n$) zusammengefasst werden. Zentraler Punkt dabei ist, dass die so definierten Matrizen jeweils nur von den Sinus und Cosinus der Winkel abhängen. Damit ist der vorgestellte Reduktionsalgorithmus elementweise auf jede der Matrizen anwendbar. Wichtig dabei ist, dass niemals alle Terme eines Elements verschwinden. Die wesentlichen Anteile bleiben erhalten. Dies garantiert, dass die wesentlichen Kopplungseffekte ebenfalls erhalten bleiben.

Innerhalb der Computeralgebraumgebung *Maple* wurde ein Programm entwickelt, das den beschriebenen Reduktionsalgorithmus automatisiert und auf die Bewegungsgleichungen in der oben dargestellten Form anwendet. Es wird direkt im Anschluss an die Generierung der Gleichungen einmalig ausgeführt. Zu bemerken ist, dass die Elimination der schwachen Terme i.a. sehr zeitintensiv ist, wogegen die Simulation merklich beschleunigt werden kann. Zusätzlich wird eine *Maple*-interne Funktion zur optimalen Auswertung der Bewegungsgleichung namens *codegen[optimize]* ausgeführt [1]. Dabei werden Algorithmen verwendet, die auch bei der Optimierung innerhalb üblicher Compiler Anwendung finden. Eine Option zum Export der Gleichungen nach *C*, *Matlab* oder *Simulink* wurde ebenfalls implementiert.

4 Testproblem: räumliches Pendel

Um die Effizienz des vorgestellten Ansatzes zu zeigen betrachten wir im Folgenden ein räumliches n -fach Pendel aus n identischen Starrkörpern, deren Achsen paarweise orthogonal angeordnet sind. Der Aufhängepunkt bewegt sich dabei mit $\mathbf{r}_0(t)$ und $\omega_0(t)$. Als Schranke wählen wir $C = C^{(\infty)}(\mu)$.

Die Wahl der Schranke, bzw. hier des Parameters μ ist sehr problemabhängig und stellt sich oft als schwierig heraus. In dem bisher untersuchten Problem hat sich jedoch gezeigt, dass Parameter μ um 1% stets eine gute Wahl darstellen. Die Auswirkungen auf die Lösungen sind äußerst gering. In Einzelfällen sind aber auch Parameter μ bis 10% möglich, die noch zu brauchbaren Lösungen führen.

Tabelle 1 Beispiel n -fach Pendel mit paarweise orthogonalen Achsen.

Anzahl der Körper	Anzahl an Elementaroperationen			
	Original- aufwand	nur <i>codegen</i> ($\mu = 0$)	<i>codegen</i> $\mu = 1\%$	<i>codegen</i> $\mu = 10\%$
1	73 (100%)	58 (79%)	33 (45%)	33 (45%)
2	573 (100%)	291 (51%)	208 (49%)	192 (34%)
3	3372 (100%)	1259 (37%)	1074 (32%)	749 (22%)
4	16648 (100%)	5042 (30%)	3724 (22%)	2525 (15%)
5	72323 (100%)	18541 (26%)	11463 (16%)	8068 (11%)
6	286028 (100%)	64058 (22%)	34020 (12%)	22677 (8%)
7	1055337 (100%)	211299 (20%)	94228 (9%)	62325 (6%)

In Tabelle 1 ist die Anzahl an Elementaroperationen für das Pendel Beispiel dargestellt. Es zeigt sich, dass mittels *codegen[optimize]* eine Reduktion auf 20% des ursprünglichen Aufwandes erreicht wird. Der Reduktionsalgorithmus schafft weitere 50%, so dass als Endergebnis etwa 9% Restauswerteaufwand übrig bleiben.

Danksagung Diese Arbeit entstand im Rahmen des SFB588 Humanoide Roboter. Besonderer Dank gilt daher der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung.

Literatur

- [1] M. B. Monagan und G. Monagan, in : Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation, Kihei, Maui, Hawaii, United States, 1997, pp. 257 - 264.
- [2] J. Wittenburg, Dynamics of Systems of Rigid Bodies, Teubner, 1977.