http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 25, 2 pp., *27.02.2006*

Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes unter Verwendung eines gewissen regulären Kegels

Peter Volkmann

Hier wird der Banachsche Fixpunktsatz in den Rahmen der Herzogschen Arbeit [1] gestellt. Zunächst seine Formulierung:

Satz. *Es sei* (M, d) *ein vollständiger metrischer Raum,* $M \neq \emptyset$*, und für* $f : M \to M$ *gelte*

$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa d(x, y) \quad (x, y \in M) \tag{1}$$

mit einer Konstanten $\kappa < 1$*. Dann hat* f *genau einen Fixpunkt* p*, und für jedes* $x \in M$ *gilt*

$$f(x), f^2(x), f^3(x), ... \to p. \tag{2}$$

Beweis. 1. Es genügt, für $x \in M$ die Konvergenz (2) gegen ein $p \in M$ zu zeigen; wegen der Stetigkeit von f ist dann p ein Fixpunkt dieser Funktion. Die Eindeutigkeit von p ergibt sich mit $\kappa < 1$ leicht aus (1).

2. Nach Kunugui [3] läßt sich der metrische Raum M isometrisch in einen reellen Banachraum E einbetten. Wir stellen uns dementsprechend M als abgeschlossene Teilmenge von E vor (M ist vollständig), und wir schreiben (1) in der Form

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad (x, y \in M). \tag{3}$$

3. Wie Herzog [1] bilden wir den Banachraum

$$\tilde{E} = E \times R$$

(R bezeichnet den Bereich der reellen Zahlen; $\|(x, \xi)\| = \max\{\|x\|, |\xi|\}$ in $\tilde{E}$), und wir ordnen ihn durch den Kegel

$$K = \{(x, \xi) \mid x \in E, \xi \in R, \|x\| \leq \xi\}$$

($(x, \xi) \leq (y, \eta)$ in $\tilde{E}$ bedeutet also $(y - x, \eta - \xi) \in K$). Der Kegel K ist regulär (im Sinne von Krasnosel'skiĭ [2]), d.h. jede monotone, ordnungsbeschränkte Folge in $\tilde{E}$ ist konvergent (im Sinne der Norm).

4. Wir bilden $\tilde{M} = M \times R$ (es ist also $\tilde{M} \subseteq \tilde{E}$) und definieren $F : \tilde{M} \to \tilde{M}$ durch

$$F(x, \xi) = (f(x), \kappa\xi) \quad ((x, \xi) \in \tilde{M}).$$

Wegen (3) ist F monoton wachsend, d.h. für $(x, \xi), (y, \eta) \in \tilde{M}$ gilt

$$(x, \xi) \leq (y, \eta) \Rightarrow F(x, \xi) \leq F(y, \eta).$$

5. Es sei nun $x \in M$. Wir wählen $\xi \in R$ mit $\|x - f(x)\| \leq \xi(1 - \kappa)$; dann gilt

$$(x, -\xi) \leq F(x, -\xi) \leq F(x, \xi) \leq (x, \xi).$$

Anwendung des monotonen Operators $F^n : \tilde{M} \to \tilde{M}$ liefert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichungen

$$F^n(x, -\xi) \leq F^{n+1}(x, -\xi) \leq F^{n+1}(x, \xi) \leq F^n(x, \xi),$$

und insgesamt folgt

$$(x, -\xi) \leq ... \leq F^4(x, \xi) \leq F^3(x, \xi) \leq F^2(x, \xi) \leq F(x, \xi) \leq (x, \xi).$$

Da K regulär ist, ist

$$F(x, \xi), F^2(x, \xi), F^3(x, \xi), \ldots$$

eine in $\tilde{E}$ konvergente Folge, wegen $F^n(x, \xi) = (f^n(x), \kappa^n \xi)$ ist dann die in M gelegene Folge

$$f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$$

konvergent gegen ein $p \in E$, und wegen der Abgeschlossenheit von M in E gilt schließlich $p \in M$.

Literatur

[1] Gerd Herzog: *Quasimonotone embedding of one-sided Lipschitz continuous functions.* Univ. Karlsruhe, Fak. Math., Preprint Nr. 06/4, 12 pp. (2006).

[2] M. A. Krasnosel'skiĭ: *Pravil'nye i vpolne pravil'nye konusy.* Doklady Akad. Nauk SSSR **135**, 255-257 (1960).

[3] Kinjirô Kunugui: *Applications des espaces à une infinité de dimensions à la théorie des ensembles.* Proc. Imperial Acad. Japan **11**, 351-353 (1935).

Typoskript: Marion Ewald.

Adresse des Autors: Mathematisches Institut I, Universität, 76128 Karlsruhe, Deutschland.