

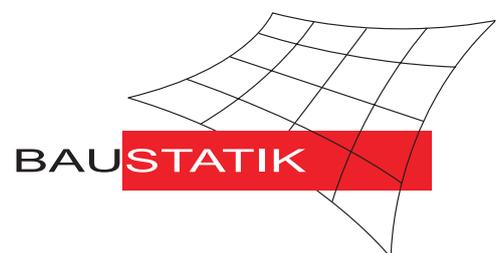


Universität Karlsruhe (TH)  
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Baustatik

# Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell - Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten

Ingo Münch



# Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell - Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

**Dipl.-Ing. Ingo Münch**

aus Balingen

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Oktober 2007

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

Korreferenten: PD. Dr. rer. nat. habil. P. Neff

Prof. Dr.-Ing. habil. F. Gruttmann

Karlsruhe 2007

**Herausgeber:**

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner

**Organisation und Verwaltung:**

Institut für Baustatik  
Universität Karlsruhe (TH)  
Postfach 6980  
76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608-2280  
Telefax: (0721) 608-6015  
E-mail: [baustatik@bs.uni-karlsruhe.de](mailto:baustatik@bs.uni-karlsruhe.de)

© 2007 Ingo Münch  
Institut für Baustatik  
Universität Karlsruhe (TH)  
Kaiserstraße 12  
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise  
auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elek-  
tronischen Medien zu speichern.

Eine elektronische Ausgabe findet sich im elektronischen Volltextarchiv EVA der  
Universitätsbibliothek der Universität Karlsruhe (TH).

ISBN 978-3-935322-12-6

## Vorwort

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe (TH).

Dem Hauptreferenten und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wagner danke ich sehr herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine in jeder Beziehung großzügige Förderung und wissenschaftliche Unterstützung. Die ausgesprochen angenehme Atmosphäre am Institut, die von großer Offenheit und Freundlichkeit geprägt ist, trug zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Meinem weiteren wissenschaftlichen Betreuer Herrn PD. Dr. rer. nat. habil. P. Neff möchte ich überaus für die jahrelange intensive und fruchtbare Zusammenarbeit danken, welche unterschiedliche Disziplinen mit Erfolg kombiniert und dabei Hürden zu überschreiten vermag. Von der Entwicklung neuer Ideen, der mathematisch gesicherten Ausarbeitung bis hin zur Übernahme des ersten Korreferates erhielt diese Arbeit größtmögliche Unterstützung von ihm.

Mein besonderer Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. F. Gruttmann für die wertvollen Anregungen und Hinweise sowie für die Übernahme eines zweiten Korreferates.

Mein Dank gilt auch allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts, welche im Alltag z.B. durch das positive Arbeitsklima und ihre Hilfsbereitschaft einen Teil beigetragen haben. Hierbei möchte ich insbesondere Herrn PD. Dr.-Ing. habil. S. Klinkel hervorheben, welcher mich sowohl in theoretischen wie praktischen Belangen stets unterstützt hat. Seine gewissenhafte und konstruktive Durchsicht des Manuskriptes sei hierbei dankend erwähnt.

Schließlich danke ich meiner Familie für die ausdauernde Hilfe und meiner Frau Alke für unsere geliebte Tochter Anuk. Ihre Geburt hat die Entstehung dieser Arbeit beflügelt.

Karlsruhe, im November 2007

*Ingo Münch*

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einem geometrisch und materiell nichtlinearen COSSERAT-Modell zur Beschreibung deformierbarer, fester Körper. Dabei steht die Abbildung des Tragverhaltens von Strukturen durch das Modell im Mittelpunkt.

Die mathematische und numerische Behandlung des COSSERAT-Rotationsfeldes bereitet eine Implementierung der Theorie in ein Finite-Element-Modell vor. Hierbei wird ein Algorithmus auf Basis einer Quaternionendarstellung für endliche Rotationen gegeben.

Eine Diskussion zur Ursache von unsymmetrischen CAUCHY-Spannungen und Momentenspannungen findet nachfolgend statt. Beide Felder haben einen Einfluss auf die Drehimpulsbilanz des COSSERAT-Kontinuums. Betrachtungen zur klassischen Drehimpulsbilanz reichen hierbei nicht aus, weshalb auf ein Homogenisierungsmodell zurückgegriffen wird.

Weiterhin werden konstitutive Beziehungen entwickelt, wobei zwei zusätzliche Materialparameter im Vergleich zur klassisch, linearen Elastizität in Erscheinung treten. Beide Parameter sind Gegenstand von weiteren Studien in analytischen und numerischen Tests. Die Parameter nehmen Einfluss auf das Deformations- und Tragverhalten einer Struktur, wobei die Art der Deformation sowie die Geometrie der Struktur eine Rolle spielt.

Die nichtlineare COSSERAT-Theorie kann mit entsprechenden COSSERAT-Parametern steiferes Verhalten der Struktur - als es nach klassisch, linearer Elastizität vorhergesagt wird, abbilden. Im Gegensatz zur linearen COSSERAT-Theorie ist jedoch auch bei entsprechenden COSSERAT-Parametern ein weiches Verhalten als im klassischen Fall zu beobachten.

Die Ursache für dieses Verhalten wird im COSSERAT-Rotationsfeld begründet, welches je nach Parameterwahl die Deformation behindert oder verstärkt. Der Vergleich mit einer Kontinuumstheorie für Versetzungen gibt eine Erklärung, weshalb man im COSSERAT-Modell von einer zusätzlichen Kinematik sprechen kann, welche die Deformation verstärkt.

Weitere Anwendungen, wie die Simulation einer strukturbezogenen Magnetlast, heben die Bedeutung der COSSERAT-Theorie für Probleme hervor, welche den Drehimpuls als Erhaltungsgröße betrachten. So erfahren hauptsächlich weiche und dünne magnetische Strukturen innerhalb eines äußeren Magnetfelds nichtlineare Belastung. Da die Ausrichtung der Magnetisierung von der Deformation abhängt, ist ausgeprägt nichtlineares Tragverhalten zu beobachten.

## Abstract

This work considers a geometrically exact COSSERAT-theory for the description of solid materials. A focus is set on the determination of the load-bearing capacity of structures in this model.

In order to arrive at a convenient finite element implementation the mathematical and numerical aspects of the finite rotation field are discussed. We develop an algorithm on the basis of the quaternion-calculus for the efficient update of the rotations.

There is need to discuss the cause of non-symmetric Cauchy-stresses and couple-stresses, which appear in the COSSERAT-model. Both fields of deformation and rotation are connected to the balance of angular momentum equation of the continua and influence therefore the load bearing capacity. The usual considerations pertaining to the classical balance of angular momentum equation are insufficient in this respect. This is the reason why we consider a homogenisation approach.

We develop constitutive relations for the COSSERAT-model whereby two new material parameters appear as compared to classical linear elasticity. These parameters are subject of analytical and numerical investigations. The qualitative influence of these parameters depends on the kind of deformation and geometry of the structure.

The proposed geometrically exact, physically nonlinear COSSERAT-theory is able to induce a stiffer response of the structures for certain parameter-ranges as compared to classical linear elasticity. In marked contrast to the linear COSSERAT-model, however, the nonlinear COSSERAT-model may also lead to a weaker than classical response for other parameter-ranges.

The reason for this alternative response is to be found in the independent rotation field, which, for specific choices of parameters, may either reduce or increase the deformation. Comparing our model with a continuum model of crystalline defects provides a possible explanation for the observed weaker response. In this case we may truly speak of an additional kinematic degree of freedom, which may enhance the deformation possibilities.

Further applications, e.g. the simulation of structural magnetic load, show the beneficence of our COSSERAT-model when applied to problems in which angular momentum needs to be conserved. Weak and thin magnetic structures in a magnetic field are subject of nonlinear loads. Since the direction of magnetization is configuration dependent in these cases, we observe a highly nonlinear load response.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>6</b>
1.1 Stand der Forschung und Ziele der Arbeit . . . . .	6
1.2 Gliederung der Arbeit . . . . .	9
<b>2 Behandlung von Rotationen</b>	<b>11</b>
2.1 Die Rotationsgruppe $SO(3)$ . . . . .	11
2.2 Beschreibung endlicher Rotationen im Euklidischen Raum . . . . .	14
2.3 Variation und Linearisierung von Rotationsfeldern . . . . .	16
2.4 Quaternionen und Numerik für Rotationen bis $360^\circ$ . . . . .	18
2.5 Erweiterung auf Numerik für Rotationen über $360^\circ$ . . . . .	28
2.6 Beispiele zur Numerik großer Rotationen . . . . .	31
2.6.1 Schiefe Biegung mit großen Drehungen . . . . .	31
2.6.2 Kragarm mit Endmoment . . . . .	32
<b>3 Grundgleichungen und Homogenisierung</b>	<b>37</b>
3.1 Kinematische Beziehungen . . . . .	37
3.1.1 Konfiguration, Bewegung und Zeitableitung . . . . .	37
3.1.2 Deformationsgradient und Verzerrungsmaße . . . . .	42
3.1.3 Kinematik im Cosserat-Kontinuum . . . . .	48
3.1.4 Kinematik einer mikromorphen Theorie . . . . .	54
3.2 Erhaltungssätze und Definition der Spannung . . . . .	54
3.2.1 Massenbilanz, Kontinuitätsbedingung, Transporttheorem . . . . .	55
3.2.2 Punktmechanik, Impulsbilanz und Spannung . . . . .	56
3.2.3 Klassische Drehimpulsbilanz und deren Generalisierung . . . . .	58
3.3 Homogenisierung auf Mikroebene . . . . .	65
3.3.1 Dichte und Massenbilanz aus mikroskopischer Perspektive . . . . .	65
3.3.2 Erweiterungen zu Impulsbilanz und Spannungstensor . . . . .	68
3.3.3 Erweiterungen zur Drehimpulsbilanz . . . . .	72
3.4 Spannung und Momentenspannung . . . . .	75

---

<b>4</b>	<b>Konstitutive Materialbeschreibung</b>	<b>80</b>
4.1	Hyperelastisches Material . . . . .	80
4.2	Prinzipien zur Materialformulierung . . . . .	82
4.3	Lineare Elastizität im isotropen Fall . . . . .	85
4.4	Lineare Elastizität im transversal isotropen Fall . . . . .	87
4.5	Konsequenzen der linearen Cosserat-Theorie . . . . .	89
4.6	Nichtlineare Verzerrungsenergie im Cosserat-Modell . . . . .	91
4.7	Nichtlineare Spannung im isotropen Cosserat-Modell . . . . .	96
4.7.1	Die Tangente der nichtlinearen Spannung . . . . .	97
4.8	Krümmungsenergie im Cosserat-Modell . . . . .	98
4.8.1	Die Tangente der Momentenspannung . . . . .	99
4.9	Gesamt- und Variationsformulierung des Modells . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Finite-Element-Formulierung</b>	<b>103</b>
5.1	Einführung von Ansatzfunktionen . . . . .	103
5.2	Behandlung der Cosserat-Verzerrung . . . . .	104
5.3	Behandlung der Krümmungsmessung . . . . .	106
5.4	FE-Gleichungssystem des Cosserat-Modells . . . . .	107
5.5	Strukturbezogene Momentenlast . . . . .	114
5.5.1	FE-Formulierung der strukturbezogenen Momentenlast . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Analytische und numerische Beispiele</b>	<b>118</b>
6.1	Test mit Magnetwürfel . . . . .	118
6.2	Magnetband unter strukturbezogener Momentenlast . . . . .	120
6.3	Kegelschale unter strukturbezogener Momentenlast . . . . .	123
6.4	Einfache Scherung mit Diskussion von Randvorgaben . . . . .	128
6.4.1	Motivation und Formulierung der einfachen Scherung . . . . .	128
6.4.2	Euler-Lagrange Gleichungen des Cosserat-Modells . . . . .	131
6.4.3	Homogene Lösungen und Kriterium der Eindeutigkeit . . . . .	132
6.4.4	Variation der Randvorgaben . . . . .	136
6.4.5	Einfluss von Grenzschichten auf den Schermodul . . . . .	140

6.5	Transversal isotroper Zugtest . . . . .	143
6.6	Torsionstest . . . . .	150
<b>7</b>	<b>Versetzungs- und Cosserat-Theorie</b>	<b>158</b>
7.1	Cosserat-Theorie und gradientenplastisches Modell . . . . .	158
7.2	Versetzungen in kristallinem Material . . . . .	160
7.3	Definition, Entstehung und Auftreten von Kristallen . . . . .	163
7.4	Versetzungen auf Mikroebene . . . . .	164
7.5	Kleinwinkelkorngrenzen und Korngrenzen . . . . .	171
7.6	Eine Kontinuumstheorie für Versetzungen . . . . .	172
7.7	Cosserat-Theorie als Kontinuum mit Versetzungen . . . . .	176
7.8	Momentenspannungen und Versetzungen . . . . .	183
<b>8</b>	<b>Numerische Beispiele Teil 2</b>	<b>187</b>
8.1	Stochastische Rotationsimperfektion und Anwendung . . . . .	187
8.1.1	Algorithmus für rotatorisches Imperfektionsfeld . . . . .	187
8.1.2	Drucktest . . . . .	190
8.2	Kragarm . . . . .	200
8.3	Scheibe mit Loch . . . . .	204
8.4	Halbkugelschale mit Öffnung . . . . .	207
8.5	Scherfugen einer Böschung . . . . .	213
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>218</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>222</b>
A.1	Der Curl-Operator . . . . .	222
A.2	Übersicht einiger Kontinuumsmodelle . . . . .	224
A.3	Betrachtungen zum Kopplungsmodul . . . . .	231
A.4	Isotrope Abbildungen . . . . .	234
A.4.1	Isotrope zentralsymmetrische Materialien . . . . .	235
A.5	Stofftensor und transversale Isotropie . . . . .	236
A.6	Zur Existenz globaler Minima für positiven Kopplungsmodul . . . . .	240

A.7 Erläuterungen zur Magnetostatik . . . . .	241
A.8 Distorsion an mikroskopischen Probewürfeln . . . . .	243
A.9 Weitere Aspekte zur Versetzungstheorie . . . . .	248
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>252</b>

## Notation

### Kapitel 2

$a, b, c, \lambda$	skalare Zahlen in $\mathbb{R}$	[1]
$\alpha, \beta, \theta$	skalare Zahlen in $\mathbb{R}$ im Kontext mit Drehung	[1]
$i, j, k$	natürliche Zahlen in $\mathbb{N}^+$	[1]
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}$	Vektoren in $\mathbb{R}^3$	[1]
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$	Tensoren in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$	[1]
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}$	Multivektoren und Quaternionen in $\mathbb{G}^3$	[1]
$\mathbf{i}$	Pseudoskalar, spezieller Trivektor in $\mathbb{G}^3$	[1]
$\mathbf{e}_k$	Einheitsvektor der EUKLIDischen Standardbasis	[1]
$\mathbb{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe $\mathbb{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$	[1]
$\epsilon$	LEVI-CIVITÀ-Permutationstensor	[1]
$\bar{\mathbf{R}}$	Rotationstensor, $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$	[1]
$\bar{\mathbf{A}}$	Element der LIE-Algebra $\mathfrak{so}(3)$	[1]
$\bar{\alpha}$	EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor von $\bar{\mathbf{R}}$ , axialer Vektor von $\bar{\mathbf{A}}$ , $\bar{\alpha} = \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}]$	[1]
$\Omega_e$	Gebiet eines Finiten Elementes	
$\epsilon^+$	numerischer Parameter	[1]

### Kapitel 3

$t$	Zeit, Zeitpunkt, Parameter der Konfiguration	[s]
$dt$	infinitesimales Zeitinkrement	[s]
$\mathcal{M}$	materielle Punktmenge	
$\Phi$	Abbildung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}_t$	
$\mathcal{B}_0$	Körper in der Referenzkonfiguration $t = 0$	
$\mathcal{B}_t$	Körper in der Momentankonfiguration $t > 0$	
$\partial\mathcal{B}_0$	Oberfläche in der Referenzkonfiguration $t = 0$	
$\partial\mathcal{B}_t$	Oberfläche in der Momentankonfiguration $t > 0$	
$dV$	Infinitesimales Volumeninkrement in $\mathcal{B}_0$	$[m^3]$
$dv$	Infinitesimales Volumeninkrement in $\mathcal{B}_t$	$[m^3]$
$dA$	Infinitesimales Flächeninkrement auf $\partial\mathcal{B}_0$	$[m^2]$
$da$	Infinitesimales Flächeninkrement auf $\partial\mathcal{B}_t$	$[m^2]$
$\varphi_t$	Deformation, Abbildung $\mathcal{B}_0 \mapsto \mathcal{B}_t$	[1]

---

$\mathbf{X}$	Ortsvektor zur Referenzkonfiguration $\mathcal{B}_0$	$[m]$
$\mathbf{x}$	Ortsvektor zur Momentankonfiguration $\mathcal{B}_t$	$[m]$
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor	$[m]$
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient $\mathbf{F} = \text{Grad}[\varphi_t]$ , $\mathbf{F} : T\mathcal{B}_0 \mapsto T\mathcal{B}_t$	$[1]$
$J$	JACOBI-Determinante $J = \det[\mathbf{F}]$	$[1]$
$\mathbf{C}$	Rechter CAUCHY-GREEN-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	$[1]$
$\mathbf{U}$	Tensor der makroskopischen Gestaltänderung $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}$ $\mathbf{U} : T\mathcal{B}_0 \mapsto T\mathcal{B}_0$	$[1]$
$\mathbf{V}$	Tensor der makroskopischen Gestaltänderung $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T}$ $\mathbf{V} : T\mathcal{B}_t \mapsto T\mathcal{B}_t$	$[1]$
$\bar{\mathbf{U}}$	Tensor der COSSERAT-Gestaltänderung, $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}$ $\bar{\mathbf{U}} : T\mathcal{B}_0 \mapsto T\mathcal{B}_0$	$[1]$
$\mathbf{R}$	Rotationstensor der makroskopischen Drehung $\mathbf{R} = \text{polar}[\mathbf{F}]$ $\mathbf{R} : T\mathcal{B}_0 \mapsto T\mathcal{B}_t$	$[1]$
$\bar{\mathbf{R}}$	Rotationstensor der COSSERAT-Drehung, $\bar{\mathbf{R}} : T\mathcal{B}_0 \mapsto T\mathcal{B}_t$	$[1]$
$\hat{\mathbf{R}}$	Zusätzliche Kinematik im COSSERAT-Kontinuum $\hat{\mathbf{R}} : T\mathcal{B}_t \mapsto T\mathcal{B}_t$	$[1]$
$\boldsymbol{\alpha}$	Drehvektor der makroskopischen Drehung $\mathbf{R}$	$[1]$
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$	Drehvektor der COSSERAT-Drehung $\bar{\mathbf{R}}$	$[1]$
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$	Drehvektor der zusätzlichen Kinematik $\hat{\mathbf{R}}$	$[1]$
$\hat{\mathcal{K}}$	Krümmungsmaß zweiter Stufe aus Gradient	$[\frac{1}{m}]$
$\mathcal{K}$	Krümmungsmaß dritter Stufe aus Gradient	$[\frac{1}{m}]$
$\mathcal{C}$	Krümmungsmaß zweiter Stufe aus Curl-Operator	$[\frac{1}{m}]$
$\rho, \rho_0$	Massendichte in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	$[\frac{kg}{m^3}]$
$m$	Masse	$[kg]$
$\vec{\mathbf{v}}$	Geschwindigkeit	$[\frac{m}{s}]$
$\vec{\mathbf{a}}$	Beschleunigung	$[\frac{m}{s^2}]$
$\mathbf{b}, \mathbf{b}_0$	Volumenkraft in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	$[\frac{N}{m^3}]$
$\mathbf{l}, \mathbf{l}_0$	Volumenmoment in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	$[\frac{Nm}{m^3}]$
$\mathbf{t}, \mathbf{t}_0$	Oberflächenkraft/Traktion in Momentan- bzw. Referenzkonfig.	$[\frac{N}{m^2}]$
$\mathbf{c}, \mathbf{c}_0$	Oberflächenmoment in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration	$[\frac{Nm}{m^2}]$
$\mathbf{f}$	Reaktionskraft an einer Schnittfläche $A$ der Momentankonfig.	$[N]$
$\mathbf{m}$	Reaktionsmoment an einer Schnittfläche $A$ der Momentankonfig.	$[Nm]$
$\hat{\mathbf{m}}$	Momentenspannung zweiter Stufe in der Momentankonfiguration	$[\frac{Nm}{m^2}]$
$\mathbf{n}$	Oberflächennormale der Momentankonfiguration	$[1]$

$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\sigma_{ij}$	Komponenten des CAUCHY-Spannungstensors in der EUKLIDischen Standardbasis	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\boldsymbol{\tau}$	KIRCHHOFF-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathbf{S}_1$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathbf{S}_2$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathbf{T}$	BIOT-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\bar{\mathbf{T}}$	COSSERAT-Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathbf{M}$	Drall	$\left[\frac{kg\,m^2}{s}\right]$
$\mathbf{r}$	Abstandsvektor zweier Punkte	$[m]$
$\mathbf{P}^{ik}$	Wechselwirkungskraft zweier Punkte	$[N]$
$g^i$	molekulare Eigenschaft am Punkt $i$	
$g_w$	gewichtetes Mittel der molekularen Eigenschaft	
$\mathbf{d}^i$	Abstandsvektor eines Punktes $i$ zu einem festen Punkt	$[m]$
$w$	Wichtungsfunktion	$[m^{-3}]$
$w^i$	Wichtungsfunktion für Punkt $i$	$[m^{-3}]$
$m^i$	Masse in Punkt $i$	$[kg]$
$\varepsilon$	Radius des Einflussbereichs der Wichtung, Längenskale	$[m]$
$\rho_w$	gemittelte Materialdichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$\mathbf{p}_w$	gemittelte Impulsdichte	$\left[\frac{kg\,m}{s\,m^3}\right]$
$\vec{\mathbf{v}}_w$	gemittelte Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$
$\vec{\mathbf{a}}_w$	gemittelte Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
$\mathbf{f}^{ij}$	Kraftwechselwirkung zwischen Punkt $i$ und $j$	$[N]$
$\mathbf{b}^i$	externe Volumenkraft auf Punkt $i$	$[N]$
$\mathbf{f}_w$	gemittelte Kraftwechselwirkungsichte	$\left[\frac{N}{m^3}\right]$
$\mathbf{b}_w$	gemittelte externe Volumenkraftdichte	$\left[\frac{N}{m^3}\right]$
$\mathbf{D}_w$	gemittelte Momentendichte	$\left[\frac{Nm}{m^3}\right]$
$\mathbf{T}_w$	mikroskopisch motivierter Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathcal{D}_w$	thermischer Anteil des Spannungstensors $\mathbf{T}_w$	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\mathcal{C}_w$	mikroskopisch motivierter Momentenspannungstensor	$\left[\frac{Nm}{m^2}\right]$

## Kapitel 4

$W$	spezifische, freie, innere Formänderungsenergie	$\left[\frac{Nm}{m^3}\right]$
$W_{\text{mp}}$	Anteil von $W$ aus Verzerrung	$\left[\frac{Nm}{m^3}\right]$
$W_{\text{curv}}$	Anteil von $W$ aus Krümmung	$\left[\frac{Nm}{m^3}\right]$
$\Pi$	Gesamtenergie des Systems	$[Nm]$
$\Pi^{\text{int}}$	interne Energie des Systems	$[Nm]$
$\Pi^{\text{ext}}$	externe Energie, äußere Arbeit am System	$[Nm]$

$\mathbf{a}$	Einheitsvektor der Vorzugsrichtung	[1]
$\mathbf{M}$	Strukturtensor zweiter Stufe, $\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$	[1]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	lineares Verzerrungsmaß, $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\text{Grad}[\mathbf{u}]]$	[1]
$E$	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
$\nu$	Querkontraktion	[1]
$\mu$	LAMÉ-Parameter (Scher- bzw. Schubmodul)	$[\frac{N}{m^2}]$
$\lambda$	LAMÉ-Parameter (Volumen-Änderungsmodul) bzw. Laststeigerungsfaktor (aus Zusammenhang ersichtlich)	$[\frac{N}{m^2}]$ [1]
$\mu_c$	COSSERAT-Kopplungsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
$L_c$	interne Länge, Materialparameter der Krümmung	[m]
$\mathbf{C}$	Stofftensor vierter Stufe	$[\frac{N}{m^2}]$
$\mathbf{J}^{tr}$	Tensor vierter Stufe zur Bildung der Spur	[1]
$\mathbf{J}^s$	Tensor vierter Stufe zur Bildung der Symmetrie	[1]
$\mathbf{J}^A$	Tensor vierter Stufe zur Bildung der Antisymmetrie	[1]
$\mathbf{J}^T$	Tensor vierter Stufe zur Bildung der Transposition	[1]
$\mathbf{J}$	Tensor vierter Stufe zur Selbstabbildung	[1]
$\widehat{\mathfrak{M}}$	Momentenspannung zweiter Stufe aus $\widehat{\mathfrak{K}}$	$[\frac{Nm}{m^2}]$
$\mathfrak{M}$	Momentenspannung dritter Stufe aus $\mathfrak{K}$	$[\frac{Nm}{m^2}]$
$\overline{\mathfrak{M}}$	Momentenspannung zweiter Stufe aus $\mathfrak{C}$	$[\frac{Nm}{m^2}]$
$G$	Funktional der Variationsformulierung, gesamte virtuelle Arbeit	[Nm]
$\delta$	Variationssymbol	

## Kapitel 5

$\Omega^h$	FE-Approximation der Struktur $\Omega$	
$\Omega_e$	Elementgebiet der Approximation $\Omega^h$	
$n_{\text{elm}}$	Anzahl der Teilgebiete $\Omega_e$ bzw. FE-Elemente	[1]
$\mathbf{u}^h$	diskrete Knotenverschiebung	[m]
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h$	diskrete Knotenverdrehung aus $\bar{\mathbf{R}}$	[1]
$nel$	Anzahl der Knoten pro Finitem Element	[1]
$N^I$	Ansatzfunktion für Knoten $I$	[1]
$\mathbf{B}^I$	Operatormatrix für Knoten $I$	[1]
$\mathbf{p}$	Prozessvektor der primären Größen $\mathbf{u}$ und $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$	[m] bzw. [1]
$\mathbf{K}_T^e$	tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix	$[\frac{N}{m}]$ bzw. [Nm]
$\mathbf{K}_T$	tangentiale Gesamtsteifigkeitsmatrix	$[\frac{N}{m}]$ bzw. [Nm]

$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}}$	Assemblierungsoperator zum Aufbau von $\mathbf{K}_T$	
$\mathbf{R}_V^e$	residualer Elementlastvektor	$[N]$ bzw. $[Nm]$
$\mathbf{R}_V$	residualer Gesamtlastvektor	$[N]$ bzw. $[Nm]$
$\vec{\mathbf{M}}$	Magnetisierung	$[T = \frac{N}{Am}]$
$\vec{\mathbf{H}}$	magnetische Erregung	$[\frac{A}{m}]$
$\vec{\mathbf{B}}$	magnetische Flussdichte	$[T]$
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante	$[\frac{N}{A^2}]$
$\vec{\mathbf{P}}$	elektrische Polarisation	$[\frac{N}{Vm}]$
$\vec{\mathbf{E}}$	elektrisches Feld	$[\frac{V}{m}]$
$\mathbf{d}$	strukturbezogene Momentenlast	$[\frac{Nm}{m^3}]$

## Kapitel 7

$\vec{b}$	BURGERScher Vektor	$[m]$
$T$	approximierte Vorspannung einer Versetzungslinie	$[N]$
$\tau$	Schubspannung in Richtung der Gleitebene	$[\frac{N}{m^2}]$
$R_c$	Radius beim Ausbeulen einer Versetzung	$[m]$
$\Delta_s$	überstrichene Fläche beim Ausbeulen	$[m^2]$
$\varepsilon_{ae}$	anelastische Verzerrung durch Ausbeulen	$[1]$
$\Lambda_d$	skalare Versetzungsdichte	$[\frac{m}{m^3}]$
$W_{ae}$	anelastische Energiedichte	$[\frac{Nm}{m^3}]$
$\beta$	tensorielle Versetzungsdichte	$[\frac{m}{m^2}]$
$\varepsilon^p$	Distorsionstensor dritter Stufe	$[1]$
$\hat{\varepsilon}^p$	Distorsionstensor zweiter Stufe, i.A. $\hat{\varepsilon}^p \notin \text{Sym}$	$[1]$
$\varepsilon^e$	elastische Verzerrung zweiter Stufe, $\varepsilon^e \in \text{Sym}$	$[1]$
$\mathbf{U}^e$	elastische Streckung	$[1]$
$\mathbf{R}^e$	elastische Drehung	$[1]$
$\mathbf{F}^e$	elastischer Deformationsgradient	$[1]$
$\mathbf{F}^p$	plastischer Deformationsgradient	$[1]$
$\mathbf{F}^{ae}$	anelastischer Deformationsgradient	$[1]$
$\mathbf{R}^{ae}$	anelastische Drehung	$[1]$
$\kappa$	NEYSche Gitterkrümmung	$[\frac{1}{m}]$

# 1 Einleitung

## 1.1 Stand der Forschung und Ziele der Arbeit

Die COSSERAT oder auch mikropolare Theorie stellt eine Erweiterung der klassischen Kontinuumsmechanik dar. Neben dem Verschiebungs- bzw. Deformationsfeld beinhaltet die Kinematik des COSSERAT-Modells ein zusätzliches Rotationsfeld. Die Idee dafür geht auf eine Arbeit der Gebrüder COSSERAT [33] zurück. Eine wesentliche Konsequenz dieser Idee schlägt sich u.a. in der Mechanik des COSSERAT-Kontinuums dadurch nieder, dass die Drehimpulsbilanz nicht a priori durch die Symmetrie der CAUCHY-Spannung erfüllt wird, sondern wie die Impulsbilanz als Erhaltungsgröße zu behandeln ist.

TRUESDELL [229] berichtet, dass bereits LEONHARD EULER die Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung als zwei unabhängige, fundamentale Prinzipien erkannte. In diesem Sinne ist EULER als Wegbereiter der COSSERAT-Theorie anzusehen, ebenso VOIGT [230] und DUHEM [47].

Laut BADUR & STUMPF [8] blieb die Arbeit der Gebrüder COSSERAT zunächst weitgehend unverstanden und wurde nur spärlich zitiert, z.B. von HELLINGER [89]. Etwa 50 Jahre nach der Veröffentlichung sind grundlegende Ideen der Gebrüder COSSERAT wieder aufgegriffen worden. In einer raschen Abfolge entstanden etliche Arbeiten zur linearen COSSERAT-Theorie, z.B. [88, 84, 1, 226, 142, 37, 227, 83, 141, 63, 98, 103, 58]. Eine Literaturübersicht bis 1968 ist in [202] gegeben. Mehrere Monographien haben die Entwicklung der COSSERAT-Theorie bis heute zum Inhalt, z.B. [179, 56, 64, 48].

Die geometrisch lineare COSSERAT-Theorie findet verschiedene Anwendungen. So ist die regularisierende Wirkung zum Abbau von Spannungskonzentrationen bekannt, vgl. z.B. [140, 146, 177, 202, 56, 48]. Die Beschreibung poröser Medien mit Anwendung in der Bodenmechanik findet sich u.a. in [87, 225, 40, 52, 49, 235, 51, 36, 145, 10]. Offenporige Schäume wie Knochen werden z.B. in [41, 43, 42, 119, 3, 121, 122] behandelt.

Eine weitere konkrete Anwendung ist die Berechnung und Vorhersage des Tragverhaltens von Mauerwerkstrukturen, vgl. z.B. [15, 228, 27]. In [228] wird hierbei eine nichtlineare COSSERAT-Formulierung in 2D verwendet. Lineare aber auch zum Teil nichtlineare COSSERAT-Theorien werden z.B. in [126, 127, 144, 133] zur Berechnung periodischer Balkenstrukturen, Wabenstrukturen oder Kompositmaterialien verwendet.

Zur Anwendung auf elasto-plastische Probleme ist sowohl die lineare COSSERAT-Theorie verbreitet, z.B. in [203, 130, 14, 44, 118, 131, 170, 168, 167], als auch die nichtlineare Form, z.B. in [38, 39, 185, 192, 50, 52, 95, 128, 100, 46, 67, 194, 196, 78, 77, 68, 80, 164, 161]. Beide Varianten geben die Möglichkeit, Scherversagen zu regularisieren und sind für die Stabilisierung der numerischen Verfahren von Interesse. In [79] wird insbesondere der Größeneffekt an einer Scheibe mit Loch innerhalb einer plastischen Formulierung untersucht.

Die geometrisch nichtlineare COSSERAT-Theorie ist vor allem in Arbeiten zur Schalen und Plattentheorie zu finden. Hier treten die rotatorischen Variablen in natürlicher Weise als mitgeführtes Dreibein der parametrisierten Fläche auf. Die Rotationsvariablen können als weitere (numerische) Freiheitsgrade über eine PENALTY-Formulierung an das Dreibein der Fläche gekoppelt sein. Arbeiten dazu findet man z.B. in [82, 57, 32, 81, 152, 212, 11, 85, 69, 200, 70, 86, 239, 197, 199, 22, 16, 20, 7, 237, 238]. Im Fall von eindimensionalen Strukturen entsprechen solche COSSERAT-Modelle dem TIMOSHENKO-Balken, vgl. z.B. [4].

Schalenformulierungen, welche durch Reduktion eines dreidimensionalen COSSERAT-Kontinuums auf zwei Dimensionen entstehen, unterscheiden sich zu den oben genannten. Die Reduktion kann nach NEFF entweder formal [153, 156] oder mathematisch rigoros [162, 165, 158] durchgeführt werden.

Bei formaler Reduktion liefert die spezielle Wahl der COSSERAT-Materialparameter<sup>1</sup> nach geometrischer Linearisierung eine klassische REISSNER-MINDLIN-Kinematik [189, 139] für die Schale.

Mathematische Existenzsätze für COSSERAT-Schalen mit geometrisch exakter Kinematik wurden zuerst in [156, 163] gegeben. Die vorliegende Arbeit soll zum Verständnis der nichtlinearen COSSERAT-Theorie beitragen und u.a. als Fundament einer Schalenformulierung aus Reduktion der dreidimensionalen COSSERAT-Theorie dienen.

Beginnend mit [157] hat sich NEFF mit dem geometrisch exakten COSSERAT-Modell beschäftigt. Er erlaubte als erster die Möglichkeit, dem COSSERAT-Kopplungsmodul  $\mu_c$  den Wert 0 zuzuweisen [161]. Diese Möglichkeit besteht in einem Modell mit linearisierter COSSERAT-Kinematik überhaupt nicht.

Arbeiten zur dreidimensionalen, geometrisch exakten COSSERAT-Theorie finden sich z.B. in [236, 24, 25, 23, 26, 134, 219, 220, 222, 194, 195, 196, 125, 155, 173, 172]. TSAKMAKIS verwendet z.B. in [80] eine geometrisch exakte COSSERAT-

---

<sup>1</sup> $\mu_c = 0$

Theorie, wobei der Schwerpunkt seiner Betrachtungen in der Beschreibung der Plastizität liegt. Im elastischen Bereich sind dem Verfasser keine systematischen, numerischen Untersuchungen mit geometrisch exakter COSSERAT-Theorie an dreidimensionalen Objekten bekannt, wie es z.B. ein Torsionsstab verlangt. Diese Arbeit soll Parameterstudien an derart grundlegenden Deformationen durchführen.

Zur Umsetzung des nichtlinearen COSSERAT-Modells ist die effiziente Behandlung exakter Rotationen nötig, vgl. z.B. [94, 208, 201, 19, 187, 186, 214, 93]. In [201, 19] wird u.a. über Vorteile durch die Behandlung von Rotationen mit Quaternionen berichtet. Die vorliegende Arbeit beinhaltet ebenfalls Grundlagen und Anwendung von Quaternionen, wobei die Behandlung endlicher Rotationen im numerischen Verfahren ein zusätzlicher Aspekt ist.

Selbst im Rahmen der isotropen, linear-elastischen COSSERAT-Theorie ist die Identifikation der COSSERAT-Materialparameter umstritten, vgl. z.B. [207, 54, 73, 74, 72, 13]. Das dürfte einer der Hauptgründe dafür sein, weshalb linear-elastische COSSERAT-Modelle i. allg. mit Skepsis betrachtet werden. Wie diese Arbeit zeigen wird, steht der COSSERAT-Kopplungsmodul  $\mu_c$  in nicht entwirrbarer Wechselwirkung mit einem weiteren COSSERAT-Parameter, der internen Länge  $L_c$ .

Diese gegenseitige Abhängigkeit bedeutet, dass  $\mu_c$  kein eigenständiger Materialparameter sein kann, siehe NEFF [159]. Eine davon abweichende Ansicht wird von LAKES [120, 122] vertreten. Im Rahmen dieser Arbeit sollen Grundlagen für weitere Diskussionen geschaffen werden.

Aus den sechziger Jahren sind Arbeiten bekannt, welche die lineare COSSERAT-Theorie als Grundlage kontinuumsmechanischer Versetzungstheorien heranziehen, z.B. [106, 110, 112, 113, 114, 205]. Allerdings vertritt KRÖNER in [116] den Standpunkt, dass dies zu keinem befriedigenden Resultat führt. Es ist ein weiteres Ziel dieser Arbeit, die Stellung der vollständig nichtlinearen COSSERAT-Theorie in Bezug auf dieses Thema auszubauen. In neuerer Zeit hat die geometrisch exakte COSSERAT-Theorie zur Behandlung der Theorie von Versetzungen wieder an Interesse gewonnen, siehe z.B. [231, 123, 55, 71, 31].

## 1.2 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden grundlegende mathematische Beziehungen von Rotationen im dreidimensionalen Raum zusammengestellt. Da die numerische Behandlung auf einer Formulierung mit Quaternionen basiert, wird deren Algebra in dem Maße vorgestellt, wie es die Herleitung für deren Einsatz erfordert. Das Ziel ist ein zuverlässiger Algorithmus für endliche Rotationen im Raum.

**Kapitel 3** vergleicht die kontinuumsmechanischen Besonderheiten des COSSERAT-Kontinuums mit dem BOLTZMANN-Kontinuum. Dazu werden beide Modelle und einige Grundprinzipien angegeben. Der Ursache für unsymmetrische CAUCHY-Spannungen wird besondere Beachtung geschenkt, da diese Anteile in der Drehimpulsbilanz des COSSERAT-Kontinuums auftauchen. Weiterhin ist die Ursache von Momentenspannung Gegenstand der Betrachtung.

**Kapitel 4** behandelt die Materialformulierung des COSSERAT-Modells. Die erweiterte Kinematik des COSSERAT-Kontinuums zieht eine Erweiterung der konstitutiven Beziehungen nach sich. Dazu werden zwei zusätzliche Materialparameter im Vergleich zur klassischen Elastizität eingeführt.

Die Diskussion dieser Parameter ist ein kritischer Punkt der COSSERAT-Theorie und gleichzeitig ein zentrales Forschungsziel dieser Arbeit. Aus dem Anspruch, eine geometrisch exakte COSSERAT-Theorie zu behandeln, resultiert eine größere Freiheit bezüglich der Wahl dieser Parameter. Dies setzt jedoch weiterhin die Formulierung eines Stoffgesetzes voraus, welches prinzipiell einem NEO-HOOKE-Material gleicht. Das Kapitel schließt mit der Gesamtformulierung eines COSSERAT-Modells.

**Kapitel 5** stellt die Finite-Element-Formulierung des Modells vor. Besonderheiten zur Behandlung der COSSERAT-Verzerrung und Krümmung sind dabei zu beachten und führen zu einem erhöhten Aufwand im Vergleich zu einer klassischen Formulierung. Die Implementierung einer strukturbezogenen Momentenlast gelingt hingegen vergleichsweise kompakt. Hierbei kommt ein Vorteil der COSSERAT-Theorie zum Tragen.

**Kapitel 6** führt zunächst numerische Beispiele strukturbezogener Momentenlast vor. Es folgt eine analytische Lösung für das geometrisch exakte Modell. Dabei handelt es sich um einen einfachen Fall, doch decken die Ergebnisse bereits wesentliche Eigenschaften und Problematiken auf. In diesem Zusammenhang

folgt eine numerische Untersuchung zur Vorgabe von Randbedingungen. Zwei weitere numerische Tests konzentrieren sich auf die Bedeutung des Modells. Zum einen wird nach einer Anschauung des COSSERAT-Rotationsfeldes gesucht, was nur unter Vorbehalt gelingt. Zum anderen bilden Parameterstudien eine Grundlage zur Diskussion der erweiterten konstitutiven Beziehungen aus Kap. 4.

**Kapitel 7** weitet die Bedeutung der COSSERAT-Theorie auf mikromechanische Vorgänge durch Versetzungen aus. Dies motiviert sich aus bekannten Arbeiten zu diesem Thema und weiterhin durch einen formalen Vergleich mit einem gradientenplastischen Modell. Zum Verständnis werden die physikalischen Vorgänge von Versetzungen auf Mikroebene, so weit sie von Interesse sind, vorgestellt. Damit wird der Ursache von Deformationen durch Versetzungen Rechnung getragen. Ein bekanntes Kontinuumsmodell wird vorgestellt, welches die physikalischen Prozesse von Versetzungen und deren Wirkung auf die Deformation im Mittel abbildet. Beim Übergang zwischen Versetzungs- und COSSERAT-Theorie werden die zusätzlichen Materialparameter der COSSERAT-Theorie beleuchtet.

**Kapitel 8** präsentiert nochmals numerische Beispiele, wobei u.a. die Diskussion aus Kap. 7 fortgeführt wird. Ein Verfahren zur Erzeugung eines rotatorischen Imperfektionsfeldes findet Anwendung in einem Stabilitätsproblem. Unter speziellen konstitutiven Annahmen im COSSERAT-Modell deutet sowohl das Auftreten nichtklassischer Deformationsmoden als auch weiches Materialverhalten gegenüber klassischer Elastizität auf einen Bezug zu Versetzungseffekten hin. Die Effekte können als NYE'sche Krümmung erkannt werden, doch unterliegt die explizite Identifikation gewissen Einschränkungen.

## 2 Behandlung von Rotationen

Die COSSERAT-Theorie erweitert den Konfigurationsraum des Kontinuums über ein Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$ , weshalb zunächst einige Eigenschaften der Rotationsgruppe  $\text{SO}(3)$  dargelegt werden.

Zur Beschreibung endlicher Rotationen im EUKLIDischen Raum  $\mathbb{R}^3$  liegen zahlreiche Konzepte und Arbeiten vor, z.B. ARGYRIS [5], BÜCHTER [12], PIETRASZ-KIEWICZ & BADUR [187].

Die Beschreibung einer Drehung ist im ebenen Fall einfach, da die Drehachse festgelegt ist und z.B. aufeinander folgende Drehungen  $\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{Q}_2$  gemäß  $\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$  vertauschbar sind. Im räumlichen Fall gilt diese Vertauschbarkeit nicht; hier sind unterschiedliche Konzepte zur Parametrisierung der Drehung bekannt. Die Beschreibung mit EULER- oder KARDAN-Winkel ist zwar anschaulich, besitzt jedoch Singularitäten. Das Konzept des EULER-RODRIGUES-Rotationsvektors hat sich im Hinblick auf Finite-Element-Formulierungen bewährt und findet auch in dieser Arbeit Anwendung.

Besonders die Verwendung von Quaternionen innerhalb des numerischen Verfahrens ist Teil dieses Kapitels. Nach den Grundlagen zur Mathematik der Quaternionen folgt eine Diskussion mit dem Ergebnis, dass weitere Schritte notwendig sind um endliche Rotationen im Raum für das Verfahren zu ermöglichen. Zwei Beispiele zur Demonstration des vorgestellten Algorithmus beenden das Kapitel.

### 2.1 Die Rotationsgruppe $\text{SO}(3)$

Die Elemente<sup>2</sup>  $\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{3 \times 3}$  mit der Eigenschaft

$$\{\mathbf{Q} \in \mathbb{M}^{3 \times 3} : \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbb{1}, \det[\mathbf{Q}] = +1\} \quad (2.1)$$

bilden die LIE-Gruppe  $\text{SO}(3)$ .<sup>3</sup>

Die Verknüpfung der LIE-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  mit der LIE-Gruppe  $\text{SO}(3)$  ist über die Matrix-Exponentialfunktion

$$\exp : \mathfrak{so}(3) \mapsto \text{SO}(3), \quad \exp[\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i, \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3) \quad (2.2)$$

---

<sup>2</sup>Abbildungen, Matrizen

<sup>3</sup>Special Orthogonal Group

gegeben. Die Matrix-Exponentialfunktion ist in einer großen Kugelumgebung um das neutrale Element  $0 \in \mathfrak{so}(3)$  bijektiv, wobei die Einschränkung für Bijektivität  $\|\mathbf{A}\|^2 = -\text{tr}[\mathbf{A}^2] < 2\pi^2$  bzw.  $\|\text{axl}[\mathbf{A}]\| < \pi$  lautet.

Die Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion ist - wie die Funktion selbst, nicht-linear. Interessiert man sich für den linearen Anteil dieser Ableitung ist es sinnvoll, zunächst die Ableitung und dann die Linearisierung durchzuführen. Dazu wird der adjungierte Operator  $\text{adj} : \mathfrak{so}(3) \mapsto \text{Lin}[\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3)]$  mit

$$\text{adj}[\mathbf{A}] \in \text{Lin}[\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3)], \quad \text{adj}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad , \quad (2.3)$$

durch die Wirkung von  $\text{adj}[\mathbf{A}]$ ,  $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3)$  auf ein Element der Gruppe  $\mathbf{B} \in \mathfrak{so}(3)$  eingeführt.<sup>4</sup>

Ein Ergebnis der LIE-Gruppen Theorie erlaubt das Differential der Matrix-Exponentialfunktion aus Gl. 2.2 in analytischer Form anzugeben (HOFMANN [91] Lemma 5.2)

$$\begin{aligned} D \exp : \mathfrak{so}(3) &\mapsto \text{Lin}(\mathfrak{so}(3), TSO(3)) \quad , \\ D \exp[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} &= \exp[\mathbf{A}] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (-\text{adj}[\mathbf{A}])^{i-1} \right] \cdot \mathbf{H} \quad , \end{aligned} \quad (2.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (-\text{adj}[\mathbf{A}])^{i-1} \right] \cdot \mathbf{H} &= \left[ \mathbb{1} - \frac{1}{2} \text{adj}[\mathbf{A}] + \frac{1}{3!} \text{adj}[\mathbf{A}]^2 + \dots \right] \cdot \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H} - \frac{1}{2} \text{adj}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{3!} \text{adj}[\mathbf{A}] \cdot \text{adj}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} + \dots \\ &= \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{A}) + \frac{1}{6} \text{adj}[\mathbf{A}] \cdot (\mathbf{A} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{A}) + \dots \\ &= \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{A} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{A}) + \frac{1}{6} (\mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \mathbf{H} - \mathbf{H} \mathbf{A}) \mathbf{A}) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Für kommutierende Paare  $(\mathbf{A}, \mathbf{H}) \in \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ <sup>5</sup> gilt  $\text{adj}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} = 0$  und man erhält aus Gl. 2.5 das klassische Ergebnis  $D \exp[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} = \exp[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H}$  analog zur skalaren Exponentialfunktion  $[\frac{d}{dx} e^x] h = [e^x] h$ .<sup>6</sup>

<sup>4</sup>In Gl. 2.3 handelt es sich in  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  um das einfache Tensorprodukt. Sofern es zu keinem Missverständnis kommen kann, wird das Symbol  $\cdot$  üblicherweise weggelassen.

<sup>5</sup>Beispiele sind  $\mathbf{H} = \mathbb{1}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{A}^2$  usw.

<sup>6</sup>Die skalare Exponentialfunktion ist innerhalb einer Gruppe definiert, deren Elemente nur kommutierende Paare  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  besitzt, also  $xy - yx = 0$ .

Für den allgemeinen Fall nicht kommutierender Paare wird die Funktion

$$\mathbf{P}_l(\text{adj}[\mathbf{A}]).\mathbf{H} := \left[ \sum_{i=1}^l \frac{1}{i!} (-\text{adj}[\mathbf{A}])^{i-1} \right] .\mathbf{H} \in \mathfrak{so}(3) \quad (2.6)$$

definiert. Nun lässt sich für Argumente  $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3)$  eine Approximation des Differentials der Exponentialfunktion zur Ordnung  $l \in \mathbb{N}$  angeben. Diese Approximation lautet

$$\begin{aligned} D_{\#,l} \exp[\mathbf{A}].\mathbf{H} &:= \exp[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{P}_l(\text{adj}[\mathbf{A}]).\mathbf{H}] \quad \Rightarrow \\ D_{\#,2} \exp[\mathbf{A}].\mathbf{H} &= \exp[\mathbf{A}] \cdot \left[ \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}) \right] \quad , \\ D_{\#,1} \exp[\mathbf{A}].\mathbf{H} &= \exp[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{H} \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

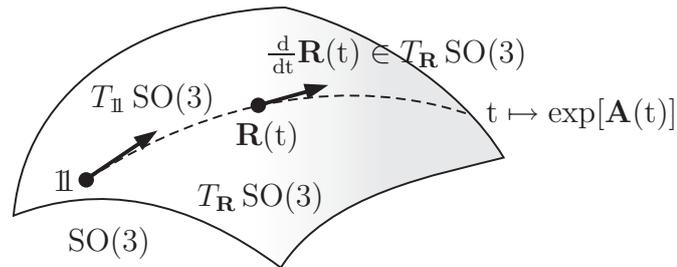
Wegen  $\exp[\mathbf{A}]^T \cdot \exp[\mathbf{A}] = \exp[-\mathbf{A}] \cdot \exp[\mathbf{A}] = \exp[-\mathbf{A} + \mathbf{A}] = \exp[0] = \mathbb{1}$  für alle  $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3)$  ist  $\exp[\mathbf{A}]^T \cdot D \exp[\mathbf{A}].\mathbf{H}$  für beliebige  $\mathbf{H} \in \mathfrak{so}(3)$  ebenfalls aus  $\mathfrak{so}(3)$ . Diese Eigenschaft zeigt auch die approximative Form des Differentials aus Gl. 2.7, da

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}]^T \cdot D_{\#,l} \exp[\mathbf{A}].\mathbf{H} &= \exp[\mathbf{A}]^T \cdot \exp[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{P}_l(\text{adj}[\mathbf{A}]).\mathbf{H} \\ &= \mathbf{P}_l(\text{adj}[\mathbf{A}]).\mathbf{H} \in \mathfrak{so}(3) \quad , \end{aligned} \quad (2.8)$$

für jede Ordnung  $l \in \mathbb{N}$  der Approximation gilt. Insbesondere ist der Tangentialraum einer Kurve  $t \mapsto \exp[\mathbf{A}(t)] \in SO(3)$  für eine gegebene Rotation  $\mathbf{R}(t) = \exp[\mathbf{A}(t)]$  wegen

$$T_{\mathbf{R}} SO(3) \supset \frac{d}{dt} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}(t) \in \mathfrak{so}(3) \quad , \quad (2.9)$$

der um  $\mathbf{R}(t)$  gedrehte Tangentialraum  $T_{\mathbb{1}} SO(3) = \mathfrak{so}(3)$  am neutralen Element  $\mathbb{1}$  der Gruppe, vgl. Abb. 2.1.



**Abbildung 2.1:** Verlauf einer Kurve  $t \mapsto \exp[\mathbf{A}(t)] \in SO(3)$  sowie der Tangentialraum  $T_{\mathbf{R}} SO(3)$  an die Kurve im Punkt  $\mathbf{R}(t) = \exp[\mathbf{A}(t)]$ .

## 2.2 Beschreibung endlicher Rotationen im Euklidischen Raum

Zur numerischen Behandlung der COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  ist es sinnvoll, das Rotationsfeld mit einem Vektorfeld  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  zu verbinden. Der Vektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  ist jedoch kein Element der ABELSchen Gruppe<sup>7</sup>, weshalb man eigentlich von einem Pseudovektor sprechen muss. Davon wird hier abgesehen und später abkürzend der Begriff des Drehvektors für  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  eingeführt.

Jede Rotation  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  kann wegen der Surjektivität der Exponentialfunktion in Gl. 2.2 als absolut konvergente Potenzreihe

$$\bar{\mathbf{R}} = \exp[\bar{\mathbf{A}}] = \mathbb{1} + \frac{\bar{\mathbf{A}}}{1!} + \frac{\bar{\mathbf{A}}^2}{2!} + \frac{\bar{\mathbf{A}}^3}{3!} + \frac{\bar{\mathbf{A}}^4}{4!} + \dots \quad (2.10)$$

geschrieben werden. Für den als EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$  bekannten axialen Vektor des antisymmetrischen Tensors  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathfrak{so}(3)$  gelte

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}} := \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Die Gl. 2.11 vermittelt einen kanonischen Isomorphismus zwischen Elementen  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  der Gruppe  $\mathbb{R}^3$  und Elementen  $\bar{\mathbf{A}}$  der Gruppe  $\mathfrak{so}(3)$ , so dass für alle  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{u}, \quad (2.12)$$

mit dem üblichen Vektorprodukt  $\times$  gilt<sup>8</sup>.

Neben der Verknüpfung von  $\bar{\mathbf{A}}$  mit  $\bar{\mathbf{R}}$  als Potenzreihe existiert auch die Möglichkeit (z.B. PIETRASZKIEWICZ & BADUR [187], BÜCHTER [12], SANSOUR [200]) der algebraischen Verknüpfung  $\mathfrak{so}(3) \mapsto \text{SO}(3)$  über

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1} + \frac{\sin\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|} \bar{\mathbf{A}} + \frac{1 - \cos\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2} \bar{\mathbf{A}}^2, \quad (2.13)$$

bzw. (z.B. PIETRASZKIEWICZ & BADUR [187], SIMO et al. [215], MENZEL [137])

$$\bar{\mathbf{R}} = \cos\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \mathbb{1} + \frac{\sin\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|} \bar{\mathbf{A}} + \frac{1 - \cos\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{\boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.14)$$

In Kap. 2.4 ist die Herleitung zu Gl. 2.13 mit Hilfe geometrischer Algebra ab Gl. 2.53 zu finden.

<sup>7</sup>  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2$  nicht sinnvoll

<sup>8</sup>  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{u} = \epsilon_{ijk} \bar{\alpha}_i u_j \mathbf{e}_k$

Nach BAŞAR & WEICHERT [6] wird der Rotationstensor  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  in Gl. 2.13 und Gl. 2.14 über den EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$  für beliebig große Rotationen **ohne** Singularitäten beschrieben. Jedoch ist wie bei jeder Parametrisierung endlicher Rotationen keine Eindeutigkeit für mehrere Umdrehungen gegeben, siehe z.B. MENZEL et al. [135].

Der EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  ist zugleich Eigenvektor von  $\bar{\mathbf{R}}$  mit dem reellen Eigenwert 1

$$\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = 1 \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad . \quad (2.15)$$

Wegen  $\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\boldsymbol{\alpha}} \times \bar{\boldsymbol{\alpha}} = 0$  gilt auch  $\bar{\mathbf{A}}^n \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , wodurch Gl. 2.15 sofort aus Gl. 2.10 hervorgeht. Dieser Zusammenhang zeigt, dass jeder Tensor  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  eine Rotation um seinen Eigenvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$  mit dem Drehwinkel  $\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|$  beschreibt.

Die verbleibenden Eigenwerte von  $\bar{\mathbf{R}}$  sind konjugiert komplex und besitzen die Werte  $\cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \pm i \sin \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|$  (z.B. [187]). Im Folgenden wird der reelle Eigenvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  von  $\bar{\mathbf{R}}$  nicht mehr EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor genannt, sondern mit dem Begriff Drehvektor abgekürzt.

Zur expliziten Berechnung des Drehvektors  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  aus  $\bar{\mathbf{R}}$  kann man so verfahren: Jede Rotation  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  ist durch

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| & \sin \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \\ 0 & -\sin \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| & \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \end{pmatrix} \mathbf{Q} \quad , \quad \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) \quad (2.16)$$

darstellbar. Die Spur von  $\bar{\mathbf{R}}$  ist invariant gegenüber der Konjugation mit  $\mathbf{Q}$ .<sup>9</sup>

Damit ist die Norm des Drehvektors  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  über

$$\text{tr}[\bar{\mathbf{R}}] = 1 + 2 \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \quad \Leftrightarrow \quad \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| = \arccos \left[ \frac{1}{2} (\text{tr}[\bar{\mathbf{R}}] - 1) \right] \quad (2.17)$$

gegeben. Weiter lässt sich der letzte Term in Gl. 2.14 durch Skalarmultiplikation mit  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  in die Form

$$\left( \frac{1 - \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1 - \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|^2 = (1 - \cos \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|) \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.18)$$

---

<sup>9</sup> $\text{tr}[\mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{Q}] = \langle \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{R}} \mathbf{Q}, \mathbb{1} \rangle = \langle \bar{\mathbf{R}}, \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \rangle = \langle \bar{\mathbf{R}}, \mathbb{1} \rangle = \text{tr}[\bar{\mathbf{R}}]$

bringen. Unter mehrmaliger Verwendung von Gl. 2.15 ist das Ergebnis aus Gl. 2.18 auf

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos \|\bar{\alpha}\|) \bar{\alpha} &= \bar{\alpha} + \bar{\alpha} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \bar{\alpha} \\ &= \mathbb{1} \cdot \bar{\alpha} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\alpha} + \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\alpha} = (\mathbb{1} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^2) \cdot \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (2.19)$$

erweiterbar und ein Vergleich von Gl. 2.18 mit Gl. 2.19 ergibt

$$2 \left( \frac{1 - \cos \|\bar{\alpha}\|}{\|\bar{\alpha}\|^2} \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} \right) = \mathbb{1} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^2 \quad . \quad (2.20)$$

Auflösen von Gl. 2.14 nach  $\bar{\mathbf{A}}$  und Verwendung von Gl. 2.20 führt auf

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \frac{\|\bar{\alpha}\|}{\sin \|\bar{\alpha}\|} \left( \bar{\mathbf{R}} - \cos \|\bar{\alpha}\| \mathbb{1} - \frac{1 - \cos \|\bar{\alpha}\|}{\|\bar{\alpha}\|^2} \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} \right) \\ &= \frac{\|\bar{\alpha}\|}{2 \sin \|\bar{\alpha}\|} (2 \bar{\mathbf{R}} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \mathbb{1} - (\mathbb{1} - 2 \cos \|\bar{\alpha}\| \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^2)) \\ &= \frac{\|\bar{\alpha}\|}{2 \sin \|\bar{\alpha}\|} (-(1 + 2 \cos \|\bar{\alpha}\|) \mathbb{1} + 2(1 + \cos \|\bar{\alpha}\|) \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}^2) \quad , \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei  $\|\bar{\alpha}\|$  schon aus Gl. 2.17 bestimmt ist.

Der axiale Vektor von  $\bar{\mathbf{A}}$  berechnet sich durch  $\bar{\alpha} = -\frac{1}{2} \epsilon : \bar{\mathbf{A}}$  und man erhält aus Gl. 2.21 schließlich

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= -\frac{\|\bar{\alpha}\|}{4 \sin \|\bar{\alpha}\|} (2(1 + \cos \|\bar{\alpha}\|) \epsilon : \bar{\mathbf{R}} - \epsilon : (\bar{\mathbf{R}}^2)) \\ \Leftrightarrow \bar{\alpha} &= -\frac{\|\bar{\alpha}\|}{4 \sin \|\bar{\alpha}\|} (2(1 + \cos \|\bar{\alpha}\|) \epsilon_{ijk} \bar{R}_{jk} - \epsilon_{ijk} \bar{R}_{js} \bar{R}_{sk}) \mathbf{e}_i \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Somit ist es unter Verwendung von Gl. 2.17 und Gl. 2.22 möglich, den reellen Eigenvektor aus  $\bar{\mathbf{R}}$  zu berechnen.

Für  $\sin \|\bar{\alpha}\| \rightarrow 0$  ist in Gl. 2.22 der Grenzwert  $\lim_{\|\bar{\alpha}\| \rightarrow 0} \frac{\|\bar{\alpha}\|}{\sin \|\bar{\alpha}\|} = 1$  zu benutzen.

### 2.3 Variation und Linearisierung von Rotationsfeldern

Die Variation eines Rotationsfeldes<sup>10</sup> bedeutet, die tensorielle Funktion  $\bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) = \exp[\bar{\mathbf{A}}] \in \text{SO}(3)$  in einem Argument auszuwerten, welches um eine im Sinne der Variationsrechnung willkürliche tensorielle Funktion  $\mathbf{H} \in \mathfrak{so}(3)$  verändert ist.

<sup>10</sup>Die COSSERAT-Rotation wird in dieser Arbeit besonders relevant, deshalb wird hier speziell  $\bar{\mathbf{R}}$  betrachtet.

Die TAYLOR-Entwicklung der Matrix-Exponentialfunktion, welche am Entwicklungspunkt  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathfrak{so}(3)$  durch das Argument  $\mathbf{H}$  verändert ist, lautet

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{H}) &= \exp[\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{H}] = \exp[\bar{\mathbf{A}}] + D \exp[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \mathbf{H} + o(\mathbf{H}) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) + \underbrace{\exp[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (-\text{adj}[\bar{\mathbf{A}}])^{i-1} \right]}_{\text{Gl. 2.4}} \cdot \mathbf{H} + o(\mathbf{H}) \quad . \quad (2.23) \end{aligned}$$

Da die Veränderung  $\mathbf{H}$  klein sein soll, ergibt sich unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung  $o(\mathbf{H})$  die Definition

$$\exp[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (-\text{adj}[\bar{\mathbf{A}}])^{i-1} \right]}_{:= \mathbf{B} \in \mathfrak{so}(3)} \cdot \mathbf{H} = \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{B} =: \delta \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad (2.24)$$

welche die Variation der Tensorfunktion  $\bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}})$  darstellt. Die in Gl. 2.24 definierte Testfunktion  $\mathbf{B} \in \mathfrak{so}(3)$  entspricht nicht der ursprünglichen Veränderung  $\mathbf{H} \in \mathfrak{so}(3)$ , was jedoch wegen deren Willkür keine weitere Bedeutung hat.

Dieses Resultat ist bereits in Gl. 2.7 zu erkennen, da die Regeln zur Variation formal den Regeln zur Linearisierung einer Funktion entsprechen und in Gl. 2.7 die lineare Veränderung durch

$$\Delta \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) = D_{\#1} \exp[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \mathbf{H} = \exp[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \mathbf{H} = \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{H} \quad (2.25)$$

gegeben ist. Wegen

$$\delta \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{B} = (\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{B}) \cdot \underbrace{(\bar{\mathbf{R}}^T \cdot \bar{\mathbf{R}})}_{\mathbb{I}} = \underbrace{(\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{R}}^T)}_{:= \mathbf{W} \in \mathfrak{so}(3)} \cdot \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{R}} \quad (2.26)$$

stellt die zu  $\mathbf{B}$  konjugierte Testfunktion  $\mathbf{W} \in \mathfrak{so}(3)$  ebenfalls eine Variation der Tensorfunktion  $\bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}})$  dar.

Die Wahl  $\mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{W}$  in der Variation rechts bzw. links von  $\bar{\mathbf{R}}$  zu stellen ist weder von mathematischer noch von physikalischer Bedeutung, wie in Gl. 2.26 ersichtlich. Gleiches gilt für die Linearisierung

$$\Delta \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) = \bar{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{H} = (\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{H}) \cdot (\bar{\mathbf{R}}^T \cdot \bar{\mathbf{R}}) = \underbrace{(\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{R}}^T)}_{:= \mathbf{Y} \in \mathfrak{so}(3)} \cdot \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Y} \cdot \bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (2.27)$$

In Kap. 5.3 wird Gl. 2.26 und Gl. 2.27 zur Variation und Linearisierung bevorzugt, da es zu kompakteren Ausdrücken führt.

## 2.4 Quaternionen und Numerik für Rotationen bis 360°

Es wird die Darstellung von Rotationen durch Quaternionen eingeführt. Für den numerischen Algorithmus ergeben sich daraus Vorteile. Da Quaternionen Elemente geometrischer Algebra sind, wird diese soweit vorgestellt, wie es für deren Einsatz in der Numerik erforderlich ist.

In der klassischen Mechanik gelingt die mathematische Beschreibung von Problemstellungen meist mit reeller Vektoralgebra.

Nach HESTENES [90] kann die Algebra komplexer Zahlen jedoch für gewisse Probleme Vorteile bieten. Seine Abhandlung über geometrische Algebra [90] erfasst u.a. die Anwendung komplexer Zahlen in der Beschreibung geometrischer Vorgänge. Dabei wird die Stellung von Quaternionen, deren Algebra sowie der Zusammenhang zur Vektoralgebra dargelegt.

Zwei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  definieren über

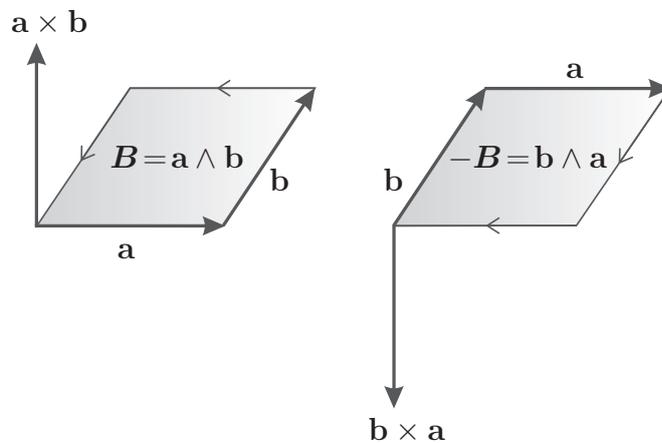
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} =: \mathbf{B} \quad (2.28)$$

eine ausgerichtete Fläche  $\mathbf{B}$  in Form eines Parallelogramms. Der Bivektor  $\mathbf{B}$  ist das äußere Produkt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ .

Das äußere Produkt der Vektoralgebra ( $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ) liefert hingegen einen Vektor, dessen Ausrichtung und Länge die Eigenschaften des in Gl. 2.28 definierten Parallelogramms hat. In Abb. 2.2 ist dies, sowie die Antikommutativität

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{B} \quad , \quad (2.29)$$

dargestellt.



**Abbildung 2.2:** Das äußere Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  bildet ein orientiertes Parallelogramm  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  bzw. einen Vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Die Antikommutativität ist für beide Fälle ersichtlich.

Es gelten u.a. die Regeln

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) &= (\lambda \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{b}) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \wedge (\lambda \mathbf{a}) &= 0 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad .\end{aligned}\tag{2.30}$$

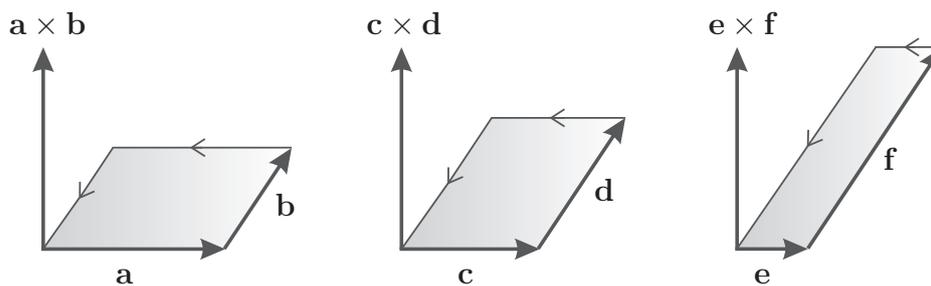
Drei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  definieren über

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) =: \mathbf{T}\tag{2.31}$$

ein ausgerichtetes Volumen  $\mathbf{T}$  in Form eines Parallelepipeds. Der Trivektor  $\mathbf{T}$  ist das äußere Produkt der Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ .

Das gemischte Produkt der Vektoralgebra ( $[\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ) liefert eine Zahl, deren Größe das Volumen des in Gl. 2.31 definierten Parallelepipeds hat.

Man erkennt, dass das äußere und gemischte Produkt der Vektoralgebra geometrische Sachverhalte in reduzierter Form beschreiben. Offensichtlich sind die Ergebnisgrößen der Vektoralgebra in der Dimension reduziert. Damit geht ein Verlust der Eindeutigkeit einher, wie es Abb. 2.3 zeigt. Obwohl verschiedene Flächen vorliegen, kann das Resultat  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ,  $(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$  und  $(\mathbf{e} \times \mathbf{f})$  identisch sein. Dieser Verlust an Information findet im äußeren Produkt der geometrischen Algebra nicht statt, da die Dimension und genaue Ursache im Bivektor bzw. Trivektor erhalten bleibt.



**Abbildung 2.3:** Das äußere Produkt der Vektoralgebra kann für verschiedene Ursachen (durch zwei Vektoren aufgespannte Flächen) dasselbe Ergebnis liefern.

Innerhalb der geometrischen Algebra ist das innere Produkt zwischen zwei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  ebenfalls definiert

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}\tag{2.32}$$

und unterscheidet sich zum inneren Produkt der Vektoralgebra nicht.

Eine Besonderheit der geometrischen Algebra besteht darin, die unterschiedlichen geometrischen Beziehungen von innerem und äußerem Produkt in einer neuen Art von Produkt, dem geometrischen Produkt

$$\mathbf{a b} := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad , \quad (2.33)$$

zu vereinen. In Gl. 2.33 wird der Skalar ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ) mit einem Bivektor ( $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ) addiert und die Mischung ( $\mathbf{a b}$ ) als Multivektor bzw. Spinor bezeichnet. HESTENES legt in [90] dar, weshalb dies zulässig ist (S.30):

”All that mathematics really requires is that the indicated relations and operations be well defined and consistently employed. The mathematical meaning of adding scalars and bivectors is determined by specifying that such addition satisfy the usual commutative and associative rules. Use of the ”equal sign” in eq. (2.33) is justified by assuming that it obeys the same rules as those governing equality in ordinary scalar algebra. With this understood, it now can be shown that the properties of the new product are almost completely determined by the obvious requirement that they be consistent with the properties already accorded to the inner and outer products.”<sup>11</sup>

Wegen

$$\mathbf{b a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2.34)$$

kann das innere und äußere Produkt über

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a b} + \mathbf{b a}) \quad , \quad (2.35)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a b} - \mathbf{b a}) \quad (2.36)$$

beschrieben werden. Betrachtet man das geometrische Produkt als Fundamental, können dadurch zwei verschiedene Arten von Vektorprodukten, nämlich inneres und äußeres Produkt durch eine Art definiert werden. Es ist bemerkenswert, dass in der geometrischen Algebra die Kommutativität des inneren Produktes aus der Kommutativität der Addition in Gl. 2.35 resultiert und die Antikommutativität des äußeren Produktes aus der Antikommutativität der Subtraktion in Gl. 2.36.

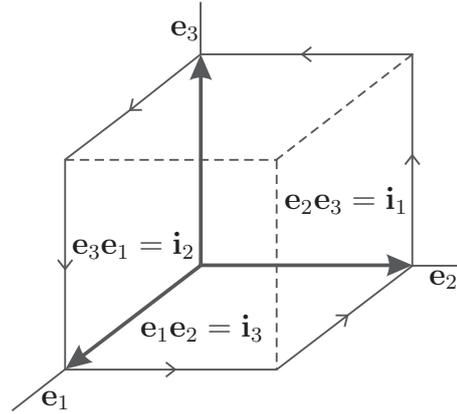
Nun sei  $\mathbf{i}$  ein Parallelepiped gemäß Gl. 2.31. Die Menge aller Vektoren  $\mathbf{x}$ , welche die Gleichung

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{i} = 0 \quad (2.37)$$

---

<sup>11</sup> In der Mathematik komplexer Zahlen wird ebenso mit Mischungen aus Real- und Imaginärteilen gerechnet.

erfüllen, definieren den EUKLIDISCHEN Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ . Die Menge aller Multivektoren, welche durch Addition oder Multiplikation von Vektoren  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  gebildet werden, definieren die geometrische Algebra  $\mathbb{G}^3$ .



**Abbildung 2.4:** Der Trivektor  $\mathbf{i}$  wird über die drei orientierten Flächen  $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  gebildet. Die Ausrichtung des Parallelepipeds (hier speziell ein Kubus) verinnerlicht ein Rechtssystem.

Die spezielle Wahl des Trivektors  $\mathbf{i}$  als Produkt von drei orthonormalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \quad , \quad (2.38)$$

bildet einen möglichen Teil der Basis für  $\mathbb{G}^3$ . Mit der Ausrichtung des Trivektors  $\mathbf{i}$  wird zudem die Bedeutung eines Rechtssystems verinnerlicht, wie Abb. 2.4 zeigt.

Nun sei Gl. 2.38 die Definition des Trivektors, welcher durch die orthogonalen Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^T &= -\mathbf{i} \quad , \\ \mathbf{i}^2 &= -1 \quad , \\ \mathbf{i} \mathbf{A} &= \mathbf{A} \mathbf{i} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{G}^3 \end{aligned} \quad (2.39)$$

erhält und von nun an als Pseudoskalar  $\mathbf{i}$  bezeichnet wird.

Durch geometrische Multiplikation des Pseudoskalars  $\mathbf{i}$  mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  erhält man genau drei linear unabhängige Bivektoren  $\mathbf{i}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 =: \mathbf{i}_1 \quad , \\ \mathbf{i} \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 =: \mathbf{i}_2 \quad , \\ \mathbf{i} \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 =: \mathbf{i}_3 \quad , \end{aligned} \quad (2.40)$$

was den drei unabhängigen Flächen im EUKLIDischen Raum entspricht (vgl. Abb. 2.4). Damit kann jeder Bivektor in  $\mathbb{G}^3$  durch die Linearkombination

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3 = \mathbf{i} \underbrace{(B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3)}_{:=\mathbf{b}} = \mathbf{i} \mathbf{b} \quad (2.41)$$

dargestellt werden. Die Dualität zwischen dem Bivektor  $\mathbf{B}$  und dem Vektor  $\mathbf{b}$  findet man in der Vektoralgebra ebenfalls, und zwar zwischen einem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe und dessen axialen Vektor. Tatsächlich kann jede Transformation eines Vektors  $\mathbf{x}$  durch einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe  $\bar{\mathbf{A}}$  auch durch einen eindeutigen Bivektor  $\mathbf{B}$  erzielt werden

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \quad . \quad (2.42)$$

Das äußere Produkt der Vektoralgebra findet sich somit auch in der geometrischen Algebra, der Zusammenhang lautet

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{i} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{i} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad . \quad (2.43)$$

HESTENES legt dar, wie die Definition und Rolle von Quaternionen in das Bild der geometrischen Algebra einzufügen ist. Die Subalgebra  $\mathbb{G}_+^3$  (Spinoralgebra) soll lediglich Elemente  $\mathbf{A}$  der Form

$$\mathbf{A} = \beta + \mathbf{i} \mathbf{b} \quad (2.44)$$

beinhalten. Die Elemente  $\mathbf{A}$  werden Spinore genannt und generieren Rotationen und Dilatationen im Raum. Generiert der Spinor lediglich eine Rotation (unitary or unimodular spinor), ist er mit einem Einheitsquaternion identisch und es gilt

$$\mathbf{Q} = \beta + \mathbf{i} \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = (\beta - \mathbf{i} \mathbf{b}) (\beta + \mathbf{i} \mathbf{b}) = \beta^2 + \mathbf{b}^2 = 1 \quad . \quad (2.45)$$

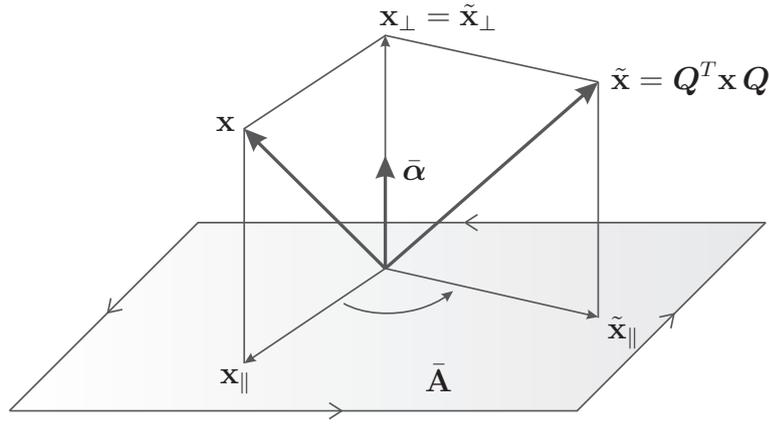
Im Hinblick auf Gl. 2.41 ist zu sehen, dass die vier Größen  $1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  eine Basis für  $\mathbb{G}_+^3$  bilden, weshalb HAMILTON den Namen Quaternionen wählte [90]. Die vier Parameter  $\beta, b_k = \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_k, k = 1, 2, 3$  werden EULER-RODRIGUES-Parameter genannt<sup>12</sup> und sind im Hinblick auf Gl. 2.45 voneinander abhängig.

Quaternionen können über den EULER-RODRIGUES-Rotationsvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  parametrisiert werden; die Beziehung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= e^{(\frac{1}{2} \mathbf{i} \bar{\boldsymbol{\alpha}})} = \cos \left( \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) + \mathbf{i} \sin \left( \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\ &= \cos \left( \frac{1}{2} \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \right) + \frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\|} \sin \left( \frac{1}{2} \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

<sup>12</sup>Nicht zu verwechseln mit EULER-Winkel.

Wie es Gl. 2.46 zeigt, genügen die drei Parameter  $\bar{\alpha}_k = \bar{\alpha} \cdot \mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  zur Beschreibung eines Quaternions. Da der Vektor  $\bar{\alpha} = \mathbf{i} \bar{\mathbf{A}}$  zugleich auch duale Größe eines Bivektors  $\bar{\mathbf{A}}$  ist, lässt sich nun das geometrische Bild beim Vorgang einer Rotation wie in Abb. 2.5 zeichnen.



**Abbildung 2.5:** Der Bivektor  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{i} \bar{\alpha}$  stellt die Drehebene bzw. Drehscheibe einer Rotation dar.

Ein Vergleich von Gl. 2.44 mit Gl. 2.46 liefert die explizite Berechnungsvorschrift zwischen einem Quaternion  $\mathbf{Q} = \beta + \mathbf{i} \mathbf{b}$  und einem zur Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  gehörigen Drehvektor  $\bar{\alpha}$

$$\beta = \cos \left[ \frac{1}{2} \|\bar{\alpha}\| \right] , \quad (2.47)$$

$$\mathbf{b} = \frac{\bar{\alpha}}{\|\bar{\alpha}\|} \sin \left[ \frac{1}{2} \|\bar{\alpha}\| \right] . \quad (2.48)$$

Das rotierte Abbild  $\tilde{\mathbf{x}}$  eines beliebigen Vektors  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  durch eine Abbildung  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  wird in  $\mathbb{G}^3$  über einen eindeutigen Quaternion  $\mathbf{Q} \in \mathbb{G}_+^3$  mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \mathbf{Q} \quad (2.49)$$

erzeugt. Während in  $(\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x})$  der Gl. 2.49 das innere Produkt der Vektoralgebra steht, findet sich in  $(\mathbf{Q}^T \mathbf{x} \mathbf{Q})$  das geometrische Produkt.

Wie nützlich die Verwendung von geometrischer Algebra ist, zeigt sich bei der Herleitung von Beziehungen die Rotationen betreffend. Die RODRIGUES-Formel gewinnt man z.B. folgendermaßen.: Quaternionen nach Gl. 2.45 können leicht modifiziert über

$$\mathbf{Q} = \beta (1 + \mathbf{i} \mathbf{c}) \quad , \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \beta (1 - \mathbf{i} \mathbf{c}) \beta (1 + \mathbf{i} \mathbf{c}) = \beta^2 + \beta^2 \mathbf{c}^2 = 1 \quad (2.50)$$

parametrisiert werden.

Der Vektor  $\mathbf{c}$  besitzt zwar die gleiche Ausrichtung wie der Vektor  $\mathbf{b}$  in Gl. 2.45, jedoch stellen beide **nicht** die Drehachse  $\bar{\alpha}$  in Abb. 2.5 dar. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \mathbf{Q} \Leftrightarrow \beta (1 + \mathbf{i} \mathbf{c}) \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \beta (1 + \mathbf{i} \mathbf{c}) \\
&\Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{i} \mathbf{c} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{i} \mathbf{x} \mathbf{c} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{i} \mathbf{x} \mathbf{c} - \mathbf{i} \mathbf{c} \mathbf{x} \\
&\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{i} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{c} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) \\
&\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{i} (-\mathbf{c} \wedge \mathbf{x} - \mathbf{c} \wedge \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{i} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{x}}) \\
&\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = -\mathbf{i} \mathbf{c} \wedge (\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{i} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{x}}) \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}_{\text{Vektor}} = \underbrace{\mathbf{c} \times (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x})}_{\text{Vektor}} + \underbrace{\mathbf{i} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \tilde{\mathbf{x}})}_{\text{Trivektor}} .
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Wie es für geometrische Algebra typisch ist, liefert Gl. 2.51 gleich zwei Aussagen. Betrachtet man nur die Vektoranteile der Gleichung, erhält man die RODRIGUES-Formel

$$\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{c} \times (\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}) , \tag{2.52}$$

deren geometrische Bedeutung ein rechter Winkel zwischen  $\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}$  und  $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  ist. Dies wird in Abb. 2.6 veranschaulicht.

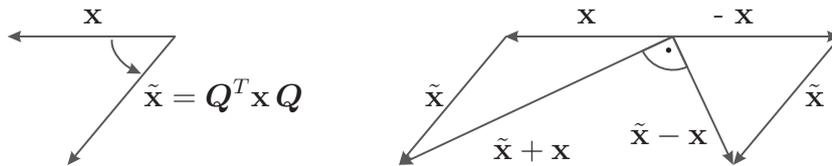


Abbildung 2.6: Geometrische Veranschaulichung der RODRIGUES-Formel.

Betrachtet man die Anteile des Trivektors in Gl. 2.51 erhält man eine weitere Aussage bzgl. des Skalarprodukts zwischen  $\mathbf{x}$  bzw.  $\tilde{\mathbf{x}}$  und dem Vektor  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{c} .$$

Ein weiteres Beispiel ist die Herleitung der Gl. 2.13 zwischen Rotationstensor  $\bar{\mathbf{R}}$  und Drehvektor  $\bar{\alpha}$ . Dazu ist die Beziehung

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} \\
\Leftrightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

und die Tatsache  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$ , so wie in Abb. 2.7 veranschaulicht, notwendig.

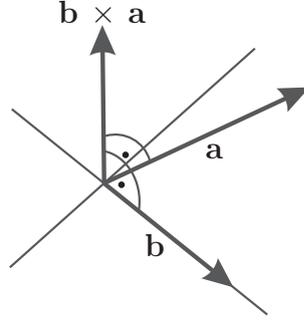


Abbildung 2.7: Zur Veranschaulichung von  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0$ .

Es sei nun  $\tilde{\mathbf{x}}$  der mit dem Quaternion  $\mathbf{Q} = \beta + \mathbf{i}\mathbf{b}$  gedrehte Vektor  $\mathbf{x}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \mathbf{Q} = (\beta - \mathbf{i}\mathbf{b}) \mathbf{x} (\beta + \mathbf{i}\mathbf{b}) = (\beta \mathbf{x} - \mathbf{i}\mathbf{b}\mathbf{x}) (\beta + \mathbf{i}\mathbf{b}) \\
 &= \beta^2 \mathbf{x} + \beta \mathbf{x} \mathbf{i}\mathbf{b} - \beta \mathbf{i}\mathbf{b}\mathbf{x} - \mathbf{i}\mathbf{b}\mathbf{x} \mathbf{i}\mathbf{b} \\
 &= \beta^2 \mathbf{x} + \beta \mathbf{i}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) - \beta \mathbf{i}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}) - \mathbf{i}\mathbf{i}\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b} \\
 &= \beta^2 \mathbf{x} + \beta \mathbf{i}(\underbrace{\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{x} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}}_{=-2\mathbf{b} \wedge \mathbf{x}}) + \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b} \\
 &= \beta^2 \mathbf{x} - 2\beta \mathbf{i}\mathbf{b} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b} \quad .
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Der Term  $\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}$  kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b} &= \mathbf{b}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{x} = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} - \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \\
 &= 2[(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} - \mathbf{b}^2 \mathbf{x}] + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} = 2[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) + \underbrace{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{x} - \mathbf{b}^2 \mathbf{x}}_{=0}] + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \\
 &= 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

und wegen  $\mathbf{b}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) + \underbrace{\mathbf{b} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{b})}_{=0}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b} &= 2\mathbf{b}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} = 2\mathbf{b}(\mathbf{i}\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} = 2\mathbf{i}\mathbf{b}(\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \\
 &= 2\mathbf{i}[\underbrace{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{b})}_{=0} + \mathbf{b} \wedge (\mathbf{x} \times \mathbf{b})] + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} = 2\mathbf{i}\mathbf{b} \wedge (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \\
 &= -2\mathbf{b} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \quad .
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Einsetzen von Gl. 2.56 in Gl. 2.54 ergibt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{x} \mathbf{Q} = \beta^2 \mathbf{x} - 2\beta \mathbf{i}\mathbf{b} \wedge \mathbf{x} - 2\mathbf{b} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{x} \\
 &= \underbrace{(\beta^2 + \mathbf{b}^2)}_{=1} \mathbf{x} + 2\beta \mathbf{b} \times \mathbf{x} + 2\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) \quad .
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Parametrisiert man den Quaternion  $\mathbf{Q}$  mit dem Drehvektor  $\bar{\alpha}$  wie in Gl. 2.47 und Gl. 2.48, stellt sich Gl. 2.57 über

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} + 2 \cos \left[ \frac{1}{2} \|\gamma\| \right] \sin \left[ \frac{1}{2} \|\gamma\| \right] \frac{\gamma}{\|\gamma\|} \times \mathbf{x} \\ &\quad + 2 \sin \left[ \frac{1}{2} \|\gamma\| \right] \sin \left[ \frac{1}{2} \|\gamma\| \right] \frac{\gamma \times \gamma \times \mathbf{x}}{\|\gamma\|^2} \\ &= \mathbf{x} + \frac{\sin \|\gamma\|}{\|\gamma\|} \gamma \times \mathbf{x} + \frac{1 - \cos \|\gamma\|}{\|\gamma\|^2} \gamma \times \gamma \times \mathbf{x}\end{aligned}\quad (2.58)$$

dar. Durch Separation von  $\mathbf{x}$  in Gl. 2.58 gemäß

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{\left[ \mathbb{1} + \frac{\sin \|\bar{\alpha}\|}{\|\bar{\alpha}\|} \bar{\mathbf{A}} + \frac{1 - \cos \|\bar{\alpha}\|}{\|\bar{\alpha}\|^2} \bar{\mathbf{A}}^2 \right]}_{\bar{\mathbf{R}}} \cdot \mathbf{x} \quad , \quad \bar{\alpha} = \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}] \quad (2.59)$$

ist nun Gl. 2.13 für  $\bar{\mathbf{R}}$  gefunden.

SANSOUR & WAGNER behandeln in [201] die Umsetzung und Vorteile bei Verwendung von Quaternionen innerhalb einer Finite-Element-Formulierung. Die Numerik liefert aus einem Iterationsverfahren Drehinkremente  $\Delta \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  an alle Knoten des Netzes. Diese müssen effizient und eindeutig mit bereits vorhandenen Drehungen  $\bar{\alpha}^j \in \mathbb{R}^3$  des letzten Iterationsschrittes  $j$  an den Knoten verrechnet werden. Da es sich bei  $\Delta \bar{\alpha}$  und  $\bar{\alpha}^j$  um Drehungen handelt, gelten für diese Pseudovektoren nicht die Regeln der Vektoraddition.

Der Struktur der  $SO(3)$  muss durch ein multiplikatives Update Rechnung getragen werden, wobei sich zunächst folgendes Vorgehen anbietet.

Aus dem Drehinkrement  $\Delta \bar{\alpha}$  wird ein Rotationstensor  $\Delta \bar{\mathbf{R}}$  am Knoten berechnet. Die Drehung  $\bar{\alpha}^j$  als Ergebnis des letzten Iterationsschrittes muss am Knoten ebenfalls in einen Rotationstensor  $\bar{\mathbf{R}}^j$  umgerechnet oder aus einem Speicher gelesen werden. Da das Iterationsverfahren auf der Linearisierung gemäß Gl. 2.25 bzw. Gl. 2.27 basiert, gilt dann

$$\bar{\mathbf{R}}^{j+1} = \Delta \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^j \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{R}}^{j+1} = \bar{\mathbf{R}}^j \Delta \bar{\mathbf{R}} \quad . \quad (2.60)$$

Aus dem aktualisierten Rotationstensor  $\bar{\mathbf{R}}^{j+1}$  muss wiederum ein Drehvektor am Knoten berechnet werden, da nur Drehvektoren eine Standardinterpolation an die GAUSSpunkte erlauben [201].

Der Nachteil dieses Vorgehens liegt an der immer wieder notwendigen Umrechnung zwischen Drehvektoren und Rotationstensen, was u.U. zu Ungenauigkeiten und einem erhöhtem Rechenaufwand führt.

Die Verwendung von Quaternionen bietet ein kompakteres Verfahren. Wird ein Vektor  $\mathbf{x}$  nach einer Drehung  $\bar{\mathbf{R}}_1$  mit einer weiteren Drehung  $\bar{\mathbf{R}}_2$  versehen, lautet das Ergebnis gemäß Gl. 2.49

$$\bar{\mathbf{R}}_2 \cdot (\bar{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{Q}_2^T (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{x} \mathbf{Q}_1) \mathbf{Q}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}}_3 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}_3^T \mathbf{x} \mathbf{Q}_3 \quad (2.61)$$

mit

$$\bar{\mathbf{R}}_3 = \bar{\mathbf{R}}_2 \cdot \bar{\mathbf{R}}_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \quad . \quad (2.62)$$

Damit lässt sich das Update der Rotationen numerisch folgendermaßen durchführen: Aus dem Drehinkrement  $\Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}$  wird gemäß Gl. 2.47 und Gl. 2.48 ein Quaternion  $\mathbf{Q}_2$  am Knoten berechnet. Die Drehung  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^j$  als Ergebnis des letzten Iterationsschrittes ist gespeichert und liegt am Knoten als Quaternion  $\mathbf{Q}_1$  vor. Im ersten Iterationsschritt lautet der initiale Quaternion ( $\beta = 1, \mathbf{b} = 0$ ). Der aktualisierte Quaternion berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 &= \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = (\beta_1 + \mathbf{i} \mathbf{b}_1) (\beta_2 + \mathbf{i} \mathbf{b}_2) = \beta_1 \beta_2 + \mathbf{i} \beta_1 \mathbf{b}_2 + \mathbf{i} \beta_2 \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1 \underbrace{\mathbf{i} \mathbf{i}}_{-1} \mathbf{b}_2 \\ &= \beta_1 \beta_2 + \mathbf{i} (\beta_1 \mathbf{b}_2 + \beta_2 \mathbf{b}_1) - (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 + \underbrace{\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2}_{\mathbf{i} (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)}) \\ &= \underbrace{(\beta_1 \beta_2 - \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2)}_{\beta_3} + \mathbf{i} \underbrace{(\beta_1 \mathbf{b}_2 + \beta_2 \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2)}_{\mathbf{b}_3} \quad . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Der aktuelle Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}$  am Knoten wird durch Umkehrung von Gl. 2.47 und Gl. 2.48 erhalten

$$\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}\| = 2 \arccos[\beta_3] \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1} = \frac{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}\|}{\sin [0.5 \|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}\|]} \mathbf{b}_3 \quad . \quad (2.64)$$

Der Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}$  kann durch eine Standardinterpolation an die GAUSSpunkte projiziert werden.

Für  $\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1}\| \rightarrow 0$  besitzt Gl. 2.64 nach der Regel von DE L'HOSPITAL die Lösung  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{j+1} = 2 \mathbf{b}_3$ . Dies ist jedoch für  $\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}\| \rightarrow 2 \pi$  nicht der Fall, weshalb für große Rotationen im folgenden Abschnitt eine erweiterte Strategie und deren Umsetzung vorgestellt wird.

## 2.5 Erweiterung auf Numerik für Rotationen über $360^\circ$

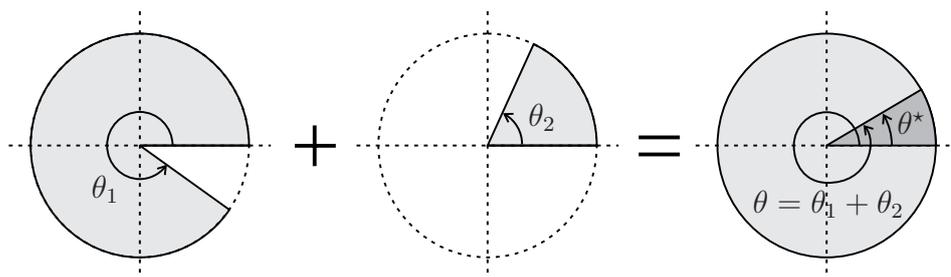
Obwohl Quaternionen beliebige Drehungen ohne Singularität beschreiben, ist in ihnen die Information einer Drehung über  $360^\circ$  nicht enthalten. Trotzdem genügen sie den Anforderungen eines Modells mit Finiten Elementen.

Denn durch die Zerlegung eines Gesamtgebietes  $\mathcal{B}$  in Finite Elemente mit **einfachen** Ansatzfunktionen ist es nahezu ausgeschlossen, dass im einzelnen Element Differenzen des Drehfelds in der Größenordnung von  $360^\circ$  auftreten.

Wäre es möglich Drehinkremente, Quaternionen oder Rotationstensoren innerhalb eines Finiten Elementes zu interpolieren, müsste nachfolgende Diskussion nicht geführt werden. Da die Standardinterpolation jedoch nur für den Drehvektor  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  möglich ist, tritt das Problem bei Rückrechnung eines Drehvektors aus Quaternionen gemäß Gl. 2.64 für  $\|\bar{\alpha}\| \rightarrow 2\pi n$ ,  $n = \pm(1, 2, \dots)$  in Erscheinung.

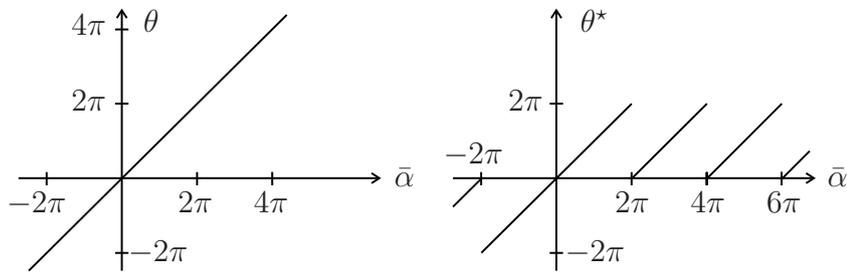
Zunächst soll die Problematik im zweidimensionalen Raum näher betrachtet und anschließend in den dreidimensionalen Raum übertragen werden.

Im zweidimensionalen Raum ist der Drehvektor  $\bar{\alpha}$  durch **eine feste Drehachse** und einen skalaren Drehwinkel  $\theta$  definiert. Da sich zwei aufeinander folgende Drehungen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  einfach addieren, kann  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  eine Drehung über  $2\pi$  sein.



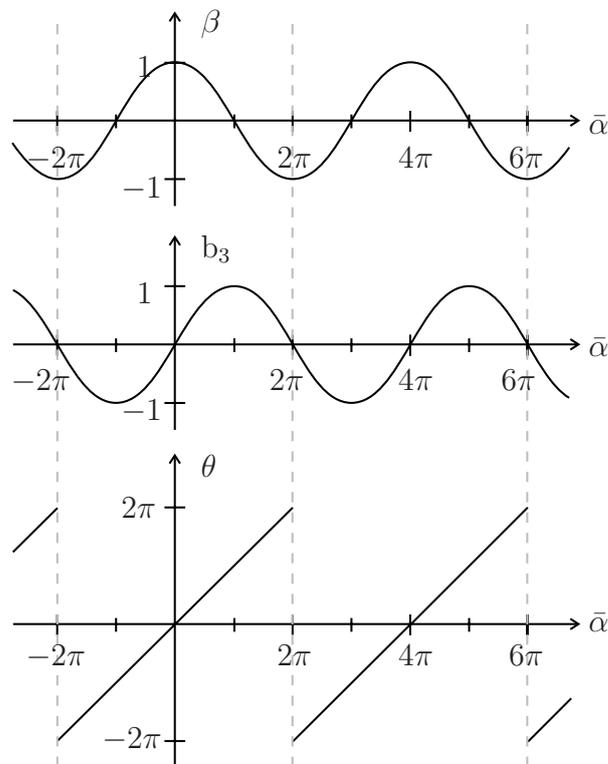
**Abbildung 2.8:** Die Addition von Drehungen im 2-D führt auf Winkel größer  $2\pi$ .

Es ist auch möglich einen Drehwinkel  $\theta^*$  so zu definieren, dass dieser lediglich im offenen Intervall  $] -2\pi, 2\pi[$  liegt, was die Drehung ebenso erfasst, jedoch Information zur "Überdrehung" ausblendet, ähnlich wie es unter Verwendung von Quaternionen der Fall ist. Allerdings resultiert eine solche Beschreibung in sprunghaftem Verhalten im Drehwinkel  $\theta^*$ , wie es in Abb. 2.9 veranschaulicht ist.



**Abbildung 2.9:** Ausblenden der Überdrehung führt zu Sprüngen im Drehwinkel  $\theta^*$ .

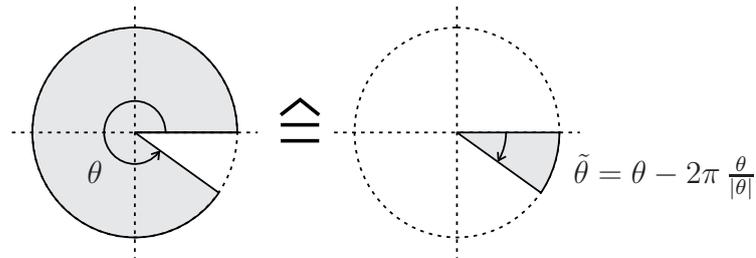
Da Quaternionen keine Information zur "Überdrehung" enthalten, ist die Rückrechnung zu einem Drehwinkel unstetig, obwohl dies für den Quaternion selbst nicht der Fall ist. Im zweidimensionalen Raum ist der Verlauf eines Quaternion in Abb. 2.10 dargestellt, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die feste Drehachse so gewählt ist, dass die Komponenten  $b_1$  und  $b_2$  des Quaternion  $(\beta, \mathbf{b})$  stets Null sind und nur  $b_3$  und  $\beta$  aufzutragen sind.



**Abbildung 2.10:** Während der Quaternion stetig verläuft, ist dessen Rückrechnung zu einem Drehwinkel  $\theta$  an den Stellen  $\bar{\alpha} = 2\pi n, n = \pm(1, 2, \dots)$  unstetig und singular.

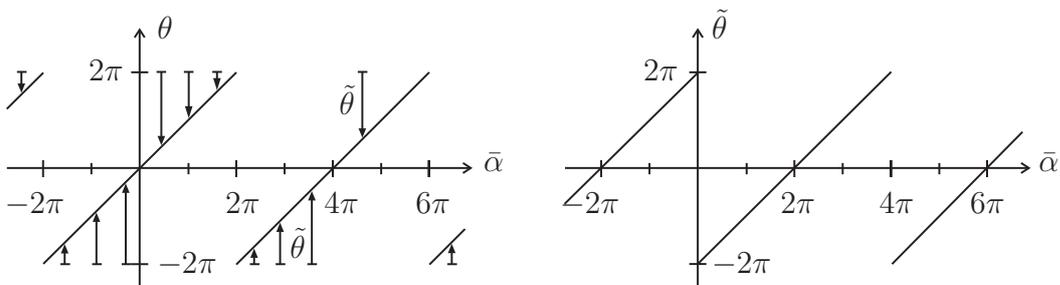
Die Strategie zur Lösung des Problems, welches bei der Umrechnung eines Quaternionen zu einem Drehvektor an der Grenze zur "Überdrehung" auftritt, basiert

auf der Tatsache, dass jeder Drehwinkel einen negativ konjugierten Gegenwinkel besitzt.



**Abbildung 2.11:** Die Drehung  $\theta$  und deren Gegenwinkel  $\tilde{\theta} = \theta - 2\pi \frac{\theta}{|\theta|}$ .

Der Gegenwinkel weist zwar ebenso Sprünge auf, jedoch immer phasenverschoben um eine Drehung von  $2\pi$ . Wie Eingangs erwähnt, sind **innerhalb** eines Elementgebiets keine derart großen Differenzen im Drehwinkel zu erwarten. Deshalb kann der Gegenwinkel immer zur Umrechnung herangezogen werden, wenn sich das Drehfeld eines Elements der Sprungstelle nähert und damit der Gegenwinkel von seiner eigenen Sprungstelle entfernt ist.



**Abbildung 2.12:** Der Gegenwinkel  $\tilde{\theta} = \theta - 2\pi \frac{\theta}{|\theta|}$  besitzt um  $2\pi$  versetzte Sprungstellen.

Im räumlichen Fall ist der Gegenwinkel des Drehvektors  $\bar{\alpha}$  als Vektor  $\tilde{\alpha}$  zu behandeln, welcher sich über

$$\tilde{\alpha} = \bar{\alpha} - 2\pi \frac{\bar{\alpha}}{\|\bar{\alpha}\|} \quad (2.65)$$

berechnet.

Zusammenfassend lautet die numerische Umrechnungsvorschrift von Quaternion-

nen in Drehvektoren

$$\|\bar{\alpha}\| = 2 \arccos[\alpha], \quad \bar{\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} 2 \mathbf{b} & , \quad \|\bar{\alpha}\| < \epsilon^+ \\ \frac{\|\bar{\alpha}\|}{\sin[0.5\|\bar{\alpha}\|]} \mathbf{b} & , \quad \epsilon^+ \leq \|\bar{\alpha}\| \leq 2\pi - \epsilon^+ \\ 0 & , \quad \|\bar{\alpha}\| > 2\pi - \epsilon^+ \end{array} \right\},$$

verwende elementweise  $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha} - 2\pi \frac{\bar{\alpha}}{\|\bar{\alpha}\|}$  falls  $\|\bar{\alpha}\| > \pi, \bar{\alpha} \in \Omega_e$ . (2.66)

In Gl. 2.66 bezeichnet  $\Omega_e$  das Gebiet eines einzelnen Finiten-Elementes, weshalb die dazugehörige Abfrage in jedem Element für sich stattfinden kann.

Die Rechenbeispiele dieser Arbeit verwenden das Finite-Element-Programm FEAP, welches in der Programmiersprache FORTRAN95 geschrieben ist. Nach den Erfahrungen des Autors hat sich der Parameter  $\epsilon^+ = 10^{-15}$  bewährt.

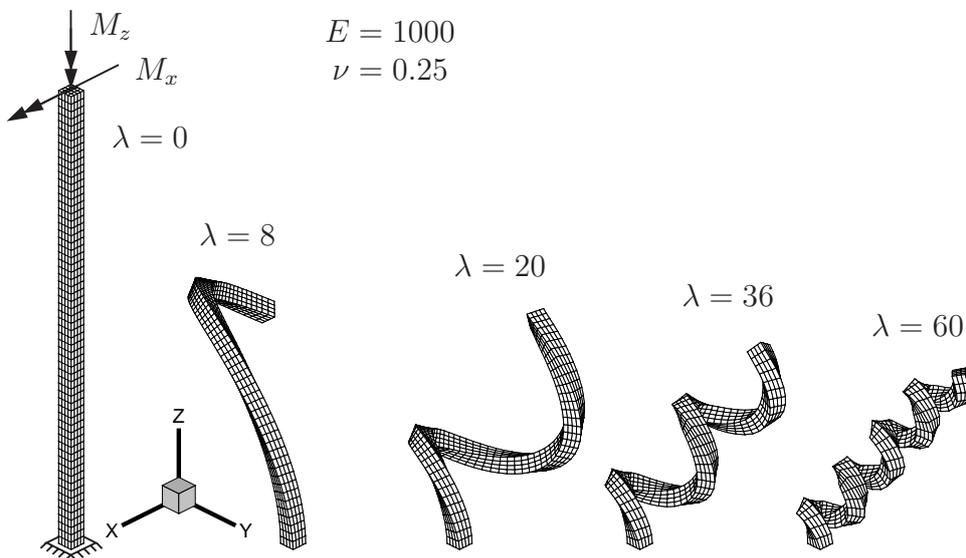
## 2.6 Beispiele zur Numerik großer Rotationen

Die Behandlung der Rotationen nach Gl. 2.66 wird nun durch zwei numerische Beispiele auf Tauglichkeit und Konvergenzverhalten geprüft. Die Ergebnisse basieren auf der Finite-Element-Formulierung des Kap. 5. Durch die Wahl der COSSERAT-Parameter  $\mu_c = \mu$  und  $L_c = 0$  ist das COSSERAT-Modell praktisch einem BIOT-Modell vergleichbar, was jedoch für die Behandlung der Rotationen keinen Unterschied darstellt. Ähnliche Tests verwendet z.B. MERLINI in [138] ebenfalls zur Überprüfung eines BIOT-Modells, siehe auch NEFF et al. [171].

### 2.6.1 Schiefe Biegung mit großen Drehungen

Ein Stab der Länge  $L = 30$  mit quadratischem Querschnitt der Fläche  $A = 1$  wird am oberen Stabende durch das Drehmoment  $M_x = \lambda$  um die globale x-Achse sowie dem Drehmoment  $M_z = \lambda/2$  entgegen der globalen z-Achse belastet. Die Struktur ist am unteren Stabende eingespannt, wobei alle Freiheitsgrade des Einspannquerschnitts blockiert sind.

Es werden Finite-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Über die Stabdicke wird mit jeweils 2 Elementen diskretisiert, was 4 Elemente pro Querschnitt entspricht. Die Struktur wird weiterhin durch 30 Elemente in Stablängsrichtung unterteilt. Die Darstellung in Abb. 2.13 zeigt ein Netz durch alle Oberflächenknoten und darf nicht als doppelt feine Diskretisierung interpretiert werden. Die Lasteinleitung erfolgt am Stabende über den gesamten Querschnitt als konstante Flächenlast, was auf die entsprechenden Knoten der Oberfläche konsistent verteilt wird.



**Abbildung 2.13:** Verlauf der Deformation für zunehmenden Lastfaktor  $\lambda$ .

Bei Erhöhung des Lastfaktors  $\lambda$  deformiert sich der Stab zunehmend zur Form einer Spiralfeder, wie in Abb. 2.13 zu sehen. Die Oberflächen der Spirale berühren sich dabei nicht, so entstehen keine Kontaktkräfte. Die hier auftretenden räumlichen Rotationen liegen weit über dem absoluten Drehwinkel von  $2\pi$ , was die Behandlung der Rotationen nach Kap. 2.5 bestätigt.

### 2.6.2 Kragarm mit Endmoment

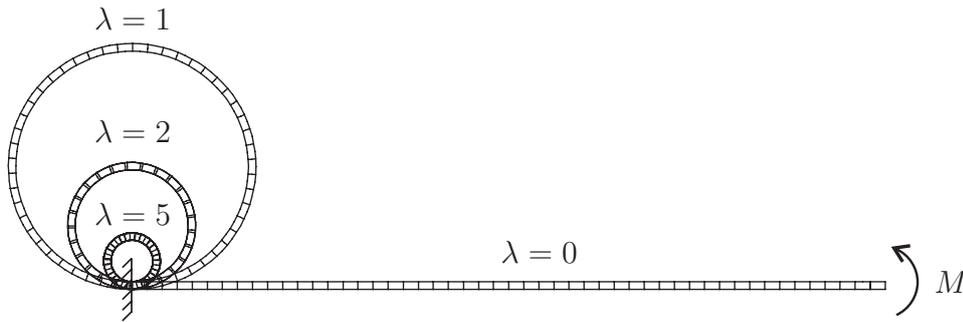
Ein eingespannter Stab der Länge  $L = 10$  mit Stabdicke  $d$  und Breite  $b = 1$  wird durch ein Stabendmoment  $M = \lambda 2\pi EI/L$  belastet. Der Stab hat den Elastizitätsmodul  $E = 1800$  und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0$ . Die Krümmung  $\kappa$  des Stabes gemäß der Balkendifferentialgleichung

$$-EI \kappa = M \quad \Leftrightarrow \quad 1/\kappa = -EI/M \quad (2.67)$$

ist über die gesamte Länge der Struktur konstant. Somit verformt sich der Kragarm zu kreisförmigen Strukturen mit Radius  $R = |1/\kappa| = EI/M = L/(\lambda 2\pi)$ . Im Fall  $\lambda = 1, 2, \dots, n$  sind geschlossene Kreise mit  $1, 2, \dots, n$ -Umdrehungen zu erwarten.

Zunächst sei die Stabdicke  $d = 0.1$ . Bei den vorliegenden Abmessungsverhältnissen  $d : L = 1 : 100$  sind Lockingeffekte zu erwarten, welche in der Formulierung dieser Arbeit nicht verhindert sind. Durch Diskretisierung mit 50 Finiten-Elementen in Stablängsrichtung, welche quadratische Ansatzfunktionen verwenden, wird jedoch die analytische Balkenlösung mit dem numerischen Modell er-

reicht. Wie in Abb. 2.14 zu sehen, liefert das Modell geschlossene Kreise, wobei  $\lambda$  die Zahl der Umdrehungen angibt.



**Abbildung 2.14:** Kragarm unter Stabendmoment für verschiedene Lastfaktoren  $\lambda$ .

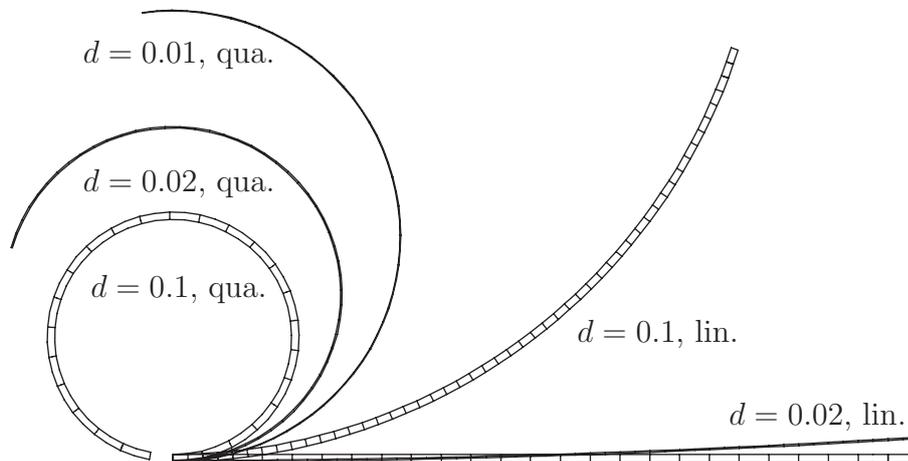
Die Balkenlösung wird für einen beliebigen Lastfaktor  $\lambda$  in einem Lastschritt erzielt, in Tab. 2.6.2 ist dazu die Vektornorm des residualen Vektors aufgelistet. In der ersten Iteration entspricht die Vektornorm exakt dem Betrag von  $M$ .

Iteration	$\lambda = 1$	$\lambda = 1.2$	$\lambda = 2$	$\lambda = 5$	$\lambda = 10$
1	9.424E-02	1.130E-01	1.884E-01	4.712E-01	9.424E-01
2	1.115E+04	1.236E+04	2.027E+04	4.917E+04	9.790E+04
3	4.377E-03	1.545E-03	9.946E-01	1.078E+00	4.846E-01
4	4.982E-02	1.480E-01	3.097E+00	6.346E+02	1.162E+04
5	7.395E-09	6.671E-10	9.015E-07	5.920E-04	1.238E-02
6	7.948E-11	2.885E-10	2.944E-05	5.128E-02	4.037E+01
7			1.143E-10	1.511E-09	1.223E-05
8				6.687E-10	9.497E-11

**Tabelle 2.1:** Vektornorm des residualen Vektors für verschiedene Lastfaktoren  $\lambda$ .

Das numerische Modell ist in der Lage, bis zu 12 Umdrehungen ( $\lambda = 12$ ) in einem Lastschritt zu berechnen. Dieses Verhalten wird auch von SIMO & VU-QUOC [216] an einem Finite-Element-Balkenmodell mit exakter Rotationsformulierung beobachtet. Das Ergebnis lässt sich jedoch nicht verallgemeinern; so ist die Wahl von  $\nu = 0$  für das außergewöhnliche Konvergenzverhalten entscheidend.

Eine Variation der Balkendicke  $d$  soll den Einfluss von Lockingeffekten und die erreichbare Effizienz der COSSERAT-Formulierung in Kap. 5 vorweg abgrenzen. Für das COSSERAT-Modell wird der Stab nun mit lediglich 25 quadratischen bzw. 50 linearen Elementen diskretisiert.



**Abbildung 2.15:** Ausprägung der Lockingeffekte in Abhängigkeit der Balkendicke und des Elementtyps (linear bzw. quadratisch).

Aus Abb. 2.15 ist ersichtlich, dass sich Elemente mit linearen Ansatzfunktionen zur Berechnung dünner Strukturen auch für die COSSERAT-Theorie nicht eignen. Zumindest kann hier durch die Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen für das Verhältnis  $d : L = 0.1 : 10 = 1 : 100$  das analytische Ergebnis genähert werden.

Zwar wird in GOTTLIB et al. [76] ein HELLINGER-REISSNER-Funktional zur Vermeidung von Lockingeffekten innerhalb einer dreidimensionalen COSSERAT-Formulierung untersucht, doch haben die numerischen Ergebnisse gezeigt, dass dies für Volumenelemente ebenfalls mindestens quadratische Ansatzfunktionen erfordert und mit 162 zusätzlichen Freiwerten für einen hybriden Spannungsverlauf im Element auf ein wenig effizientes Verfahren führt.

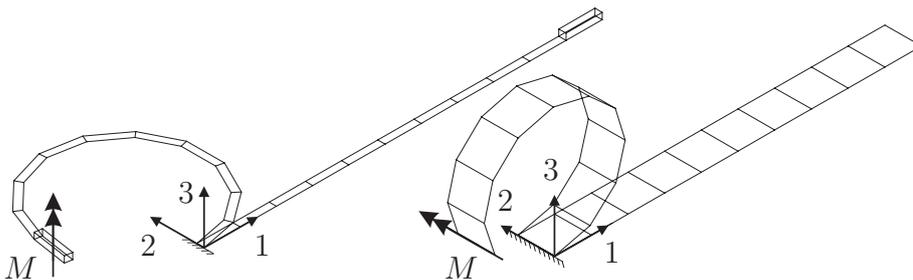
Weiterhin wird in Kap. 4.6 die innere Formänderungsenergie dahingehend konstruiert, dass nichtlineare Spannungen auftreten und das HELLINGER-REISSNER-Funktional nicht mehr möglich ist. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf eine Finite-Element-Formulierung mit quadratischen Ansatzfunktionen für den Fall dünner Strukturen.

Zur Vollständigkeit wird nun dieses Beispiel mit einer Balkenformulierung analog WAGNER [232] sowie einer Schalenformulierung von WAGNER & GRUTTMANN [234] für den Fall  $\lambda = 1$  untersucht. Die Schale wird zum einen in der Scheibenebene und zum anderen als Platte deformiert, vgl. Abb. 2.16.

Zur Einleitung der Belastung in Scheibenebene wird ein 8-Knoten COSSERAT-Element an die Schale gekoppelt. Sämtliche Verschiebungen in 3-Richtung, sowie

Drehungen um die 1- und 2-Achse sind gehalten.

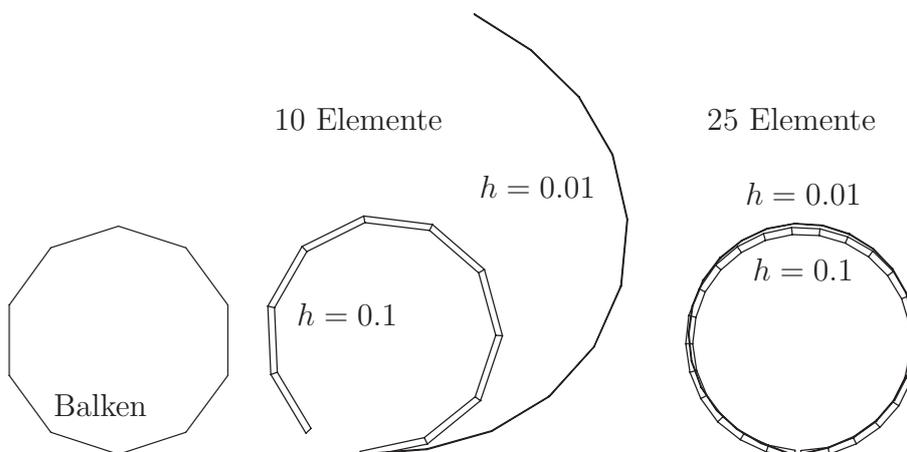
Zur Belastung der Schale als Platte kann der Drehfreiheitsgrad um die 2-Achse verwendet werden, die Verschiebungen in 2-Richtung sowie Drehungen um die 1-Achse sind gehalten. So bilden beide Varianten das ebene Problem genau ab.



**Abbildung 2.16:** Schale mit Belastung als Scheibe (links) und Platte (rechts).

Die von Lockingeffekten freie Balkenformulierung erreicht bereits mit 10 Elementen<sup>13</sup> die geforderte Lösung eines geschlossenen Kreises, wobei das Verhältnis  $d : L$  keine Rolle spielt. Die Berechnung erfordert mindestens 5 Lastschritte mit jeweils 6 Iterationen.

Die in Scheibenebene deformierte Schale weist bei Diskretisierung mit 25 vierknotigen Finiten Elementen kaum Lockingeffekte auf, wie Abb. 2.17 zeigt. Es sind mindestens 9 Lastschritte mit 7 bis 14 Iterationen notwendig.

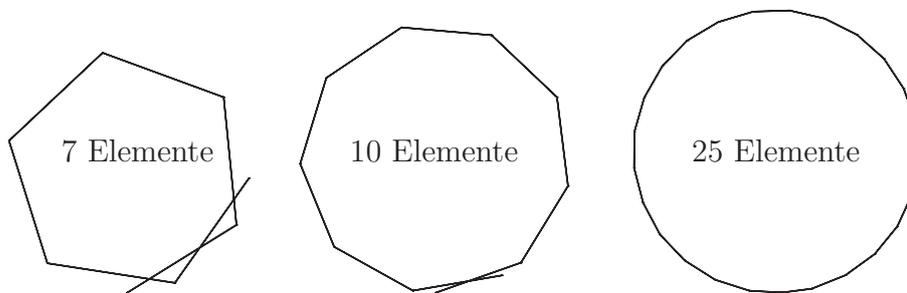


**Abbildung 2.17:** Lösungen für Lastfaktor  $\lambda = 1$ . Links: 10 Balkenelemente. Mitig: 10 Schalenelemente als Scheibe deformiert. Rechts: 25 Schalenelemente als Scheibe deformiert.

<sup>13</sup>2 und 3 Elemente würden auch genügen

Für die als Platte deformierte Schale spielen unterschiedliche  $h : L$  Verhältnisse keine Rolle; jedoch verhält sie sich bei grober Diskretisierung zu weich (vgl. Abb. 2.18). Der Effekt tritt auch bei Verwendung eines reinen Verschiebungselementes auf, was z.B. mit dem Element von WAGNER & GRUTTMANN [233] bestätigt wird.

Mit 25 Elementen kann die Lösung der als Platte deformierte Schale als genau bezeichnet werden und erfordert mindestens 9 Lastschritte mit durchschnittlich 7 Iterationen.



**Abbildung 2.18:** Lösungen für Lastfaktor  $\lambda = 1$  mit Schalenelementen als Platte deformiert.

## 3 Grundgleichungen und Homogenisierung

Grundlegende Gleichungen zur Beschreibung eines Kontinuums können grob in die Kategorien Kinematik, Erhaltungssätze, Konstitution des Materials und Randwertvorgaben gegliedert werden.

Die kinematischen Beziehungen sind sowohl der Konstitution als auch den Anfangs- und Randwertvorgaben übergeordnet [132]. Aus Kinematik und physikalischen Erhaltungssätzen resultiert i.d.R. ein System von partiellen Differentialgleichungen. Diesem System muss i.d.R. Information über das spezifische Materialverhalten zuführbar sein (Möglichkeit der Konstitution). Eine konkrete Situation wird dem System durch Anfangs- und Randwertvorgaben zugewiesen.

Das vorliegende Kapitel behandelt zunächst die Kinematik des klassischen BOLTZMANN-Kontinuums und die Erweiterung im COSSERAT-Modell. Es folgt eine Betrachtung der Erhaltungssätze, wobei die Drehimpulserhaltung im Zusammenhang mit der COSSERAT-Theorie nach Erweiterungen verlangt. Die Symmetrie des Spannungstensors gibt Anlass zu genaueren Untersuchungen, wobei ein Homogenisierungsprozess nach MURDOCH [147, 148, 149, 150] Verwendung findet.

Ein Zusammenhang zwischen Spannung und Momentenspannungen bildet den Abschluss des Kapitels.

### 3.1 Kinematische Beziehungen

Die Kinematik beschreibt Bewegung und Deformation eines Körpers. Aus der gewählten Beschreibung und deren Einschränkung lassen sich Eigenschaften und Grenzen einer Modellierung ablesen.

Es wird zunächst die Kinematik eines klassischen Kontinuums dargestellt. Das COSSERAT-Kontinuum baut darauf auf und erweitert die Kinematik durch Einführung eines zusätzlichen Rotationsfeldes.

Auch der Ausbau auf die Kinematik einer mikromorphen Theorie wird angedacht.

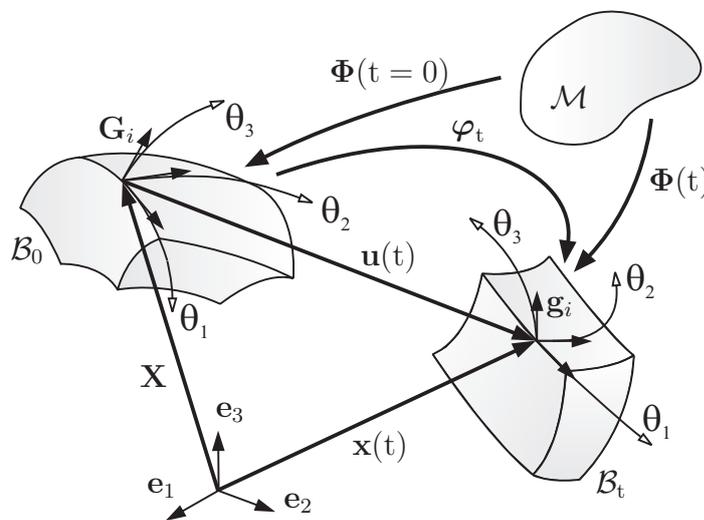
#### 3.1.1 Konfiguration, Bewegung und Zeitableitung

Gegeben ist eine zusammenhängende materielle Punktmenge  $\mathcal{M}$ . Die Punktmenge  $\mathcal{M}$  wird zu jedem Zeitpunkt  $t \in I \subset \mathbb{R}$  bijektiv und stetig in den EUKLIDischen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  durch  $\Phi$  abgebildet. Geschieht dies zum Zeitpunkt  $t = t_0$ , bezeichnet man die Abbildung als Anfangs- oder Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$ , zum Zeitpunkt  $t > t_0$  als Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$ . Damit wird der deterministischen Forderung entsprochen, dass jeder materielle Punkt und somit jeder ma-

terielle Körper zu jedem Zeitpunkt  $t$  im Zeitintervall  $I$  eindeutig identifizierbar ist

$$\mathcal{C} := \{\Phi(t) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3, \quad t \in I\} \quad . \quad (3.1)$$

Die Menge aller möglichen Konfigurationen, welche ein System einnehmen kann, wird als Konfigurationsraum  $\mathcal{C}$  bezeichnet. Die Oberflächen der Konfigurationen werden mit  $\partial\mathcal{B}_0$  und mit  $\partial\mathcal{B}_t$  gekennzeichnet.



**Abbildung 3.1:** Konfiguration des BOLTZMANN-Kontinuums.

Jedes Element des Konfigurationsraumes kann als spezielle Mannigfaltigkeit identifiziert werden. Die Kinematik der Gl. 3.1 kennzeichnet das BOLTZMANN-Kontinuum und hat lineare Vektorraumstruktur, da im EUKLIDISCHEN Raum  $\mathbb{R}^3$  die entsprechenden Regeln für Vektoraddition und Skalarmultiplikation gelten. Für das COSSERAT-Kontinuum in Kap. 3.1.3 wird der Konfigurationsraum erweitert, woraus eine nichtlineare Mannigfaltigkeit zur Beschreibung resultiert.

Besteht ein System aus einer endlichen Anzahl von Punkten oder Festkörpern, kann eine Konfiguration durch eine endliche Anzahl reeller Variablen, auch generalisierte Koordinaten genannt, beschrieben werden. So benötigt z.B. ein freier Festkörper sechs Koordinaten: drei Koordinaten für die Lage im Raum und drei Rotationskoordinaten für die Drehung des Körpers. Elastische Körper besitzen keine endliche Anzahl von Punkten und damit keine endliche Anzahl von generalisierten Koordinaten. Deshalb wird die Konfiguration in der Finite-Element-Methode durch Approximationsfunktionen und mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Knotengrößen effektiv beschrieben.

Im BOLTZMANN-Kontinuum ist die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  durch materielle Koordinaten  $\mathbf{X}$  und die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  durch räumliche Koordinaten  $\mathbf{x}(t)$  vollständig charakterisiert. Ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(t)$  kann die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  über

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X} \quad (3.2)$$

ebenfalls beschreiben, vgl. Abb. 3.1.

Der funktionale Zusammenhang zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten ist durch die Deformation  $\varphi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_t$  gegeben, welche konsistent mit obigen Annahmen eine stetige und bijektive Abbildung darstellt

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) = \varphi_t(\mathbf{X}) \quad , \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}(t), t) = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}(t)) \quad . \quad (3.3)$$

Damit ist gewährleistet, dass ein materieller Punkt nicht gleichzeitig an mehreren Orten und mehrere materielle Punkte nicht gleichzeitig an einem Ort sein können. Zudem sollen benachbarte Punkte stets benachbart bleiben, was sich aus der Stetigkeit von  $\varphi_t$  ergibt. Dies schließt z.B. die Beschreibung von Rissen aus.

Die Deformation  $\varphi_t$  beschreibt die Abbildung der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  auf die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  und wird als LAGRANGESche oder materielle Abbildung bezeichnet. Die Umkehrfunktion  $\varphi_t^{-1}$  nennt man EULERSche oder räumliche Abbildung.

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(t)$  kann mit materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \varphi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.4)$$

parametrisiert sein, was einer LAGRANGESchen Beschreibung entspricht. Es kann jedoch auch mit räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}$  durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) := \mathbf{x}(t) - \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.5)$$

parametrisiert werden. In dieser EULERSchen Beschreibung ist zu beachten, dass der Parameter  $\mathbf{x}$  selbst eine Funktion der Zeit darstellt.

Sofern notwendig wird deshalb die LAGRANGESche Formulierung mit  $L$  bzw. die EULERSche Formulierung mit  $E$  oben indiziert. Da die räumlichen Koordinaten  $\mathbf{x}(t)$  im Gegensatz zu materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  Funktionen der Zeit sind, muss

bei der Zeitableitung in zwei Typen unterschieden werden.

Die **partielle Zeitableitung**

$$\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f^L(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial f^E(\mathbf{x}(t = \text{const.}), t)}{\partial t} \quad (3.6)$$

fixiert den Zeitpunkt  $t$  der räumlichen Koordinate  $\mathbf{x}$ .

Die **totale Zeitableitung** erhält folgende Notation

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} \quad (3.7)$$

und ist in LAGRANGEScher Formulierung identisch mit der partiellen Zeitableitung

$$\frac{\partial f^L}{\partial t} = \frac{df^L}{dt} = \dot{f}^L \quad (3.8)$$

In der EULERSchen Formulierung folgt jedoch aus der Kettenregel

$$\dot{f}^E = \frac{df^E}{dt} = \frac{\partial f^E}{\partial t} + \frac{\partial f^E}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (3.9)$$

Die Geschwindigkeit

$$\vec{\mathbf{v}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\mathbf{X} + \mathbf{u}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} \quad (3.10)$$

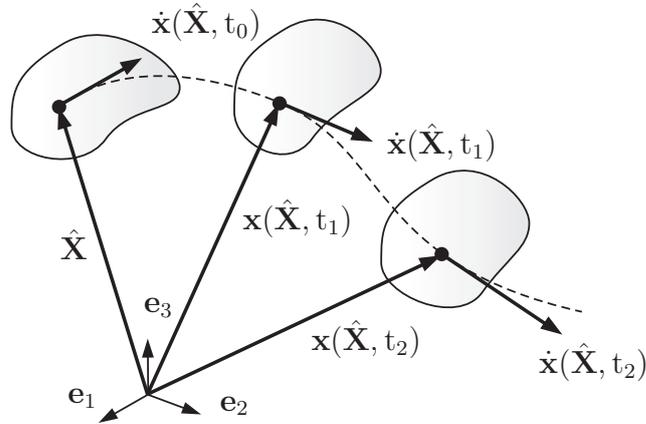
kann durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(t)$  materiell oder räumlich definiert werden. Unter Verwendung der materiellen Parametrisierung des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{u}^L(\mathbf{X}, t) := \varphi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (3.11)$$

ergibt sich die materielle Geschwindigkeit zu

$$\vec{\mathbf{v}}^L(\mathbf{X}, t) := \frac{d\mathbf{u}^L(\mathbf{X}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (3.12)$$

und zeigt die Geschwindigkeit eines festgelegten Körperpunktes mit der Ausgangskoordinate  $\mathbf{X}$  (materieller Parameter) an, vgl. Abb. 3.2.



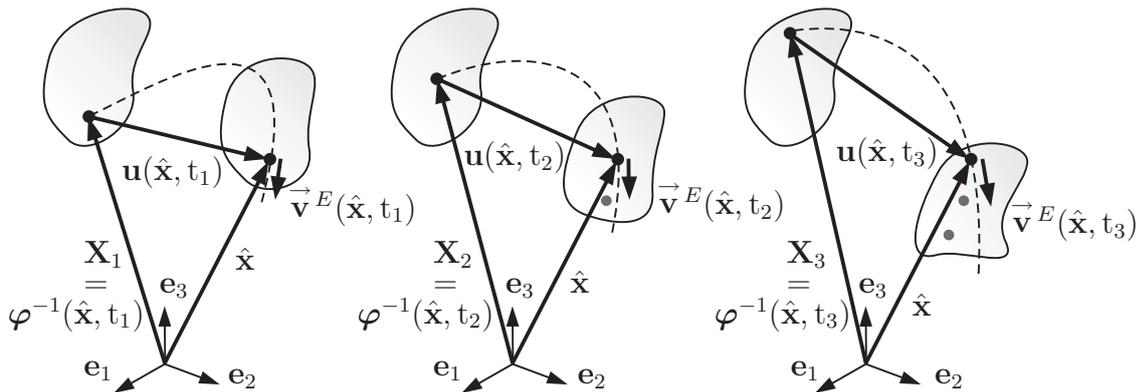
**Abbildung 3.2:** LAGRANGESche Geschwindigkeit  $\vec{v}^L(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  für den Parameterpunkt  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$  der Referenzkonfiguration.

Unter Verwendung der räumlichen Parametrisierung des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{u}^E(\mathbf{x}, t) := \mathbf{x}(t) - \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.13)$$

lautet die räumliche Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \vec{v}^E(\mathbf{x}(t), t) &:= \frac{d\mathbf{u}^E(\mathbf{x}(t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}^E(\mathbf{x}(t = \text{const.}), t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}^E(\mathbf{x}(t = \text{const.}), t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} \quad (3.14) \end{aligned}$$



**Abbildung 3.3:** EULERSche Geschwindigkeit  $\vec{v}^E(\mathbf{x}(t), t)$  für einen fixierten Beobachtungspunkt  $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} = \text{const.}$  in der Momentankonfiguration.

In Abb. 3.3 ist für einen festen Punkt  $\hat{\mathbf{x}}$  der Momentankonfiguration der Verlauf einer Geschwindigkeitsmessung dargestellt. Einzelne Punkte des Kontinuums durchwandern  $\hat{\mathbf{x}}$  und aufgrund des fixierten Beobachtungspunktes  $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} = \text{const.}$  ist nur der Term  $\frac{\partial \mathbf{u}^E(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}$  in Gl. 3.14 von Null verschieden.

Die Beschleunigung  $\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}$  ist sinngemäß zu behandeln.

### 3.1.2 Deformationsgradient und Verzerrungsmaße

Die Abbildung  $\varphi_t$  erfasst jegliche Art makroskopischer Formänderung. Über eine entsprechende TAYLOR-Entwicklung der Abbildung  $\varphi_t$  kann man lokale und nicht lokale Formänderung unterscheiden und dabei den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  einführen.

Zwei Punkte eines Körpers seien in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  durch die Vektoren  $\tilde{\mathbf{X}}$  und  $\hat{\mathbf{X}}$  gegeben und befinden sich zur Zeit  $t$  an den Orten  $\tilde{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{x}}$ . Aus Gl. 3.3 und einer TAYLOR-Entwicklung für  $\hat{\mathbf{x}}$  an der Stelle  $\tilde{\mathbf{X}}$  folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}}) \quad , & (3.15) \\ \hat{\mathbf{x}} &= \varphi_t(\hat{\mathbf{X}}) = \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}}) + \frac{1}{1!} \frac{\partial \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}} (\hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^2} (\hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}})^2 + \dots \quad .\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Differenzvektoren  $\Delta \mathbf{X} := \hat{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}$  und  $\Delta \mathbf{x} := \hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ , so kann letzterer wegen Gl. 3.15 geschrieben werden durch

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}^2} \Delta \mathbf{X}^2 + \dots \quad . \quad (3.16)$$

Für beliebig kleine  $\Delta \mathbf{X}$  werden in Gl. 3.16 sämtliche Terme quadratischer und höherer Ordnung vernachlässigt, was auf die linearisierte Beziehung

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}})}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\tilde{\mathbf{X}}) d\mathbf{X} := \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{X}}, t) d\mathbf{X} \quad (3.17)$$

führt. In Gl. 3.17 ist nur noch eine lokale Eigenschaft, nämlich die Ableitung (Veränderung) von  $\varphi_t$  an einer Stelle  $\tilde{\mathbf{X}}$  ausgewertet, was man als lokale Formänderung betrachten kann. So beinhaltet jedes Verzerrungsmaß, das nur auf dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  basiert zwangsläufig nur lokale Formänderung und ist damit lediglich für ein infinitesimales Gebiet gültig.

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ist stets als materielle Größe zu behandeln und definiert sich gemäß Gl. 3.17 als materielle Ableitung

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))}{\partial \mathbf{X}} = \mathbb{1} + \text{Grad}[\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \quad . \quad (3.18)$$

Der inverse Deformationsgradient  $\mathbf{F}^{-1}$  wird über die räumliche Ableitung der Gleichung  $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi_t(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}))$  ersichtlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \varphi_t(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{1} = \frac{\partial \varphi_t(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbb{1} &= \underbrace{\frac{\partial \varphi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}}_{\mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{X}(\varphi_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{x}} \quad . \quad (3.19)\end{aligned}$$

Unter Verwendung des materiell parametrisierten Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  aus Gl. 3.11 erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{X}(\varphi_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\varphi_t(\mathbf{X})) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\varphi_t(\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}(\varphi_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{F} - \text{Grad}[\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)]) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbb{1} - \text{Grad}[\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad .\end{aligned}\quad (3.20)$$

Unter Verwendung des räumlich parametrisierten Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$  aus Gl. 3.13 erhält man

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}(\varphi_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{1} - \text{grad}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad .\quad (3.21)$$

Ein Vergleich zwischen Gl. 3.20 und Gl. 3.21 zeigt, wie der Verschiebungsgradient durch eine "push-forward" Operation von einer materiellen in eine räumliche Form übergeht

$$\text{grad}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = \text{Grad}[\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad .\quad (3.22)$$

Für die Zeitableitung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  gilt allgemein

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{d\varphi_t(\mathbf{X})}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\varphi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad .\quad (3.23)$$

Da  $\mathbf{F}$  die Transformation von Tangentialräumen beschreibt, handelt es sich um eine lineare Transformation. Damit ist die Abbildung eines Linienelementes  $d\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$  auf das Linienelement  $d\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  linear. Dies kennzeichnet eine affine Deformation für die gilt: Geraden bleiben Geraden, Ebenen bleiben Ebenen, Parallelitäten gehen nicht verloren, Kugeln gehen in Ellipsoide über etc.

Eine infinitesimale Kugelumgebung eines Punktes geht somit durch  $\mathbf{F}$  in ein gedrehtes Ellipsoid über. Die spezielle, eindeutige Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} \in \text{GL}^+(3)$  in einen Drehtensor  $\mathbf{R}$  und einen Gestaltänderungstensor  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  mit

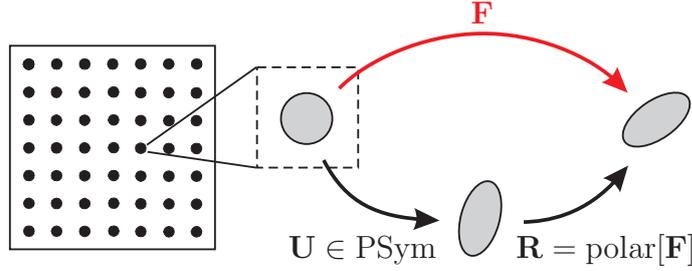
$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{PSym}(3) \quad (3.24)$$

stellt die **klassische polare Zerlegung** dar. Dabei ist bemerkenswert, dass in Gl. 3.24 die Rotation  $\mathbf{R}$  links von  $\mathbf{U}$  und rechts von  $\mathbf{V}$  dieselbe ist, siehe z.B. CIARLET [29] oder MARSDEN [132].

Durch die Forderungen  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$  und  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \text{PSym}$ <sup>14</sup> ist Gl. 3.24 eine vollständige Beschreibung zwischen  $\mathbf{F}$  und den rechten Seiten  $\mathbf{R}\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}\mathbf{R}$ . Dadurch ist der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  über den Deformationsgradienten eindeutig

<sup>14</sup> PSym bedeutet symmetrisch ( $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ ) und positiv definit ( $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \langle \mathbf{y}, \mathbf{U}\mathbf{y} \rangle \geq 0$ ).

beschrieben. Die **polare Drehung**  $\mathbf{R} := \text{polar}[\mathbf{F}]$  wird im Folgenden als **makroskopische Drehung** bezeichnet.



**Abbildung 3.4:** Kinematik des BOLTZMANN-Kontinuums mit makroskopischer Drehung  $\mathbf{R}$ .

Die polare Zerlegung kann über die Lösung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{C} - \Lambda \mathbb{1})\boldsymbol{\xi} = 0 \quad , \quad \Lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad (3.25)$$

mit dem rechten CAUCHY-GREEN-Tensor  $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  durchgeführt werden. Für nichttriviale Eigenvektoren  $\boldsymbol{\xi}$  muss der Operator  $(\mathbf{C} - \Lambda \mathbb{1})$  singularär sein und besitzt somit die verschwindende Determinante

$$\det[\mathbf{C} - \Lambda \mathbb{1}] = 0 \quad . \quad (3.26)$$

Dies führt auf das charakteristische Polynom

$$\Lambda^3 - \mathbf{I}_{\mathbf{C}} \Lambda^2 + \mathbf{II}_{\mathbf{C}} \Lambda - \mathbf{III}_{\mathbf{C}} = 0 \quad (3.27)$$

mit den Hauptinvarianten

$$\mathbf{I}_{\mathbf{C}} = \text{tr}[\mathbf{C}] \quad , \quad \mathbf{II}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}((\text{tr}[\mathbf{C}])^2 - \text{tr}[\mathbf{C}^2]) \quad , \quad \mathbf{III}_{\mathbf{C}} = \det[\mathbf{C}] \quad . \quad (3.28)$$

Da  $\mathbf{C} \in \text{Sym}$  kann es orthogonal diagonalisiert werden und besitzt drei reelle Eigenwerte  $\Lambda_i$  sowie drei orthogonale Eigenvektoren  $\boldsymbol{\xi}_i$ . Nach einer Normalisierung der Eigenvektoren  $\boldsymbol{\xi}_i$  auf  $\mathbf{N}_i$  lässt sich nach dem Theorem von CAYLEY-HAMILTON die Spektralzerlegung von  $\mathbf{C}$  durch

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (3.29)$$

angeben. Wegen

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R} \mathbf{U})^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U} \quad (3.30)$$

sind  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{U}$  koaxiale Tensoren, deren Spektralzerlegung dieselben Richtungen  $\mathbf{N}_i$  besitzt; weiterhin gilt

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\Lambda_i} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad . \quad (3.31)$$

Mit Kenntnis von  $\mathbf{U}$  lässt sich  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  über

$$\text{polar}[\mathbf{F}] = \mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \quad (3.32)$$

berechnen. Prinzipiell kann die Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  auch in Rotationen  $\mathbf{R} \neq \text{polar}[\mathbf{F}]$  erfolgen, was i. allg. unsymmetrische Gestaltänderungstensoren  $\bar{\mathbf{U}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{V}}$  ergibt, siehe z.B. SANSOUR [196].

Für weitere Betrachtungen seien nun die Koordinaten  $\mathbf{X}$  eine Funktion von drei unabhängigen Parametern  $\theta^i$ , vgl. auch Abb. 3.1

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad . \quad (3.33)$$

Die Parameter werden fest mit den Punkten des Körpers verbunden, so dass diese im deformierten Zustand mit denselben Werten  $\theta^i$  denselben Punkt konvektiv beschreiben. Daraus folgt, dass die Koordinaten  $\mathbf{x}$  eine Funktion der Parameter  $\theta^i$  und der Zeit  $t$  sind

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) \quad . \quad (3.34)$$

Das lokale  $(\xi \eta \zeta)$ -Koordinatensystem innerhalb von Finiten Elementen ist ein Beispiel für konvektive Parametrisierung.

Betrachtet man nun eine ganze Koordinatenlinie, z.B.  $\theta^1$  aus den Punkten  $(\theta^1, \theta^2 = \text{const}, \theta^3 = \text{const})$ , so stellt man fest, dass sich diese Linie im deformierten Zustand genau wie die an sie gehefteten Punkte mitverformen muss.

Es wird nun vorausgesetzt, dass die Funktionen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{x}$  nach ihren Argumenten  $\theta^i$  bis zum erforderlichen Grad stetig differenzierbar sind. Damit können kovariante Basisvektoren als Tangentenvektoren an die konvektiven Koordinatenlinien definiert werden

$$\mathbf{G}_i := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad , \quad \mathbf{g}_i := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \quad . \quad (3.35)$$

Die reziproken Basisvektoren  $\mathbf{G}^j$ ,  $\mathbf{g}^j$  sind über die Orthogonalitätsbedingung  $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_{ij}$  und  $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_{ij}$  bestimmt. Mit Hilfe der ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten

$$G_{ij} := \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad , \quad G^{ij} := \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad , \quad g_{ij} := \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad , \quad g^{ij} := \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (3.36)$$

erhält man die Metriktensoren

$$\mathbf{G} := G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad , \quad \mathbf{g} := g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad . \quad (3.37)$$

Die Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  und  $\mathbf{G}^i$  stellen den Deformationsgradienten alternativ über

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.38)$$

dar. Andererseits lassen sich die Basisvektoren  $\mathbf{G}_i$  bzw.  $\mathbf{g}_i$  durch

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.39)$$

ineinander überführen.

Die Transformationsbeziehung eines infinitesimalen Volumenelements  $dv$  der Momentankonfiguration und eines Volumenelements  $dV$  der Referenzkonfiguration lautet (z.B. [6])

$$dv = \frac{[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]}{[\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3]} dV = \det[\mathbf{F}] dV := J dV \quad . \quad (3.40)$$

Hierbei wird über das Spatprodukt der Tangentenvektoren  $[\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3]$  bzw.  $[\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3]$  das Volumen von Parallelepipeden in Momentan- bzw. Referenzkonfiguration ins Verhältnis gestellt.

Die Determinante des Deformationsgradienten wird als JACOBI-Determinante  $J(\mathbf{X}, t) := \det[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]$  definiert. Aus der Stetigkeitsanforderung und Bijektivität der Deformation  $\varphi_t$  folgt, dass  $J > 0$  ist. Die Kompression eines Körpers oder Teilkörpers auf das Volumen Null ist somit durch Deformation ausgeschlossen. Dieser Aspekt findet in der Konstitution des COSSERAT-Modells in Kap. 4.6 Beachtung.

Die JACOBI-Determinante  $J$  stellt genau wie  $\mathbf{F}$  stets eine materielle Größe dar. Damit ist die partielle und totale Zeitableitung von  $J$  identisch und man erhält

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \frac{d}{dt} \det[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial t} \det[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)] = \left\langle \frac{\partial \det[\mathbf{F}]}{\partial \mathbf{F}}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right\rangle = \langle \text{cof}[\mathbf{F}], \dot{\mathbf{F}} \rangle \\ &= \langle \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T}, \dot{\mathbf{F}} \rangle = \det[\mathbf{F}] \langle \mathbb{1}, \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aus Gl. 3.23 und Gl. 3.19 folgt mit der Geschwindigkeit  $\vec{\mathbf{v}}$

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \det[\mathbf{F}] \left\langle \mathbb{1}, \frac{\partial \dot{\varphi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = \det[\mathbf{F}] \left\langle \mathbb{1}, \frac{\partial \dot{\varphi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = \det[\mathbf{F}] \text{div}[\dot{\varphi}_t(\mathbf{X})] \\ &= J \text{div}[\dot{\mathbf{x}}] = J \text{div}[\vec{\mathbf{v}}] \quad , \quad \vec{\mathbf{v}} := \dot{\mathbf{x}} \quad . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Das Feld des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  kann Starrkörperdrehungen enthalten. Eine allgemeine Beschreibung von Verzerrungsmaßen ohne Anteile aus Starrkörperdrehung (invariant gegenüber Starrkörperdrehung) findet man z.B. bei OGDEN [182]. Dort sind Verzerrungsmaße in materieller Formulierung durch

$$\frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{G}) \quad \text{für } m \neq 0 \quad , \quad \ln[\mathbf{U}] \quad \text{für } m = 0 \quad (3.43)$$

angegeben. Bekannte materielle Verzerrungsmaße vom SETH-HILL-Typ lauten

$$\begin{aligned} m = 2 : \text{GREEN-LAGRANGE} \quad \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \\ m = 1 : \text{BIOT} \quad \mathbf{E}_B &= \mathbf{U} - \mathbf{G} \\ m = 0 : \text{HENCKY} \quad \mathbf{E}_H &= \ln[\mathbf{U}] \quad . \end{aligned}$$

Die wesentliche Eigenschaft dieser Verzerrungsmaße ist

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_B = \mathbf{E}_H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}) \in \text{O}(3) \quad (3.44)$$

und erlaubt die Messung der Verzerrung über

$$\|\mathbf{E}\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \|\mathbf{E}_B\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \|\mathbf{E}_H\|^2 \quad . \quad (3.45)$$

Die Verzerrungen  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}_B$  und  $\mathbf{E}_H$  sind jeweils ein Maß für die Abweichung der Deformation  $\varphi$  von einer Starrkörperabbildung

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{R} \mathbf{X} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad . \quad (3.46)$$

Nullverzerrung impliziert z.B. nach CIARLET [29] oder NEFF & MÜNCH [174]

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{R} = \text{const.} \quad , \quad (3.47)$$

was Starrkörperabbildung bedeutet. Dies ist dadurch begründet, dass das Wirbelfeld des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  stets verschwindet

$$\text{Curl}[\mathbf{F}] = \text{Curl}[\text{Grad}[\varphi_t(\mathbf{X})]] = 0 \quad (3.48)$$

und weiterhin die Norm des Curl-Operators die Norm des Gradienten nach oben abschätzt, was in [174] bewiesen wird. Für den allgemeineren Fall  $\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{X})$  ergibt Gl. 3.48 mit der Abschätzung

$$0 = \|\text{Curl}[\mathbf{F}]\| = \|\text{Curl}[\mathbf{R}]\| \geq \|\text{Grad}[\mathbf{R}]\| \Rightarrow \|\text{Grad}[\mathbf{R}]\| = 0 \Rightarrow \text{Grad}[\mathbf{R}] = 0 \quad (3.49)$$

die Aussage in Gl. 3.47.

### 3.1.3 Kinematik im Cosserat-Kontinuum

Gegeben ist eine zusammenhängende materielle Punktmenge  $\mathcal{M}$ , wobei jeder Punkt nun zusätzlich eine räumliche Ausrichtung besitzt. Die Punktmenge  $\mathcal{M}$  wird zu jedem Zeitpunkt  $t \in I \subset \mathbb{R}$  bijektiv und stetig in den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  durch  $\Phi$  abgebildet. Die Ausrichtung der Punkte wird durch  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  abgebildet.

Der Konfigurationsraum  $\mathcal{C}$  eines COSSERAT-Kontinuums  $\mathcal{B}$  ist somit eine Kombination aus EUKLIDISCHEM Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  und der nichtlinearen Mannigfaltigkeit  $\text{SO}(3)$

$$\mathcal{C} := \{(\Phi, \bar{\mathbf{R}}) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}_t \subset (\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3))\} \quad . \quad (3.50)$$

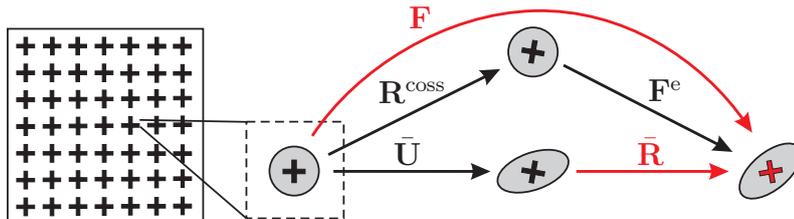
Die Ausrichtung der Punkte stellt eine Erweiterung der Kinematik dar und es soll nun gezeigt werden, wie sich im Modell der Deformationsgradient gemäß

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}} \quad , \quad \mathbf{R}^{\text{COSS}} \in \text{SO}(3) \quad (3.51)$$

aufspaltet. Es ist zu beachten, dass  $\mathbf{R}^{\text{COSS}}$  in Gl. 3.51 die Veränderung einer elastischen Deformation  $\mathbf{F}^e$  durch eine zunächst nicht näher spezifizierte Rotationsabbildung bedeutet und lediglich eine Wirkung präsentiert. Die Ursache für diese Wirkung ist in der Ausrichtung von Punkten zu suchen, welche durch das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  beschrieben ist und über die Definition der 1. COSSERAT-Verzerrung

$$\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1} := \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbb{1} \quad , \quad \bar{\mathbf{U}} \in \text{GL}^+(3) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}} \quad (3.52)$$

mit dem Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  gekoppelt wird. Die Verzerrung in Gl. 3.52 beachtet so neben der Deformation, repräsentiert durch  $\mathbf{F}$  ebenso auch die Ausrichtung der Punkte, repräsentiert durch  $\bar{\mathbf{R}}$ . Die Kopplung zwischen  $\bar{\mathbf{R}}$  und  $\mathbf{F}$  findet also auf der kinematischen Ebene statt. Die Kinematiken  $\mathbf{F}$  und  $\bar{\mathbf{R}}$  sollen im Modell als Optimierungsvariablen über die Minimierung der Gesamtenergie  $\Pi$  bestimmt werden.



**Abbildung 3.5:** Die durch  $\bar{\mathbf{R}}$  repräsentierte Ausrichtung von Punkten ist als Ursache für eine Veränderung der Deformation und somit von  $\mathbf{F}$  zu betrachten. Die Wirkung ist durch multiplikativen Split in  $\mathbf{F}^e$  und  $\mathbf{R}^{\text{COSS}}$  darstellbar.

Zwischen der Ursache  $\bar{\mathbf{R}}$  und der Wirkung  $\mathbf{R}^{\text{COSS}}$  ist zunächst kein expliziter Bezug ersichtlich. Die Kinematik in Abb. 3.5 besitzt 5 kinematische Felder ( $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{R}^{\text{COSS}}$ ,  $\mathbf{F}^e$ ,  $\bar{\mathbf{U}}$ ,  $\bar{\mathbf{R}}$ ) und lediglich die beiden kinematischen Gleichungen 3.51 und 3.52. Ein Bezug entschlüsselt sich durch die Hinzunahme der polaren Zerlegung von  $\mathbf{F}$ , wobei das System zunächst um zwei Kinematen und die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R} \mathbf{U} \quad , \quad \mathbf{U} \in \text{PSym} \\ \mathbf{R} &= \text{polar}[\mathbf{F}] \end{aligned} \quad (3.53)$$

erweitert wird und unverändert unbestimmt bleibt. Nun ist jedoch eine Rotation  $\hat{\mathbf{R}}$  mit

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \quad (3.54)$$

innerhalb der Zwischenzustände zu finden, vgl. Abb. 3.6.

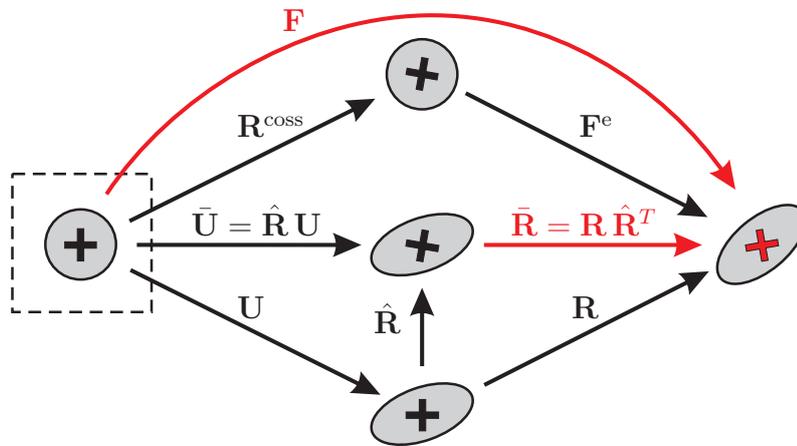


Abbildung 3.6: Polare Zerlegung von  $\mathbf{F}$  und Einführung der Verknüpfung  $\hat{\mathbf{R}}$ .

Die Rotation  $\hat{\mathbf{R}}$  stellt ein weiteres kinematisches Feld dar, liefert aber neben Gl. 3.54 noch die Beziehung

$$\bar{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{U} \quad , \quad (3.55)$$

womit dem System kein überzähliges Feld verbleibt. Die Beziehung zwischen Ursache  $\bar{\mathbf{R}}$  und Wirkung  $\mathbf{R}^{\text{COSS}}$  ist jedoch noch nicht explizit gefunden. Dazu muss nochmals die Polarzerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \quad , \quad \mathbf{U}^e \in \text{PSym} \\ \mathbf{R}^e &= \text{polar}[\mathbf{F}^e] \end{aligned} \quad (3.56)$$

genutzt werden, wobei für die zwei neuen Kinematoren  $\mathbf{R}^e$  und  $\mathbf{U}^e$  auch zwei Gleichungen feststehen. Aus Gl. 3.51 wird durch formale Erweiterung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}} = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}} = \underbrace{\mathbf{R}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}}}_{\in \text{SO}(3)} \underbrace{\mathbf{R}^{\text{COSS}T} \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}}}_{\in \text{PSym}} \quad (3.57)$$

ein Bezug zu den aus der Polarzerlegung von  $\mathbf{F}$  erzeugten Kinematoren  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{U}$  ersichtlich

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}} \in \text{SO}(3) \quad (3.58)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{\text{COSS}T} \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{\text{COSS}} \in \text{PSym} \quad , \quad (3.59)$$

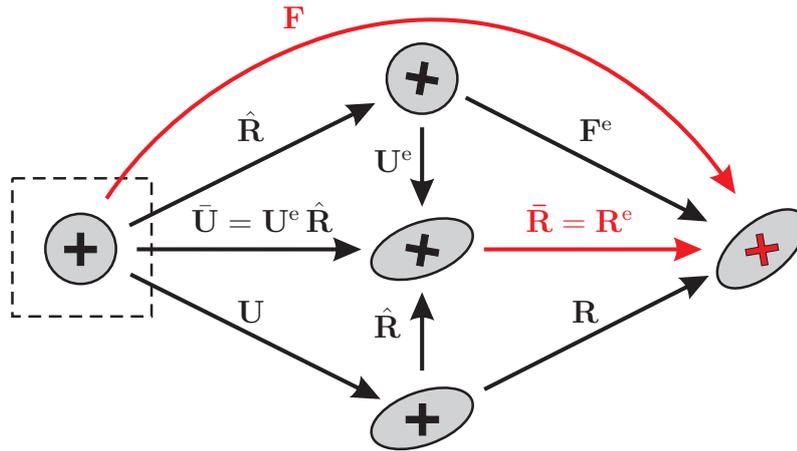
da die Polarzerlegung eindeutig ist, z.B. DE BOER [18] oder CIARLET [29]. Der Vergleich von Gl. 3.58 mit Gl. 3.54, führt zu den Identifikationen

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^e \quad , \quad \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{COSS}} \quad (3.60)$$

und Einsetzen von Gl. 3.59 in Gl. 3.55 auf

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^e \hat{\mathbf{R}} \quad . \quad (3.61)$$

Ein vollständiges Bild der Zusammenhänge ist in Abb. 3.7 zu sehen.



**Abbildung 3.7:** Vollständige Darstellung der kinematischen Felder und deren Beziehungen untereinander.

In der COSSERAT-Kinematik wird die Ausrichtung der Kontinuumpunkte durch  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \hat{\mathbf{R}}^T$  repräsentiert. Diese Ausrichtung ist eine modelltheoretische Annahme und alleinige Ursache für nichtklassische Effekte im COSSERAT-Modell. Es ist jedoch zu beachten, dass das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  sowohl die Makrorotation

$\mathbf{R} = \text{polar}[\mathbf{F}]$  als auch die zusätzliche Kinematik  $\mathbf{R}^{\text{COSS}} = \hat{\mathbf{R}}$  beinhaltet. Obwohl die Ausrichtung der Punkte, repräsentiert durch  $\bar{\mathbf{R}}$ , die Ursache für COSSERAT-Effekte ist, wird deren Wirkung nur im Feld  $\hat{\mathbf{R}}$  ohne Anteile der Makrorotation  $\mathbf{R}$  dargestellt.

Dieser Sachverhalt ist nach Meinung des Verfassers für die Diskussion der COSSERAT-Theorie und deren Materialparameter von weitreichender Bedeutung.

Die Finite-Element-Formulierung der COSSERAT-Theorie wählt neben der Verschiebung  $\mathbf{u}$  als weitere Prozessvariable den Eigenvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  der Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$ . Damit ist in diesem Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  sowohl die Makrorotation  $\mathbf{R}$  als auch die Wirkung  $\hat{\mathbf{R}}$  simultan enthalten.

Die Gradienten im Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  werden als Krümmung erfasst. Aus partieller Ableitung der Beziehung  $\bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$  folgt

$$(\bar{\mathbf{R}}_j^T \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}_{,j}) \otimes \mathbf{e}_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}_{,j} = -(\bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}_{,j})^T \quad . \quad (3.62)$$

Mit der offensichtlichen Antisymmetrie von  $\mathbf{K}^j := \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}_{,j}$  besteht die Möglichkeit ein Krümmungsmaß  $\hat{\mathfrak{K}}$  zweiter Stufe über den axialen Vektor  $\mathbf{k}^j$  von  $\mathbf{K}^j$  zu definieren

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{K}} &:= -\mathbf{k}^j \otimes \mathbf{e}_j = -\text{axl}[\mathbf{K}^j] \otimes \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}}]) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{mab} \bar{R}_{ca} \bar{R}_{cb,j} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \quad . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Für numerische Anwendungen ist es nützlich, die Krümmung  $\hat{\mathfrak{K}}$  direkt über den Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  zu beschreiben, was durch

$$\mathbf{k}^j = \frac{\sin |\bar{\boldsymbol{\alpha}}|}{|\bar{\boldsymbol{\alpha}}|} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{,j} + \frac{1 - \cos |\bar{\boldsymbol{\alpha}}|}{|\bar{\boldsymbol{\alpha}}|^2} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{,j} \times \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \left( \frac{1}{|\bar{\boldsymbol{\alpha}}|} - \frac{\sin |\bar{\boldsymbol{\alpha}}|}{|\bar{\boldsymbol{\alpha}}|^2} \right) \frac{(\bar{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{,j})}{|\bar{\boldsymbol{\alpha}}|} \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3.64)$$

möglich ist, siehe PIETRASZKIEWICZ et al. [187].

Mit dem Gedanken, hier auch eine mikromorphe Theorie vorzubereiten, wird das Krümmungsmaß  $\mathfrak{K}$  dritter Stufe wie in NEFF & FOREST [172] über

$$\mathfrak{K} := (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_1], \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_2], \bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{e}_3]) \quad (3.65)$$

eingeführt. Für den Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{K}$  und  $\hat{\mathfrak{K}}$  empfiehlt sich die Indexno-

tation

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{ijk} &= \bar{R}_{ci} \bar{R}_{ck,j} = \frac{1}{2} (\bar{R}_{ci} \bar{R}_{ck,j} - \bar{R}_{ck} \bar{R}_{ci,j}) = \frac{1}{2} (\delta_{ia} \delta_{kb} - \delta_{ib} \delta_{ka}) \bar{R}_{ca} \bar{R}_{cb,j} \\ &= \epsilon_{mik} \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_{mab} \bar{R}_{ca} \bar{R}_{cb,j}}_{\hat{\mathfrak{K}}_{mj}} = \epsilon_{mik} \hat{\mathfrak{K}}_{mj} \quad . \end{aligned} \quad (3.66)$$

In Abb. 3.8 und Abb. 3.9 ist die Struktur des Tensors  $\mathfrak{K}$  visualisiert.

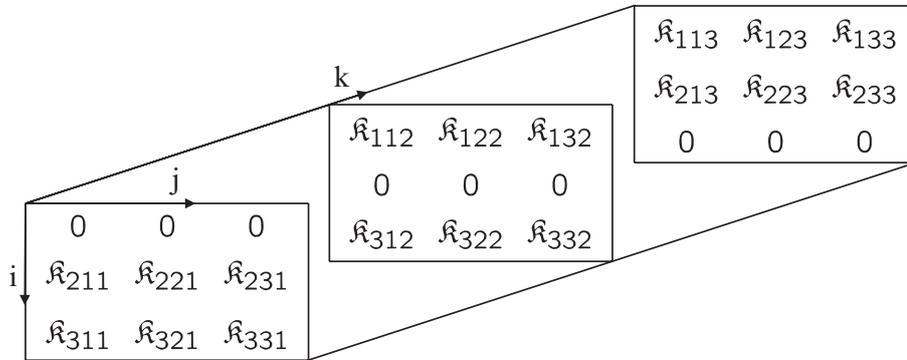


Abbildung 3.8: Dreidimensionales Bild des Tensors  $\mathfrak{K}$ .

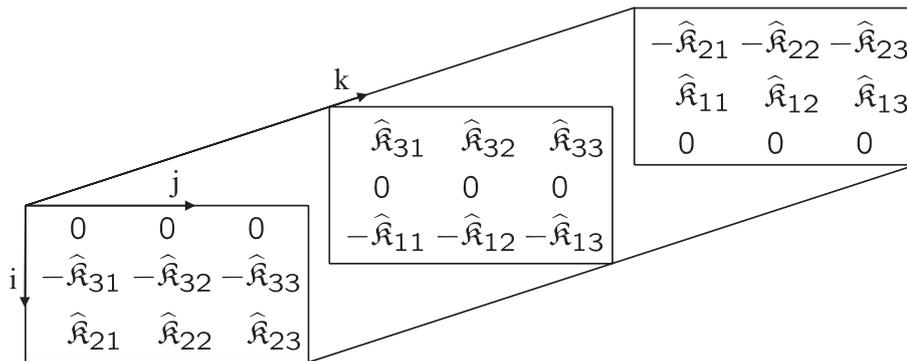


Abbildung 3.9: Anordnung der Komponenten von  $\hat{\mathfrak{K}}$  in  $\mathfrak{K}$ .

Es ist ebenso möglich die Einträge der Tensoren  $\hat{\mathfrak{K}}$  und  $\mathfrak{K}$  zu vergleichen

$$\hat{\mathfrak{K}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathfrak{K}}_{11} & \hat{\mathfrak{K}}_{12} & \hat{\mathfrak{K}}_{13} \\ \hat{\mathfrak{K}}_{21} & \hat{\mathfrak{K}}_{22} & \hat{\mathfrak{K}}_{23} \\ \hat{\mathfrak{K}}_{31} & \hat{\mathfrak{K}}_{32} & \hat{\mathfrak{K}}_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \epsilon_{mab} \mathfrak{K}_{ajb} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \quad (3.67)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{213} - \mathfrak{K}_{312}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{223} - \mathfrak{K}_{322}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{233} - \mathfrak{K}_{332}) \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{311} - \mathfrak{K}_{113}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{321} - \mathfrak{K}_{123}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{331} - \mathfrak{K}_{133}) \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{112} - \mathfrak{K}_{211}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{122} - \mathfrak{K}_{221}) & \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_{132} - \mathfrak{K}_{231}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{K}_{213} & \mathfrak{K}_{223} & \mathfrak{K}_{233} \\ \mathfrak{K}_{311} & \mathfrak{K}_{321} & \mathfrak{K}_{331} \\ \mathfrak{K}_{112} & \mathfrak{K}_{122} & \mathfrak{K}_{132} \end{bmatrix} .$$

Diagonalkomponenten in Gl. 3.67 bedeuten eine torsionsartige Deformation um die 1-Achse in Zeile 1, um die 2-Achse in Zeile 2 usw. Die anderen Komponenten bedeuten Biegung um die 1-Achse in Zeile 1, um die 2-Achse in Zeile 2 usw.

Aus Abb. 3.9 ist zu erkennen, dass

$$\|\mathfrak{K}\|^2 = \langle \mathfrak{K}, \mathfrak{K} \rangle = \mathfrak{K}_{111}^2 + \mathfrak{K}_{112}^2 + \mathfrak{K}_{113}^2 + \mathfrak{K}_{121}^2 + \dots = 2 \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2 \quad (3.68)$$

gilt, was bei der Formulierung mit  $\mathfrak{K}$  bzw.  $\widehat{\mathfrak{K}}$  zu beachten ist.

Aus der in Kap. 7.7 entwickelten physikalischen Sicht heraus ist das Krümmungsmaß aus Gl. 3.63 etwas zu modifizieren. Es wird in NEFF & MÜNCH [174] u.a. gezeigt, dass die Krümmung

$$\mathfrak{C} = \epsilon_{aik} \bar{R}_{jn} \bar{R}_{ji,a} \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k = \text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}} = \widehat{\mathfrak{K}}^T - \text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}] \mathbb{1} \quad , \quad (3.69)$$

die geometrisch exakte Form der NYESchen Krümmung präsentiert. Weiterhin wird in [174] gezeigt, dass die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  eine obere Schranke für die Normen der beiden anderen Varianten darstellt, denn

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{C}\|^2 &= \|\text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}}\|_{\mathbb{M}^{3 \times 3}}^2 \\ &= \|\widehat{\mathfrak{K}}^T - \text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}] \mathbb{1}\|^2 = \|\widehat{\mathfrak{K}}^T\|^2 - 2 \text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}] \text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}^T] + (\text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}])^2 \|\mathbb{1}\|^2 \\ &= \|\widehat{\mathfrak{K}}^T\|^2 - 2 (\text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}])^2 + 3 (\text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}])^2 = \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2 + (\text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}])^2 \\ &\geq \|\widehat{\mathfrak{K}}\|_{\mathbb{M}^{3 \times 3}}^2 = \frac{1}{2} \|\mathfrak{K}\|_{\mathbb{R}^{27}}^2 \quad . \end{aligned} \quad (3.70)$$

In Tafel A.12 wird der Übergang zum linearen COSSERAT-Modell für dieses Krümmungsmaß hergestellt.

Der numerische Torsionstest in Kap. 6.6 zeigt nur einen geringen quantitativen Unterschied zwischen der Finite-Element-Formulierung basierend auf  $\widehat{\mathfrak{K}}$  bzw. auf  $\mathfrak{C}$ . Es kann weiterhin erwartungsgemäß kein Unterschied zwischen der Formulierung mit  $\mathfrak{K}$  und  $\widehat{\mathfrak{K}}$  festgestellt werden. Die Abschätzung in Gl. 3.70 sowie die Diskussion in Kap. 7.7 sprechen jedoch für die Verwendung von  $\mathfrak{C}$ . So basieren Beispielrechnungen in dieser Arbeit auf der Krümmungsmessung  $\mathfrak{C}$ .

### 3.1.4 Kinematik einer mikromorphen Theorie

Dieser Abschnitt diskutiert die Erweiterung der COSSERAT-Kinematik für eine mikromorphe Theorie von NEFF & FOREST [172] sowie NEFF [160]. Es motiviert das Krümmungsmaß dritter Stufe in diese Arbeit aufzunehmen.

Eine Verzerrung  $\tilde{\mathbf{U}}$  wird mit dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  und der Mikrodeformation  $\bar{\mathbf{P}}$  durch

$$\tilde{\mathbf{U}} := \bar{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{F} \in \text{GL}^+(3) \bar{\mathbf{P}} \in \text{GL}^+(3) \quad (3.71)$$

definiert. Die Mikrodeformation

$$\bar{\mathbf{P}} := \bar{\mathbf{R}}_p \bar{\mathbf{U}}_p \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}_p \in \text{SO}(3) \quad , \quad \bar{\mathbf{U}}_p \in \text{PSym}(3) \quad (3.72)$$

ist weiterhin durch die Mikrorotation  $\bar{\mathbf{R}}_p$  und die Mikroverzerrung  $\bar{\mathbf{U}}_p$  beschrieben. Die Krümmungsmessung kann nun nicht mehr auf Gl. 3.62 basieren und führt auf den objektiven dreistufigen Tensor

$$\mathfrak{K}_p := (\bar{\mathbf{R}}_p^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_1], \bar{\mathbf{R}}_p^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_2], \bar{\mathbf{R}}_p^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{e}_3]) \quad . \quad (3.73)$$

Behandelt man nun  $\bar{\mathbf{R}}_p$  wie  $\bar{\mathbf{R}}$  aus Kap. 3.1.3 und nutzt  $\mathbf{k}^j$  aus Gl. 3.64 erhält man  $\mathfrak{K}_p$  zu

$$\begin{aligned} (\mathfrak{K}_p)_{ijk} &= (\bar{R}_p)_{ai} (\bar{R}_p)_{ab,j} (\bar{U}_p)_{bk} + (\bar{R}_p)_{ai} (\bar{R}_p)_{ab} (\bar{U}_p)_{bk,j} \\ &= (K_p^j)_{ib} (\bar{U}_p)_{bk} + \delta_{ib} (\bar{U}_p)_{bk,j} = -\epsilon_{mib} k_m^j (\bar{U}_p)_{bk} + (\bar{U}_p)_{ik,j} \quad . \end{aligned} \quad (3.74)$$

In Gl. 3.74 wird ersichtlich, dass die Mikroverzerrung  $\bar{\mathbf{U}}_p$  für die Notwendigkeit einer dreistufigen Krümmungsmessung verantwortlich ist.

## 3.2 Erhaltungssätze und Definition der Spannung

Dieser Abschnitt wiederholt zunächst Erhaltungssätze der klassischen Mechanik um diese später mit Erhaltungssätzen aus homogenisierten, mikroskopischen Größen zu vergleichen. Ein genereller Unterschied läßt sich in der Drehimpulsbilanz feststellen. Die Erweiterung der Drehimpulsbilanz für die COSSERAT-Theorie findet so physikalische Ursachen. Der Bezug zwischen mechanischer Spannung und Momentenspannung wird am Ende des Abschnitts erläutert.

Die formale Struktur der Bilanzsätze lässt sich in integraler Form durch

$$\int_{\mathcal{B}_t} \Sigma \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \Upsilon \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \Phi \, dv \quad (3.75)$$

angeben, z.B. MARSDEN & HUGHES [132]. Bilanzgrößen sind grundsätzlich dadurch gekennzeichnet, dass keine Produktionsprozesse stattfinden, wie es z.B. in der Entropiebilanz der Fall ist. Die Änderung der Zustandsvariablen<sup>15</sup>  $\Phi$  besteht aus einer Änderung  $\Sigma$  innerhalb des Körpers  $\mathcal{B}_t$  und aus einer Änderung  $\Upsilon$  auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}_t$ .

### 3.2.1 Massenbilanz, Kontinuitätsbedingung, Transporttheorem

Der klassische Erhaltungssatz der Masse setzt die Existenz einer Massendichtefunktion  $\rho$  voraus, wobei

$$\rho := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad . \quad (3.76)$$

Die Massendichtefunktion kann sowohl in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  durch  $\rho = \rho^L(\mathbf{X}, t)$  als auch in der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  über  $\rho = \rho^E(\mathbf{x}, t)$  definiert sein<sup>16</sup>. Hierbei wird postuliert, dass sich die Masse  $m$  eines Körpers während der Deformation nicht ändert

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \, dv = 0 \quad (3.77)$$

und eine Massenänderung innerhalb des Körpers  $\mathcal{B}$  sowie eine Massenänderung über dessen Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  stets ausgeschlossen ist.

Man kann aus Gl. 3.77 eine lokale Forderung gewinnen, wobei das Integral über  $\mathcal{B}_t$  zunächst nach Gl. 3.40 auf die zeitunabhängige Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$  transformiert wird

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho^E J \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{d}{dt} (\rho^E J) \, dV = 0 \quad . \quad (3.78)$$

Soll Gl. 3.78 für beliebige Teilkörper  $\mathcal{B}$  gelten, führt dies auf die lokale Aussage

$$\frac{d}{dt} (\rho^E J) = \dot{\rho}^E J + \rho^E \dot{J} = 0 \quad . \quad (3.79)$$

Unter Verwendung von Gl. 3.42 und der Voraussetzung  $J > 0$  fordert Gl. 3.79

$$\dot{\rho}^E + \rho^E \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] = 0 \quad . \quad (3.80)$$

<sup>15</sup>Zustandsvariablen im Sinne der Thermodynamik sind per Definition alle (makroskopischen) Größen, welche zu jedem Zeitpunkt gemessen/beobachtet werden können, ohne jegliche Information über die Vergangenheit.

<sup>16</sup>Aus Gründen einer kompakten Notation wird hier auf die Argumente für  $\rho$  verzichtet, stattdessen werden die Indizes  $L$  und  $E$  eingeführt.

Da hier die Massendichtefunktion als räumliche Funktion gegeben ist, folgt daraus

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial \rho^E}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \rho^E \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] = \frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho^E \dot{\mathbf{x}}] = 0 \quad . \quad (3.81)$$

Die Gleichungen 3.79, 3.80 und 3.81 sind als Kontinuitätsbedingung bekannt.

Das Transporttheorem für beliebige  $C^1$ -stetige Funktionen  $f(\mathbf{x}, t)$  lautet

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} f \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\dot{f} + f \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}]) \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}[f \dot{\mathbf{x}}] \right) \, dv \quad (3.82)$$

und repräsentiert für  $f = \rho^E(\mathbf{x}, t)$  genau obige Ergebnisse.

### 3.2.2 Punktmechanik, Impulsbilanz und Spannung

Die NEWTONSchen Axiome<sup>17</sup> formulieren drei Grundsätze der Bewegung und bilden das Fundament der klassischen Punktmechanik.

Axiom 1 (Trägheitsprinzip): Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte Null ist.

Axiom 2 (Aktionsprinzip): Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegendes Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Axiom 3 (Reaktions- oder Wechselwirkungsprinzip): Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper  $i$  auf einen anderen Körper  $k$  eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper  $k$  auf Körper  $i$  (reactio).

Betrachtet man ein System aus Massenpunkten, führt das erste und zweite NEWTONSche Axiom auf eine Bewegungsgleichung für den  $k$ -ten Massenpunkt, welche lautet

$$\sum_{i \neq k} \mathbf{P}^{ik} + \mathbf{P}^k = \frac{d}{dt} (m^k \dot{\mathbf{r}}^k) \quad , \quad \mathbf{r}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 \quad . \quad (3.83)$$

Hierbei sind die Vektoren  $\mathbf{r}^k$  Abstände der Massenpunkte  $m^k$  mit Lage  $\mathbf{x}^k$  von einem festen Punkt  $\mathbf{x}^0$ . Jeder Massenpunkt kann durch äußere Kräfte  $\mathbf{P}^k$  oder

<sup>17</sup>Sir I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Royal Society (1687).

durch Kraftwechselwirkungen  $\mathbf{P}^{ik}$  beschleunigt werden. Das dritte NEWTONsche Axiom wird in der Form  $\mathbf{P}^{ik} = -\mathbf{P}^{ki}$  niedergelegt.

Bei der üblichen Übertragung der Bewegungsgleichung 3.83 vom Massenpunktsystem auf kontinuierliche Körper sind die Summen durch Integrale zu ersetzen. Bei diesem Übergang verschwindet der Term  $\sum_{i \neq k} \mathbf{P}^{ik}$  aufgrund des dritten NEWTONschen Axioms und die Kraftwirkung  $\mathbf{P}^k$  wird in zwei Kategorien eingeteilt. Dies sind Volumenkräfte  $\mathbf{b}$  im Körper  $\mathcal{B}$ , welche sich z.B. wie die Schwerkraft verhalten<sup>18</sup> sowie Traktionen  $\mathbf{t}$  auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$ , die nur zwischen unmittelbar aneinander grenzenden Bausteinen einer Trennfläche wirken.

Diese Postulate führen auf die Impulsbilanz der klassischen Mechanik

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (3.84)$$

Das CAUCHY-Theorem liefert die Aussage, dass eine lineare Transformation  $\boldsymbol{\sigma}$  mit

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.85)$$

existiert, sofern die Oberflächenkraft  $\mathbf{t}$  eine kontinuierliche Funktion von Lage und Orientierung der Oberflächennormalen  $\mathbf{n}$  ist.

Die lineare Transformation  $\boldsymbol{\sigma}$  ist unabhängig von  $\mathbf{n}$  und wird als CAUCHY-Spannungstensor bezeichnet. Unter Verwendung von Gl. 3.85 und dem GAUSSschen Integralsatz lässt sich Gl. 3.84 umschreiben zu

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{b} + \text{div}[\boldsymbol{\sigma}]) \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (3.86)$$

Für die rechte Seite von Gl. 3.88 folgt über das Transporttheorem (Gl. 3.82)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \dot{\mathbf{x}} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_t} \left( \frac{d\rho^E}{dt} \dot{\mathbf{x}} + \rho^E \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} + \rho^E \dot{\mathbf{x}} \text{div}[\dot{\mathbf{x}}] \right) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \left( \left[ \frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \frac{\partial \rho^E}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \rho^E \text{div}[\dot{\mathbf{x}}] \right] \dot{\mathbf{x}} + \rho^E \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} \right) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \left( \underbrace{\left[ \frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \text{div}[\rho^E \dot{\mathbf{x}}] \right]}_{=0} \dot{\mathbf{x}} + \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \right) \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \, dv \quad , \quad (3.87) \end{aligned}$$

<sup>18</sup>eingepägte Kräfte

wobei von der Kontinuitätsbedingung Gebrauch gemacht wird. Damit geht Gl. 3.88 über in

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{b} + \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}]) \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \, dv \quad (3.88)$$

und ist für beliebige Teilkörper von  $\mathcal{B}$  gewährleistet, falls

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{b} = \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \quad (3.89)$$

gilt, was die lokale Form der Impulsbilanz darstellt.

Da sich der CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  auf die Momentankonfiguration bezieht, wird er auch als wahrer Spannungstensor bezeichnet.

Innerhalb einer Kontinuumstheorie können Spannungstensoren konstruiert werden, welche sich ganz oder teilweise auf die Referenzkonfiguration beziehen. Die Komponenten des KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\boldsymbol{\tau} := \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\sigma} \quad (3.90)$$

werden mit der Volumenänderung  $J = \det[\mathbf{F}]$  so beaufschlagt, dass nach Gl. 3.40 die Integration über das Referenzvolumen stattfinden kann

$$\int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} J \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\tau} \, dV \quad , \quad (3.91)$$

obwohl  $\boldsymbol{\tau}$  in der Momentankonfiguration zu finden ist. Diese Eigenschaft ist für LAGRANGESche Formulierungen nötig.

Durch "pull-back" Operation definieren sich weitere klassische Spannungstensoren

$$\begin{aligned} 1. \text{ Piola-Kirchhoff } \mathbf{S}_1 &= J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ 2. \text{ Piola-Kirchhoff } \mathbf{S}_2 &= J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \\ \text{Biot } \mathbf{T} &= J \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad . \end{aligned} \quad (3.92)$$

### 3.2.3 Klassische Drehimpulsbilanz und deren Generalisierung

Die Entwicklung der klassischen Drehimpulsbilanz wird in TRUESDELL [229] kritisch diskutiert. Üblicherweise basiert sie wie die Impulsbilanz zunächst auf der Betrachtung endlich vieler Massenpunkte und definiert das Moment  $\mathbf{M}$  des Impulses aller Massenpunkte  $k$  über

$$\mathbf{M} := \sum_k m^k \mathbf{r}^k \times \dot{\mathbf{r}}^k \quad , \quad \mathbf{r}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 \quad . \quad (3.93)$$

$\mathbf{M}$  wird auch als **Drall** bezeichnet. Die Vektoren  $\mathbf{r}^k$  sind Abstände der Massenpunkte  $m^k$  mit Lage  $\mathbf{x}^k$  von einem festen Punkt  $\mathbf{x}^0$ . Die totale zeitliche Ableitung des Dralls lautet

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m^k \mathbf{r}^k \times \dot{\mathbf{r}}^k \right) = \sum_k (m^k \underbrace{\dot{\mathbf{r}}^k \times \dot{\mathbf{r}}^k}_{=0} + m^k \mathbf{r}^k \times \ddot{\mathbf{r}}^k) = \sum_k \mathbf{r}^k \times (m^k \ddot{\mathbf{r}}^k). \quad (3.94)$$

Durch Einsetzen der Gl. 3.83 in Gl. 3.94 erhält man

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_k \mathbf{r}^k \times (\mathbf{P}^k + \sum_{i \neq k} \mathbf{P}^{ik}) = \underbrace{\sum_k \mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^k}_{:=\mathbf{L}} + \sum_k \sum_{i \neq k} \mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^{ik}. \quad (3.95)$$

Unter Einbeziehung des dritten NEWTONSchen Axioms gilt

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{i \neq k} \mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^{ik} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^{ik} + \mathbf{r}^i \times \mathbf{P}^{ki}) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^{ik} - \mathbf{r}^i \times \mathbf{P}^{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^i) \times \mathbf{P}^{ik} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \times \mathbf{P}^{ik} \end{aligned} \quad (3.96)$$

und wegen  $\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^i = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^i + \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i$  ist der Ausdruck in Gl. 3.96 nicht von der Wahl des Punktes  $\mathbf{x}^0$  abhängig.

Setzt man voraus, dass es sich bei den Wechselwirkungskräften  $\mathbf{P}^{ik}$  um Zentralkräfte ohne Vorzugsrichtungen handelt (Isotropie), dann entspricht die direkte Verbindung der Punkte  $i$  und  $k$  der Richtung der Wechselwirkung und es lässt sich eine **skalare** Funktion  $\lambda^{ik} = f(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i)$  finden für die gilt

$$\mathbf{P}^{ik} = (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \lambda^{ik}. \quad (3.97)$$

Somit verschwindet der Term  $(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \times \mathbf{P}^{ik} = (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \times (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \lambda^{ik} = 0$  und Gl. 3.95 geht über in

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}} \Leftrightarrow \sum_k \mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m^k \mathbf{r}^k \times \dot{\mathbf{r}}^k \right). \quad (3.98)$$

Wegen  $\dot{\mathbf{r}}^k = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0) = \dot{\mathbf{x}}^k$  lässt sich Gl. 3.98 auch schreiben durch

$$\sum_k \mathbf{r}^k \times \mathbf{P}^k = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m^k \mathbf{r}^k \times \dot{\mathbf{x}}^k \right). \quad (3.99)$$

Während die Drallgleichung 3.99 im Massenpunktsystem nur ein Korollar der Impulsbilanz ist, wie hier gezeigt, wird **beim Übergang auf kontinuierliche**

**Medien eine neue unabhängige Hypothese geschaffen, welche letztendlich die Symmetrie der CAUCHY-Spannung postuliert**, vgl. MARSDEN & HUGHES [132] S. 137.

Dieser Übergang findet formal wie bei der Impulsbilanz in Gl. 3.84 durch die Unterscheidung von Kraftwirkungen  $\mathbf{P}^k$  in Volumenkkräfte  $\mathbf{b}$  und Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}$  statt. Weiterhin werden die Summen durch Integrale ersetzt, so dass sich

$$\int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad , \quad \mathbf{r} := (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \quad , \quad (3.100)$$

ergibt, wobei der Vektor  $\mathbf{r}$  den Abstand der Punkte  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  vom festen Drehpunkt  $\mathbf{x}^0$  darstellt.

Diese klassische Form der Drehimpulsbilanz in Gl. 3.100 bildet also mit allen Einzelanteilen der klassischen Impulsbilanz aus Gl. 3.84 **vektorielle** Momente um einen beliebigen, aber festen Punkt  $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^3$ . Die vektoriellen Momente werden innerhalb des Integrals postuliert und haben wie in einem Massenpunktsystem lokalen Charakter.

TRUESDELL [229] weist darauf hin, dass Gleichung 3.98 nur für Systeme mit endlich vielen Massenpunkten hergeleitet wird. Weiterhin werde die Gleichung  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{M}}$  für kontinuierliche Systeme weniger als neues Grundgesetz, sondern vielmehr als Resultat der NEWTONschen Gesetze im Sinne von Gl. 3.99 angesehen, was nach TRUESDELL [229] nicht richtig sei. Zudem werde das Postulat der Gl. 3.100 oftmals mit der Symmetrie des Spannungstensors sowohl in kinetischen als auch statischen Problemen der Elastizität und Viskosität substituiert.

Der unauflösbare Zusammenhang zwischen klassischer Drehimpulsbilanz in Gl. 3.100 und klassischer Impulsbilanz in Gl. 3.84 zeigt sich nach MURDOCH [149] anhand folgender Tatsachen. Wird Gl. 3.100 für einen Drehpunkt  $\mathbf{x}_0$  erfüllt, ist sie wegen Gl. 3.84 für alle Punkte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  erfüllt. Wird andererseits Gl. 3.100 für alle Punkte  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  erfüllt, folgt daraus die Gültigkeit von Gl. 3.84.

Für die rechte Seite von Gl. 3.100 folgt mit  $f = \rho^E \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}}$  aus dem Transporttheorem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_t} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \times \frac{d(\rho^E \dot{\mathbf{x}})}{dt} + \mathbf{r} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] \right) \, dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \left( \dot{\mathbf{r}} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \times \left( \frac{d(\rho^E \dot{\mathbf{x}})}{dt} + \rho^E \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] \right) \right) \, dv \quad . \end{aligned} \quad (3.101)$$

Wegen

$$\dot{\mathbf{r}} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} = \frac{d(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{dt} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.102)$$

und unter lokaler Einhaltung der Kontinuitätsbedingung für

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho^E \dot{\mathbf{x}})}{dt} + \rho^E \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] &= \dot{\rho}^E \dot{\mathbf{x}} + \rho^E \ddot{\mathbf{x}} + \rho^E \dot{\mathbf{x}} \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}] \\ &= \dot{\mathbf{x}} \underbrace{(\dot{\rho}^E + \rho^E \operatorname{div}[\dot{\mathbf{x}}])}_{=0 \text{ (Massenbilanz)}} + \rho^E \ddot{\mathbf{x}} = \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \quad , \end{aligned} \quad (3.103)$$

folgt schließlich

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \rho^E \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (3.104)$$

Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems (Gl. 3.85) sowie dem GAUSSschen Integralsatz lautet der Oberflächenterm der linken Seite von Gl. 3.100

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) \, da = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}[\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}] \, dv \quad . \quad (3.105)$$

Die Divergenz des Kreuzproduktes in Gl. 3.105 wird in Indexnotation umgeformt

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} &= (r_b \epsilon_{bci} \sigma_{cj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \nabla_{\mathbf{x}k} \mathbf{e}_k = r_b \epsilon_{bci} \sigma_{cj} \nabla_{\mathbf{x}k} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_{0b}) \epsilon_{bci} \sigma_{ck} \nabla_{\mathbf{x}k} \mathbf{e}_i = \left( \frac{\partial x_b}{\partial x_k} \epsilon_{bci} \sigma_{ck} + r_b \epsilon_{bci} \frac{\partial \sigma_{ck}}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i \\ &= (\delta_{bk} \epsilon_{bci} \sigma_{ck} + r_b \epsilon_{bci} \sigma_{ck,k}) \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{r} \times \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] \end{aligned} \quad (3.106)$$

und man erhält damit für Gl. 3.105

$$\int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) \, da = \int_{\mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{r} \times \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}]) \, dv \quad . \quad (3.107)$$

Mit Gl. 3.104 und Gl. 3.107 lautet dann Gl. 3.100

$$\int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times \underbrace{(\rho^E \ddot{\mathbf{x}} - \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] - \mathbf{b})}_{=0 \text{ (Impulsbilanz)}} \, dv \quad . \quad (3.108)$$

Wird die Impulsbilanz wie in Gl. 3.89 punktweise erfüllt, folgt aus Gl. 3.108

$$\int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T \, dv = 0 \quad . \quad (3.109)$$

Soll Gl. 3.109 für beliebige Teilkörper von  $\mathcal{B}$  gelten lautet die lokale Aussage

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T = 0 \quad , \quad (3.110)$$

was mit

$$\boldsymbol{\epsilon} : \text{skew}[\boldsymbol{\sigma}^T] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{skew}[\boldsymbol{\sigma}] = 0 \quad (3.111)$$

gleichbedeutend ist und nur für  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}$  stets erfüllt ist. Im klassischen Kontinuum wird auf dieser Basis die Symmetrie der CAUCHY-Spannungen gefolgert.<sup>19</sup>

Wie aus den Rechnungen der Gl. 3.101 bis Gl. 3.111 ersichtlich, impliziert die lokale Form der Kontinuität in Gl. 3.103, die lokale Form der Impulsbilanz in Gl. 3.108 sowie die symmetrische CAUCHY-Spannungen die klassische Form der Drehimpulsbilanz in Gl. 3.100. MURDOCH [150] merkt an, dass Gl. 3.100 gilt, falls Gl. 3.111 erfüllt ist.

**Somit ist das Postulat der klassischen Drehimpulsbilanz äquivalent zur Forderung eines symmetrischen CAUCHY-Spannungstensors, liefert jedoch keinen Beweis dafür, da Gl. 3.100 und 3.111 nur zusammen gelten.**

Die alleinige Bildung von Vektorprodukten in Gl. 3.100 stellt eine Einschränkung auf unsymmetrische Anteile der Bilanzgrößen dar.<sup>20</sup> Die nachfolgende generalisierte Drehimpulsbilanz umgeht diese Einschränkung indem an Stelle des Vektorproduktes das tensorielle Produkt verwendet wird. Hierbei wird zudem die Grundlage für den Vergleich einer Drehimpulsbilanz aus homogenisierten Größen in Kap. 3.3.3 erarbeitet.

Ausgangspunkt bildet wieder die zeitliche Änderung eines nun generalisierten Dralls in einem endlichen punktmechanischen Modell

$$\dot{\mathbf{M}}^G = \frac{d}{dt} \left( \sum_k m^k \mathbf{r}^k \otimes \dot{\mathbf{r}}^k \right) = \sum_k m^k \dot{\mathbf{r}}^k \otimes \dot{\mathbf{r}}^k + \sum_k m^k \mathbf{r}^k \otimes \ddot{\mathbf{r}}^k \quad , \quad (3.112)$$

wobei an Stelle des Vektorproduktes in Gl. 3.94 ein **tensorielles** Produkt mit  $\mathbf{r}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0$  Verwendung findet.

<sup>19</sup> Obwohl L. BOLTZMANN in seinen Vorlesungen "Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik" (Populäre Schriften, Leipzig 1925) nachdrücklich darauf hingewiesen hat, dass die Behauptung der Symmetrie des Spannungstensors axiomatisch sei, ist die Kontinuumsmechanik mit a priori symmetrischem Spannungstensor als BOLTZMANNsche Mechanik bezeichnet worden.

<sup>20</sup>  $-\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{axl}[\text{skew}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]]$

Der Anteil  $\sum_k m^k \mathbf{r}^k \otimes \ddot{\mathbf{r}}^k = \sum_k \mathbf{r}^k \otimes m^k \ddot{\mathbf{r}}^k$  in Gl. 3.112 bildet unter Verwendung der punktmechanischen Impulsbilanz aus Gl. 3.83 die Identität

$$\begin{aligned} \sum_k \mathbf{r}^k \otimes \left( \sum_{i \neq k} \mathbf{P}^{ik} + \mathbf{P}^k \right) &= \sum_k m^k \mathbf{r}^k \otimes \ddot{\mathbf{r}}^k \\ \Leftrightarrow \sum_k \sum_{i \neq k} \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^{ik} + \sum_k \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^k &= \sum_k m^k \mathbf{r}^k \otimes \ddot{\mathbf{r}}^k \quad . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Unter Einbeziehung des dritten NEWTONschen Axioms gilt

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{i \neq k} \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^{ik} &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^{ik} + \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{P}^{ki}) = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^{ik} - \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{P}^{ik}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^i) \otimes \mathbf{P}^{ik} \quad . \end{aligned} \quad (3.114)$$

Wegen  $\mathbf{r}^k - \mathbf{r}^i = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i$  ist der Ausdruck in Gl. 3.114 nicht von der Wahl des Punktes  $\mathbf{x}^0$  abhängig. Weiterhin besitzt er die Einheit  $[Nm]$  und damit die eines Drehmomentes oder einer Energie.<sup>21</sup>

Setzt man wieder voraus, dass es sich bei den Wechselwirkungskräften  $\mathbf{P}^{ik}$  lediglich um Zentralkräfte handelt, erhält man aus Gl. 3.114

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{i \neq k} \mathbf{r}^k \otimes \mathbf{P}^{ik} &= \sum_k \sum_{i \neq k} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \otimes (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^i) \lambda^{ik} \\ &:= \sum_k \sum_{i \neq k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{ik} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{ik} \in \text{Sym} \quad . \end{aligned} \quad (3.115)$$

Beim Übergang vom endlichen Punktsystem in Gl. 3.113 auf ein kontinuierliches Medium findet formal wie bei der Impulsbilanz in Gl. 3.84 eine Unterscheidung der Kraftwirkungen  $\mathbf{P}^k$  in Volumenkräfte  $\mathbf{b}$  und Oberflächenkräfte  $\mathbf{t}$  statt. Weiterhin gehen die symmetrischen Anteile  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{ik} \in \text{Sym}$  in ein kontinuierliches Feld  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}$  über und die Summen in Integrale, also

$$\int_{\mathcal{B}_t} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes \mathbf{t} \, da = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes \rho^E \ddot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (3.116)$$

Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems in Gl. 3.85 sowie des GAUSSschen

<sup>21</sup> Die Interpretation, dass es sich in Gl. 3.114 um Energie handelt liegt jedoch näher, da kein Kreuzprodukt vorliegt.

Integralsatzes lässt sich der Oberflächenterm der linken Seite von Gl. 3.116 zu

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{t}) \, da &= \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, da = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} r_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ r_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ r_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix} da = \int_{\mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} \operatorname{div}[r_1 \boldsymbol{\sigma}] \\ \operatorname{div}[r_2 \boldsymbol{\sigma}] \\ \operatorname{div}[r_3 \boldsymbol{\sigma}] \end{pmatrix} dv \\
&= \int_{\mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} (r_1 \sigma_{bc} \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_c) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\ (r_2 \sigma_{bc} \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_c) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \\ (r_3 \sigma_{bc} \mathbf{e}_b \otimes \mathbf{e}_c) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \end{pmatrix} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial(x-x_0)_1}{\partial x_i} \sigma_{bc} + r_1 \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial x_i} \right) \delta_{ci} \mathbf{e}_b \\ \left( \frac{\partial(x-x_0)_2}{\partial x_i} \sigma_{bc} + r_2 \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial x_i} \right) \delta_{ci} \mathbf{e}_b \\ \left( \frac{\partial(x-x_0)_3}{\partial x_i} \sigma_{bc} + r_3 \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial x_i} \right) \delta_{ci} \mathbf{e}_b \end{pmatrix} dv \\
&= \int_{\mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} (\delta_{1i} \sigma_{bi} + r_1 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \\ (\delta_{2i} \sigma_{bi} + r_2 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \\ (\delta_{3i} \sigma_{bi} + r_3 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \end{pmatrix} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \begin{pmatrix} (\sigma_{b1} + r_1 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \\ (\sigma_{b2} + r_2 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \\ (\sigma_{b3} + r_3 \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_b \end{pmatrix} dv \\
&= \int_{\mathcal{B}_t} (\sigma_{ba} + r_a \sigma_{bi,i}) \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{r} \otimes \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}]) \, dv \quad (3.117)
\end{aligned}$$

umschreiben. Einsetzen der Gl. 3.117 in Gl. 3.116 ergibt

$$\int_{\mathcal{B}_t} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma}^T \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \otimes \underbrace{(\rho \ddot{\mathbf{x}} - \operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] - \mathbf{b})}_{\text{Impulsbilanz}} \, dv \quad . \quad (3.118)$$

Wird die Impulsbilanz punktweise erfüllt wie in Gl. 3.89, folgt aus Gl. 3.118

$$\int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma}^T \, dv = - \int_{\mathcal{B}_t} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, dv \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym} \quad . \quad (3.119)$$

Die lokale Aussage dieser Gleichung fordert ebenfalls die Symmetrie der CAUCHY-Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$ . Dies ist auch das Resultat der klassischen Drehimpulsbilanz aus Gl. 3.100. Da beide Herleitungen aus dem endlichen punktmechanischen Modell mit dessen Impulsbilanz hervorgehen, ist eben dieses Modell dafür verantwortlich, dass die CAUCHY-Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrisch sein muss.<sup>22</sup>

In Kap. 4.1 wird gezeigt, dass die Symmetrie der CAUCHY-Spannung auch direkt aus den Voraussetzungen für simples hyperelastisches Material folgt.

Hinsichtlich eines tieferen Verständnisses der COSSERAT-Theorie, welche unsymmetrische Spannungen a priori beinhaltet, muss die Diskussion hier fortgeführt werden.

Es motiviert hierbei eine Drehimpulsbilanz aus mikroskopischer Perspektive zu betrachten, welche auf gewisse Vereinfachungen des Modells starrer Punkte verzichtet. Folgende Abschnitte bereiten dieses Ziel vor, welches u.a. einen Homogenisierungsprozess erforderlich macht.

<sup>22</sup>Während  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{ik}$  in Gl. 3.115 noch einen Tensor von Rang eins darstellt (gemittelt dyadisch) ist die Summe  $\sum_k \sum_{i \neq k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{ik}$  dyadisch gemittelt und von Rang zwei. Somit ist auch die Tensorfunktion  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  in Gl. 3.119 von Rang zwei.

### 3.3 Homogenisierung auf Mikroebene

Das makroskopische Verhalten eines Materials leitet sich aus dessen Mikrostruktur ab. Die molekulare Ebene wird von MURDOCH als kleinste noch sinnvolle Ebene zur Herleitung kontinuumsmechanischer Größen betrachtet. Dessen Arbeiten [147], [148], [149] und [150] bilden die Grundlage der folgenden Abschnitte.

Über Dichte, Massenbilanz, Impulsbilanz und Betrachtungen zum Spannungstensor führt der Weg zur Drehimpulsbilanz, in der Momentenspannungen als Konsequenz nichtlokaler Effekte erscheinen.

#### 3.3.1 Dichte und Massenbilanz aus mikroskopischer Perspektive

Eine Punktmenge  $\mathcal{M}$  soll aus  $N$  interagierenden Punkten  $i$  (z.B. Moleküle) bestehen, deren Masse, Lage im Raum und Geschwindigkeit mit  $m^i$ ,  $\mathbf{x}^i(t)$  und  $\vec{\mathbf{v}}^i(t)$  gekennzeichnet ist.

An allen Punkten  $i$  sei eine weitere molekulare Eigenschaft durch den Wert  $g^i(t)$  zur Zeit  $t$  gekennzeichnet, z.B. der Impuls oder die kinetische Energie. Für einen festen aber beliebigen geometrischen Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  der Momentankonfiguration bildet man mit

$$g_w(\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, t) := \sum_{i=1}^N g^i(t) w(\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^0) =: \sum_{i=1}^N g^i w(\mathbf{d}^i) = \sum_{i=1}^N g^i w^i \quad (3.120)$$

die molekulare Eigenschaft der einzelnen Punkte  $i$  auf ein gewichtetes Mittel  $g_w$  am Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  ab. Damit stellt Gl. 3.120 einen **Homogenisierungsprozess** dar.

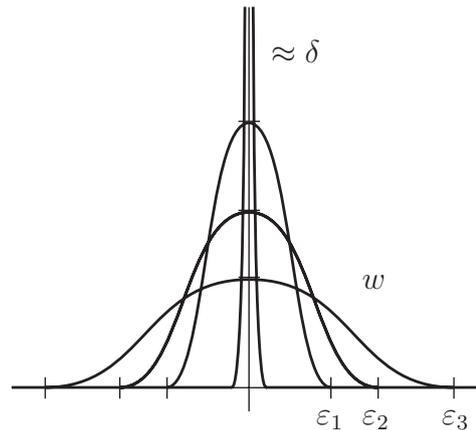
Mit  $\mathbf{d}^i := \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0$  sind die Abstandsvektoren zwischen allen Punkten  $i$  und dem Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  definiert. Der Wert der Wichtungsfunktion  $w(\mathbf{d}^i)$  für einen Abstandsvektor  $\mathbf{d}^i$  wird abkürzend mit  $w^i$  notiert und gibt den Einfluss eines Punktes  $i$  auf den Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  wieder. Auf die ausdrückliche Darstellung von Orts- und Zeitabhängigkeiten wird im Weiteren nach Möglichkeit verzichtet.

Die Wichtungsfunktion  $w$  gebe der molekularen Eigenschaft von Punkten  $i$  nahe  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  stärkeres Gewicht als weiter entfernten Punkten, und zudem gelte

$$\int_{\mathbb{R}^3} w = 1 \quad . \quad (3.121)$$

Die Normalisierungsbedingung in Gl. 3.121 gewährleistet, dass das Integral von  $g_w$  über den gesamten Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  die totale Größe  $\sum_{i=1}^N g^i$  repräsentiert.

Dies führt auch auf die Vorstellung, dass  $g_w(\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, t)$  die räumliche Dichte einer molekularen Eigenschaft am Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  ist. Die Wichtungsfunktion  $w$  besitzt im dreidimensionalen Raum die physikalische Dimension  $[m^{-3}]$ .



**Abbildung 3.10:** Exemplarische Darstellung möglicher Wichtungsfunktionen  $w$  im Schnitt. Die DIRAC-Funktion  $\delta$  stellt den Spezialfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  dar.

Weiterhin sei  $w$  im Raum stetig (kontinuierlich), mindestens  $C^1$  differenzierbar, integrierbar sowie isotrop und damit darstellbar über

$$w(\mathbf{d}^i) =: f(\|\mathbf{d}^i\|) \quad . \quad (3.122)$$

Setzt man als molekulare Größe in Gl. 3.120 die Punktmasse selbst, also  $g^i = m^i$ , so erhält man als gewichtetes Mittel die physikalische Dichte eines Materials an der Stelle  $\mathbf{x}^0$  durch

$$\rho_w(\mathbf{x}^0, t) := \sum_{i=1}^N m^i w^i \quad . \quad (3.123)$$

Bereits hier soll die Tragweite dieser Methode diskutiert werden. Die Dichte  $\rho_w$  ist nach Gl. 3.123 per Definition eine gemittelte, homogenisierte Größe, deren Eigenschaften wie z.B. Kontinuität und Isotropie über die Wichtungsfunktion  $w$  gewährleistet ist.

In Abb. 3.11 wird anhand eines Hohlraums veranschaulicht, wie sich die Lokalität der Wichtungsfunktion  $w$  auf das Ergebnis der Dichte an den Punkten  $a$  und  $b$  auswirkt. So lassen sich Wichtungsfunktionen konstruieren, welche obige Bedingungen erfüllen, jedoch ab einem Radius  $\varepsilon$  den Wert 0 annehmen, wie Abb. 3.10 zeigt.

Je nachdem, wie lokal sich die molekulare Eigenschaft der Punkte  $i$  verhält, sei nun mindestens ein Radius  $\hat{\varepsilon}$  zur Erfassung der physikalischen Gegebenheit nötig.

In den drei Situationen der Abb. 3.11 ist  $\varepsilon_1 < \hat{\varepsilon}$ ,  $\varepsilon_2 = \hat{\varepsilon}$  und  $\varepsilon_3 > \hat{\varepsilon}$ . Während die letzten beiden Situationen dieselbe Dichte  $\rho_w(\mathbf{x}) > 0$  am Punkt  $a$  liefern können, ist im Fall  $\varepsilon_1 < \hat{\varepsilon}$  dort nur die Dichte  $\rho_w = 0$  möglich.

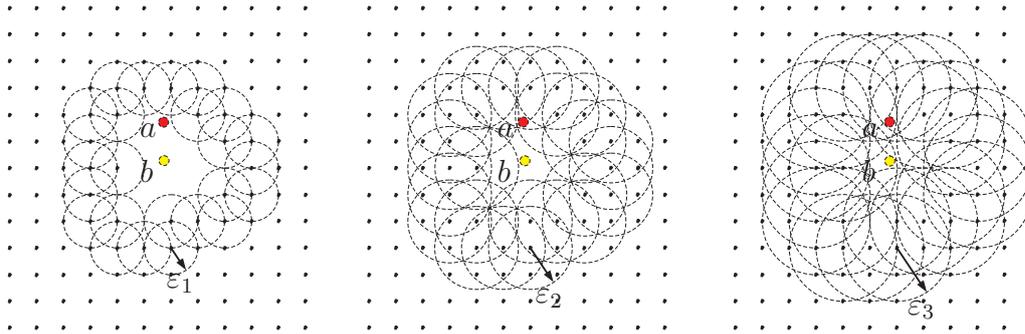


Abbildung 3.11: Homogenisierung in der Nähe eines Hohlraumes.

Man kann diesen Effekt auch mit der **Auflösung** eines **Homogenisierungsprozesses** in Verbindung bringen. Während man mit  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  am Punkt  $b$  einen Hohlraum mit  $\rho_w = 0$  zwangsläufig abbildet, könnte man im Fall  $\varepsilon_3$  und geeigneter Wahl von  $w$  die molekulare Masse derart verteilen (verschmieren), dass am Punkt  $b$  kein Hohlraum mit  $\rho_w = 0$  erscheint. Dass man dabei nicht mehr den physikalisch korrekten Einfluss durch die Wichtungsfunktion  $w$  beschreiben kann ist trivial.

Da in der klassischen Kontinuumsmechanik die Dichte eines Materials über Gl. 3.76 definiert ist, können dort derartige Überlegungen nicht gemacht werden und bedürfen axiomatischer Annahmen, was z.B. die Verteilung von Masse betrifft (glatt, keine Hohlräume, keine Risse usw.).

Setzt man in Gl. 3.120 als molekulare Größe den Impuls  $g^i = m^i \vec{\mathbf{v}}^i$ , erhält man am Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  die gemittelte Impulsdichte

$$\mathbf{p}_w(\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, t) := \sum_{i=1}^N m^i \vec{\mathbf{v}}^i w^i \quad . \quad (3.124)$$

Für  $\rho_w(\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, t) \neq 0$  wird über die Impulsdichte eine gemittelte Geschwindigkeit

$$\vec{\mathbf{v}}_w(\mathbf{x} = \mathbf{x}^0, t) := \frac{\mathbf{p}_w(\mathbf{x}^0, t)}{\rho_w(\mathbf{x}^0, t)} \quad (3.125)$$

der Punkte definiert.

Für Richtungs- und Zeitableitungen der Wichtung  $w^i = f(\mathbf{x}^i - \mathbf{x})$  gilt

$$\nabla_{\mathbf{x}} w^i = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}^i}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} \cdot \frac{\partial(\mathbf{x}^i - \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} \cdot (-\mathbb{1}) = -\frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} \quad (3.126)$$

$$\nabla_{\mathbf{d}} w^i = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} = -\frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}} w^i \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} = \frac{\partial w^i}{\partial \mathbf{d}} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}^i}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{d}} w^i \cdot \frac{\partial(\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x})}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{d}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i \quad (3.128)$$

Da sich die Masse  $m^i$  der Moleküle zeitlich nicht ändern soll, lautet die Zeitableitung von Gl. 3.123

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \sum_{i=1}^N m^i \frac{\partial w^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^N m^i \nabla_{\mathbf{d}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i \quad (3.129)$$

Außerdem sind weder  $m^i$  noch  $\vec{\mathbf{v}}^i$  Funktionen des Ortes  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ , womit sich die Divergenz von Gl. 3.124 wie folgt beschreiben lässt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{p}_w] &= \sum_{i=1}^N m^i \operatorname{div}[w^i \vec{\mathbf{v}}^i] = \sum_{i=1}^N m^i (\nabla_{\mathbf{x}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i + w^i \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \vec{\mathbf{v}}^i) \\ &= \sum_{i=1}^N m^i \nabla_{\mathbf{x}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i = -\sum_{i=1}^N m^i \nabla_{\mathbf{d}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i \quad (3.130) \end{aligned}$$

Die Kombination der Ergebnisse aus Gl. 3.129 und Gl. 3.130 lautet

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}[\mathbf{p}_w] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w] = 0 \quad (3.131)$$

und repräsentiert die räumliche Form der Kontinuitätsbedingung aus Gl. 3.81 über mikroskopische Größen.

### 3.3.2 Erweiterungen zu Impulsbilanz und Spannungstensor

Wie im Punktmassensystem der Gl. 3.83 findet eine Impulsänderung der mikroskopischen Punkte  $i$  durch zwei Arten von Kräften statt.

Zum einen durch Kräfte  $\mathbf{b}^i$ , welche außerhalb des Körpers  $\mathcal{M}$  ihre Ursache haben (eingeprägte Kräfte). Zum anderen über Kraftwechselwirkungen  $\mathbf{f}^{ij}$  von Punkten  $j$  des übrigen Körpers  $j \neq i$

$$\sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} + \mathbf{b}^i = \frac{d}{dt} (m^i \vec{\mathbf{v}}^i) \quad (3.132)$$

Mit demselben Grundgedanken zur Homogenisierung wie in Gl. 3.120 wird Gl. 3.132 über alle Punkte  $i$  von  $\mathcal{M}$  aufsummiert und bezüglich des Ortes  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  mit der Wichtungsfunktion  $w$  versehen

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} w^i + \sum_i \mathbf{b}^i w^i = \sum_i \frac{d(m^i \vec{\mathbf{v}}^i)}{dt} w^i \quad . \quad (3.133)$$

Die rechte Seite der Gl. 3.133 kann wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( m^i \vec{\mathbf{v}}^i w^i \right) &= \frac{\partial(m^i \vec{\mathbf{v}}^i)}{\partial t} w^i + m^i \vec{\mathbf{v}}^i \nabla_{\mathbf{d}} w^i \cdot \vec{\mathbf{v}}^i \\ &= \frac{d(m^i \vec{\mathbf{v}}^i)}{dt} w^i + m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) \cdot \nabla_{\mathbf{d}} w^i \end{aligned} \quad (3.134)$$

und unter Beachtung von

$$\operatorname{div}[m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) w^i] = m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} w^i = -m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) \cdot \nabla_{\mathbf{d}} w^i \quad (3.135)$$

auf die Form

$$\sum_i \frac{d(m^i \vec{\mathbf{v}}^i)}{dt} w^i = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i m^i \vec{\mathbf{v}}^i w^i \right) + \operatorname{div} \left( \sum_i m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) w^i \right) \quad (3.136)$$

erweitert werden. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_w &:= \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} w^i \quad , \\ \mathbf{b}_w &:= \sum_i \mathbf{b}^i w^i \quad , \\ \mathbf{D}_w &:= \sum_i m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) w^i \quad , \end{aligned} \quad (3.137)$$

lässt sich Gl. 3.133 darstellen durch

$$\mathbf{f}_w + \mathbf{b}_w = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w) + \operatorname{div}[\mathbf{D}_w] \quad . \quad (3.138)$$

Mit folgenden Überlegungen lässt sich Gl. 3.138 weiter umformen und zudem ein grundlegender Aspekt gewinnen: Die Molekülgeschwindigkeit  $\vec{\mathbf{v}}^i$  weicht zur gemittelten Geschwindigkeit  $\vec{\mathbf{v}}_w$  aus Gl. 3.125 über die stochastische Fluktuation

$$\hat{\mathbf{v}}^i := \vec{\mathbf{v}}^i - \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.139)$$

ab. Die gemittelte stochastische Fluktuation

$$\sum_i m^i \hat{\mathbf{v}}^i w^i = \sum_i m^i \vec{\mathbf{v}}^i w^i - \sum_i m^i \vec{\mathbf{v}}_w w^i = \mathbf{p}_w - \underbrace{\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w}_{\mathbf{p}_w} = 0 \quad (3.140)$$

verschwindet stets. Da die stochastische Fluktuation eine thermische Größe im Körper darstellt, bedeutet dies, dass allein die Temperatur eines Körpers die gemittelte Impulsbilanz nicht beeinflusst.

Setzt man in Gl. 3.137 die Beziehung  $\vec{\mathbf{v}}^i = \hat{\mathbf{v}}^i + \vec{\mathbf{v}}_w$  ein, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_w = \sum_i m^i (\hat{\mathbf{v}}^i + \vec{\mathbf{v}}_w) \otimes (\hat{\mathbf{v}}^i + \vec{\mathbf{v}}_w) w^i &= \sum_i m^i (\hat{\mathbf{v}}^i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i) w^i + (\vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w) \sum_i m^i w^i \\ &\quad + \underbrace{\sum_i m^i \hat{\mathbf{v}}^i w^i \otimes \vec{\mathbf{v}}_w}_0 + \vec{\mathbf{v}}_w \otimes \underbrace{\sum_i m^i \hat{\mathbf{v}}^i w^i}_0 \end{aligned} \quad (3.141)$$

und es verschwinden nach Gl. 3.140 die letzten beiden Terme. Mit

$$\mathbf{D}_w = \sum_i m^i (\hat{\mathbf{v}}^i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i) w^i + (\vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w) \rho_w =: \mathcal{D}_w + \rho_w \vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.142)$$

lässt sich Gl. 3.138 über

$$-\operatorname{div}[\mathcal{D}_w] + \mathbf{f}_w + \mathbf{b}_w = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w) + \operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w] \quad (3.143)$$

angeben. Weiterhin kann wegen

$$\operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w] = \operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w] \vec{\mathbf{v}}_w + \rho_w \nabla_{\mathbf{x}} \vec{\mathbf{v}}_w \cdot \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.144)$$

die rechte Seite von Gl. 3.143 umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w) + \operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w] \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho_w \vec{\mathbf{v}}_w] \right)}_{=0 \text{ (Kontinuität)}} \vec{\mathbf{v}}_w + \rho_w \left( \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_w}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \vec{\mathbf{v}}_w \cdot \vec{\mathbf{v}}_w \right) . \end{aligned} \quad (3.145)$$

MURDOCH führt eine mikroskopisch gemittelte Beschleunigung<sup>23</sup>

$$\vec{\mathbf{a}}_w := \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_w}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \vec{\mathbf{v}}_w \cdot \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.146)$$

ein, was Gl. 3.143 in die Form

$$-\operatorname{div}[\mathcal{D}_w] + \mathbf{f}_w + \mathbf{b}_w = \rho_w \vec{\mathbf{a}}_w \quad (3.147)$$

---

<sup>23</sup>in räumlichen Koordinaten

bringt. Weiter zeigt MURDOCH über das Theorem von NOLL, dass sich  $\mathbf{f}_w$  stets als die Divergenz eines Tensorfeldes  $\mathbf{T}_w^-$  darstellen lässt. Zur Herleitung dieser Beziehung wird auf [150] S.109 ff verwiesen, doch sei bemerkt, dass hierbei das dritte NEWTONsche Axiom  $\mathbf{f}^{ji} = -\mathbf{f}^{ij}$  für die Kraftwechselwirkungen zwischen den Punkten  $i$  und  $j$  vorauszusetzen ist. Die explizite Form von  $\mathbf{T}_w^-$  lautet dann

$$\mathbf{T}_w^- = -\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} \otimes \boldsymbol{\xi} w(\mathbf{d}^i - \alpha \boldsymbol{\xi}) w(\mathbf{d}^j + \boldsymbol{\xi} - \alpha \boldsymbol{\xi}) d\alpha d\boldsymbol{\xi} \quad . \quad (3.148)$$

Definiert man einen mikroskopisch motivierten Spannungstensor  $\mathbf{T}_w$  durch

$$\mathbf{T}_w := \mathbf{T}_w^- - \mathcal{D}_w \quad (3.149)$$

lässt sich Gl. 3.147 über

$$\operatorname{div}[\mathbf{T}_w] + \mathbf{b}_w = \rho_w \vec{\mathbf{a}}_w \quad (3.150)$$

zusammenfassen und präsentiert die lokalisierte Form der klassischen Impulsbilanz aus Gl. 3.89 durch mikroskopische, homogenisierte Größen.

Aus Gl. 3.149 können folgende Eigenschaften für den Spannungstensor abgelesen werden: Nach Gl. 3.142 lautet der thermische Anteil des Spannungstensors

$$\mathcal{D}_w = \sum_i m^i (\hat{\mathbf{v}}^i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i) w^i \quad (3.151)$$

und stellt stets einen symmetrischen Tensor dar. Der Spannungsanteil  $\mathbf{T}_w^-$  aus Kraftwechselwirkungen in Gl. 3.148 ist jedoch a priori nicht als symmetrischer Tensor zu identifizieren. Dies ist nur möglich, wenn man für die Wichtungsfunktion  $w$  die DIRAC-Funktion  $\delta$  ansetzt, welche den Einflussbereich der molekularen Wirkung auf den Punkt  $P^i$  selbst konzentriert

$$\tilde{\mathbf{T}}_w^- = -\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} \otimes \boldsymbol{\xi} \delta(\mathbf{d}^i - \alpha \boldsymbol{\xi}) \delta(\mathbf{d}^j + \boldsymbol{\xi} - \alpha \boldsymbol{\xi}) d\alpha d\boldsymbol{\xi} \quad . \quad (3.152)$$

Es wird nur ein Beitrag zum Integral in Gl. 3.152 geliefert, falls  $\mathbf{d}^i = \alpha \boldsymbol{\xi}$  und  $\mathbf{d}^j = -\boldsymbol{\xi} + \alpha \boldsymbol{\xi}$  zugleich ist und somit  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{d}^i - \mathbf{d}^j = (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0) - (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j$  gilt. Anschaulich gesprochen werden dann nur noch Kraftwechselwirkungen  $\mathbf{f}^{ij}$  berücksichtigt, welche parallel zu  $(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)$  verlaufen (Zentralkräfte) und damit einen symmetrischen Tensor  $\tilde{\mathbf{T}}_w^-$  implizieren.

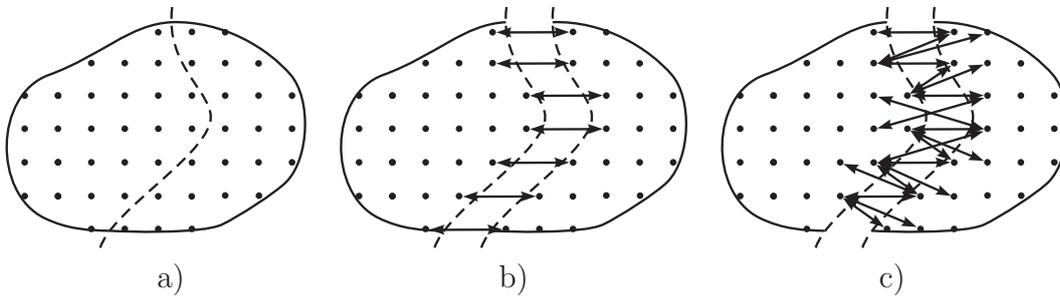
Falls dem Homogenisierungsprozess jedoch eine Längenskala  $\varepsilon > 0$  und somit  $w \neq$

$\delta$  zugrunde liegt, kann der Spannungstensor  $\mathbf{T}_w^-$  prinzipiell auch unsymmetrische Werte annehmen.

In der klassischen Kontinuumsmechanik ist der Spannungstensor über die Reaktionskraft (Traktion) einer Schnittfläche definiert. Aus mikroskopischer Sicht ist nach MURDOCH [149] solch eine Reaktionskraft auch definierbar und lautet an einer orientierten Schnittfläche  $\mathcal{S}$  mit Einheitsnormalenfeld  $\mathbf{n}$

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}_w^- \mathbf{n} \, d\mathcal{S} = \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{f}^{ij} h_{ij}(S) \quad . \quad (3.153)$$

Im Fall  $w = \delta$  verschwindet der skalare Faktor  $h_{ij}$ , sobald Kraftwechselwirkungen von Punkten  $i$  ausgehen, welche nicht direkt auf der Oberfläche  $\mathcal{S}$  liegen. Zudem gibt es immer nur einen Punkt  $j$  am entgegengesetzten Schnittufer, auf welchen diese Wechselwirkung stattfindet. Somit nimmt  $h_{ij}(S)$  nur den diskreten Wert 0 bzw. für einen bestimmten Punkt  $j$  den Wert 1 an. In Abb. 3.12 wird dieser Sachverhalt veranschaulicht.



**Abbildung 3.12:** a) Mikroskopische Ansicht eines Körpers mit Andeutung einer Schnittfläche. b) Kraftwechselwirkungen bei Lokalisierung mit  $w = \delta$ . Der Abstand zwischen den Punkten vor Trennung am Schnitt ist maßgebend für die Wechselwirkung. c) Exemplarisch eingezeichnete Kraftwechselwirkungen am Schnitt für nicht lokale Situation. Die Intensität der Wechselwirkung nimmt mit zunehmendem Abstand der Punkte vom Schnitt ab.

### 3.3.3 Erweiterungen zur Drehimpulsbilanz

MURDOCH schlägt in [150] eine generalisierte Drehimpulsbilanz auf Basis der gemittelten Impulsbilanz aus Gl. 3.133 vor. Wie in Kap. 3.2.3 wird bei der generalisierten Form das tensorielle Produkt zu einem beliebigen, aber festen Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  mit dem Abstand  $\mathbf{d}^i = \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0$  betrachtet

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{d}^i \otimes \mathbf{f}^{ij} w^i + \sum_i \mathbf{d}^i \otimes \mathbf{b}^i w^i = \sum_i \mathbf{d}^i \otimes \frac{d(m^i \vec{\mathbf{v}}^i)}{dt} w^i \quad . \quad (3.154)$$

Prinzipiell gleiche Umformungen wie bei der mikroskopischen Impulsbilanz in Kap. 3.3.2 führen zunächst auf den Ausdruck (vgl. Gl. 3.138)

$$\mathbf{c}_w + \mathbf{J}_w = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_w \mathbf{B}_w) + \operatorname{div}[\mathbf{M}_w] \quad , \quad (3.155)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_w &:= \sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{d}^i \otimes \mathbf{f}^{ij} w^i \quad , \quad \mathbf{J}_w := \sum_i \mathbf{d}^i \otimes \mathbf{b}^i w^i \quad , \\ \rho_w \mathbf{B}_w &:= \sum_i \mathbf{d}^i \otimes m^i \vec{\mathbf{v}}^i w^i \quad , \quad \mathbf{M}_w := \sum_i \mathbf{d}^i \otimes m^i (\vec{\mathbf{v}}^i \otimes \vec{\mathbf{v}}^i) w^i \quad . \end{aligned} \quad (3.156)$$

Der Term  $\mathbf{M}_w$  kann über die thermische Geschwindigkeitskomponente  $\hat{\mathbf{v}}^i$  aus Gl. 3.139 in die beiden Anteile

$$\mathbf{M}_w = \sum_i \mathbf{d}^i \otimes m^i \vec{\mathbf{v}}^i \otimes \hat{\mathbf{v}}^i w^i + \rho_w \mathbf{B}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w =: \hat{\mathbf{M}}_w + \rho_w \mathbf{B}_w \otimes \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.157)$$

getrennt werden<sup>24</sup> und nach Definition von

$$\dot{\mathbf{B}}_w := \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_w + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{B}_w \cdot \vec{\mathbf{v}}_w \quad (3.158)$$

kann man Gl. 3.155 in die Form

$$-\operatorname{div}[\hat{\mathbf{M}}_w] + \mathbf{c}_w + \mathbf{J}_w = \rho_w \dot{\mathbf{B}}_w \quad (3.159)$$

bringen, vgl. Impulsgleichung 3.147. Mit dem Theorem von NOLL zeigt MURDOCH [150] erneut, dass sich  $\mathbf{c}_w$  als die Divergenz eines Tensors  $\mathbf{C}_w^-$  dritter Stufe schreiben lässt und es folgt

$$\operatorname{div}[\mathbf{C}_w] + \mathbf{J}_w = \rho_w \dot{\mathbf{B}}_w \quad , \quad (3.160)$$

mit dem generalisierten Momentenspannungstensor dritter Stufe

$$\mathbf{C}_w = \mathbf{C}_w^- - \hat{\mathbf{M}}_w \quad . \quad (3.161)$$

Zur Herleitung der expliziten Form von  $\mathbf{C}_w^-$  wird auf [150] S.113 ff verwiesen. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_w^- = -\frac{1}{2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{d}^i - \alpha \xi + \mathbf{d}^j + \xi - \alpha \xi) \\ \otimes \mathbf{f}^{ij} \otimes \xi w(\mathbf{d}^i - \alpha \xi) w(\mathbf{d}^j + \xi - \alpha \xi) d\alpha d\xi \quad . \end{aligned} \quad (3.162)$$

<sup>24</sup>Jedoch ist  $\hat{\mathbf{M}}_w$  kein rein thermischer Ausdruck, sondern ein molekularer Massenfluss.

Konzentriert man den Einflussbereich der molekularen Wirkung auf die Punkte  $i$ , indem man für die Wichtungsfunktion  $w$  die DIRAC Funktion  $\delta$  ansetzt

$$\begin{aligned} \tilde{C}_w^- = & -\frac{1}{2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 \sum_i \sum_{j \neq i} (\mathbf{d}^i - \alpha \boldsymbol{\xi} + \mathbf{d}^j + \boldsymbol{\xi} - \alpha \boldsymbol{\xi}) \\ & \otimes \mathbf{f}^{ij} \otimes \boldsymbol{\xi} \delta(\mathbf{d}^i - \alpha \boldsymbol{\xi}) \delta(\mathbf{d}^j + \boldsymbol{\xi} - \alpha \boldsymbol{\xi}) d\alpha d\boldsymbol{\xi} \quad , \quad (3.163) \end{aligned}$$

wird nur noch ein Beitrag zum Integral in Gl. 3.163 geliefert, falls  $\mathbf{d}^i = \alpha \boldsymbol{\xi}$  und  $\mathbf{d}^j = -\boldsymbol{\xi} + \alpha \boldsymbol{\xi}$  zugleich ist und somit  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{d}^i - \mathbf{d}^j = (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^0) - (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j$ . Dies führt in Gl. 3.148 auf einen symmetrischen Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}_w^-$  und hier in Gl. 3.163 dazu, dass die Momentenspannung  $\tilde{C}_w^-$  verschwindet.<sup>25</sup>

**Daraus folgt, dass der Homogenisierungsprozess durch Beibehaltung einer Längenskale  $\varepsilon$  über das Auftreten unsymmetrischer CAUCHY-Spannungen und weiterhin auch Momentenspannungen  $C_w^-$  entscheidet.**

Da es sich nach MURDOCH [150] S.122 ff., bei  $\hat{\mathbf{M}}_w$  um einen molekularen Massenfluss handelt, ähnlich der thermischen Spannungskomponente  $\mathcal{D}$  aus Gl. 3.142, gilt bei Vernachlässigung von  $\hat{\mathbf{M}}_w$  im Modell, dass lediglich die Wahl einer Längenskale  $\varepsilon$  beim Homogenisierungsprozess das Auftreten von Momentenspannungen im Modell ermöglicht.

Während die Massenbilanz und die Impulsbilanz aus mikroskopisch gemittelten Größen formal mit den lokalen, klassischen Gleichungen entsprechen, hebt sich die mikroskopisch gemittelte Drehimpulsbilanz in Gl. 3.160 von der klassischen Drehimpulsbilanz ab. Für eine Diskussion der COSSERAT-Theorie sind folgende Erkenntnisse nützlich.

**Das vorgestellte mikroskopische Modell knüpft die Symmetrie der CAUCHY-Spannung an die Art der Lokalisierung bzw. Homogenisierung sowie an die Annahme der Wechselwirkung durch Zentralkräfte. Eine Drehimpulsbilanz ist hierzu nicht notwendig und liefert überdies nicht jenen Zusammenhang.**

**Die Existenz von Momentenspannungen im mikroskopischen Modell ist durch die Wahl einer Längenskale  $\varepsilon$  beim Homogenisierungsprozess bedingt.**

<sup>25</sup>Dies ist durch Einsetzen von  $\mathbf{d}^i = \alpha \boldsymbol{\xi}$  und  $\mathbf{d}^j = -\boldsymbol{\xi} + \alpha \boldsymbol{\xi}$  sofort ersichtlich.

Die mikroskopische Drehimpulsbilanz in Gl. 3.160 enthält den Spannungstensor nicht explizit. Die Gleichung behandelt das Gleichgewicht zwischen Momentenspannungsquellen und deren Ursachen.

Der fehlende explizite Bezug zwischen Spannung und Momentenspannung aus mikroskopischer Sicht stellt für MURDOCH eine ungelöste Aufgabe dar.

Der nächste Abschnitt erarbeitet in einem erweiterten Kontinuumsmodell das Verhältnis zwischen Spannungen und Momentenspannungen auf andere Weise.

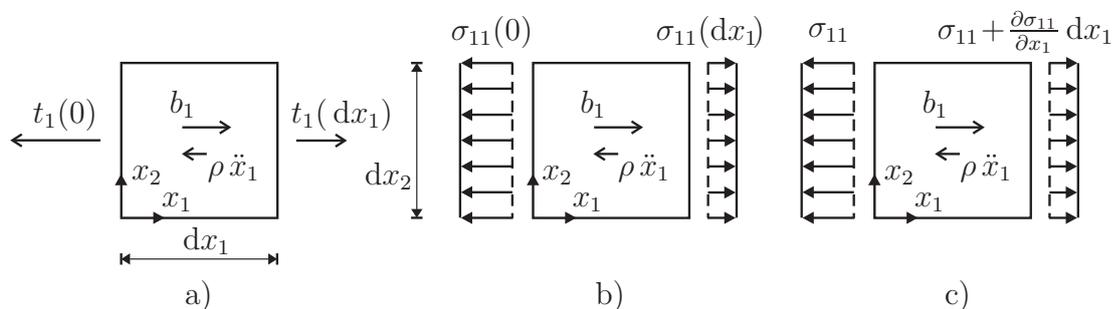
### 3.4 Spannung und Momentenspannung

Die klassische Impulsbilanz des Kap. 3.2.2 setzt in Gl. 3.84 zwei Kategorien von Kraftwirkungen an: Volumenkräfte im Körper  $\mathcal{B}$  und Traktionen  $\mathbf{t}$  auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$ . Letztere werden auch als Spannungsvektoren bezeichnet und sind mit

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \tag{3.164}$$

über die geweckte Reaktionskraft  $\mathbf{f}$  einer Schnittfläche  $A$  definierbar.

Form und Krümmung der Schnittfläche verlieren im Grenzfall  $A \rightarrow 0$  jegliche Bedeutung, lediglich die Ausrichtung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche spielt eine Rolle. Diesem Sachverhalt liegt das CAUCHY-Theorem  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  zugrunde, womit der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in der klassischen Kontinuumsmechanik als lineare Abbildung eingeführt wird. Dies bedeutet, dass der Spannungstensor einen Spannungsvektor an einer auf **Punktgröße** geschrumpften Schnittfläche repräsentiert.



**Abbildung 3.13:** Zweidimensionaler CAUCHY-Würfel in vereinfachter Situation. a) Die Volumenkraft  $b_1$ , die Massenträgheit  $\rho \ddot{x}_1$  sowie die Traktionen  $t_1$  an den Schnittflächen in  $x_1$  Richtung bilden ein Kräftegleichgewicht. b) Die Traktionen werden nun als Spannung  $\sigma_{11}$  mit konstantem Verlauf in  $x_2$  Richtung, also tangential zur Schnittfläche) angetragen. c) Die Spannung  $\sigma_{11}$  wird über eine TAYLOR-Reihe in  $x_1$  Richtung entwickelt, welche Terme quadratischer und höherer Ordnung vernachlässigt.

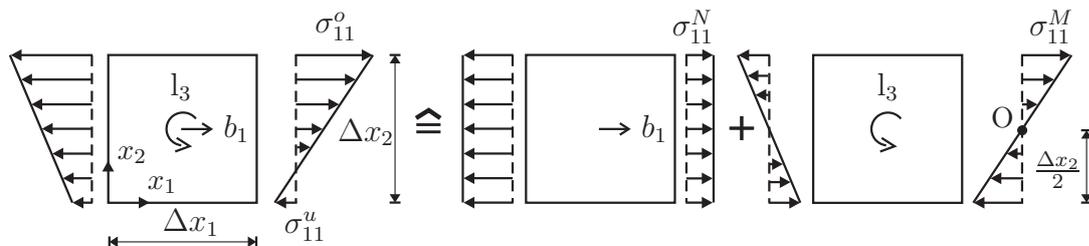
Man gewinnt die lokale Form der Impulsgleichung 3.89, indem man ein Kräftegleichgewicht mit beiden Kategorien von Kraftwirkungen (Volumenkräfte und Traktionen) und unter Berücksichtigung von Massenträgheit an einem CAUCHY-Würfel herstellt. Dieser Würfel ist zwar infinitesimal klein, jedoch noch so groß, dass im Gegensatz zu einem **Punkt** auch noch eine Drehimpulsbilanz möglich ist. In Abb. 3.13 ist an einer vereinfachten Situation (ebenes Problem und Traktion nur in  $x_1$ -Richtung) folgende Problematik erkennbar.

Während in Abb. 3.13 a) der Spannungsvektor eindeutig anzutragen ist, stellt sich in Abb. 3.13 b) die Frage, wie die Spannung tangential zur Schnittfläche verläuft. Am **Punkt** stellt sich diese Frage nicht. Der in Abb. 3.13 b) und c) gewählte konstante Spannungsverlauf in Tangentialrichtung ist nicht notwendig, um das lokalisierte Ergebnis der klassischen Impulsbilanz zu reproduzieren. Er ist jedoch notwendig, um das lokalisierte Ergebnis der klassischen Drehimpulsbilanz mit symmetrischer CAUCHY-Spannung zu liefern.

Ein konstanter Spannungsverlauf tangential zur Schnittfläche ist eine von der **lokalen Betrachtung am Punkt** herbeigeführte **Annahme**, die dazu führt, dass Spannungen  $\sigma$  in einer Drehimpulsbilanz nur noch dann einen Einfluss haben, wenn diese einen unsymmetrischen Tensor darstellen. Verzichtet man genau auf diese **Annahme** und berücksichtigt bei einer Linearisierung der Spannung auch Veränderlichkeiten in den anderen Richtungen

$$\text{Lin } \sigma_{ij}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_3} \Delta x_3 \quad , \quad (3.165)$$

so kann der CAUCHY-Würfel auch noch für etwas größere Abmessungen  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  als Näherungsmodell einer wahren Situation angesehen werden. Zudem ist das Modell durch eingeprägte Volumenmomente  $\mathbf{l}$  erweiterbar, deren Gleichgewicht auf einen unsymmetrischen Spannungstensor führen können.



**Abbildung 3.14:** Zweidimensionaler CAUCHY-Würfel in vereinfachter und statischer Situation. Er ist durch eingepreßtes Moment  $l_3$  und linearer Veränderlichkeit der Spannungskomponente  $\sigma_{11}$  in  $x_2$ -Richtung (also tangential zur Schnittfläche) erweitert.

Abb. 3.14 orientiert sich an der vereinfachten Situation in Abb. 3.13 und wählt zusätzlich den statischen Fall. Jedoch ist eine mögliche Veränderung der Spannung  $\sigma_{11}$  tangential zur Schnittfläche des CAUCHY-Würfels durch die Randwerte  $\sigma_{11}^o$  und  $\sigma_{11}^u$  gekennzeichnet. Der Verlauf von  $\sigma_{11}$  lässt sich in zwei Anteile zerlegen. Den in  $x_2$ -Richtung konstanten Anteil

$$\sigma_{11}^N = \frac{\sigma_{11}^o + \sigma_{11}^u}{2} \quad , \quad (3.166)$$

sowie den in  $x_2$ -Richtung linearen Anteil mit den Randwerten

$$\sigma_{11}^M(x_2 = 0) = \frac{\sigma_{11}^u - \sigma_{11}^o}{2} \quad , \quad \sigma_{11}^M(x_2 = \Delta x_2) = \frac{\sigma_{11}^o - \sigma_{11}^u}{2} \quad . \quad (3.167)$$

Der linear veränderliche Anteil besitzt keine resultierende Kraft in  $x_1$  Richtung und hat somit keinen Einfluss auf die Impulsbilanz. Doch resultiert aus diesem Anteil ein äquivalentes Moment der Größe

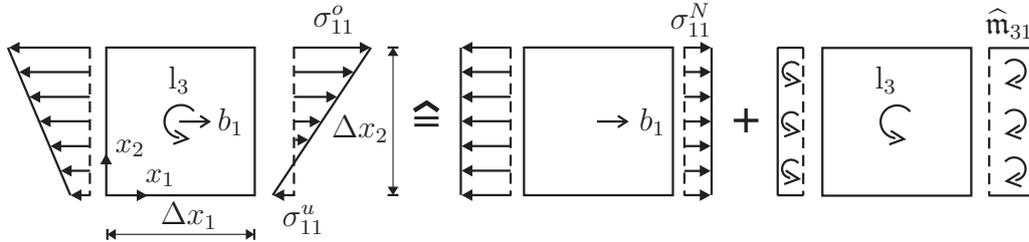
$$m_{31} = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{11}^M \right) \frac{\Delta x_2}{3} = \frac{(\Delta x_2)^2}{6} \sigma_{11}^M \quad . \quad (3.168)$$

Hierbei ist  $\frac{1}{2} \frac{\Delta x_2}{2} \sigma_{11}^M$  die Resultierende des oberen bzw. unteren Spannungsdreiecks und  $\frac{\Delta x_2}{3}$  der Hebelarm zum Mittelpunkt O. Aus Gl. 3.168 ist ersichtlich, dass das Moment  $m_{31}$  bei kleinen Abmessungen  $\Delta x_2$  mit quadratischem Exponent gegen Null tendiert.

Das COSSERAT-Kontinuum kann nun als die eben diskutierte Erweiterung der Spannungsapproximation am CAUCHY-Würfel betrachtet werden. Während  $m_{31}$  in Gl. 3.168 die Einheit eines Momentes pro Länge besitzt, wird im COSSERAT-Kontinuum durch die Verteilung dieses Momentes über die Höhe  $x_2$  durch

$$\widehat{m}_{31} := \frac{m_{31}}{\Delta x_2} \quad (3.169)$$

eine Momentenspannung  $\widehat{m}_{31}$  mit der Einheit Moment pro Fläche definiert. Diese ist der Ersatz für den linear veränderlichen Anteil der Spannung  $\sigma_{11}$  in  $x_2$ -Richtung und kann mit eingepprägten Volumenmomenten  $\mathbf{I}$  im Gleichgewicht stehen, so wie in Abb. 3.15 dargestellt.



**Abbildung 3.15:** Zweidimensionaler CAUCHY-Würfel in vereinfachter und statischer Situation. Die Momentenspannung  $\hat{\mathbf{m}}_{31}$  ersetzt im COSSERAT-Kontinuum die lineare Veränderlichkeit der Spannung tangential zur Schnittfläche.

Die COSSERAT-Theorie setzt in der Drehimpulsbilanz die beiden soeben exemplarisch diskutierten Kategorien von Momentenwirkungen an: Volumenmomente  $\mathbf{l}$  im Körper  $\mathcal{B}$  und Traktionsmomente  $\mathbf{c}$  auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$ , z.B. ERINGEN [61]. Letztere sind mit

$$\mathbf{c} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{m}}{dA} \quad (3.170)$$

über das geweckte Reaktionsmoment  $\mathbf{m}$  einer Schnittfläche  $A$  definierbar, vgl.  $m_{31}$  in Gl. 3.168 und deren Ursache. Da auch für  $\mathbf{c}$  das CAUCHY-Theorem

$$\mathbf{c} = \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.171)$$

gilt, wird der Momentenspannungstensor  $\hat{\mathbf{m}}$  als lineare Abbildung eingeführt.

Die vektorielle Drehimpulsbilanz aus Gl. 3.100 erweitert<sup>26</sup> sich damit auf

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{b} + \mathbf{l}) \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\mathbf{r} \times \mathbf{t} + \mathbf{c}) \, da = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho^E \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad , \quad (3.172)$$

wobei der Vektor  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$  den Abstand der Punkte  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  vom festen Drehpunkt  $\mathbf{x}^0$  darstellt.

Unter Verwendung von Gl. 3.101 bis Gl. 3.107, dem CAUCHY-Theorem sowie dem GAUSSSchen Integralsatz ergibt sich aus Gl. 3.172 bei lokaler Erfüllung der Impulsbilanz die erweiterte Drehimpulsbilanz

$$\int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{div}[\hat{\mathbf{m}}] + \mathbf{l} + \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T) \, dv = 0 \quad . \quad (3.173)$$

<sup>26</sup>Das Massenpunktsystem in Gl. 3.99 liefert keine Grundlage für diese Erweiterung.

Die rechte Seite der Gl. 3.173 muss nach EHLERS [235] für mikropolare Medien nochmals erweitert werden, was durch den Term  $\rho_w \dot{\mathbf{B}}_w$  in Gl. 3.160 angezeigt wird. So ergibt sich die axiale lokale Form

$$\operatorname{div}[\hat{\mathbf{m}}] + \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T = \rho \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}) \quad , \quad (3.174)$$

wobei  $\boldsymbol{\Theta}$  der Mikroträgheitstensor pro Einheitsmasse und  $\boldsymbol{\omega}$  die totale rotatorische Geschwindigkeit ist. Es ist zu beachten, dass  $\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}$  Drehmomentenvektoren der einzelnen Mikropartikel des polaren Mediums darstellen, die es im klassischen Kontinuum angesichts des zugrunde gelegten Punktcharakters nicht geben kann.

## 4 Konstitutive Materialbeschreibung

Die kinematischen Beziehungen aus Kap. 3.1 reichen für eine Lösung des Randwertproblems nicht aus. Dadurch entsteht der Zwang, aber zugleich auch die Möglichkeit, konstitutive Gleichungen dem Modell hinzuzufügen und damit das Antwortverhalten des Materials zu definieren. Dies impliziert, dass durch die erweiterte Kinematik im COSSERAT-Modell ein zusätzlicher Bedarf an konstitutiven Gesetzen besteht. Es bedeutet aber auch mehr Möglichkeiten das Antwortverhalten zu spezifizieren.

Materialgleichungen liefern im Vergleich zu Kap. 3 auf andere Art und Weise die Definition des Spannungstensors. Auch dessen Eigenschaften, ob z.B. prinzipiell symmetrisch oder unsymmetrisch sind aus der Konstitution ablesbar. Dies wird zunächst an hyperelastischem Material vorgeführt.

Danach werden für diese Arbeit relevante Prinzipien zur systematischen Formulierung der Konstitution betrachtet. Eine ausführliche Darstellung dieser Prinzipien findet man z.B. bei NOLL [178] oder ERINGEN [60].

Die vorliegende Arbeit betrachtet ausschließlich isotherme Prozesse, welche der spezifischen Formänderungsenergie Potentialcharakter verleihen. Mit der Invariantentheorie gelingt eine skalarwertige Beschreibung der funktionalen Formänderungsenergie über Grund- und Simultaninvarianten, siehe z.B. ERINGEN [59] oder SPENCER [217].

Wie z.B. in SCHRÖDER & NEFF [209], KLINKEL [101], KLINKEL et al. [102] oder BALZANI et al. [9] wird auch hier ein Strukturtensor zur Beschreibung transversaler Isotropie verwendet. Die Argumenttensoren der Invarianten bestehen so aus einem Strukturtensor und dem Verzerrungstensor, siehe z.B. BOEHLER [17], SCHRÖDER & NEFF [210].

Nach der Behandlung linearer Elastizität für COSSERAT-Modelle folgt eine Diskussion zur stofflich **und** geometrisch linearen COSSERAT-Theorie. Es motiviert das geometrisch und stofflich nichtlineare COSSERAT-Modell dieser Arbeit. Nach der Erarbeitung daraus resultierender nichtlinearer Spannungen und Momentenspannungen schließt das Kapitel mit der Gesamt- und Variationsformulierung.

### 4.1 Hyperelastisches Material

Wird die Existenz einer spezifischen, freien, inneren Formänderungsenergiedichte  $W$  vorausgesetzt, welche nur von  $\mathbf{F} = \text{Grad}[\varphi]$  lokal abhängt, spricht man von simplem hyperelastischem Material. Unter Berücksichtigung äußerer mecha-

nischer Einwirkungen in der externen Energie  $\Pi^{\text{ext}}$  fordert man durch

$$\Pi(\varphi) = \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{F}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } \varphi \quad (4.1)$$

die Minimierung der Gesamtenergie  $\Pi(\varphi)$  des Körpers. Sind die äußeren mechanischen Einwirkungen ausschließlich konservativ, dann ist  $\Pi(\varphi)$  eine Potentialfunktion.

Die Variation der Gl. 4.1 gemäß

$$\delta\Pi(\varphi, \delta\varphi) = \int_{\mathcal{B}_0} \delta W(\mathbf{F}, \delta\mathbf{F}) \, dV + \delta\Pi^{\text{ext}}(\varphi, \delta\varphi) = 0 \quad (4.2)$$

fordert lediglich stationäre Punkte der Minimierungsaufgabe.

Wird die spezifische Formänderungsenergie  $W$  als Funktion des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \in \text{PSym}$  formuliert, ergibt sich der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}_1$  im Variationsproblem der Gl. 4.2 zu

$$\begin{aligned} \delta W(\mathbf{C}) &= \langle \partial_{\mathbf{C}} W(\mathbf{C}), \delta\mathbf{C} \rangle = \langle \partial_{\mathbf{C}} W(\mathbf{C}), \mathbf{F}^T \delta\mathbf{F} + \delta\mathbf{F}^T \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle 2 \text{sym}[\partial_{\mathbf{C}} W(\mathbf{C})], \mathbf{F}^T \delta\mathbf{F} \rangle = \underbrace{\langle 2 \mathbf{F} \text{sym}[\partial_{\mathbf{C}} W(\mathbf{C})], \delta\mathbf{F} \rangle}_{\mathbf{S}_1} \quad . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Daraus folgt sofort die Symmetrie des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\mathbf{S}_2 := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{S}_1 = 2 \text{sym}[\partial_{\mathbf{C}} W(\mathbf{C})] \quad (4.4)$$

und damit auch die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{F} \mathbf{S}_2 \mathbf{F}^T \quad . \quad (4.5)$$

Die Wahl des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors ergibt weiterhin Form-Invarianz der spezifischen Formänderungsenergie  $W$  unter Starrkörperrotationen **und** Spiegelungen

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad \forall \mathbf{R} \in \text{O}(3) \quad . \quad (4.6)$$

Allerdings ist schon die  $\text{SO}(3)$ -Invarianz Forderung alleine hinreichend für die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors, denn es gilt

$$\forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) : \quad W(\mathbf{Q}\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}) \quad \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym} \quad . \quad (4.7)$$

Dazu betrachtet man die Rotation  $\mathbf{Q}(\xi) \in \text{SO}(3)$  als Funktion des Parameters  $\xi$  mit  $\mathbf{Q}(0) = \mathbb{1}$  und bildet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\mathbf{Q}(\xi) \mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial \xi} W(\mathbf{F}) &\Leftrightarrow \left\langle \frac{\partial W(\mathbf{Q} \mathbf{F})}{\partial (\mathbf{Q} \mathbf{F})}, \frac{\partial (\mathbf{Q}(\xi) \mathbf{F})}{\partial \xi} \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \langle \partial_{\mathbf{Q} \mathbf{F}} W(\mathbf{Q} \mathbf{F}), \mathbf{Q} \mathbf{A}(\xi) \mathbf{F} \rangle = 0 &, \quad \mathbf{A} \in \mathfrak{so}(3) \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{Q}^T \partial_{\mathbf{Q} \mathbf{F}} W(\mathbf{Q} \mathbf{F}) \mathbf{F}^T, \mathbf{A} \rangle = 0 &. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Wählt man nun ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\mathbf{Q}(\xi) = \mathbb{1}$ , kann Gl. 4.8 wegen der Antisymmetrie von  $\mathbf{A}$  für beliebige  $\mathbf{A}$  nur erfüllt werden, wenn

$$\text{skew}[\partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T] \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T}_{\mathbf{S}_1} \in \text{Sym} \quad . \quad (4.9)$$

Wegen

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{S}_1 \mathbf{F}^T \quad (4.10)$$

folgt aus Gl. 4.9 unmittelbar die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors.<sup>27</sup>

**So kann gesagt werden, dass eine Materialformulierung, welche nur von  $\mathbf{F}$  abhängt, also lokalen Charakter besitzt und zudem hyperelastisch und Links-SO(3) invariant ist, immer symmetrische CAUCHY-Spannungen liefert.**

Das COSSERAT-Kontinuum erfüllt mit dem gekoppelten Verzerrungsmaß  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}$  dieses Kriterium nicht.

## 4.2 Prinzipien zur Materialformulierung

Nun soll eine konkrete Funktion für die spezifische Formänderungsenergie im COSSERAT-Modell aufgebaut werden, wobei grundlegende Prinzipien der rationalen Kontinuumsmechanik zu beachten sind. Die Arbeit konzentriert sich dabei auf isotropes und transversal isotropes Material in Verbindung mit COSSERAT-Verzerrungen.

---

<sup>27</sup> Nicht jeder Ausdruck für eine freie Energie, welcher SO(3)-Invariant ist, lässt sich als  $W = W(\mathbf{C})$  darstellen. So ist z.B.  $W(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F}\|^2 - \det[\mathbf{F}]$  eine SO(3)-Invariante Funktion, jedoch nicht O(3)-Invariant, da Spiegelungen zwar die Norm erhalten, aber das Vorzeichen der Determinante ändern. Fordert man wie in Kap. 3.1.1  $\det[\mathbf{F}] > 0$  ist dieser Fall jedoch ausgeschlossen.

Ein Material ist isotrop und besitzt damit keine ausgezeichnete Richtung, falls die spezifische Formänderungsenergie die Bedingung

$$W(\mathbf{F} \mathbf{Q}) = W(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) \quad (4.11)$$

erfüllt. Die Gl. 4.11 bedeutet Rechts-Invarianz bei beliebig starrer Drehung der Referenzkonfiguration. Der auf gedrehte Koordinaten bezogene Deformationsgradient  $\mathbf{F}^*$  ergibt sich zu  $\mathbf{F}^* \mathbf{Q} = \mathbf{F}$ , falls  $\mathbf{X}^* = \mathbf{Q} \mathbf{X}$  gilt. So ist Gl. 4.11 als Forminvarianz der Formänderungsenergie  $W$  unter Drehung der Referenzkoordinaten zu verstehen.

Ein Material ist anisotrop, falls die Bedingung in Gl. 4.11 nur für eine materielle Symmetriegruppe  $\mathcal{G} \subsetneq \text{SO}(3)$  gilt (z.B. KRAWIETZ [107])

$$W(\mathbf{F} \mathbf{Q}) = W(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \quad . \quad (4.12)$$

Da  $W(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{C})$  die Objektivität garantiert, übersetzt man beide Invarianzforderungen in die Darstellung  $\hat{W}$ . Für Isotropie gilt dann

$$\hat{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) = \hat{W}(\mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3), \quad (4.13)$$

und für Anisotropie

$$\hat{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) = \hat{W}(\mathbf{C}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \quad . \quad (4.14)$$

Diese Arbeit befasst sich lediglich mit einem speziellen anisotropen Fall - der transversalen Isotropie. Der Einheitsvektor  $\mathbf{a}$  beschreibt die Vorzugsrichtung der transversalen Isotropie und durch  $\|\mathbf{F} \mathbf{a}\|^2$  soll dies in der Formänderungsenergie Bewertung finden. Die Richtung  $\mathbf{a}$  wird in der Referenzkonfiguration gemessen. Aus

$$\|\mathbf{F} \mathbf{a}\|^2 = \langle \mathbf{F} \mathbf{a}, \mathbf{F} \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \underbrace{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}}_{:=\mathbf{M}} \rangle = \langle \mathbf{C}, \mathbf{M} \rangle \quad (4.15)$$

motiviert sich die Verwendung eines Struktur tensors  $\mathbf{M}$ . Die Einschränkung auf eine materielle Symmetriegruppe in Gl. 4.12 ist einzusehen, wenn der auf gedrehte Koordinaten bezogene Deformationsgradient bei ungedrehter Richtung  $\mathbf{a}$ , nämlich  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{Q}$  betrachtet wird und die Invarianz

$$\|\mathbf{F} \mathbf{a}\|^2 \rightarrow \|\mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{F} \mathbf{a}\|^2 \quad (4.16)$$

nur dann zutrifft, wenn  $\mathbf{Q} \mathbf{a} = \mathbf{a}$  gilt. Dies definiert die materielle Symmetriegruppe über

$$\mathcal{G} := \{ \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) : \mathbf{Q} \mathbf{a} = \mathbf{a} \} \quad , \quad (4.17)$$

wobei  $\mathbf{a}$  zugleich Eigenvektor und damit die Drehachse der Rotation  $\mathbf{Q}$  darstellt.

Nach BOEHLER [17] kann jede anisotrope Funktion  $\hat{W}$  als isotrope Funktion  $\hat{W}^\sharp$  in einem erweiterten Satz von Strukturtenoren  $\boldsymbol{\xi}$  durch

$$\begin{aligned}\hat{W}(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}) &= \hat{W}(\mathbf{C}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \\ \hat{W}(\mathbf{C}) &= \hat{W}^\sharp(\mathbf{C}, \boldsymbol{\xi}), \quad \hat{W}^\sharp \text{ isotrop in } (\mathbf{C}, \boldsymbol{\xi})\end{aligned}\quad (4.18)$$

dargestellt werden, was auch als **Isotropisierungsprinzip** bezeichnet wird.

Im Fall der transversalen Isotropie reduziert sich  $\boldsymbol{\xi}$  auf  $\mathbb{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  und die Isotropieforderung an  $\hat{W}$  lautet

$$\hat{W}^\sharp(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbb{M} \mathbf{Q}) = \hat{W}^\sharp(\mathbf{C}, \mathbb{M}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3). \quad (4.19)$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\mathbb{M} \mapsto \mathbf{Q}^T \mathbb{M} \mathbf{Q}$  der Transformation  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$  korrespondiert. Dann erklärt sich Gl. 4.19 von selbst: wird das Referenzkoordinatensystem gedreht und wird gleichzeitig die Vorzugsrichtung entsprechend transformiert ( $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$ ) bleibt die Energie invariant.

Das kann man auch aus

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^* &= \mathbf{F} \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) \\ \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}^* &= \mathbf{a}^* \otimes \mathbf{a}^* = \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}^T \mathbf{a} = \mathbf{Q}^T \mathbb{M} \mathbf{Q}, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) \\ \langle \mathbf{C}, \mathbb{M} \rangle &\rightarrow \langle \mathbf{C}^*, \mathbb{M}^* \rangle = \langle \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbb{M} \mathbf{Q} \rangle, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{SO}(3)\end{aligned}\quad (4.20)$$

und wegen  $\mathbf{Q}^T \mathbb{M} \mathbf{Q} = \mathbb{M}$ ,  $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}$  durch

$$W(\mathbf{C}, \mathbb{M}) = W(\mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}, \mathbb{M}), \quad \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \quad (4.21)$$

ersehen.

Um eine Darstellung der transversalen Isotropie zu erhalten, reicht es also die isotropen Tensorfunktionen  $(\mathbf{C}, \mathbb{M}) \mapsto \hat{W}^\sharp(\mathbf{C}, \mathbb{M})$  vollständig zu charakterisieren.

Die Forderung in Gl. 4.19 legt es nahe, die Formänderungsenergie mit Hilfe von isotropen Invarianten zu formulieren. Diese so genannte Integritätsbasis besteht zunächst aus den Invarianten der Argumenttensoren  $\mathbf{H} \sim \mathbf{C}$  und  $\mathbb{M}$ . Weiterhin sind nach ERINGEN [59] nicht mehr reduzierbare Invarianten aus Produkten der Argumenttensoren hinzuzuziehen, die sogenannten Simultaninvarianten. Da der Strukturtensor  $\mathbb{M}$  die Eigenschaften

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^2 = \mathbb{M}^3 \quad , \quad \text{tr}[\mathbb{M}] = 1 \quad (4.22)$$

besitzt, verbleibt die Integritätsbasis

$$\text{Grundinvarianten: } \operatorname{tr}[\mathbf{H}], \operatorname{tr}[\mathbf{H}^2], \operatorname{tr}[\mathbf{H}^3], \dots \quad (4.23)$$

$$\text{Simultaninvarianten: } \operatorname{tr}[\mathbf{H}\mathbf{M}], \operatorname{tr}[\mathbf{H}^2\mathbf{M}], \operatorname{tr}[\mathbf{H}^3\mathbf{M}], \dots \quad (4.24)$$

Die Integritätsbasis ist gegen jegliche orthogonale Transformation objektiv

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\mathbf{H}^i] &= \operatorname{tr}[\mathbf{Q}^T \mathbf{H}^i \mathbf{Q}] \\ \operatorname{tr}[\mathbf{H}^i \mathbf{M}] &= \operatorname{tr}[\mathbf{Q}^T \mathbf{H}^i \mathbf{M} \mathbf{Q}] \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad \mathbf{Q} \in \text{O}(3) \quad . \end{aligned} \quad (4.25)$$

### 4.3 Lineare Elastizität im isotropen Fall

Die spezifische Formänderungsenergie  $W^{\text{lin}}$  der klassischen, isotropen, linearen Elastizität ist über das symmetrische Verzerrungsmaß  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\text{Grad}[\mathbf{u}]]$  durch

$$W^{\text{lin}} := \mu \operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 = \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 \quad (4.26)$$

definiert (siehe auch Tafel A.4).

Nun soll diskutiert werden, wie sich antisymmetrische Verzerrungen in der Integritätsbasis und der Formänderungsenergie repräsentieren, falls sich Verzerrungen  $\mathbf{H} := \bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}$  additiv aus einem symmetrischen Anteil  $\overset{S}{\mathbf{H}}$  und einem antisymmetrischen Anteil  $\overset{A}{\mathbf{H}}$  zusammensetzen.<sup>28</sup> Diese Aufteilung ist sinnvoll, um die Materialparameter einer COSSERAT-Theorie mit der klassischen linearen Elastizität aus Gl. 4.26 abzugleichen.

Betrachtet man nur die Grundinvarianten in Gl. 4.23, so untersucht man den isotropen Fall. Wegen  $\operatorname{tr}[\mathbf{H}] = \operatorname{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}]$  und

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\mathbf{H}^2] &= \langle \mathbf{H}\mathbf{H}, \mathbb{1} \rangle = \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}^T \rangle = \langle \overset{S}{\mathbf{H}} + \overset{A}{\mathbf{H}}, (\overset{S}{\mathbf{H}} + \overset{A}{\mathbf{H}})^T \rangle \\ &= \langle \overset{S}{\mathbf{H}}, \overset{S}{\mathbf{H}} \rangle + \langle \overset{A}{\mathbf{H}}, (\overset{A}{\mathbf{H}})^T \rangle + \underbrace{\langle \overset{S}{\mathbf{H}}, (\overset{A}{\mathbf{H}})^T \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \overset{A}{\mathbf{H}}, \overset{S}{\mathbf{H}} \rangle}_{=0} \\ &= \operatorname{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2] + \operatorname{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2] \end{aligned} \quad (4.27)$$

erhält man bei Beschränkung auf maximal quadratische Terme die drei Grundinvarianten

$$\operatorname{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}], \operatorname{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2], \operatorname{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2] \quad . \quad (4.28)$$

<sup>28</sup> Da die Verzerrung  $\mathbf{H}$  geometrisch nichtlinear ist, wird der Begriff der linearen Elastizität, womit sich dieser Abschnitt beschäftigt, auf die physikalische Größe der Spannung beschränkt.

Möchte man zwischen antisymmetrischen und symmetrischen Verzerrungen in der Formänderungsenergie unterscheiden, lautet der allgemeinste quadratische Ansatz für isotropes, zentrosymmetrisches, linear-elastisches Material

$$\begin{aligned} W_{\text{mp}}(\mathbf{H}) &= \mu \operatorname{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2] + \mu_c \operatorname{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2] + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}])^2 \\ &= \mu \|\operatorname{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])^2 \quad . \quad (4.29) \end{aligned}$$

Den Ansatz in Gl. 4.29 findet man u.a. bei MINDLIN [141], ERINGEN<sup>29</sup> et al. [63] und NEFF [164]. Etliche Arbeiten zur COSSERAT-Theorie geben  $\mu_c = \mu$  implizit vor, indem in der Integritätsbasis keine Trennung in symmetrische und antisymmetrische Verzerrungen vorgenommen wird.

In Gl. 4.29 sind die Vorfaktoren der symmetrischen Verzerrungen bereits durch direkten Vergleich mit Gl. 4.26 identifiziert. Die Lamé Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  lassen sich aus dem homogenen Zugtest und dessen mechanischem Modell ableiten (siehe z.B. STEIN [218]). Die praktisch gemessenen Größen Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktion  $\nu$  werden als Ingenieurkonstanten bezeichnet und besitzen zu den Parametern  $\mu$  und  $\lambda$  die bekannten Beziehungen

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad . \quad (4.30)$$

Der Kopplungsmodul  $\mu_c$  spielt allerdings im homogenen Zugtest und dessen mechanischem Modell keine Rolle. Die **homogene** Zugdeformation ist a priori frei von Drehungen<sup>30</sup> und antisymmetrischen Verzerrungen  $\overset{A}{\mathbf{H}} = \operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] = \operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}}]$ .

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Diskussion der COSSERAT-Materialparameter, insbesondere des Kopplungsmoduls  $\mu_c$ . Die Diskussion kann aus verschiedenen Blickwinkeln geführt werden. In diesem Abschnitt können Überlegungen zur Gestalt der spezifischen Formänderungsenergie den Parameter  $\mu_c$  belichten.

So trägt der Kopplungsmodul  $\mu_c$  zur Formänderungsenergie nur dann bei, wenn die zusätzliche Kinematik  $\hat{\mathbf{R}} \neq \mathbb{1}$  in Erscheinung tritt, es gilt

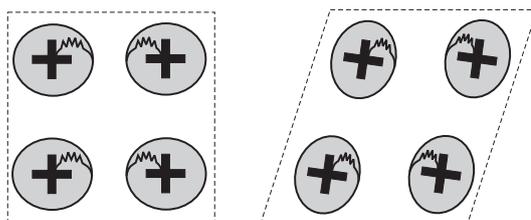
$$\hat{\mathbf{R}} \equiv \mathbb{1} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{R}} \equiv \operatorname{polar}[\mathbf{F}] \Rightarrow \bar{\mathbf{U}} \in \operatorname{Sym} \quad . \quad (4.31)$$

Umgekehrt ist für den Grenzfall  $\mu_c \rightarrow \infty$  klar, dass eine Formänderung  $\operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}}]$  verhindert wird und damit  $\hat{\mathbf{R}} \equiv \mathbb{1}$  zu erwarten ist.

<sup>29</sup> COWIN weist in [35] auf Probleme bzgl. der Darstellung von ERINGEN hin, siehe Tafel A.6.

<sup>30</sup>  $\hat{\mathbf{R}} = \operatorname{polar}[\mathbf{F}] \equiv \mathbb{1}$

Der Parameter  $\mu_c$  ist wie eine direkte Drehfeder zwischen COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  und Makrorotation  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  aufzufassen. In Abb. 4.1 ist eine homogene Scherdeformation gezeigt. Für den Fall einer hohen Federsteifigkeit, also einem großen Kopplungsmodul  $\mu_c$ , folgt die COSSERAT-Rotation der Makrorotation direkt.



**Abbildung 4.1:** Drehfedermodell für großes  $\mu_c$  bei homogener Scherdeformation.

Für einen echt positiven Beitrag zur Formänderungsenergie aus unsymmetrischen Verzerrungen in Gl. 4.29 lautet die Forderung an den Kopplungsmodul  $\mu_c > 0$ .<sup>31</sup>

Im Gegensatz zu allen vorhergehenden Ansätzen in der Literatur bemerkt NEFF [160], dass der Fall  $\mu_c = 0$  trotzdem möglich ist und auf ein mathematisch wohl gestelltes Problem führt, da die Existenz von globalen Minima gesichert ist.<sup>32</sup>

Es setzt jedoch voraus, dass man die nichtlineare Kinematik der COSSERAT-Theorie, wie in Kap. 3.1.3 dargestellt, beibehält. Ersetzt man diese Kinematik durch lineare Beziehungen, wie es in der geometrisch linearen COSSERAT-Theorie der Fall ist, schränkt man die Wahl des Parameters  $\mu_c$  ein. Dies wird in Kap. 4.5 vorgeführt. Weitere Betrachtungen zum Einfluss von  $\mu_c$  finden sich im Anhang A.3.

## 4.4 Lineare Elastizität im transversal isotropen Fall

SPENCER [217] gibt für transversal isotropes Material unter der Voraussetzung einer spannungsfreien Referenzkonfiguration und eines linear-elastischen Materi-

<sup>31</sup>Für  $\mu_c = 0$  ist der Ansatz lokal nicht koerzitiv in dem Sinne, dass schiefsymmetrische Verzerrungsanteile in der Verzerrungsenergie keine Kontrolle erfahren. Diese Problematik wird in Kap. 4.6 behandelt und führt zu einem modifizierten Ansatz der Verzerrungsenergie  $W_{\text{mp}}$ .

<sup>32</sup>Wesentlich im Beweis der Existenz von globalen Minima mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung ist es zu zeigen, dass die Deformation  $\varphi$  und das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  für endliche interne Energie  $\Pi_{\text{int}}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) < K$  (mit der Schranke  $K$ ) in gewissen Funktionsräumen selbst beschränkt bleiben. Das Rotationsfeld wird durch die Krümmungen und die Eigenschaft  $\|\bar{\mathbf{R}}\| = \sqrt{3}$  stets kontrolliert. Für den Fall  $\mu_c > 0$  wird die Kontrolle der Deformation  $\varphi$  im Anhang A.6 vorgeführt. Für den Fall  $\mu_c = 0$  werden Argumente, wie z.B. die KORNSche Ungleichung zusätzlich benötigt und es wird auf [155] und [160] verwiesen.

alverhaltens die spezifische Formänderungsenergie

$$W_{\text{Trans}}^{\text{lin}} = \mu_T \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2] + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 + \alpha \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{M}] \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] + 2(\mu_L - \mu_T) \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbb{M}] + \frac{\beta}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{M}])^2 \quad (4.32)$$

mit linearen, symmetrischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\text{Grad}[\mathbf{u}]]$  an. Es ist dies der allgemeinste, quadratische Ansatz in Termen der Integritätsbasis. Die fünf Koeffizienten der Invariantendarstellung in Gl. 4.32 haben einen eindeutigen Bezug zu Ingenieurkonstanten, vgl. Anhang A.5. Die Ingenieurkonstanten werden in einaxialen Zug-, Druck und Scherversuchen in Ebenen parallel oder orthogonal zur Vorzugsrichtung ermittelt.

Unidirektional faserverstärkte Werkstoffe gehören in der Regel zu der Gruppe von Materialien, welche sich senkrecht (transversal) zur lokalen Faserachse isotrop verhalten. Sie sind die Grundelemente jedes Mehrschichtverbundes bzw. Laminates. Für eine ausführlichere Darstellung wird z.B. auf ALTENBACH et al. [2], KOLLAR & SPRINGER [104] und EIDEL [53] verwiesen.

Hier wird für den transversal isotropen Fall die Zerlegung der Verzerrung in symmetrische und antisymmetrische Anteile  $\mathbf{H} = \overset{S}{\mathbf{H}} + \overset{A}{\mathbf{H}}$  in den Simultaninvarianten untersucht. Bei maximal quadratischen Termen in  $\mathbf{H}$  sind die Zerlegungen

$$\text{tr}[\mathbf{H} \mathbb{M}] = \langle \mathbf{H} \mathbb{M}, \mathbb{1} \rangle = \langle \overset{S}{\mathbf{H}} + \overset{A}{\mathbf{H}}, \mathbb{M} \rangle = \langle \overset{S}{\mathbf{H}}, \mathbb{M} \rangle + \underbrace{\langle \overset{A}{\mathbf{H}}, \mathbb{M} \rangle}_{=0} = \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \mathbb{M}] \quad (4.33)$$

und

$$\begin{aligned} \text{tr}[(\mathbf{H})^2 \mathbb{M}] &= \langle (\overset{S}{\mathbf{H}} + \overset{A}{\mathbf{H}})^2, \mathbb{M} \rangle = \langle (\overset{S}{\mathbf{H}})^2, \mathbb{M} \rangle + \langle (\overset{A}{\mathbf{H}})^2, \mathbb{M} \rangle + \langle \overset{A}{\mathbf{H}} \overset{S}{\mathbf{H}}, \mathbb{M} \rangle + \langle \overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}}, \mathbb{M} \rangle \\ &= \text{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2 \mathbb{M}] + \text{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2 \mathbb{M}] + \text{tr}[\overset{A}{\mathbf{H}} \overset{S}{\mathbf{H}} \mathbb{M}] + \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}} \mathbb{M}] \end{aligned} \quad (4.34)$$

zu betrachten. Wegen  $\text{tr}[\overset{A}{\mathbf{H}} \overset{S}{\mathbf{H}} \mathbb{M}] = -\text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}} \mathbb{M}]$  genügt es nur einen gemischten Term in die Simultaninvarianten aufzunehmen. Die Integritätsbasis bei maximal quadratischen Termen in  $\mathbf{H}$  und Verzerrungen  $\mathbf{H} \notin \text{Sym}$  lautet im transversal isotropen Fall

$$\text{Grundinvarianten: } \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}], \text{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2], \text{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2], \quad (4.35)$$

$$\text{Simultaninvarianten: } \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \mathbb{M}], \text{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2 \mathbb{M}], \text{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2 \mathbb{M}], \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}} \mathbb{M}]. \quad (4.36)$$

Damit ergibt sich der allgemeinste Ansatz für transversal isotrope, linear-elastische Formänderungsenergie

$$\begin{aligned}
W_{\text{mp}}(\mathbf{H}) &= \mu_T \text{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2] + \mu_c \text{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2] + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}])^2 + \alpha \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \mathbf{I} \mathbf{M}] \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}}] \\
&\quad + 2(\mu_L - \mu_T) \text{tr}[(\overset{S}{\mathbf{H}})^2 \mathbf{I} \mathbf{M}] + \frac{\beta}{2} (\text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \mathbf{I} \mathbf{M}])^2 \\
&\quad + \mu_c^a \text{tr}[(\overset{A}{\mathbf{H}})^2 \mathbf{I} \mathbf{M}] + \mu_c^b \text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}} \mathbf{I} \mathbf{M}] \quad .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

In Gl. 4.37 sind die Vorfaktoren der symmetrischen Verzerrungen bereits durch direkten Vergleich mit Gl. 4.32 identifiziert. Gegenüber dem klassischen Fall tauchen im COSSERAT-Modell die drei weiteren Koeffizienten  $\mu_c$ ,  $\mu_c^a$  und  $\mu_c^b$  auf.

Diese Arbeit beschäftigt sich im weiteren nicht mit den Koeffizienten  $\mu_c^a$  und  $\mu_c^b$ . Es sei jedoch bemerkt, dass numerische Proberechnungen mit  $\mu_c = 0$  darauf hinweisen, dass dann  $\mu_c^a = 0$  und  $\mu_c^b = 0$  erforderlich sind, um überhaupt Gleichgewichtslagen zu erhalten.<sup>33</sup>

In Tafel A.11 findet sich ein transversal isotropes, nichtlineares COSSERAT-Modell, wie es aus diesem und weiteren Abschnitten hervorgeht und in dieser Arbeit Verwendung findet.

## 4.5 Konsequenzen der linearen Cosserat-Theorie

Die nichtlineare Kinematik der COSSERAT-Theorie führt selbst in einfachen Randwertaufgaben zu analytisch schwer lösbaren Problemen. Durch Linearisierung der kinematischen Beziehungen vereinfachen sich diese. Es werden nun die einzelnen Schritte und Konsequenzen beim Übergang zu einer linearen COSSERAT-Theorie entwickelt.

Das Gesamtrationsfeld  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$ , welches über die nichtlineare Matrix-Exponentialabbildung der Gl. 2.10 zum Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{R}^3$  verbunden ist, wird um das neutrale Element  $\bar{\mathbf{R}}(0) = \mathbb{1}$  linearisiert

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{R}}^{\text{lin}} &:= \text{Lin} [\bar{\mathbf{R}}(0 + \Delta \bar{\mathbf{A}})] = \text{Lin} [\exp[\Delta \bar{\mathbf{A}}]] \\
&= \text{Lin} [\mathbb{1} + \Delta \bar{\mathbf{A}} + \Delta \bar{\mathbf{A}}^2 + \dots] = \mathbb{1} + \Delta \bar{\mathbf{A}} \quad .
\end{aligned} \tag{4.38}$$

<sup>33</sup> Hätte man beide gemischten Terme aus Gl. 4.34 in die Integritätsbasis aufgenommen, wäre jeweils ein weiterer Koeffizient in der Formänderungsenergie aufgetaucht. Doch hätte man das Argument, dass die zugehörigen Koeffizienten vom Betrag her gleich sein müssen, da sie jeweils den gleichen Sachverhalt beschreiben. Wegen  $\text{tr}[\overset{A}{\mathbf{H}} \overset{S}{\mathbf{H}} \mathbf{I} \mathbf{M}] = -\text{tr}[\overset{S}{\mathbf{H}} \overset{A}{\mathbf{H}} \mathbf{I} \mathbf{M}]$  verschwindet dann die Summe der beiden Terme, was  $\mu_c^b = 0$  impliziert.

Da am neutralen Element  $\bar{\mathbf{A}} = 0 + \Delta\bar{\mathbf{A}}$  gilt, ergibt sich<sup>34</sup>

$$\bar{\mathbf{R}}^{\text{lin}} := \mathbb{1} + \bar{\mathbf{A}}, \quad \bar{\mathbf{A}} \in \mathfrak{so}(3), \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}} := \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}], \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.39)$$

Zudem werden nur lineare Terme der 1. COSSERAT-Verzerrung in Ansatz gebracht

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1})^{\text{lin}} &:= \text{Lin} [\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbb{1}] = \text{Lin} [(\mathbb{1} + \bar{\mathbf{A}} + \dots)^T (\mathbb{1} + \nabla \mathbf{u}) - \mathbb{1}] \\ &= \nabla \mathbf{u} + \bar{\mathbf{A}}^T = \nabla \mathbf{u} - \bar{\mathbf{A}} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

wobei hier die Reihenentwicklung der Verschiebung  $\mathbf{u} = 0 + \Delta \mathbf{u}$  und der Rotation  $\bar{\mathbf{A}} = 0 + \Delta \bar{\mathbf{A}}$  am neutralen Element gleich eingearbeitet ist.

Der symmetrische Anteil der linearisierten 1. COSSERAT-Verzerrung aus Gl. 4.40 lautet

$$\text{sym}[(\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1})^{\text{lin}}] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \underbrace{(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T)}_{=0}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (4.41)$$

Somit ist der symmetrische Anteil der linearisierten 1. COSSERAT-Verzerrung  $\text{sym}[(\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1})^{\text{lin}}]$  vom Drehvektor  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}} = \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}]$  vollständig entkoppelt und entspricht dem klassischen Verzerrungsmaß  $\boldsymbol{\epsilon} = \text{sym}[\text{Grad}[\mathbf{u}]]$ .

Die übliche lineare 2. COSSERAT-Verzerrung basiert auf der Krümmung  $\hat{\mathbf{K}}$  aus Gl. 3.63 und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^{\text{lin}} &:= \text{Lin} (\hat{\mathbf{K}}) = \text{Lin} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : (\bar{\mathbf{R}}^T \text{Grad}[\bar{\mathbf{R}}]) \right) \\ &= \text{Lin} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : ((\mathbb{1} + \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^2 + \dots)^T \text{Grad}[\mathbb{1} + \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^2 + \dots]) \right) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \text{Grad}[\bar{\mathbf{A}}] = \text{Grad}[\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \bar{\mathbf{A}}] = \text{Grad}[-\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}}]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Da Gl. 4.42 lediglich Rotationen beinhaltet, ist eine **kinematische** Kopplung in der geometrisch linearen COSSERAT-Theorie nur über den antisymmetrischen Anteil der linearisierten 1. COSSERAT-Verzerrung

$$\text{skew}[(\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1})^{\text{lin}}] = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T - \underbrace{(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{A}}^T)}_{=2\bar{\mathbf{A}}}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) - \bar{\mathbf{A}} \quad (4.43)$$

gegeben.

---

<sup>34</sup>Die Linearisierung des Rotationsfeldes  $\bar{\mathbf{R}}$  für die tangentielle Steifigkeit in Kap. 5 findet **nicht** am neutralen Element statt, sondern am Entwicklungspunkt  $\bar{\mathbf{R}}$ . Dann lautet der linearisierte Ausdruck gemäß Gl. 2.27  $\Delta \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Y} \bar{\mathbf{R}}$ .

Die spezifische Formänderungsenergie des linearen COSSERAT-Modells ist die Summe einer Verzerrungsenergiedichte  $W_{\text{mp}}^{\text{lin}}$  und einer Krümmungsenergiedichte  $W_{\text{curv}}^{\text{lin}}$ . Diese bringen die geometrisch linearisierten COSSERAT-Verzerrungen in quadratischen Ansatz und lauten

$$W_{\text{mp}}^{\text{lin}}(\bar{\mathbf{U}}^{\text{lin}}) = \mu \left\| \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right\|^2 + \mu_c \left\| \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) - \bar{\mathbf{A}} \right\|^2 + \frac{\lambda}{2} \left( \text{tr} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] \right)^2, \quad (4.44)$$

$$W_{\text{curv}}^{\text{lin}}(\hat{\mathbf{K}}^{\text{lin}}) = \mu L_c^2 \left\| \text{Grad}[-\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}}] \right\|^2, \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\text{lin}} = \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}] \quad . \quad (4.45)$$

Aus Gl. 4.44 und Gl. 4.45 ist ersichtlich, dass im Fall  $\mu_c = 0$  eine Entkopplung zwischen Deformations- und Rotationsfeld stattfindet. Das Rotationsfeld ist dann lediglich über Randvorgaben und Krümmungsenergie determiniert und ohne Einfluss auf die Deformation. Daher impliziert  $\mu_c = 0$  im linearen Fall klassisch lineares Materialverhalten.

Auch die Variationsformulierung der geometrisch linearisierten COSSERAT-Theorie resultiert für  $\mu_c = 0$  in mechanischen Feldgleichungen für Impuls- und Drehimpulsbilanz, welche den Feldgleichungen der linearen, klassischen Mechanik entsprechen.

Weiterhin wird offenbar, dass die Kopplung für  $\mu_c = 0$  keine linearen Anteile zwischen Deformationsfeld und Rotationsfeld enthält und als Kopplung zweiter Ordnung zu verstehen ist.

## 4.6 Nichtlineare Verzerrungsenergie im Cosserat-Modell

Nachfolgend wird der volumetrische Anteil der quadratischen Verzerrungsenergie im COSSERAT-Modell näher untersucht und erweitert.

Der volumetrische Term der linearen COSSERAT-Theorie in Gl. 4.44 ist mit

$$\frac{\lambda}{2} \left( \text{tr} \left[ \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right] \right)^2 = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\nabla \mathbf{u}])^2 \quad (4.46)$$

vom linearisierten Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{A}}$  unabhängig. Dies erscheint physikalisch sinnvoll, da Rotationen prinzipiell Ausrichtungen, nicht jedoch Volumenverhältnisse ändern. In diesem Sinne sollten Rotationen im Maß von Volumenänderungen keine Rolle spielen.

Dieser Forderung hält die geometrisch nichtlineare COSSERAT-Theorie in Gl. 4.29 nicht stand, denn im "Volumenterm"

$$\frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}[\mathbf{H}^S])^2 = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}[\mathbf{H}])^2 = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])^2 = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}[\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbb{1}])^2 \quad (4.47)$$

ist die Abhängigkeit von  $\bar{\mathbf{R}}$  ersichtlich und motiviert eine Umformulierung. Dieser Umformulierung liegt folgende Beziehung zugrunde

$$(\operatorname{tr}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])^2 + o(\|\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}\|^3) = \frac{1}{2}(\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2. \quad (4.48)$$

Durch Hinzunahme der Terme  $o$  höherer Ordnung gemäß Gl. 4.48, resultiert die folgende Erweiterung für das COSSERAT-Modell

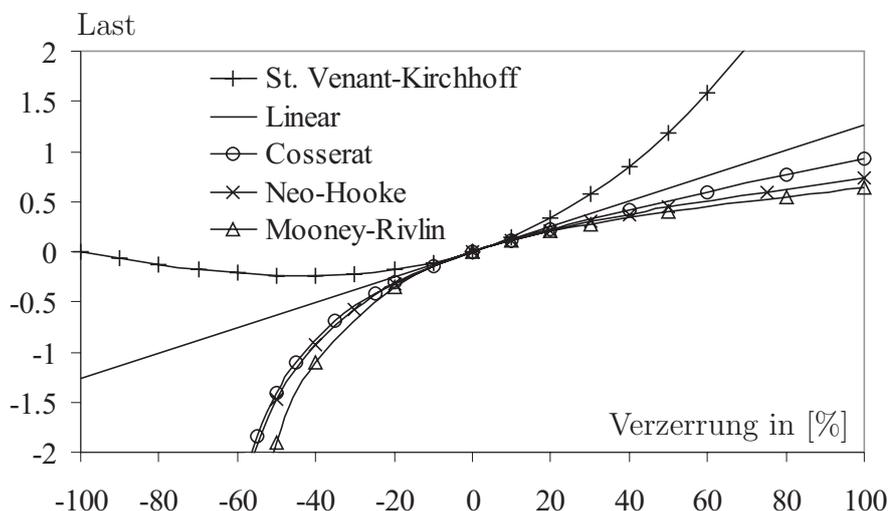
$$\begin{aligned} W_{\text{mp}}(\bar{\mathbf{U}}) = & \mu \|\operatorname{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 \\ & + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Wegen

$$\det[\bar{\mathbf{U}}] = \det[\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{R} \mathbf{U}] = \det[\mathbf{U}] \quad (4.50)$$

spielen in Gl. 4.49 Rotationen im volumetrischen Verzerrungsanteil keine Rolle. Darüber hinaus ist der Ansatz in Gl. 4.49 physikalisch besser fundiert als in Gl. 4.29, da wegen  $W_{\text{mp}}(\bar{\mathbf{U}}) \rightarrow \infty$  für  $\det[\mathbf{F}] \rightarrow 0$  bzw.  $\det[\mathbf{F}] \rightarrow \infty$  eine völlige Kompression bzw. Dekompression des Materials bei endlicher Formänderungsenergie unmöglich ist.

Dies wird durch das Last-Verschiebungsdiagramm 4.2 eines homogenen, einachsigen Zug- und Drucktests in Abb. 4.2 bestätigt. Das COSSERAT-Modell zeigt Ähnlichkeiten mit Materialformulierungen vom Typ NEO-HOOKE oder MOONEY-RIVLIN. Die COSSERAT-Parameter  $\mu_c$  und  $L_c$  spielen, wie bereits erwähnt, beim homogenen Zug- bzw. Drucktest keine Rolle.



**Abbildung 4.2:** Last-Verschiebungskurve für homogenen Zug- und Drucktest.

Den Verläufen in Abb. 4.2 liegt eine zwangungsfrei gelagerte, quadratische Probe der Kantenlänge 1 mit den Materialparametern  $\lambda = 100000$  sowie  $\mu = 0.4225$  zugrunde. Dies entspricht einem Elastizitätsmodul  $E = 1.267498$  und einer Querkontraktionszahl  $\nu = 0.499997$ .

Das elastische Verhalten realer Materialien ist i. allg. in einem kleineren Dehnungsintervall vorzufinden, als es in Abb. 4.2 verwendet ist.

Insbesondere ist eine Stauchung von 100% rein theoretisch und soll lediglich zeigen, dass die ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Materialformulierung eine völlige Kompression prinzipiell zulässt,<sup>35</sup> was bei den anderen Formulierungen nicht der Fall ist.

Eine weitere, wesentliche physikalische Forderung an die Formänderungsenergie besteht darin, dass der Körper genau dann keine Formänderungsenergie besitzt, wenn er starr bewegt wird. Die Deformation einer starren Bewegung setzt sich aus einer **homogenen** Drehung  $\mathbf{Q} \in \text{SO}(3)$  und einer **homogenen** Translation  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  zusammen

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{a}. \quad (4.51)$$

Dann ist wegen  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} = \text{konst.} \Rightarrow \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{C} = 0$  und

$$\mathbf{F} = \text{Grad}[\varphi(\mathbf{X})] = \mathbf{Q}, \quad \bar{\mathbf{R}}(x) = \mathbf{Q} \Rightarrow \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbb{1} \quad (4.52)$$

keine Formänderungsenergie im COSSERAT-Modell vorhanden.

<sup>35</sup>Das ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material verliert zudem die gesamte Festigkeit.

Es wird nun umgekehrt untersucht, für welche Situationen im COSSERAT-Modell die Formänderungsenergie verschwindet, d.h. im Folgenden wird angenommen, dass

$$\int_{\mathcal{B}_0} [W_{\text{mp}}(\bar{\mathbf{U}}) + \mu L_c^2 \|\mathbf{c}\|^2] \, dV = 0 \quad (4.53)$$

gilt. Aus dem Ansatz der Krümmungsenergie in Gl. 4.53 ist für  $L_c > 0$  ersichtlich, dass  $\text{Curl}[\bar{\mathbf{R}}] = 0$  gilt und damit das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  konstant sein muss. Mit dieser Kenntnis werden nun drei Fälle auf verschwindende Formänderungsenergie geprüft. Die Fälle stellen z.T. unterschiedliche Forderungen an die Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}$ , je nach Parameter  $\mu_c$  und Ansatz der Formänderungsenergie im Volumenterm.

Fall 1:  $\mu_c > 0$  und Trace-Volumenterm. Dann muss einerseits  $\text{sym}[\bar{\mathbf{U}}] = \mathbb{1}$  und andererseits  $\text{skew}[\bar{\mathbf{U}}] = 0$  sein. Dann kann nur  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} = \mathbb{1}$  gelten, was  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}} = \text{const.}$  impliziert [174]. Der Deformation verbleibt mit  $\varphi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{X} + \mathbf{b}$  nur eine starre Drehung mit Translation, vgl. die Argumentation von Gl. 3.47 bis Gl. 3.49.

Fall 2:  $\mu_c = 0$  und Trace-Volumenterm. Es gilt wieder  $\text{sym}[\bar{\mathbf{U}}] = \mathbb{1}$  aber eine lokale Kontrolle des antisymmetrischen Teils ist nicht mehr gegeben. So kann  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \mathbb{1} + \mathbf{A}(\mathbf{X})$  eine beliebige, nicht konstante, schiefsymmetrische Matrix  $\mathbf{A}(\mathbf{X})$  enthalten. Wegen  $\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} = \mathbb{1} + \mathbf{A}(\mathbf{X})$  gilt aber auch  $\nabla \varphi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{X})$ . Anwendung des Curl-Operators auf beiden Seiten liefert  $0 = \text{Curl}[\bar{\mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{X})] = \bar{\mathbf{R}} \text{Curl}[\mathbf{A}]$  und somit  $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \text{const.}$  Daraus folgt  $\varphi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{R}} (\mathbb{1} + \mathbf{A}) \mathbf{X} + \mathbf{b}$ , was keine Einschränkung auf starre Drehung mit Translation darstellt.

Fall 2': Diese Situation kann durch eine Randbedingung der Art  $\bar{\mathbf{U}} \in \text{Sym}$  auf einem Randgebiet  $\Gamma_D$  beseitigt werden, da dann  $\mathbf{A} = \text{const.} = 0$  folgt.

Fall 3:  $\mu_c = 0$  und Determinanten-Volumenterm. Es gilt wieder  $\text{sym}[\bar{\mathbf{U}}] = \mathbb{1}$ , doch kommt die Forderung  $\det[\bar{\mathbf{U}}] = 1$  hinzu. Es kann zwar  $\bar{\mathbf{U}} = \mathbb{1} + \mathbf{A}(\mathbf{X})$  sein, doch  $1 = \det[\bar{\mathbf{U}}] = \det[\mathbb{1} + \mathbf{A}(\mathbf{X})] = 1 + \|\mathbf{A}(\mathbf{X})\|^2$  erzwingt  $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = 0$ . Da dann nur  $\bar{\mathbf{U}} = \mathbb{1}$  in Frage kommt, folgt wieder  $\varphi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{R}} \mathbf{X} + \mathbf{b}$  was wie in Fall 1 die Einschränkung auf eine starre Drehung mit Translation bedeutet.

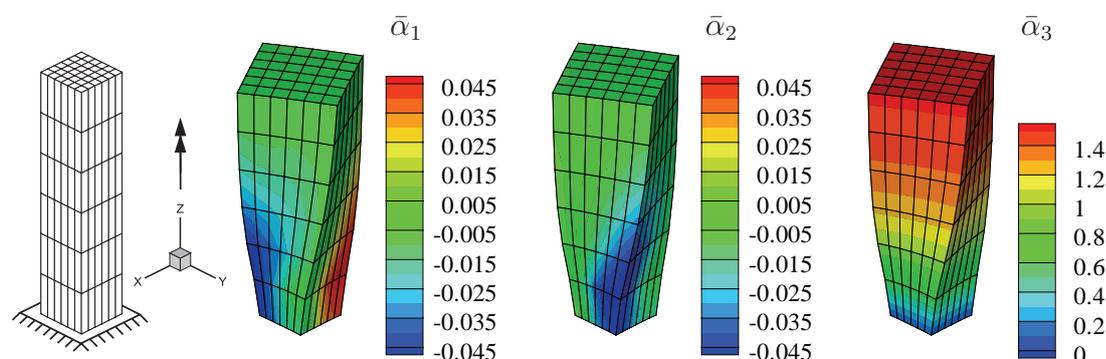
Wegen Fall 2 gewinnt der Ansatz in Gl. 4.49 eine weitere Bedeutung. So kann der Determinanten-Volumenterm im Fall 3 die Einschränkung auf starre Drehung mit Translation auch für  $\mu_c = 0$  erreichen. Ein einfaches Beispiel soll die Problematik nochmals verdeutlichen.

Setzt man eine homogene Verzerrung  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \text{Skew}$  in Gl. 4.29 an, beschreibt sich die Verzerrungsenergie lediglich durch

$$W_{\text{mp}}(\mathbf{A}) = \mu_c \text{tr}[(\mathbf{A})^2] \quad . \quad (4.54)$$

Für  $\mu_c = 0$  ist der Ansatz in Gl. 4.29 lokal nicht koerzitiv, da die spezifische Verzerrungsenergie  $W_{\text{mp}}$  antisymmetrische Verzerrungen  $\mathbf{H} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} \in \text{Skew}$  nicht kontrolliert. Für diesen Fall ist wegen  $\det[\bar{\mathbf{U}}] = \det[\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}] = 1 + \|\mathbf{A}\|^2$  eine unkontrollierte Zunahme des Volumens zu erwarten, was ein numerischer Test auch bestätigt.

Dazu wird eine Materialprobe der Länge 10 mit quadratischem Querschnitt der Kantenlänge 2 durch ein Torsionsmoment der Größe 100 um die  $z$ -Achse belastet. Das Torsionsmoment wird gleichmäßig über das Volumen verteilt in die Struktur eingetragen. Die Probe ist am unteren Stabende komplett gegen Verschiebungen gelagert, die Verdrehungen sind frei.<sup>36</sup> Die weiteren Materialdaten lauten  $E = 1000$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.1$ .

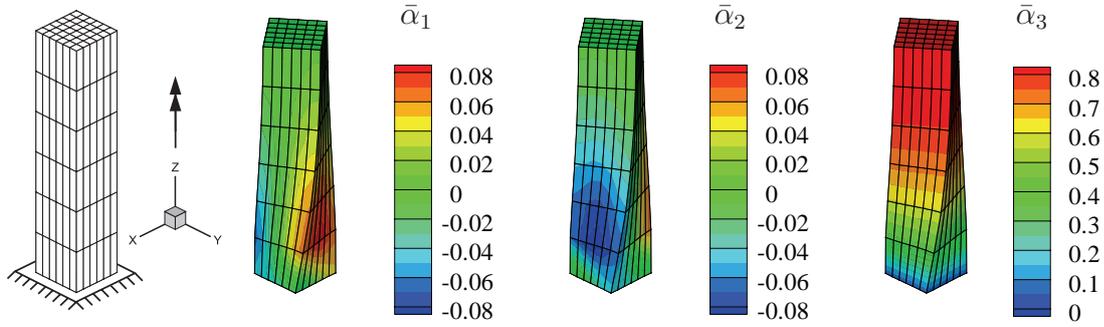


**Abbildung 4.3:** Links: Unverformte Struktur mit Lagerungsbedingung. Rechts daneben: Rotationsfeld auf verformter Struktur für den Ansatz nach Gl. 4.29.

In Abb. 4.3 sind die Ergebnisse für den Ansatz nach Gl. 4.29 zu sehen. Antisymmetrische Verzerrungen bedingen eine Zunahme des Volumens in der oberen Hälfte der Probe. Die Lagerung am unteren Stabende lässt keine Aufweitung des Querschnitts zu. Die einzelnen Komponenten des Drehvektors  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  von  $\bar{\mathbf{R}}$  zeigen, dass der Effekt auch in inhomogener Form auftritt.

Wird hingegen der Ansatz nach Gl. 4.49 verwendet, tritt keine vergleichbare Änderung des Querschnitts auf, vgl. Abb. 4.4.

<sup>36</sup>Bei Lagerung der Drehungen am unteren Stabende stellt sich eine Grenzschicht ein, das Ergebnis wird dadurch aber nur lokal beeinflusst.



**Abbildung 4.4:** Links: Unverformte Struktur mit Lagerungsbedingung. Rechts daneben: Rotationsfeld auf verformter Struktur für den Ansatz nach Gl. 4.49.

## 4.7 Nichtlineare Spannung im isotropen Cosserat-Modell

Die COSSERAT-Spannung  $\bar{\mathbf{T}}$  ist aus Gl. 4.49 durch  $\bar{\mathbf{T}} = \frac{\partial W_{\text{mp}}}{\partial \bar{\mathbf{U}}}$  definiert. Die Ableitungen der einzelnen Anteile lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2)}{\partial \bar{\mathbf{U}}} &= 2 \text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] : \frac{\partial(\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \\ &= 2 \text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] : \overset{S}{\mathbf{J}} = 2 \text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] \quad , \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2)}{\partial \bar{\mathbf{U}}} &= 2 \text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] : \frac{\partial(\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \\ &= 2 \text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] : \overset{A}{\mathbf{J}} = 2 \text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] \quad , \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial((\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2)}{\partial \bar{\mathbf{U}}} &= 2 (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1) \frac{\partial(\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \\ &= 2 (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1) \det[\bar{\mathbf{U}}] \bar{\mathbf{U}}^{-T} \quad , \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\left(\frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1\right)^2\right)}{\partial \bar{\mathbf{U}}} &= 2 \left(\frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1\right) \frac{-1}{(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2} \frac{\partial(\det[\bar{\mathbf{U}}])}{\partial \bar{\mathbf{U}}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1\right) \frac{-1}{(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2} \det[\bar{\mathbf{U}}] \bar{\mathbf{U}}^{-T} \quad . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Damit lässt sich die COSSERAT-Spannung  $\bar{\mathbf{T}}$  durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} = & \underbrace{2\mu \operatorname{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] + 2\mu_c \operatorname{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]}_{\mathbf{T}^{\text{lin}}} \\ & + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}])^2 - \det[\bar{\mathbf{U}}] + \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - \frac{1}{(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2} \right)}_{\mathbf{T}^{\text{nili}}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} \end{aligned} \quad (4.59)$$

angeben. Es kann ein von  $\bar{\mathbf{U}}$  linear abhängiger Anteil  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}$  sowie ein nichtlinearer abhängiger Anteil  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}$  identifiziert werden. Der lineare Anteil wird durch die Definition der vierstufigen Materialmatrix

$$\mathbf{C} := 2\mu \overset{S}{\mathbf{J}} + 2\mu_c \overset{A}{\mathbf{J}} \quad (4.60)$$

mit  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}} = \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}) = (\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}) : \mathbf{C}$  kompakt notiert. Die Abbildungen  $\overset{S}{\mathbf{J}}$  und  $\overset{A}{\mathbf{J}}$  sind im Anhang A.4 erklärt, wobei aus Gl. 1.26 und Gl. 1.29 die Eigenschaft  $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij}$  resultiert.

Der nichtlineare Anteil ist über die Definition

$$\mathbf{C}_{\det}^{\alpha} := \frac{\lambda}{2} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}])^2 - \det[\bar{\mathbf{U}}] + \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - \frac{1}{(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2} \right) \quad (4.61)$$

durch  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}} = \mathbf{C}_{\det}^{\alpha} \bar{\mathbf{U}}^{-T}$  kompakt notierbar.

#### 4.7.1 Die Tangente der nichtlinearen Spannung

Die lineare Änderung  $\Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}$  einer inkrementellen Verzerrungsänderung  $\Delta \bar{\mathbf{U}}$  am Entwicklungspunkt  $\bar{\mathbf{U}}$  lautet

$$\Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}} = \mathbf{C}_{\det}^{\beta} \langle \bar{\mathbf{U}}^{-T}, \Delta \bar{\mathbf{U}} \rangle \bar{\mathbf{U}}^{-T} + \mathbf{C}_{\det}^{\gamma} \bar{\mathbf{U}}^{-T} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}}^{-T} \quad (4.62)$$

mit

$$\mathbf{C}_{\det}^{\beta} := \frac{\lambda}{2} \left( 2(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2 - \det[\bar{\mathbf{U}}] - \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} + \frac{2}{(\det[\bar{\mathbf{U}}])^2} \right), \quad (4.63)$$

sowie  $\mathbf{C}_{\det}^{\gamma} = -\mathbf{C}_{\det}^{\alpha}$  aus Gl. 4.61.

## 4.8 Krümmungsenergie im Cosserat-Modell

Die gesamte Formänderungsenergie im COSSERAT-Modell setzt sich aus Verzerrungsenergie und Krümmungsenergie zusammen. Die in Kap. 3.1.3 erarbeiteten Krümmungsmaße  $\widehat{\mathfrak{K}}$ ,  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{C}$  werden zur Definition innerer, elastischer Krümmungsenergiedichte verwendet

$$W_{\text{curv}}^{\text{Grad}} := \frac{\mu}{q} (1 + L_c^2 \|\mathfrak{K}\|^2)^{\frac{q}{2}} = \frac{\mu}{q} (1 + 2 L_c^2 \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2)^{\frac{q}{2}}, \quad q > 3 \quad , \quad (4.64)$$

$$W_{\text{curv}}^{\text{Curl}} := \frac{\mu}{q} (1 + 2 L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}} = \frac{\mu}{q} (1 + 2 L_c^2 (\|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2 + (\text{tr}[\widehat{\mathfrak{K}}])^2)^{\frac{q}{2}}), \quad q > 3 \quad . \quad (4.65)$$

Die Energiedichte  $W_{\text{curv}}^{\text{Grad}}$  ist unter Beachtung von Gl. 3.68 konform für  $\mathfrak{K}$  und  $\widehat{\mathfrak{K}}$  formuliert. Die Energiedichte  $W_{\text{curv}}^{\text{Curl}}$  stellt wegen Gl. 3.70 eine obere Schranke für  $W_{\text{curv}}^{\text{Grad}}$  dar und hat einen Bezug zur Versetzungstheorie, vgl. Kap. 7.7 und 7.8.

Die Form der Definitionen erlaubt mit dem Exponenten  $q$  beliebig hohe Potenzen der Krümmung zu erfassen. Aus der Literatur ist kein mechanischer Standardtest zur Evaluierung der Materialparameter der Krümmungsenergie bekannt. So wird der Vorfaktor  $\mu$  zur Dimensionsreinheit und bestmöglicher Übereinstimmung mit anderen COSSERAT-Modellen gewählt, z.B. SANSOUR [198], SCHAEFER [204], KESSEL [99].

Man bezeichnet den Faktor  $L_c$  als interne Länge, er stellt den eigentlichen phänomenologischen Materialparameter dieser konstitutiven Beziehung dar. Er tritt in anderen COSSERAT-Theorien oft in quadratischer Form ( $q = 2$ ) auf und wird meist mit einem geometrischen Maß wie z.B. dem Korndurchmesser eines Materialgefüges, dem Porendurchmesser eines Schaumes oder der Randschichtdicke einer Probe in Zusammenhang gebracht. In Kap. 3.4 taucht in Gl. 3.168 auch das Quadrat der Abmessung des CAUCHY-Würfels im Zusammenhang mit dem nichtlinearen Verlauf der Normalspannung tangential zur Schnittfläche auf.

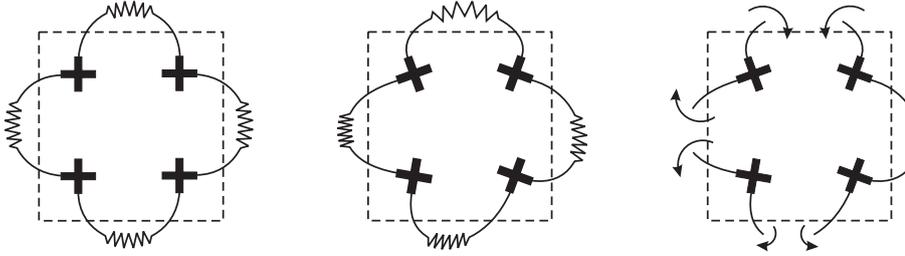
Aus der Krümmungsenergiedichte wird die Momentenspannungen  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\widehat{\mathfrak{M}}$  und  $\overline{\mathfrak{M}}$  bezüglich der Referenzkonfiguration definiert

$$\mathfrak{M} := \frac{\partial W_{\text{curv}}^{\text{Grad}}}{\partial \mathfrak{K}} = \mu L_c^2 (1 + L_c^2 \|\mathfrak{K}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} \mathfrak{K} \quad , \quad (4.66)$$

$$\widehat{\mathfrak{M}} := \frac{\partial W_{\text{curv}}^{\text{Grad}}}{\partial \widehat{\mathfrak{K}}} = \mu L_c^2 (1 + 2 L_c^2 \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} 2 \widehat{\mathfrak{K}} \quad , \quad (4.67)$$

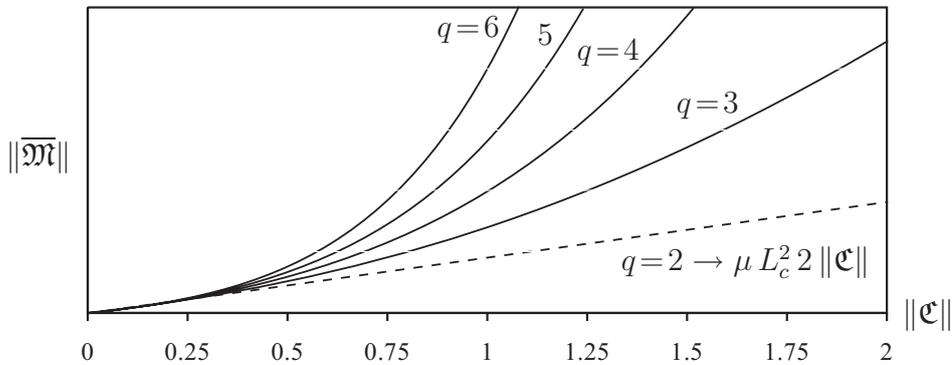
$$\overline{\mathfrak{M}} := \frac{\partial W_{\text{curv}}^{\text{Curl}}}{\partial \mathfrak{C}} = \mu L_c^2 (1 + 2 L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} 2 \mathfrak{C} \quad . \quad (4.68)$$

Zwischen der Momentenspannung  $\mathfrak{M}$  dritter Stufe und der Momentenspannung  $\widehat{\mathfrak{M}}$  zweiter Stufe gilt die Beziehung  $\widehat{\mathfrak{M}}_{ij} = \epsilon_{iab} \mathfrak{M}_{ajb}$ .



**Abbildung 4.5:** Drehfedermodell zwischen individuellen Rotationen  $\bar{\mathbf{R}}$  des Kontinuums. Die Drehfedersteifigkeit steht in Bezug zu  $\mu L_c^2$ .

Momentenspannungen beeinflussen die Drehimpulsbilanz. Daher liegt es nahe,  $L_c$  wie in Abb. 4.5 mit der Steifigkeit einer Drehfeder in Verbindung zu bringen. Diese agiert zwischen den individuellen Rotationen  $\bar{\mathbf{R}}$  des Kontinuums. Der Exponent  $q$  beeinflusst hierbei die Federkennlinie der Drehfeder, wie in Abb. 4.6 für Gl. 4.68 abgebildet ist.



**Abbildung 4.6:** Qualitatives Verhalten zwischen Krümmung und Momentenspannung für verschiedene Exponenten  $q$ .

### 4.8.1 Die Tangente der Momentenspannung

Die lineare Änderung  $\Delta \mathfrak{M}$  einer inkrementellen Verzerrungsänderung  $\Delta \mathfrak{K}$  am Entwicklungspunkt  $\mathfrak{K}$  lautet

$$\Delta \mathfrak{M} = C_{\mathfrak{K}}^{\alpha} \langle \mathfrak{K}, \Delta \mathfrak{K} \rangle \mathfrak{K} + C_{\mathfrak{K}}^{\beta} \Delta \mathfrak{K} \quad , \quad (4.69)$$

$$\text{mit } C_{\mathfrak{K}}^{\alpha} := 2 \mu L_c^4 \left( \frac{q}{2} - 1 \right) (1 + L_c^2 \|\mathfrak{K}\|^2)^{\frac{q}{2}-2} \quad , \quad (4.70)$$

$$C_{\mathfrak{K}}^{\beta} := \mu L_c^2 (1 + L_c^2 \|\mathfrak{K}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} \quad . \quad (4.71)$$

Die lineare Änderung  $\Delta\widehat{\mathfrak{M}}$  einer inkrementellen Verzerrungsänderung  $\Delta\widehat{\mathfrak{K}}$  am Entwicklungspunkt  $\widehat{\mathfrak{K}}$  lautet

$$\Delta\widehat{\mathfrak{M}} = C_{\widehat{\mathfrak{K}}}^{\alpha} \langle \widehat{\mathfrak{K}}, \Delta\widehat{\mathfrak{K}} \rangle \widehat{\mathfrak{K}} + C_{\widehat{\mathfrak{K}}}^{\beta} \Delta\widehat{\mathfrak{K}} \quad , \quad (4.72)$$

$$\text{mit } C_{\widehat{\mathfrak{K}}}^{\alpha} := 8 \mu L_c^4 \left( \frac{q}{2} - 1 \right) (1 + 2 L_c^2 \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2)^{\frac{q}{2}-2} \quad , \quad (4.73)$$

$$C_{\widehat{\mathfrak{K}}}^{\beta} := 2 \mu L_c^2 (1 + 2 L_c^2 \|\widehat{\mathfrak{K}}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} \quad . \quad (4.74)$$

Die lineare Änderung  $\Delta\overline{\mathfrak{M}}$  einer inkrementellen Verzerrungsänderung  $\Delta\mathfrak{C}$  am Entwicklungspunkt  $\mathfrak{C}$  lautet

$$\Delta\overline{\mathfrak{M}} = C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} \langle \mathfrak{C}, \Delta\mathfrak{C} \rangle \mathfrak{C} + C_{\mathfrak{C}}^{\beta} \Delta\mathfrak{C} \quad , \quad (4.75)$$

$$\text{mit } C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} := 8 \mu L_c^4 \left( \frac{q}{2} - 1 \right) (1 + 2 L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}-2} \quad , \quad (4.76)$$

$$C_{\mathfrak{C}}^{\beta} := 2 \mu L_c^2 (1 + 2 L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}-1} \quad . \quad (4.77)$$

## 4.9 Gesamt- und Variationsformulierung des Modells

Die Definition von Randvorgaben komplettiert das COSSERAT-Modell zu einer Gesamtformulierung. Dazu sind auf der Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  des Gesamtkörpers  $\mathcal{B}$  Teilflächen zu definieren, welche die Art der Randvorgabe spezifizieren.

Es können der Deformation  $\varphi$  bzw. dem Rotationsfeld  $\overline{\mathbf{R}}$  auf den Begrenzungsflächen  $\Gamma_D \subset \partial\mathcal{B}$  bzw.  $\Gamma'_D \subset \partial\mathcal{B}$  durch

$$\varphi|_{\Gamma_D} = g_D \quad \text{direkte Vorgabe von Verschiebungen,} \quad (4.78)$$

$$\overline{\mathbf{R}}|_{\Gamma'_D} = \begin{cases} \overline{\mathbf{R}}_D, & \text{direkte Vorgabe von Drehungen,} \\ \text{polar}[\nabla\varphi], & \text{konsistente Kopplung mit } \nabla\varphi \text{ auf } \Gamma_D \end{cases} \quad (4.79)$$

DIRICHLETSche Randvorgaben vorliegen. Konsistente Kopplung bedeutet  $\overline{\mathbf{R}} \equiv \text{polar}[\mathbf{F}]$  und somit die Stilllegung der zusätzlichen Kinematik  $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$ .

Weiterhin stellt  $\Gamma_S \subset \partial\mathcal{B}$  mit  $\Gamma_D \cap \Gamma_S = \emptyset$  Begrenzungsflächen des Körpers dar, auf denen Traktionen eines äußeren Potentials  $\Pi_N$  einwirken.

Auf Begrenzungsflächen  $\Gamma_C \subset \partial\mathcal{B}$  mit  $\Gamma'_D \cap \Gamma_C = \emptyset$  wirken Oberflächenmomente eines äußeren Potentials  $\Pi_M$ . So verbleiben noch freie Ränder  $\Gamma_N = \partial\mathcal{B} \setminus \{\Gamma_D \cup \Gamma'_D \cup \Gamma_S \cup \Gamma_C\}$ , welche durch NEUMANNsche (natürliche) Randbedingungen für  $\varphi$  und  $\overline{\mathbf{R}}$  gekennzeichnet sind.

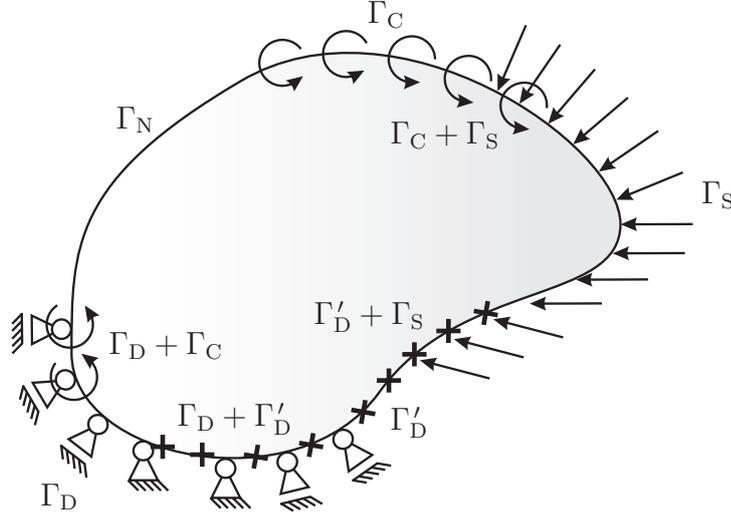


Abbildung 4.7: Randbedingungen am COSSERAT-Kontinuum.

Zusammenfassend lautet die nichtlineare COSSERAT-Formulierung dieser Arbeit

$$\Pi(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}) = \int_{\mathcal{B}_0} [W_{\text{mp}}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}) + W_{\text{curv}}^{\text{curl}}(\nabla \bar{\mathbf{R}})] \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } (\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}) \quad (4.80)$$

mit obigen Randvorgaben und der Kinematik aus Kap. 3.1.3.

Physikalische Größen sowie die Volumenintegration in Gl. 4.80 beziehen sich auf Koordinaten der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0$ . Die Verzerrungsenergiedichte  $W_{\text{mp}}$  wird gemäß Gl. 4.49 verwendet und im transversal anisotropen Fall nach Gl. 4.37 mit  $\mu_c^a = \mu_c^b = 0$  erweitert, vgl. auch Tafel A.11. Die Krümmungsenergiedichte  $W_{\text{curv}}^{\text{curl}}$  basiert für beide Fälle auf Gl. 4.65.

Volumenkräfte  $\mathbf{b}_0$ , Volumenmomente  $\mathbf{l}_0$ , Oberflächentraktionen  $\mathbf{t}_0$  sowie Oberflächenmomente  $\mathbf{c}_0$  tragen zur externen Energie  $\Pi^{\text{ext}}(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}})$  bei. Es sollen lediglich konservative Belastungen behandelt werden.

Die Variation der Gl. 4.80 führt auf das Zweifeldfunktional mit der Forderung

$$\begin{aligned} G &:= \delta \Pi(\boldsymbol{\varphi}, \delta \boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}, \mathbf{W}) \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} \left[ \left\langle \frac{\partial W_{\text{mp}}}{\partial \bar{\mathbf{U}}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W_{\text{curv}}^{\text{curl}}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}, \delta \boldsymbol{\mathcal{E}} \right\rangle \right] dV + \delta \Pi^{\text{ext}}(\boldsymbol{\varphi}, \delta \boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}, \mathbf{W}) \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} [\langle \bar{\mathbf{T}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{M}}, \delta \boldsymbol{\mathcal{E}} \rangle] dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 (\langle \mathbf{b}_0, \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{l}_0, \boldsymbol{w} \rangle) dV \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\langle \mathbf{t}_0, \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{c}_0, \boldsymbol{w} \rangle) dA \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad (4.81) \end{aligned}$$

für alle zulässigen Variationen  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\delta \mathbf{F}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{w})$  und  $\delta \mathfrak{C}(\mathbf{w})$ , wobei unter Verwendung der Variation der 1. COSSERAT-Verzerrung gilt

$$\delta \bar{\mathbf{U}} = \delta(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}) = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} \quad . \quad (4.82)$$

In Gl. 4.81 ist die Bilanzgleichung des Impulses und des Drehimpulses in schwacher Form enthalten. Die Impulsbilanz lautet dann

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\langle \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} \rangle - \rho_0 \langle \mathbf{b}_0, \delta \mathbf{u} \rangle] dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \langle \mathbf{t}_0, \delta \mathbf{u} \rangle dA = 0 \quad (4.83)$$

und die Drehimpulsbilanz

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\langle \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{M}}, \delta \mathfrak{C} \rangle - \langle \mathbf{l}_0, \mathbf{w} \rangle] dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0} \langle \mathbf{c}_0, \mathbf{w} \rangle dA = 0 \quad . \quad (4.84)$$

Die Gleichungen 4.83 und 4.84 bilden die Grundlage der Finite-Element-Formulierung im folgenden Kapitel.

$$(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{mp}}(\nabla \varphi, \bar{\mathbf{R}}) + W_{\text{curv}}(\nabla \bar{\mathbf{R}}) dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } (\varphi, \bar{\mathbf{R}})$$

$$\varphi|_{\Gamma_D} = g_D, \quad \bar{\mathbf{R}}|_{\Gamma'_D} = \begin{cases} \bar{\mathbf{R}}_D, \text{ direkte Vorgabe von Drehungen} \\ \text{polar}[\nabla \varphi], \text{ konsistente Kopplung mit } \nabla \varphi \text{ auf } \Gamma_D = \Gamma'_D \\ \text{frei, keine Bedingung an } \bar{\mathbf{R}} \end{cases}$$

$$W_{\text{mp}}(\nabla \varphi, \bar{\mathbf{R}}) = \mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 \\ + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} \notin \text{Sym}$$

$$W_{\text{curv}}(\nabla \bar{\mathbf{R}}) = \frac{\mu}{q} (1 + 2 L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}}, \quad \mathfrak{C} = \text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}}$$

Tafel 4.1: Isotropes, nichtlineares COSSERAT-Modell.

## 5 Finite-Element-Formulierung

Ziel dieses Kapitels ist die Implementierung des vorgestellten COSSERAT-Modells in ein Finite-Element-Programm. Damit sollen Näherungslösungen konkreter Randwertprobleme simuliert werden.

Die nichtlineare Formulierung aus Gl. 4.80 ist zur Einbettung in einen NEWTON-RAPHSON-Algorithmus vorzubereiten. Dazu gehört zum einen die Erstellung eines diskreten Gleichungssystems, wie es durch Einführung von Ansatzfunktionen in der Finite-Element-Methode erreicht wird. Zum anderen ist das Gleichungssystem **abschnittsweise** zu linearisieren, woraus ein residualer Vektor und eine tangentielle Steifigkeitsmatrix resultiert.

Schlussendlich ergibt die Lösung einer Abfolge von linearen Gleichungssystemen ein genähertes, diskretes Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}^h$  und Drehfeld  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h$ , welches dem COSSERAT-Modell in abgeschwächter Form genügt.

Die Abschwächung bedeutet zum einen, dass lediglich ein stationärer Punkt anstelle des globalen Minimums gefordert wird und somit das Zweifeldfunktional  $G$  aus Gl. 4.81 genügt. Zum anderen wird die betrachtete Struktur  $\Omega$  und deren Verhalten durch eine endliche Anzahl von  $n_{\text{elm}}$  Teilgebieten  $\Omega_e$  approximiert

$$\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \Omega_e \quad . \quad (5.1)$$

Der obere Index  $h$  kennzeichnet stets die Approximation durch Finite Elemente.

### 5.1 Einführung von Ansatzfunktionen

Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}^h$  und das Drehfeld  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h$  werden innerhalb der Teilgebiete  $\Omega_e$  durch Ansatzfunktionen  $N^I$  und Knotenwerte  $\mathbf{u}^I$  bzw.  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^I$  diskret beschrieben. Hierbei bezeichnet  $I$  die Knotennummer und  $nel$  die Anzahl der Knoten pro Element. Im Rahmen einer isoparametrischen Elementformulierung sind gleiche Ansatzfunktionen  $N^I$  für  $\mathbf{u}^h$ ,  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h$  sowie die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{x}$  zu wählen

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^h &= \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{X}^I \quad , \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{x}^I \quad , \\ \mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{u}^I \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \bar{\boldsymbol{\alpha}}^I \quad . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Diese Arbeit verwendet ausschließlich LAGRANGESche Ansatzfunktionen, wodurch lediglich  $C^0$  Kontinuität zwischen den Teilgebieten gewährleistet ist.

Weiterhin wird die Variation des Verschiebungs- und Drehfeldes auf

$$\delta \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \delta \mathbf{u}^I \quad , \quad \delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{w}^I \quad (5.3)$$

reduziert, was die Willkür und Allgemeinheit der Testfunktionen auf den Ansatzraum und das Elementgebiet einschränkt.

Lineare Veränderungen der genäherten Felder  $\mathbf{u}^h$  und  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h$  werden durch

$$\Delta \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \Delta \mathbf{u}^I \quad , \quad \Delta \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{y}^I \quad (5.4)$$

erfasst.

## 5.2 Behandlung der Cosserat-Verzerrung

Die Ansatzfunktionen sind auf der Ebene von Geometrie, Verschiebung und Drehung eingeführt. Nun ist es in der Finite-Element-Methode oftmals nützlich, diese primäre Ebene zur Beschreibung von Verzerrungen beizubehalten. Die klassische, lineare Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ist z.B. darstellbar durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}^I \cdot \mathbf{u}^I \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}, \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})^T \quad (5.5)$$

mit der Operatormatrix

$$\mathbf{B}^I = \begin{pmatrix} N_{,1}^I & 0 & 0 \\ 0 & N_{,2}^I & 0 \\ 0 & 0 & N_{,3}^I \\ N_{,2}^I & N_{,1}^I & 0 \\ N_{,3}^I & 0 & N_{,1}^I \\ 0 & N_{,3}^I & N_{,2}^I \end{pmatrix} \quad . \quad (5.6)$$

Damit ist die Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  direkt durch Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}^I$  und den Operator  $\mathbf{B}^I$  beschrieben. Da in der klassischen Elastizitätstheorie die Symmetrie der Spannung vorausgesetzt wird, ist die Reduktion des Verzerrungstensors auf einen Vektor mit 6 Komponenten in Gl. 5.5 üblich.

Diese Reduktion ist in der COSSERAT-Theorie hinfällig, da unsymmetrische Verzerrungen und Spannungen auftreten. Auch würde die Konstruktion eines Verzerrungsvektors mit 9 Komponenten die numerische COSSERAT-Formulierung

erschweren, weshalb darauf verzichtet wird.

Während in der linearen COSSERAT-Theorie die Einführung von Operatormatrizen  $\mathbf{B}^I$  an dieser Stelle zu einer kompakten Formulierung führt, ist es in der nichtlinearen COSSERAT-Formulierung erst zu einem späteren Zeitpunkt sinnvoll. Zwei Gründe sind dafür verantwortlich:

- Die multiplikative Kopplung zwischen Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  und Deformationsfeld  $\mathbf{F}$  bedeutet eine nichtlineare Kopplung zwischen den primären Größen  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  und  $\mathbf{u}$ .
- Das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  ist über die nichtlineare Funktion in Gl. 2.14 an das Drehfeld  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  geknüpft.

Die approximative Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}^h = (\bar{\mathbf{R}}^h)^T \mathbf{F}^h$  schreibt sich formal nach Einführung der Ansatzfunktionen in Gl. 5.2 durch die approximierten Tensoren

$$\mathbf{F}^h = \mathbb{1} + \text{Grad}[\mathbf{u}^h] = \mathbb{1} + \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{u}^I \otimes \text{Grad}[N^I] \quad (5.7)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}^h &= \cos\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h\| \mathbb{1} + \frac{\sin\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h\|} \bar{\mathbf{A}}^h + \frac{1 - \cos\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h\|}{\|\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h\|^2} \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h \otimes \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h \quad , \\ \bar{\mathbf{A}}^h &= -\bar{\boldsymbol{\alpha}}^h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \bar{\boldsymbol{\alpha}}^I \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Definition einer Operatormatrix  $\mathbf{B} = \text{Grad}[N^I]$  in Gl. 5.7 ist denkbar. Da  $\mathbf{F}^h$  ein Tensor zweiter Stufe bleiben soll, ist das dyadische Produkt jedoch obligatorisch. Für ein Vektorprodukt wie in Gl. 5.5 müsste die Operatormatrix auf dritte Stufe erweitert werden, worauf wiederum verzichtet wird.

Die Variation und Linearisierung von  $\mathbf{F}$  unter Hinzunahme von Testgrößen  $\delta \mathbf{u}^I$  bzw. linearen Veränderungen  $\Delta \mathbf{u}^I$  an den Knoten lautet sinngemäß

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F}^h &= \text{Grad}[\delta \mathbf{u}^h] = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \otimes \text{Grad}[N^I] \quad , \\ \Delta \mathbf{F}^h &= \text{Grad}[\Delta \mathbf{u}^h] = \sum_{I=1}^{nel} \Delta \mathbf{u}^I \otimes \text{Grad}[N^I] \quad . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Zur besonderen Form der Variation und Linearisierung von Rotationen wird auf Kap. 2.3 verwiesen. So schreibt sich die Variation und Linearisierung von  $\bar{\mathbf{R}}$  unter Hinzunahme von Testgrößen  $\mathbf{w}^I$  bzw. linearen Änderungen  $\mathbf{y}^I$  an den Knoten durch

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{R}}^h &= \mathbf{W}^h \bar{\mathbf{R}}^h = -\mathbf{w}^h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{R}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{w}^I \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{R}}^h \quad , \\ \Delta\bar{\mathbf{R}}^h &= \mathbf{Y}^h \bar{\mathbf{R}}^h = -\mathbf{y}^h \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{R}}^h = \sum_{I=1}^{nel} N^I \mathbf{y}^I \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{R}}^h \quad .\end{aligned}\tag{5.10}$$

Eine Operatormatrix  $\bar{\mathbf{B}}^I = N^I \boldsymbol{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{R}}^h$  ist hier denkbar. Jedoch ist die Verwendung von  $\delta\bar{\mathbf{R}}^h = \mathbf{W}^h \bar{\mathbf{R}}^h$  und  $\Delta\bar{\mathbf{R}}^h = \mathbf{Y}^h \bar{\mathbf{R}}^h$  für spätere Umformungen vorteilhaft, womit sich  $\bar{\mathbf{B}}^I$  erübrigt. Die Gleichungen 5.9 und 5.10 besagen zunächst, wie die Separation der Größen  $\delta\mathbf{u}^h$ ,  $\mathbf{w}^h$ ,  $\Delta\mathbf{u}^h$  und  $\mathbf{y}^h$  möglich ist.

Im Folgenden wird auf den oberen Index  $h$  verzichtet, da er ausnahmslos alle Tensoren bekleidet. Die Variation und lineare Veränderlichkeit der Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}$  lautet

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{U}} &= \delta(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}) = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \delta\mathbf{F} \quad , \\ \Delta\bar{\mathbf{U}} &= \Delta(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}) = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \Delta\mathbf{F} \quad .\end{aligned}\tag{5.11}$$

Auch die lineare Veränderlichkeit der Variation  $\delta\bar{\mathbf{U}}$  ist für die numerische Formulierung nötig

$$\begin{aligned}\Delta\delta\bar{\mathbf{U}} &= \Delta(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \delta\mathbf{F}) \\ &= \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \Delta\mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \delta\mathbf{F} \quad .\end{aligned}\tag{5.12}$$

### 5.3 Behandlung der Krümmungsmessung

In Kap. 3.1.3 sind drei alternative Krümmungsmessungen  $\widehat{\mathfrak{K}}$ ,  $\mathfrak{K}$  und  $\mathfrak{C}$  eingeführt. Zur Vollständigkeit werden die Variation und Linearisierung für alle drei Varianten gezeigt.

Die Darstellung der kartesischen Komponenten in Indexnotation löst dabei die symbolische Notation ab, da sonst Definitionen von unüblichen Produkten not-

wendig sind. Die Variation der Felder schreibt sich wie folgt

$$\begin{aligned}\delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} &= \delta\left(\frac{1}{2}\epsilon_{iab}\bar{R}_{ca}\bar{R}_{cb,j}\right) = \frac{1}{2}\epsilon_{iab}(W_{cf}\bar{R}_{fa}\bar{R}_{cb,j} + \bar{R}_{ca}W_{cf,j}\bar{R}_{fb} - W_{fc}\bar{R}_{ca}\bar{R}_{fb,j}) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\bar{R}_{ca}W_{cf,j}\bar{R}_{fb} = \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\epsilon_{rfc}w_{r,j}\bar{R}_{ca}\bar{R}_{fb} \quad ,\end{aligned}\quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{K}_{ijk} &= \delta(\bar{R}_{ai}\bar{R}_{ak,j}) = W_{ab}\bar{R}_{bi}\bar{R}_{ak,j} + \bar{R}_{ai}W_{ab,j}\bar{R}_{bk} + \bar{R}_{ai}W_{ab}\bar{R}_{bk,j} \\ &= \bar{R}_{ai}W_{ab,j}\bar{R}_{bk} = \epsilon_{rba}w_{r,j}\bar{R}_{ai}\bar{R}_{bk} \quad ,\end{aligned}\quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{C}_{ij} &= \delta(\epsilon_{acj}\bar{R}_{fi}\bar{R}_{fc,a}) = \epsilon_{acj}(W_{fb}\bar{R}_{bi}\bar{R}_{fc,a} + \bar{R}_{fi}W_{fb}\bar{R}_{bc,a} + \bar{R}_{fi}W_{fb,a}\bar{R}_{bc}) \\ &= \epsilon_{acj}(\bar{R}_{ib}^T W_{bf}^T \bar{R}_{fc,a} + \bar{R}_{if}W_{fb}\bar{R}_{bc,a} + \bar{R}_{fi}W_{fb,a}\bar{R}_{bc}) \\ &= \epsilon_{acj}\bar{R}_{fi}W_{fb,a}\bar{R}_{bc} = w_{r,a}\epsilon_{rbf}\epsilon_{acj}\bar{R}_{fi}\bar{R}_{bc} \quad .\end{aligned}\quad (5.15)$$

Da die Regeln für Variation und Linearisierung formal übereinstimmen, kann die lineare Veränderlichkeit  $\Delta\widehat{\mathfrak{K}}$ ,  $\Delta\mathfrak{K}$  und  $\Delta\mathfrak{C}$  ohne weiteres angegeben werden

$$\Delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\bar{R}_{ca}Y_{cf,j}\bar{R}_{fb} = \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\epsilon_{rfc}y_{r,j}\bar{R}_{ca}\bar{R}_{fb} \quad ,\quad (5.16)$$

$$\Delta\mathfrak{K}_{ijk} = \bar{R}_{ai}Y_{ab,j}\bar{R}_{bk} = \epsilon_{rba}y_{r,j}\bar{R}_{ai}\bar{R}_{bk} \quad ,\quad (5.17)$$

$$\Delta\mathfrak{C}_{ij} = \epsilon_{acj}\bar{R}_{fi}Y_{fb,a}\bar{R}_{bc} = y_{r,a}\epsilon_{rbf}\epsilon_{acj}\bar{R}_{fi}\bar{R}_{bc} \quad .\quad (5.18)$$

Die lineare Veränderlichkeit der Variationen  $\delta\widehat{\mathfrak{K}}$ ,  $\delta\mathfrak{K}$  und  $\delta\mathfrak{C}$  lauten

$$\Delta\delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} = \epsilon_{ibc}\bar{R}_{db}Y_{ed}W_{ef,j}\bar{R}_{fc} \quad ,\quad (5.19)$$

$$\Delta\delta\mathfrak{K}_{ijk} = w_{f,j}y_e(\bar{R}_{ei}\bar{R}_{fk} - \bar{R}_{ek}\bar{R}_{fi}) \quad ,\quad (5.20)$$

$$\Delta\delta\mathfrak{C}_{ij} = \epsilon_{acj}w_{r,a}y_s(\bar{R}_{si}\bar{R}_{rc} - \bar{R}_{ri}\bar{R}_{sc}) \quad .\quad (5.21)$$

Wegen  $\mathfrak{K}_{ijk} = \epsilon_{mik}\widehat{\mathfrak{K}}_{mj}$  und  $\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\mathfrak{K}_{ajb}$  sind die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{K}_{ijk} &= \epsilon_{mik}\delta\widehat{\mathfrak{K}}_{mj} & \delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\delta\mathfrak{K}_{ajb} \\ \Delta\mathfrak{K}_{ijk} &= \epsilon_{mik}\Delta\widehat{\mathfrak{K}}_{mj} & \Delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\Delta\mathfrak{K}_{ajb} \\ \Delta\delta\mathfrak{K}_{ijk} &= \epsilon_{mik}\Delta\delta\widehat{\mathfrak{K}}_{mj} & \Delta\delta\widehat{\mathfrak{K}}_{ij} &= \frac{1}{2}\epsilon_{iab}\Delta\delta\mathfrak{K}_{ajb}\end{aligned}\quad (5.22)$$

offensichtlich.

## 5.4 FE-Gleichungssystem des Cosserat-Modells

Das Zweifeldfunktional  $G$  aus Gl. 4.81 soll nun für den NEWTON-RAPHSON-Algorithmus vorbereitet werden. Durch Einsetzen der approximativen Felder aus Kap. 5.2 und Kap. 5.3 wird das Gleichungssystem der Finite-Element-Methode

$$\delta\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{K}_T(\mathbf{p}^*) \cdot \Delta\mathbf{p} = \delta\mathbf{p}^* \cdot \mathbf{R}_V(\mathbf{p}^*) \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_T(\mathbf{p}^*) \cdot \Delta\mathbf{p} = \mathbf{R}_V(\mathbf{p}^*) \quad (5.23)$$

angestrebt. Hierbei ist  $\mathbf{K}_T$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{R}_V$  der residuale Vektor. Wie bereits in Kap. 5.2 angemerkt, werden primäre Größen an den Knoten im letzten Schritt separiert. Sie seien im Prozessvektor  $\mathbf{p} = (\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ , dem virtuellen Prozessvektor  $\delta\mathbf{p} = (\delta\mathbf{u}, \mathbf{w})$  und dem inkrementellen Prozessvektor  $\Delta\mathbf{p} = (\Delta\mathbf{u}, \mathbf{y})$  versammelt. Das  $\star$  Symbol kennzeichnet den Entwicklungspunkt der Linearisierung.

Das Zweifeldfunktional  $G$  lautet nach Linearisierung und Einsetzen der Prozessvektoren am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^\star$

$$\text{Lin } G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star, \Delta\mathbf{p}) = G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) + DG^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) \cdot \Delta\mathbf{p} \quad . \quad (5.24)$$

Dies stellt den Funktionswert  $G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star)$  sowie die lineare Veränderung  $DG^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) \cdot \Delta\mathbf{p}$  um  $\mathbf{p}^\star$  dar. Eine vollständige TAYLOR-Entwicklung am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^\star$  enthielte neben höheren Termen auch noch bilineare Terme als Resultat der geometrischen Kopplung zwischen Deformation und Rotation. Diese Terme werden nicht berücksichtigt, um das lineare Gleichungssystem 5.23 zu erhalten.

Überträgt man die Forderung des stationären Punktes an  $G^h$  auch auf die Linearisierung, also  $\text{Lin } G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star, \Delta\mathbf{p}) = 0$ , folgt aus Gl. 5.24

$$DG^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) \cdot \Delta\mathbf{p} = -G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) \quad , \quad (5.25)$$

womit eine Entsprechung zu Gl. 5.23 (links) vorliegt.

Die rechte Seite in Gl. 5.25 beschreibt die Variation der inneren und äußeren Arbeit am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^\star$  durch

$$\begin{aligned} -G^h(\mathbf{p}^\star, \delta\mathbf{p}^\star) &= \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 (\langle \mathbf{b}_0, \delta\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{l}_0, \mathbf{w} \rangle) dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} (\langle \mathbf{t}_0, \delta\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{c}_0, \mathbf{w} \rangle) dA \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} (-\langle \bar{\mathbf{T}}, \delta\bar{\mathbf{U}} \rangle - \langle \bar{\mathfrak{M}}, \delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle) dV \quad . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Im virtuellen Arbeitsanteil aus Spannungen  $\langle \bar{\mathbf{T}}, \delta\bar{\mathbf{U}} \rangle$  tritt die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung  $\mathbf{S}_1 = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}$  in Erscheinung<sup>37</sup>

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{T}}, \delta\bar{\mathbf{U}} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{R}}^T \delta\mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle = \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}, \delta\mathbf{F} + \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}_1, \delta\mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.27)$$

<sup>37</sup> Die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung ist im klassischen Fall über die BIOT-Spannung  $\mathbf{T}$  durch  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{R} \mathbf{T}$  gegeben. Es liegt hier jedoch nahe den Begriff auch für  $\mathbf{S}_1 = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}$  zu benutzen.

Die Separation der Prozessvariable  $\delta \mathbf{u}$  in  $\langle \mathbf{S}_1, \delta \mathbf{F} \rangle$  gelingt durch

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1, \delta \mathbf{F} \rangle &= \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{S}_1 \rangle = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{u}_I \otimes \text{Grad}[N^I] : \mathbf{S}_1 = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{S}_1 \cdot \text{Grad}[N^I] \\ &= \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{B}^{\alpha I} \quad , \quad \mathbf{B}^{\alpha I} := \mathbf{S}_1 \cdot \text{Grad}[N^I] \quad . \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die Separation der Prozessvariable  $\mathbf{w}$  in  $\langle \mathbf{S}_1, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle$  über

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle &= \langle -\mathbf{W}, \mathbf{S}_1 \mathbf{F}^T \rangle = (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) : (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{F}^T) = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{F}^T N^I \\ &= \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\beta I} \quad , \quad \mathbf{B}^{\beta I} := \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{F}^T N^I \quad . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Im virtuellen Arbeitsanteil aus Momentenspannungen  $\langle \overline{\mathfrak{M}}, \delta \mathfrak{C} \rangle$  lässt sich die Prozessvariable  $\mathbf{w}$  gemäß Gl. 5.15 separieren

$$\begin{aligned} \langle \overline{\mathfrak{M}}, \delta \mathfrak{C} \rangle &= \sum_{I=1}^{nel} w_r^I \epsilon_{rbj} \bar{R}_{bi} \bar{R}_{jn} \overline{\mathfrak{M}}_{nk} \epsilon_{aik} N_{,a}^I = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\gamma I} \quad , \\ \mathbf{B}^{\gamma I} &:= \epsilon_{rbj} \bar{R}_{bi} \bar{R}_{jn} \overline{\mathfrak{M}}_{nk} \epsilon_{aik} N_{,a}^I \mathbf{e}_r \quad . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Damit lautet die Variation der inneren und äußeren Arbeit aus Gl. 5.26 am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^*$

$$-G^h(\mathbf{p}^*, \delta \mathbf{p}^*) = \bigcup_{e=1}^{nelm} \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{R}_V^{eI} + \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{R}_V^{eI} \quad (5.31)$$

mit den Elementvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_V^{eI} &= \int_{\mathcal{B}_0^e} (\rho_0 \mathbf{b}_0 N^I - \mathbf{B}^{\alpha I}) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^e} \mathbf{t}_0 N^I dA \\ \mathbf{R}_V^{eI} &= \int_{\mathcal{B}_0^e} (\rho_0 \mathbf{l}_0 N^I - \mathbf{B}^{\beta I} - \mathbf{B}^{\gamma I}) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^e} \mathbf{c}_0 N^I dA \quad . \end{aligned} \quad (5.32)$$

Die linke Seite der Gl. 5.25 beschreibt lineare Veränderlichkeiten der Variationsformulierung am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^*$  durch

$$DG^h(\mathbf{p}^*, \delta \mathbf{p}^*) \cdot \Delta \mathbf{p} = \int_{\mathcal{B}_0} (\langle \Delta \bar{\mathbf{T}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{T}}, \Delta \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + \langle \Delta \overline{\mathfrak{M}}, \delta \mathfrak{C} \rangle + \langle \overline{\mathfrak{M}}, \Delta \delta \mathfrak{C} \rangle) dV \quad . \quad (5.33)$$

Da zunächst alle äußere Arbeiten aus Kräften und Momenten verursacht sein sollen, welche keine Funktionen von  $\mathbf{u}$  und  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  darstellen, verbleiben nur Veränderlichkeiten aus virtuellen, inneren Arbeiten. In Kap. 5.5 wird eine Momentenlast, welche in Abhängigkeit zu  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  steht, separat ergänzt.

Eine Zerlegung der Spannung  $\bar{\mathbf{T}}$  in den linearen und nichtlinearen Anteil  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}$  bzw.  $\bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}$  gemäß Gl. 4.59 ist für die weiteren Umformungen von Nutzen.

Da der Term  $\langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle$  wegen

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle &= f(\bar{\mathbf{U}}) \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T}, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle = f(\bar{\mathbf{U}}) \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{-T}, \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle \\ &= f(\bar{\mathbf{U}}) \langle \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T, \mathbf{W}^T \rangle = f(\bar{\mathbf{U}}) \langle \mathbf{1}, \mathbf{W}^T \rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

verschwindet, gilt dies auch für

$$\langle \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle = \langle \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle = \langle \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} \rangle \quad , \quad (5.35)$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \Delta \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \Delta (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) \rangle = \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \Delta \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Mit Gl. 5.35 und unter Verwendung der Materialmatrix  $\mathbf{C}$  aus Gl. 4.60 schreibt sich der Term  $\langle \Delta \bar{\mathbf{T}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle$  aus zu

$$\begin{aligned} \langle \Delta \bar{\mathbf{T}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle &= \langle \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + \langle \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F} \rangle = \delta \bar{\mathbf{U}} : \mathbf{C} : \Delta \bar{\mathbf{U}} + \langle \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}} \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}} \rangle \\ &= (\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) + (\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) \\ &\quad + (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) + (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) \\ &\quad + \langle \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}} \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Unter Verwendung von Gl. 5.12 und Gl. 5.36 schreibt sich  $\langle \bar{\mathbf{T}}, \Delta \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle$  durch

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{T}}, \Delta \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \Delta \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle = \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \mathbf{Y}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}^{\text{lin}}, \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{T}}, \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Damit sind die linearen Veränderlichkeiten aus Gl. 5.33 aufgeschlüsselt

$$\begin{aligned} DG^h(p^*, \delta p^*) \cdot \Delta p^* &= \int_{\mathcal{B}_0} ((\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) + (\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) \\ &\quad + (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) + (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbf{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) \\ &\quad + \langle \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}} \Delta \bar{\mathbf{T}}^{\text{nili}} \rangle + \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{F} \rangle + \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{F} \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle + \langle \Delta \bar{\mathfrak{M}}, \delta \boldsymbol{\epsilon} \rangle + \langle \bar{\mathfrak{M}}, \Delta \delta \boldsymbol{\epsilon} \rangle) dV \quad . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Zur Separation der Prozessgrößen werden die Terme in Gl. 5.39 der Reihe nach behandelt.

Term 1:

$$(\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbb{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) = \bar{R}_{ar}^T \delta u_{r,b} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{ck}^T \Delta u_{k,d} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{B}^{\delta IJ} \cdot \Delta \mathbf{u}^J$$

mit  $\mathbf{B}^{\delta IJ} = \bar{R}_{ra} N_b^I \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{kc} N_d^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad .$  (5.40)

Term 2:

$$(\bar{\mathbf{R}}^T \delta \mathbf{F}) : \mathbb{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) = \bar{R}_{ar}^T \delta u_{r,b} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{cf}^T y_k \epsilon_{kfe} \mathbf{F}_{ed} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{B}^{\epsilon IJ} \cdot \mathbf{y}^J$$

mit  $\mathbf{B}^{\epsilon IJ} = N_b^I \bar{R}_{ra} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{fc} \epsilon_{kfe} F_{ed} N^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad .$  (5.41)

Wegen  $\mathbf{B}^{\epsilon IJ} \neq \mathbf{B}^{\epsilon JI}$  resultiert bereits aus Term 2 eine unsymmetrische Steifigkeitsmatrix der Finite-Element-Formulierung.

Term 3:

$$(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbb{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F}) = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot (\mathbf{B}^{\epsilon JI})^T \cdot \Delta \mathbf{u}^J$$

mit  $(\mathbf{B}^{\epsilon JI})^T = N_b^J \bar{R}_{ra} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{fc} \epsilon_{kfe} F_{ed} N^I \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_r$   
 $= N_b^J \bar{R}_{ka} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{fc} \epsilon_{rfe} F_{ed} N^I \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad .$  (5.42)

Term 4:

$$(\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \mathbf{F}) : \mathbb{C} : (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F}) = \bar{R}_{ae}^T w_r \epsilon_{ref} F_{fb} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{cg}^T y_k \epsilon_{kgh} F_{hd}$$

$$= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\eta IJ} \cdot \mathbf{y}^J$$

mit  $\mathbf{B}^{\eta IJ} = N^I \bar{R}_{ea} \epsilon_{ref} F_{fb} \mathbb{C}_{abcd} \bar{R}_{gc} \epsilon_{kgh} F_{hd} N^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad .$  (5.43)

Term 5:

Mit der linearen Veränderlichkeit  $\Delta \bar{\mathbf{T}}_{\text{nili}}$  aus Gl. 4.62 sowie der Beziehung  $\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} = \mathbf{F}^{-T}$  folgt

$$\delta \mathbf{F} : (\bar{\mathbf{R}} \Delta \bar{\mathbf{T}}_{\text{nili}}) = C_{\text{det}}^{\beta} \langle \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} \rangle \langle \bar{\mathbf{U}}^{-T}, \Delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + C_{\text{det}}^{\gamma} \langle \delta \mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}}^{-T} \rangle$$

$$= C_{\text{det}}^{\beta} \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{F}^{-T} \rangle \langle \bar{\mathbf{U}}^{-T}, \Delta \bar{\mathbf{U}} \rangle + C_{\text{det}}^{\gamma} \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{F}^{-T} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}}^{-T} \rangle, \quad (5.44)$$

mit  $C_{\det}^{\beta}$  aus Gl. 4.63 und  $C_{\det}^{\gamma} = -C_{\det}^{\alpha}$  aus Gl. 4.61. Umformung von

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{U}}^{-T}, \Delta \bar{\mathbf{U}} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{-T}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F} \rangle + \langle \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{-T}, \bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F} \rangle \\ &= \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T, \mathbf{Y}^T \rangle + \langle \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}^{-T}, \Delta \mathbf{F} \rangle = \langle \mathbf{F}^{-T}, \Delta \mathbf{F} \rangle \end{aligned} \quad (5.45)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-T} \Delta \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{U}}^{-T} &= \mathbf{F}^{-T} (\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{F} + \bar{\mathbf{R}}^T \Delta \mathbf{F})^T \bar{\mathbf{U}}^{-T} \\ &= \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^T \mathbf{Y} \bar{\mathbf{R}} + \Delta \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{U}}^{-T} = \mathbf{Y} \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} + \mathbf{F}^{-T} \Delta \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{U}}^{-T} \\ &= \mathbf{Y} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-T} \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (5.46)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{F} : (\bar{\mathbf{R}} \Delta \bar{\mathbf{T}}_{\text{nili}}) &= C_{\det}^{\beta} \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{F}^{-T} \rangle \langle \mathbf{F}^{-T}, \Delta \mathbf{F} \rangle + C_{\det}^{\gamma} \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{Y} \mathbf{F}^{-T} \rangle \\ &\quad + C_{\det}^{\gamma} \langle \delta \mathbf{F}, \mathbf{F}^{-T} \Delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \rangle \\ &= C_{\det}^{\beta} \delta u_{r,a} F_{ra}^{-T} F_{kb}^{-T} \Delta u_{k,b} + C_{\det}^{\gamma} \delta u_{r,a} (-y_k) \epsilon_{krb} F_{ba}^{-T} \\ &\quad + C_{\det}^{\gamma} \delta u_{r,a} F_{rb}^{-T} \Delta u_{k,b} F_{ka}^{-T} \\ &= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot (\mathbf{B}^{\theta IJ} + \mathbf{B}^{\vartheta IJ}) \cdot \Delta \mathbf{u}^J + \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{B}^{\iota IJ} \cdot \mathbf{y}^J, \end{aligned} \quad (5.47)$$

mit

$$\mathbf{B}^{\theta IJ} = C_{\det}^{\beta} N_{,a}^I F_{ar}^{-1} F_{bk}^{-1} N_{,b}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad (5.48)$$

$$\mathbf{B}^{\vartheta IJ} = C_{\det}^{\gamma} N_{,a}^I F_{br}^{-1} F_{ak}^{-1} N_{,b}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad (5.49)$$

$$\mathbf{B}^{\iota IJ} = C_{\det}^{\gamma} N_{,a}^I \epsilon_{kbr} F_{ab}^{-1} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad . \quad (5.50)$$

Term 6:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{F} \rangle &= S_{1ab}^{\text{lin}} y_k \epsilon_{kac} w_r \epsilon_{rcd} F_{db} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\kappa IJ} \cdot \mathbf{y}^J \\ \text{mit } \mathbf{B}^{\kappa IJ} &= N^I \epsilon_{rcd} S_{1ab}^{\text{lin}} F_{db} \epsilon_{kac} N^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Term 7:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1^{\text{lin}}, \mathbf{W}^T \Delta \mathbf{F} \rangle &= S_{1ab}^{\text{lin}} w_r \epsilon_{rak} \Delta u_{k,b} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\lambda IJ} \cdot \Delta \mathbf{u}^J \\ \text{mit } \mathbf{B}^{\lambda IJ} &= N^I S_{1ab}^{\text{lin}} \epsilon_{rak} N_{,b}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Term 8:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1, \mathbf{Y}^T \delta \mathbf{F} \rangle &= S_{1ab} y_k \epsilon_{kar} \delta u_{r,b} = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{B}^{\varpi IJ} \cdot \mathbf{y}^J \\ \text{mit } \mathbf{B}^{\varpi IJ} &= N_b^I S_{1ab} \epsilon_{kar} N^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad . \end{aligned} \quad (5.53)$$

Term 9:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta \bar{\mathfrak{M}}, \delta \mathfrak{C} \rangle &= C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} \langle \mathfrak{C}, \Delta \mathfrak{C} \rangle \langle \mathfrak{C}, \delta \mathfrak{C} \rangle + C_{\mathfrak{C}}^{\beta} \langle \Delta \mathfrak{C}, \delta \mathfrak{C} \rangle \\
&= C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} \mathfrak{C}_{ij} \Delta \mathfrak{C}_{ij} \mathfrak{C}_{mn} \delta \mathfrak{C}_{mn} + C_{\mathfrak{C}}^{\beta} \delta \mathfrak{C}_{ij} \Delta \mathfrak{C}_{ij} \\
&= C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} w_{r,d} \epsilon_{reg} \epsilon_{dhn} \bar{R}_{gm} \bar{R}_{eh} \mathfrak{C}_{mn} \mathfrak{C}_{ij} y_{k,a} \epsilon_{kbf} \epsilon_{acj} \bar{R}_{fi} \bar{R}_{bc} \\
&\quad + C_{\mathfrak{C}}^{\beta} w_{r,d} \epsilon_{reg} \epsilon_{dhj} \bar{R}_{gi} \bar{R}_{eh} y_{k,a} \epsilon_{kbf} \epsilon_{acj} \bar{R}_{fi} \bar{R}_{bc} \\
&= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot (\mathbf{B}^{\phi IJ} + \mathbf{B}^{\chi IJ}) \cdot \mathbf{y}^J
\end{aligned} \tag{5.54}$$

mit dem Faktor  $C_{\mathfrak{C}}^{\alpha}$  aus Gl. 4.76 und dem Faktor  $C_{\mathfrak{C}}^{\beta}$  aus Gl. 4.77 folgt

$$\mathbf{B}^{\phi IJ} = C_{\mathfrak{C}}^{\alpha} N_{,d}^I \epsilon_{reg} \epsilon_{dhn} \bar{R}_{gm} \bar{R}_{eh} \mathfrak{C}_{mn} \mathfrak{C}_{ij} \epsilon_{kbf} \epsilon_{acj} \bar{R}_{fi} \bar{R}_{bc} N_{,a}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \tag{5.55}$$

$$\mathbf{B}^{\chi IJ} = C_{\mathfrak{C}}^{\beta} N_{,d}^I \epsilon_{reg} \epsilon_{dhj} \bar{R}_{gi} \bar{R}_{eh} \epsilon_{kbf} \epsilon_{acj} \bar{R}_{fi} \bar{R}_{bc} N_{,a}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad . \tag{5.56}$$

Term 10:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathfrak{M}}, \Delta \delta \mathfrak{C} \rangle &= \bar{\mathfrak{M}}_{ij} \epsilon_{acj} w_{r,a} y_k (\bar{R}_{ki} \bar{R}_{rc} - \bar{R}_{ri} \bar{R}_{kc}) = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\psi IJ} \cdot \mathbf{y}^J \\
\text{mit } \mathbf{B}^{\psi IJ} &= N_{,a}^I \bar{\mathfrak{M}}_{ij} \epsilon_{acj} (\bar{R}_{ki} \bar{R}_{rc} - \bar{R}_{ri} \bar{R}_{kc}) N_{,a}^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \quad .
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Damit lautet die lineare Veränderlichkeit der Variationsformulierung am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^*$

$$\begin{aligned}
DG^h(\mathbf{p}^*, \delta \mathbf{p}^*) \cdot \Delta \mathbf{p} &= \bigcup_{e=1}^{nelm} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \delta u_I \cdot \mathbf{K}_T^{eIJ} \cdot \Delta \mathbf{u}^J + \delta u^I \cdot \mathbf{K}_T^{eIJ} \cdot \mathbf{y}^J \\
&\quad + \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{K}_T^{eIJ} \cdot \Delta \mathbf{u}^J + \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{K}_T^{eIJ} \cdot \mathbf{y}^J
\end{aligned} \tag{5.58}$$

mit den Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_T^{eIJ} \overset{uu}{=} & \int_{\mathcal{B}_0^e} (\mathbf{B}^{\delta IJ} + \mathbf{B}^{\theta IJ} + \mathbf{B}^{\vartheta IJ}) dV \\
\mathbf{K}_T^{eIJ} \overset{wu}{=} & \int_{\mathcal{B}_0^e} ((\mathbf{B}^{\epsilon JI})^T + \mathbf{B}^{\lambda IJ}) dV \\
\mathbf{K}_T^{eIJ} \overset{yy}{=} & \int_{\mathcal{B}_0^e} (\mathbf{B}^{\epsilon IJ} + \mathbf{B}^{\iota IJ} + \mathbf{B}^{\varpi IJ}) dV \\
\mathbf{K}_T^{eIJ} \overset{wy}{=} & \int_{\mathcal{B}_0^e} (\mathbf{B}^{\eta IJ} + \mathbf{B}^{\kappa IJ} + \mathbf{B}^{\phi IJ} + \mathbf{B}^{\chi IJ} + \mathbf{B}^{\psi IJ}) dV \quad .
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Zusammenfassend lässt sich das lineare Gleichungssystem in der Form von Gl. 5.23 angeben

$$\bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \mathbf{w}^I \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \overset{uu}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ} & \overset{wy}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ} \\ \overset{wu}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ} & \overset{ww}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^J \\ \mathbf{y}^J \end{pmatrix} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{elm}}} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}^I \\ \mathbf{w}^I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overset{u}{\mathbf{R}}_{\text{V}}^{eI} \\ \overset{w}{\mathbf{R}}_{\text{V}}^{eI} \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

In der Blockstruktur der Steifigkeitsmatrix präsentiert  $\overset{uu}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ}$  die Impulsbilanz und  $\overset{wy}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ}$  die Drehimpulsbilanz.<sup>38</sup>

Die Volumenintegrale in Gl. 5.32 und Gl. 5.59 werden mittels einer numerischen Gaußpunktintegration ermittelt. Das Verfahren integriert mit  $m$  Stützstellen Polynome bis zum Grad  $(2m - 1)$  exakt. Die Stützstellen bezeichnen die Punkte, an denen der exakte Funktionswert des Polynoms (z.B. der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\overset{uu}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ}$ ) berechnet und mit einem Wichtungsfaktor multipliziert wird. Die Summe dieser Werte über alle Stützstellen ergibt den Wert des Integrals. Für ein 8-Knoten-Volumenelement mit trilinearen Ansatzfunktionen wird eine 2-Punkt Gaußintegration mit insgesamt 8 Stützstellen verwendet. Bei einem 27-Knoten-Volumenelement mit triquadratischen Ansatzfunktionen wird eine 3-Punkt Gaußintegration mit insgesamt 27 Stützstellen verwendet.

## 5.5 Strukturbezogene Momentenlast

Erfährt ein deformierbares Kontinuum physikalische Effekte, aus denen eingeprägte Drehmomente hervorgehen, kann eine COSSERAT-Formulierung diese erfassen. Bewirkt die Momentenbelastung zudem mäßig bis große Deformationen, welche wiederum die Momentenbelastung beeinflussen, bietet sich die geometrisch nichtlineare COSSERAT-Formulierung in besonderer Weise an.

Aus der Elektrostatik und Magnetostatik sind Effekte bekannt, welche eingeprägte (volumenbezogene) Drehmomente  $\tilde{\mathbf{d}}$  gemäß

$$\tilde{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}} \quad (5.61)$$

im Material verursachen, vgl. ERINGEN & MAUGIN [62].

So erfährt i. allg. ein Material mit elektrischer Polarisation  $\vec{\mathbf{P}}$  innerhalb eines homogenen, elektrischen Feldes  $\vec{\mathbf{E}}$  eingeprägte Drehmomente. Da piezokeramische

<sup>38</sup> Es ist möglich die Nebendiagonaleinträge  $\overset{wy}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ}$  und  $\overset{wu}{\mathbf{K}}_{\text{T}}^{eIJ}$  aus dem Gleichungssystem zu entfernen bzw. Impuls- und Drehimpulsbilanz sequentiell zu betrachten. Das Konvergenzverhalten wird dadurch selbstverständlich beeinflusst.

Strukturen als polarisiertes Material hohen elektrischen Feldern ausgesetzt sind, wird dieser Effekt z.B. in KAMLAH [97] im Kontext mit ponderomotorischen Kräften diskutiert.

Bekannt durch die Funktion einer Kompassnadel ist das Drehmoment, welches auf ein Material mit Magnetisierung  $\vec{M}$  durch ein äußeres, homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Erregung  $\vec{H}$  ausgeübt wird.<sup>39</sup> Ist die Magnetisierung parallel zum äußeren Magnetfeld, verschwindet das Drehmoment vollständig. Stehen beide Felder senkrecht zueinander, wird das Drehmoment maximal.

Die Momentenbelastung einer Kompassnadel hängt also davon ab, wie die strukturelle Ausrichtung der Nadel ist. Wäre die Nadel ein äußerst dünnes Gebilde mit geringer Steifigkeit, würden sich die Enden der Nadel selbst dann in Richtung der Erdmagnetpole ausrichten, wenn die Lagerung eine Drehung der Nadel blockiert.

Allerdings wäre die Ausrichtung nicht vollständig, sondern eine Funktion der kleinen aber vorhandenen Steifigkeit sowie der vom deformierten Zustand abhängigen Momentenbelastung.

Durch das Rotationsfeld  $\vec{R}$  bzw. dessen Eigenvektor  $\vec{\alpha}$ , können strukturell bedingte Ausrichtungen des Materials unmittelbar mit den Effekten aus Gl. 5.61 gekoppelt werden

$$\mathbf{d} = (\vec{R} \vec{P}) \times \vec{E} + (\vec{R} \vec{M}) \times \vec{H} \quad . \quad (5.62)$$

Dies ist vor allem bei dünnen Strukturen, wie der besprochenen Kompassnadel relevant. Die Beispiele in Kap. 6.2 und 6.3 behandeln daher ein Magnetband sowie eine magnetische Kegelschale.

### 5.5.1 FE-Formulierung der strukturbezogenen Momentenlast

Die Implementierung einer strukturbezogenen Momentenlast wird für den Term  $\vec{R} \vec{M} \times \vec{H}$  der Magnetostatik vorgeführt.<sup>40</sup> Weitere Erläuterungen zur hier be-

<sup>39</sup>Die Betrachtung homogener Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{M}$  erübrigt die nähere Beschreibung dieser Felder. Weiterhin geht damit einher, dass keine resultierenden Kräfte, sondern nur Drehmomente als Einwirkung auftreten.

<sup>40</sup>Hier wird vorausgesetzt, dass die Magnetisierung  $\vec{M}$  im näherungsweise linearen Bereich der remanenten magnetischen Flussdichte  $\vec{B}_r$  betrachtet wird und  $\vec{M} = \vec{B}_r / \mu_0$  beträgt. Weiterhin ist die Magnetisierung  $\vec{M}$  nicht mit dem magnetischen Moment zu verwechseln, welches erst durch Integration von  $\vec{M}$  über das Volumen erhalten wird.

trachteten Magnetostatik sind im Anhang A.7 zu finden. Für die Behandlung der Elektrostatik ist lediglich  $\vec{\mathbf{M}}$  durch  $\vec{\mathbf{P}}$  bzw.  $\vec{\mathbf{H}}$  durch  $\vec{\mathbf{E}}$  zu ersetzen.

Da es sich um eine Momentenbelastung handelt, wird auf die Bezeichnung konservative Belastung verzichtet. Prinzipiell lässt sich ein äußeres Potential für diese Belastung in der Gesamtenergie angeben. Dass dies trotzdem auf unsymmetrische Anteile in der Steifigkeitsmatrix führt ist auf das darin enthaltene COSSERAT-Rotationsfeld zurückzuführen. Da die Steifigkeitsmatrix aus anderen Gründen bereits unsymmetrisch ist, spielt dieser Sachverhalt jedoch keine weitere Rolle.

Die virtuelle Arbeit

$$\delta \Pi_{\mathbf{d}}^{ext} = - \int_{\mathcal{B}_0} \langle \mathbf{d}, \mathbf{w} \rangle dV \quad (5.63)$$

beschreibt die Variation der äußeren Arbeit durch eine Momentenlast  $\mathbf{d}$ . Diese wird über

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \bar{\mathbf{R}} \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}}, \mathbf{w} \rangle = \bar{R}_{ab} \vec{M}_b \epsilon_{iac} \vec{H}_c \bar{w}_i = \vec{M}_b \vec{H}_c \bar{R}_{ba}^T W_{ac}^T \\ &= \underbrace{\langle \vec{\mathbf{M}} \otimes \vec{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}^T \rangle}_{:=\mathbf{D}} = \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \bar{\mathbf{R}} \rangle \end{aligned} \quad (5.64)$$

so umgeformt, dass sie der rechten Seite in Gl. 5.26 als positiver Term hinzugefügt werden kann. Damit lautet die erweiterte Variation der inneren und äußeren Arbeit am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^*$

$$\begin{aligned} -G^h(\mathbf{p}^*, \delta \mathbf{p}^*) &= \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 (\langle \mathbf{b}_0, \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{l}_0, \mathbf{w} \rangle) dV_0 + \int_{\partial \mathcal{B}_0} (\langle \mathbf{t}, \delta \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{w} \rangle) dA_0 \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_0} \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \bar{\mathbf{R}} \rangle dV + \int_{\mathcal{B}_0} (-\langle \bar{\mathbf{T}}, \delta \bar{\mathbf{U}} \rangle - \langle \bar{\mathfrak{M}}, \mathbf{c} \rangle) dV \quad , \end{aligned} \quad (5.65)$$

wobei  $\mathbf{D} = \vec{\mathbf{M}} \otimes \vec{\mathbf{H}}$  die magnetostatische Einwirkung enthält.

Die Separation der Prozessvariable  $\mathbf{w}$  geschieht durch

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \bar{\mathbf{R}} \rangle &= D_{ac}^T W_{ab} \bar{R}_{bc} = w_i \epsilon_{iab} \bar{R}_{bc} D_{ca} = -w_i \epsilon_{iab} \bar{R}_{bc} D_{ca} \\ &= w_i \epsilon_{iba} \bar{R}_{bc} D_{ca} = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\epsilon} : \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{D} = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\varphi I} \quad , \\ &\quad \text{mit} \quad \mathbf{B}^{\varphi I} = \boldsymbol{\epsilon} : \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{D} N^I \quad . \end{aligned} \quad (5.66)$$

Der Elementlastvektor für Drehungen aus Gl. 5.32 erweitert sich damit auf

$$\bar{\mathbf{R}}_V^{eI} = \int_{\mathcal{B}_0^e} (\rho_0 \mathbf{l}_0 N^I - \mathbf{B}^{\beta I} - \mathbf{B}^{\gamma I} + \mathbf{B}^{\varphi I}) dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^e} \mathbf{q} N^I dA \quad . \quad (5.67)$$

Die lineare Veränderlichkeit der virtuellen Arbeit  $\delta \Pi_q^{ext}$  am Entwicklungspunkt  $p^*$  erscheint wegen

$$\Delta \delta \Pi_d^{ext} = - \int_{\mathcal{B}_0} \Delta \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \bar{\mathbf{R}} \rangle dV = \int_{\mathcal{B}_0} - \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \mathbf{Y} \bar{\mathbf{R}} \rangle dV \quad , \quad (5.68)$$

auch auf der linken Seite in Gl. 5.25 und ist eine Konsequenz des geometrisch exakt behandelten COSSERAT-Rotationsfeldes. Die Separation der Prozessgrößen  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{y}$  in

$$\begin{aligned} - \langle \mathbf{D}^T, \mathbf{W} \mathbf{Y} \bar{\mathbf{R}} \rangle &= - D_{ab}^T W_{ac} Y_{cd} \bar{R}_{db} = - D_{ab}^T (-\epsilon_{rac} w_r) (-\epsilon_{kcd} y_k) \bar{R}_{db} \\ &= w_r \epsilon_{rca} D_{ba} \bar{R}_{db} \epsilon_{cdk} y_k = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{J=1}^{nel} \mathbf{w}^I \cdot \mathbf{B}^{\omega IJ} \cdot \mathbf{y}^J \\ \text{mit } \mathbf{B}^{\omega IJ} &= N^I \epsilon_{rca} D_{ba} \bar{R}_{db} \epsilon_{cdk} N^J \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (5.69)$$

ergibt die Erweiterung der Elementsteifigkeit  $\mathbf{K}_T^{wy}$  in Gl. 5.59 zu

$$\mathbf{K}_T^{wy} := \int_{\mathcal{B}_0^e} (\mathbf{B}^{\eta IJ} + \mathbf{B}^{\kappa IJ} + \mathbf{B}^{\phi IJ} + \mathbf{B}^{\chi IJ} + \mathbf{B}^{\psi IJ} + \mathbf{B}^{\omega IJ}) dV \quad . \quad (5.70)$$

## 6 Analytische und numerische Beispiele

### 6.1 Test mit Magnetwürfel

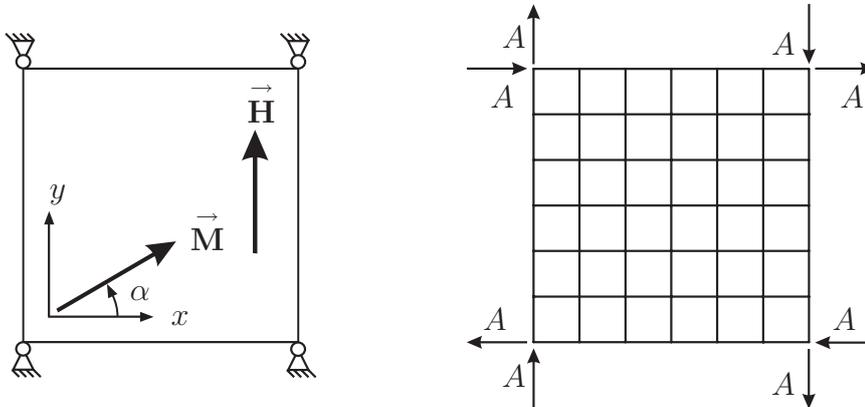
Ein einfacher Test an einem magnetischen Würfel soll die korrekte Implementierung der Momentenlast aus Kap. 5.5 innerhalb der Numerik bestätigen.

Dabei wird zunächst die magnetische Ausrichtung  $\vec{\mathbf{M}}$  des Würfel in Bezug zur äußeren magnetischen Erregung  $\vec{\mathbf{H}}$  um den Winkel  $\alpha$  variiert, vgl. Abb. 6.1 (links). Sowohl  $\vec{\mathbf{M}}$  als auch  $\vec{\mathbf{H}}$  sind homogen. Der Würfel erfährt dann ein gesamtes Drehmoment von

$$\mathbf{D} = \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\mathbf{R}} \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}} \, dV = \|\bar{\mathbf{R}} \vec{\mathbf{M}}\| \|\vec{\mathbf{H}}\| \int_{\mathcal{B}_0} \cos[\alpha] \mathbf{e}_z \, dV \quad . \quad (6.1)$$

In Abb. 6.1 (rechts) sind die Richtungen der Auflagerkräfte  $A$  als Ergebnis der Finite-Element-Berechnung für  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$  zu sehen.

Im Fall  $\pi/2 < \alpha < 3\pi/2$  wechseln sämtliche Auflagerkräfte die Richtung.



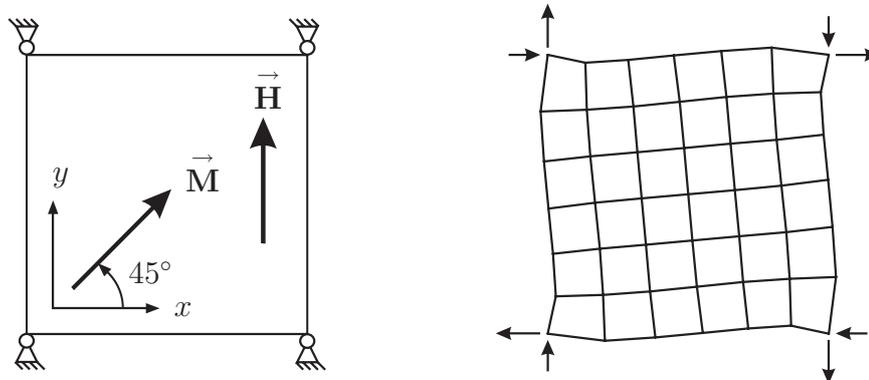
**Abbildung 6.1:** Links: System mit Koordinatensystem und Richtung  $\alpha$  der Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}$ . Rechts: Auflagerkräfte unter Einwirkung der homogenen, magnetischen Erregung  $\vec{\mathbf{H}}$  an einem starren Würfel.

Für einen starren<sup>41</sup> Einheitswürfel mit Kantenlänge 1,  $\|\vec{\mathbf{M}}\| = 1$  und  $\|\vec{\mathbf{H}}\| = 1$  erhält man als Einwirkung ein gesamtes Drehmoment um die  $z$ -Achse der Größe  $\cos[\alpha]$ . Der Berechnung werden 36 Elemente mit linearen Ansatzfunktionen, ebener Verzerrungszustand und die Materialkennwerte  $E = 10000$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\mu_c = \mu$  sowie  $L_c = 0$  zu Grunde gelegt. Man erhält im Test die zu erwartenden Auflagerkräfte  $A = \cos[\alpha]/4$ .

<sup>41</sup>Damit ist in diesem System  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$  gewährleistet.

Wird der Elastizitätsmodul des Würfels verringert, so dass kein starrer Würfel vorliegt, beobachtet man eine Deformation, welche das resultierende Drehmoment stets verringert, wie es auch bei der Ausrichtung einer Magnetnadel geschieht.

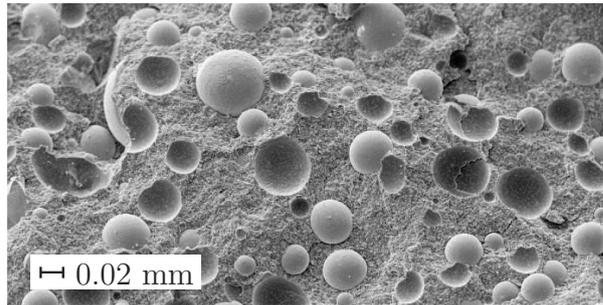
In Abb. 6.2 ist die Situation für  $\alpha = 45^\circ$  und Abminderung des Elastizitätsmoduls auf  $E = 10$  gezeigt. Das gesamte Drehmoment aus äußerer Belastung verringert sich im deformierten Zustand auf 88% des Wertes, welcher im undeformierten Zustand bzw. starren Fall auftritt.



**Abbildung 6.2:** Links: System mit Richtung  $\alpha = 45^\circ$  der Magnetisierung  $\vec{M}$ . Rechts: Deformiertes Netz und Auflagerkräfte der weichen Probe unter Einwirkung von  $\vec{H}$ .

## 6.2 Magnetband unter strukturbezogener Momentenlast

Ein flexibles, magnetisches Band der Firma Max Baermann<sup>42</sup> soll auf dessen Anwendungspotential als Schalter oder Aktuator untersucht werden. Das Band besteht aus magnetischen Neodym-Eisen-Bor(NdFeB) Partikeln innerhalb einer Elastomermatrix, vgl. Abb. 6.3.



**Abbildung 6.3:** TEM Aufnahme polymergebundener Strontiumferrit und Neodym-Eisen-Bor Partikel (etwas größere Kugeln), aus [143].

Die magnetischen Eigenschaften des Materials sind einem Datenblatt des Herstellers entnommen. Es zeichnet sich durch hohe Remanenz  $B_r = 365.4 \text{ mT}$  ( $T = \text{TESLA}$ ) und Koerzitivfeldstärke  $\vec{H}_c = 580.1 \text{ kA/m}$  aus. So ist ein äußeres magnetisches Feld der Größe  $7.29 \text{ T}$  (gemessen in der umgebenden Luft) nötig, um die Probe bei Raumtemperatur vollständig zu entmagnetisieren. Wird die Probe einem äußeren magnetischen Fluss von maximal  $1.6 \text{ T}$  ausgesetzt (gemessen in der umgebenden Luft), ist gemäß dem Datenblatt des Herstellers nur geringe Umpolung zu erwarten.

Eigene Messungen haben einen Elastizitätsmodul von  $E = 300 \text{ N/mm}^2$  ergeben, die Querkontraktionszahl wird mit  $\nu = 0.45$  geschätzt.

Das Band hat in der Ausgangsform die Breite  $5 \text{ mm}$ , die Dicke  $d = 0.5 \text{ mm}$  und eine Gesamtlänge von  $2L = 40 \text{ mm}$ . Ein Längsschnitt ist in Abb. 6.4 zu sehen. Der gekrümmte Abschnitt ist weiterhin durch die Bogenlänge  $L$ , das Maß  $a = 0.35L$  und die Magnetisierung  $\|\vec{M}_1\| = B_r/10$  entgegen der  $x$ -Achse charakterisiert. Der gerade Abschnitt besitzt die Länge  $L$  und ist mit  $\|\vec{M}_2\| = B_r$  entgegen der  $y$ -Achse magnetisiert. Die Einspannung betrifft nur Verschiebungen, es findet keine Vorgabe an die COSSERAT-Rotation  $\vec{R}$  statt.

Eine homogene, äußere magnetische Erregung  $\lambda \vec{H}$ , welche in der umgebenden Luft die Flussdichte  $\lambda \vec{B} = \mu_0 \lambda \vec{H} \cong 4\pi \cdot 10^{-7} \lambda \vec{H}$  erzeugt, wirkt homogen auf

<sup>42</sup>Die Erfindung flexibler Magnetbänder geht auf Max Baermann, Bergisch Gladbach, im Jahr 1956 zurück.

die gesamte Struktur. Störungen im äußeren Magnetfeld durch das Band bleiben unberücksichtigt.

Die Situation wird durch ebenen Verzerrungszustand modelliert. Jeder Abschnitt der Struktur ist mit 50 quadratischen Elementen in Längsrichtung und einem Element über der Höhe diskretisiert. Ein zusätzlicher Biegetest mit derselben Diskretisierung weist keine Lockingeffekte auf.

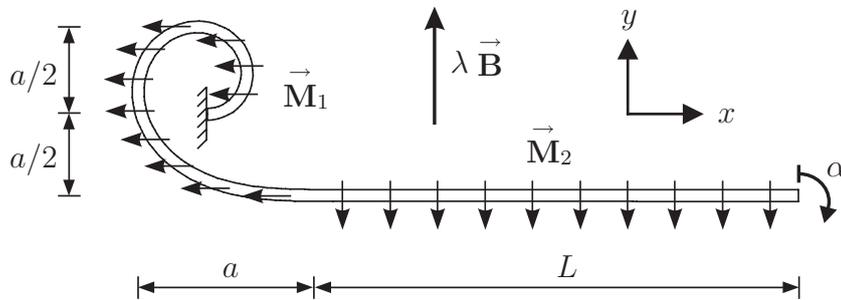
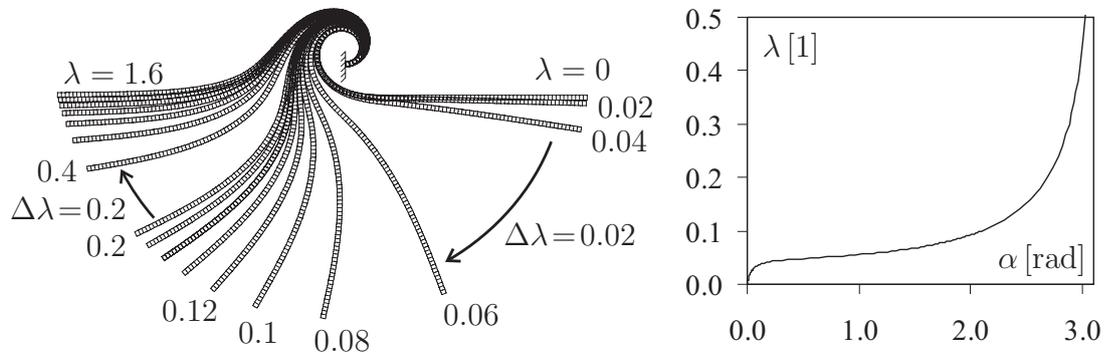


Abbildung 6.4: Schnitt durch magnetisches Band im undeformierten Zustand.

Die Parameter der COSSERAT-Theorie sollen in diesem Beispiel eine neutrale Rolle spielen, da es primär um die Verwendung der strukturbezogenen Momentenlast geht. Wie noch in weiteren Beispielen gezeigt wird, liegt das Verhalten des COSSERAT-Modells für die Kombination  $\mu_c = \mu$  und  $L_c = 0$  sowie die Kombination  $\mu_c = 0$  und  $L_c \rightarrow \infty$  nahe am Verhalten klassischen ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Materials, wenn man von extremen Verzerrungen absieht. Die Kombination  $\mu_c = \mu$  und  $L_c = 0$  entspricht zudem einem BIOT-Modell. So basieren nachfolgende Ergebnisse auf dem COSSERAT-Modell mit  $\mu_c = \mu$  und  $L_c = 0$ .

Die Deformation der Struktur ist in Abb. 6.5 (links) für unterschiedliche Flussdichten  $\lambda \vec{B}$  dargestellt. Im Fall  $\lambda = 1$  wird die Flussdichte  $1T$  in der umgebenden Luft erreicht.

Die Stabendverdrehung in Abb. 6.5 (rechts) verdeutlicht das nichtlineare Verhalten der strukturbezogenen Momentenlast. Der gerade Abschnitt erfährt in der Ausgangslage keine Einwirkung, da Magnetisierung und äußeres Magnetfeld parallel verlaufen. Der gebogene Abschnitt dreht den geraden jedoch so, dass auch dort allmählich Einwirkungen auftreten, was die Deformation zunehmend verstärkt.



**Abbildung 6.5:** Links: Verlauf der Deformation bei Erhöhung der Flussdichte  $\lambda \vec{\mathbf{B}}$ . Rechts: Stabendverdrehung  $\alpha$  als Funktion des Faktors  $\lambda$ .

Nähert sich jedoch die Stabendverdrehung einer halben Umdrehung  $\alpha \rightarrow \pi$ , schwächt sich die Einwirkung ab, da Magnetisierung und äußeres Magnetfeld im geraden Abschnitt wieder zunehmend parallel verlaufen.

Der gerade Abschnitt des Schalters bzw. Aktuators nimmt ab einer Feldstärke von ca.  $1.6 T$  die um 180 Grad gedrehte Position ein. Diese Ausrichtung ändert sich auch für größere Feldstärken nicht.

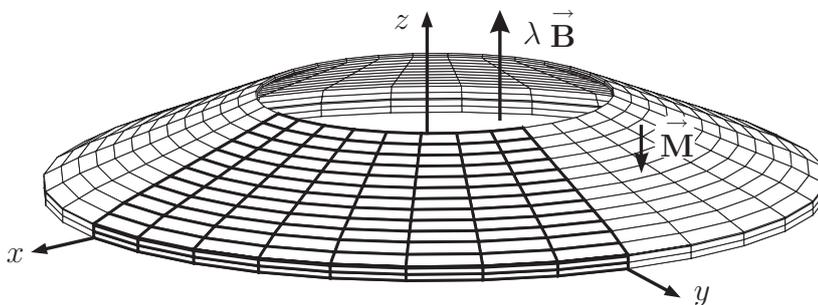
### 6.3 Kegelschale unter strukturbezogener Momentenlast

Das flexible, magnetische Material aus Kap. 6.2 wird nun auf seine Relevanz als Ventil untersucht.

Dabei presst sich eine Kegelschale mit Dichtungslippe gegen einen Dichtungsring. Schale und Dichtungslippe sind aus demselben Material mit Magnetisierung  $\|\vec{\mathbf{M}}\| = B_r = 365.4 \text{ mT}$  entgegen der  $z$ -Achse, vgl. Abb. 6.6 und 6.7.

Durch magnetische Impulse soll sich das Ventil öffnen bzw. schließen lassen. Die homogene, äußere magnetische Erregung  $\lambda \vec{\mathbf{H}}$ , welche in Luft die Flussdichte  $\lambda \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \lambda \vec{\mathbf{H}} \cong 4 \pi 10^{-7} \lambda \vec{\mathbf{H}}$  erzeugt, wirkt homogen auf die gesamte Struktur. Störungen im äußeren Magnetfeld durch den magnetischen Kegel bleiben unberücksichtigt. Für  $\lambda = 1$  wird eine Flussdichte von einem TESLA erreicht.

Das Feld kann z.B. durch eine Kupferdrahtwicklung von außerhalb erzeugt werden, so dass innerhalb des Ventils weder mechanische Stellglieder noch elektrische Bauteile nötig sind.



**Abbildung 6.6:** Magnetische Kegelschale mit Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}$  und Einwirkung  $\lambda \vec{\mathbf{B}}$ .

Das System soll unter Ausnutzung der doppelten Symmetrie berechnet werden. Dadurch verschwinden in der  $x$ - $z$ -Ebene Verschiebungen in  $y$ -Richtung sowie Drehungen um die  $x$ - und  $z$ -Achse. In der  $y$ - $z$ -Ebene verschwinden Verschiebungen in  $x$ -Richtung sowie Drehungen um die  $y$ - und  $z$ -Achse.

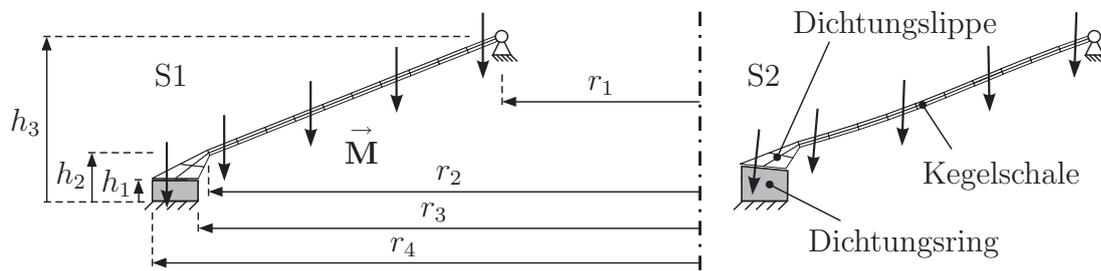
Diese Forderungen stellen eine Einschränkung des Lösungsraumes dar. So werden u.a. unsymmetrische Beulformen ausgeschlossen. Auf die Untersuchung dieses Sachverhaltes wird hier verzichtet.

Die Diskretisierung findet durch Finite-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen statt. Es wird ein Element in Dickenrichtung, vier Reihen in Radialrichtung und sechs Reihen in Meridianrichtung verwendet. Die Visualisierung legt ein Netz durch alle Knoten, weshalb sämtliche Abbildungen mit doppelt feinem Netz erscheinen.

Die Struktur ist in Abb. 6.7 im Querschnitt S1 vermaßt. Die Schalendicke beträgt  $t = 0.1 \text{ mm}$  und die übrigen Maße  $r_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 10 \text{ mm}$ ,  $r_3 = 10.2 \text{ mm}$ ,  $r_4 = 11 \text{ mm}$ ,  $h_1 = 0.4 \text{ mm}$ ,  $h_2 = 0.8 \text{ mm}$ ,  $h_3 = 2.4 \text{ mm}$ .

Der Dichtungsring befindet sich in Schnitt S1 in einem kontrahierten Zustand, so dass die Kontaktkraft  $F_k$  zwischen Dichtungsring und Lippe verschwindet. Dieser Zustand stellt kein natürliches Gleichgewicht dar; die Kontraktion wird durch eine fiktive Kraft  $F_f = 2.1 \text{ N}$  auf den gesamten Ring erzwungen.

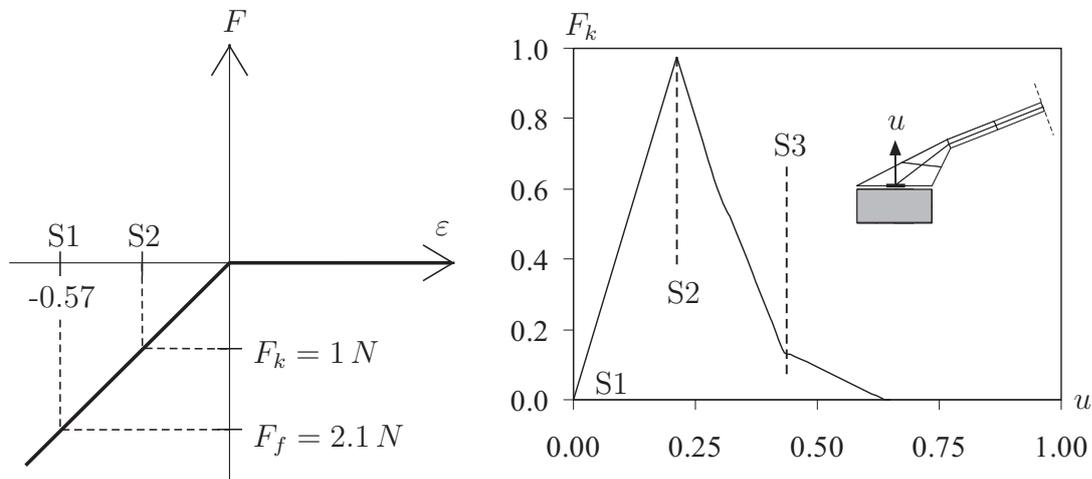
Nimmt man die fiktive Kraft weg, hebt sich der Dichtungsring und drückt wie in Schnitt S2 gegen die Dichtungslippe mit einer Kraft  $F_k \cong 1 \text{ N}$ . In dieser natürlichen Gleichgewichtslage hat sich die Struktur bereits verformt und die Richtung der Magnetisierung etwas verändert, vgl. Schnitt S2 in Abb. 6.7.



**Abbildung 6.7:** Schnitt S1 zeigt den Querschnitt des Systems mit Abmessungen in der Referenzkonfiguration. Schnitt S2 zeigt den initialen Zustand für  $\lambda = 0$ .

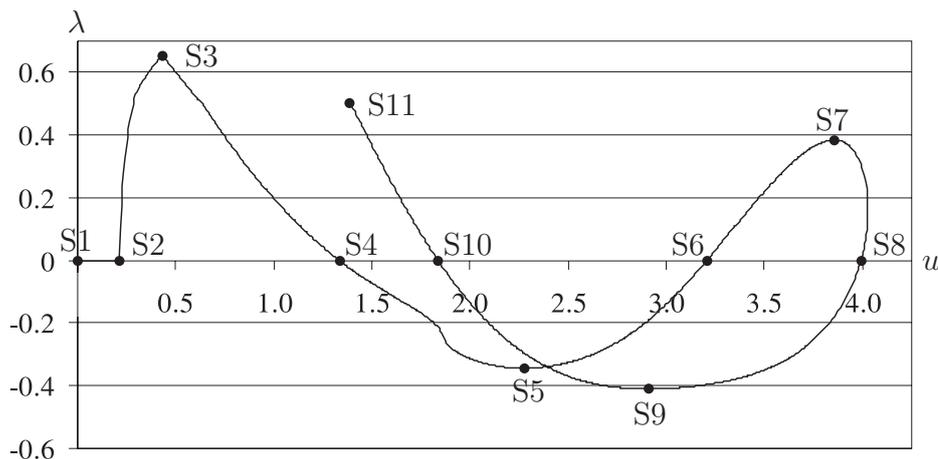
Die Federkennlinie des Dichtungsringes ist Abb. 6.8 links zu entnehmen. Hebt die Dichtungslippe unter äußerer Magnetlast völlig vom Dichtungsring ab, nimmt dieser eine spannungsfreie Konfiguration ein. Seine Höhe beträgt dann  $2.3 h_1$ . Dies bedeutet, dass der Dichtungsring durch eine fiktive Kontraktion im Schnitt S1 um  $\varepsilon = (h_1 - 2.3 h_1)/(2.3 h_1) = -0.57$  gestaucht ist. Vereinfachend kommen keine Reibungskräfte zwischen Dichtungsring und Dichtungslippe in Ansatz.

Die Kontaktkraft  $F_k$  zwischen Dichtungsring und Dichtungslippe wird in Abb. 6.8 rechts als Funktion einer Vertikalverschiebung  $u$  aufgetragen. In der Abbildung ist auch die zur Verschiebung  $u$  zugehörige Stelle gezeigt.



**Abbildung 6.8:** Links: Federkennlinie des Dichtungsringes. Rechts: Kontaktkraft  $F_k$  als Funktion der Vertikalverschiebung  $u$ .

Die Vertikalverschiebung  $u$  wird auch für das Last-Verschiebungsdiagramm in Abb. 6.9 verwendet. Die Kurve repräsentiert das Verhalten der Schale bei einer Berechnung mit dem Bogenlängenverfahren.<sup>43</sup> Markante Punkte im Verlauf sind mit S1 bis S11 gekennzeichnet. In Abb. 6.7 bzw. Abb. 6.10 ist für jeden dieser Punkte die Schale im Querschnitt zu sehen.



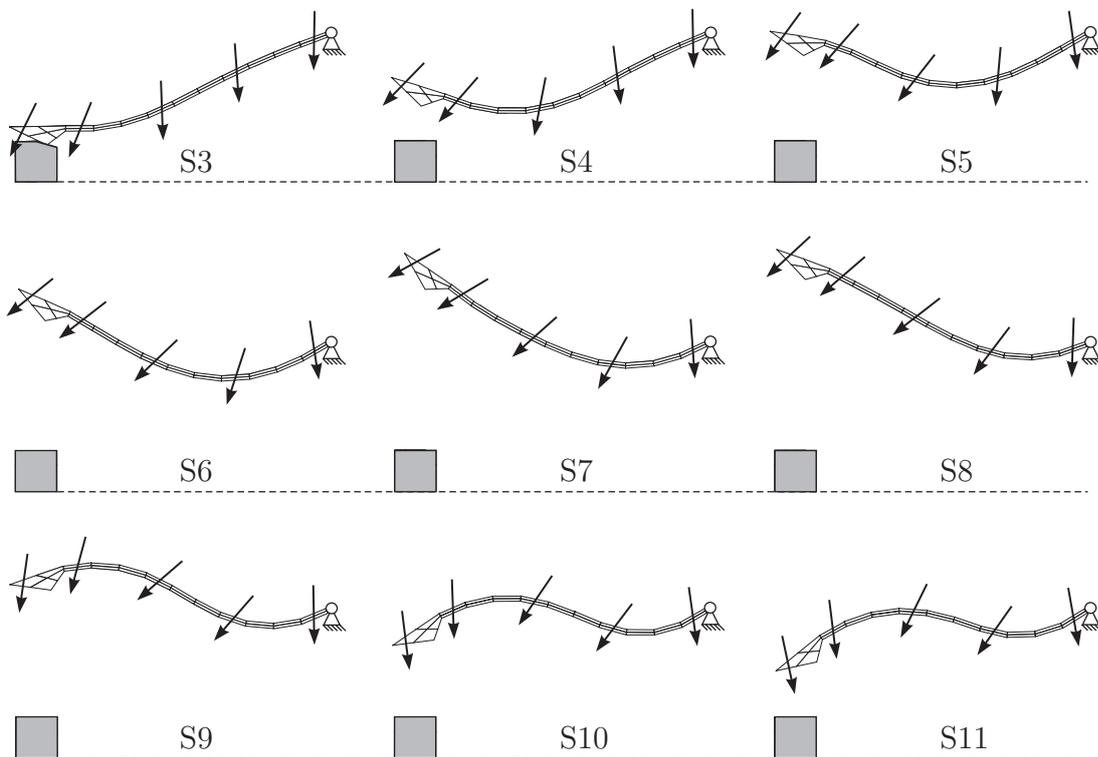
**Abbildung 6.9:** Last-Verschiebungsdiagramm aus Bogenlängenverfahren für Vertikalverschiebung  $u$ . Schnitte S1 bis S11 sind markiert.

Von Punkt S1 nach S2 verschwindet die fiktive Kontraktion des Dichtungsringes und die Dichtungslippe hebt sich im Mittel um  $0.2\text{ mm}$  an. Bei S3 führt das äußere

<sup>43</sup>Zur Behandlung des Bogenlängenverfahrens wird auf RIKS [190] [191] verwiesen.

re magnetische Feld mit  $\lambda = 0.66$  dazu, dass die Schale durchschlägt, wobei ein Kontakt zum Dichtungsring noch vorliegt. Im Schnitt S4 ist die Schale während des Durchschlagens zu sehen. Die Krümmung der Schale ändert in S4 das Vorzeichen in radialer Richtung. In Schnitt S5 ist dies nicht mehr so und führt weiter zum stabilen Zustand S6. In Schnitt S7 hat sich die Schale unter Einwirkung des äußeren Feldes nochmals angehoben, wobei der nächste Stabilitätspunkt erreicht wird.

Das weitere umkrepeln der Schale geht ab Schnitt S8 mit einem Vorzeichenwechsel des äußeren Magnetfeldes einher. Nun dreht sich die Dichtungslippe bis Schnitt S10 entgegen dem Uhrzeigersinn. Dabei verändert sich die Ausrichtung der Magnetisierung so, dass das Bogenlängenverfahren nach Schritt S11 den Pfad nicht weiter verfolgen kann und somit das vollständige umkrepeln der Schale. Das nichtlineare Verhalten der Belastung führt auf diese Schwierigkeit.

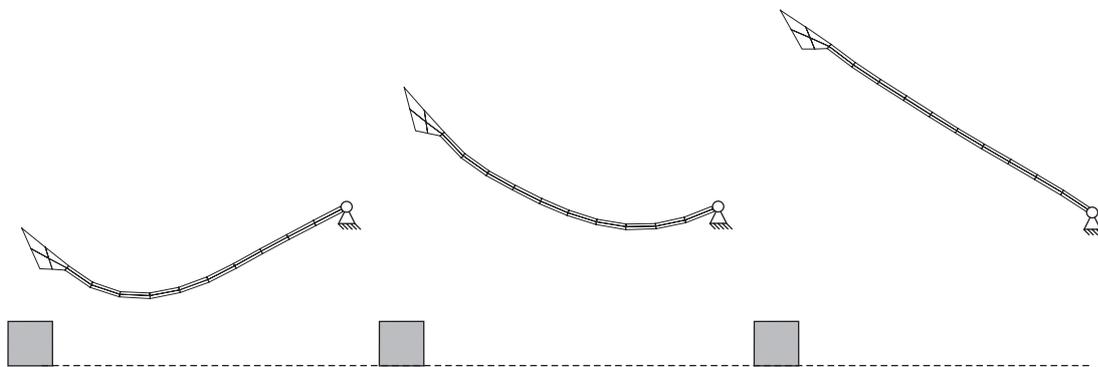


**Abbildung 6.10:** Schnitte S3 bis S11 aus Berechnung mit Bogenlängenverfahren.

Für die Beurteilung des Systems als Ventil reicht jedoch das Ergebnis bis Schnitt S9. Das Last-Verschiebungsdiagramm in Abb. 6.9 macht deutlich, dass sich das Ventil mit gewöhnlichen magnetischen Feldstärken öffnet und schließt. Die Schale schlägt dabei durch und behält auch ohne äußeres magnetisches Feld einen geöffneten oder geschlossenen Zustand bei. Das Öffnen erfolgt mit  $\lambda = 0.66$  und das

Schließen mit  $\lambda = -0.41$ . Der Abstand zwischen Dichtungsring und Dichtungslippe beträgt im geöffneten Zustand  $3\text{ mm}$ , falls das äußere Magnetfeld durch einen Impuls öffnet und dann verschwindet.

Dynamische Effekte, wie die Schwingung der Kegelschale nach dem Durchschlagen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht. Es sei nur erwähnt, dass der vollständig umgekrempelte Zustand des Magnetkegels in einer dynamischen Simulationen ohne weiteres erreichbar ist, siehe Abb. 6.11.



**Abbildung 6.11:** Abfolge von Schnitten aus einer dynamischen Berechnung.

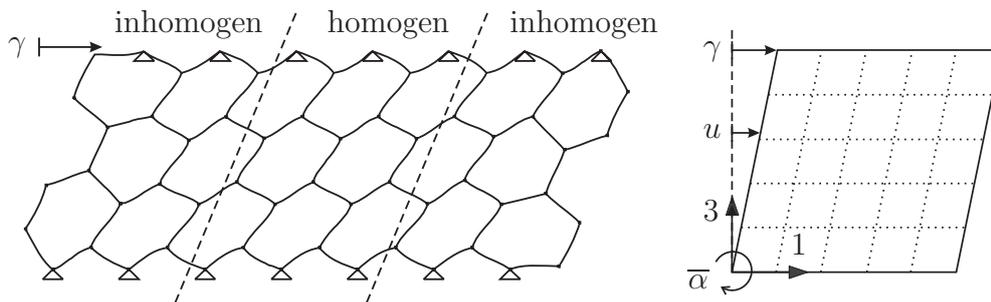
## 6.4 Einfache Scherung mit Diskussion von Randvorgaben

Der Einfluss von Randvorgaben an die Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  im COSSERAT-Modell wird nun anhand analytischer und numerischer Ergebnisse am Beispiel der einfachen Scherung erörtert. Auch aus diesem Blickwinkel ergeben sich Schlussfolgerungen zur Bedeutung des Kopplungsmoduls  $\mu_c$ .

Die Deformation der einfachen Scherung wird zunächst motiviert und mathematisch formuliert. Es folgt die analytische Lösung im nichtlinearen COSSERAT-Modell für homogene Fälle. Auch eine Diskussion zur Eindeutigkeit der Lösung wird geführt. Numerische Untersuchungen im Zusammenhang mit verschiedenen Randvorgaben decken sich mit Vorhersagen der analytischen Lösung, was zugleich der Kontrolle des numerischen Modells dient. Abschließend zeigt eine durch Stäbe modellierte Wabenstruktur, wie sich Randvorgaben an die Rotation in bestimmten Fällen auswirken.

### 6.4.1 Motivation und Formulierung der einfachen Scherung

Die einfache Scherung motiviert sich aus einer Zone, welche bei der ebenen Scherung hinreichend weit von freien Rändern entfernt ist. Die Deformation dieser homogenen Zone kann durch eine Verschiebung  $u(x_3)$  und eine Drehung  $\bar{\alpha}(x_3)$  charakterisiert werden, vgl. Abb. 6.12.<sup>44</sup>



**Abbildung 6.12:** Das deformierte Wabenmodell (links) zeigt eine homogene Zone im Inneren der Struktur, was die Kinematik der einfachen Scherung (rechts) motiviert.

Die ebene, quadratische Probe der Einheitshöhe  $h = 1$  in Abb. 6.12 (rechts) ist an der Unterseite komplett gehalten. Die Oberseite verschiebt sich nur in 1-Richtung um den Betrag  $u(x_3 = 1) = \gamma$ . Es treten keine Gradienten in 1-Richtung und

<sup>44</sup>Die Ausbildung der Zonen ist für das klassische BOLTZMANN-Kontinuum ebenfalls zu beobachten.

keine Verschiebungen in 3-Richtung auf. Damit ist die Verschiebung  $u$  sowie die Drehung  $\bar{\alpha}$  ausschließlich eine Funktion der Koordinate  $x_3$ .

Die Deformation  $\varphi$  und deren Gradient  $\mathbf{F}$  beschreiben sich dann über

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + u(x_3) \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{Grad}[\varphi(x_3)] = \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u'(x_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

mit  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = \gamma$ . Das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  bzw. dessen infinitesimale Rotation  $\bar{\mathbf{A}} \in \mathfrak{so}(3)$  ergibt sich zu

$$\bar{\mathbf{R}}(x_3) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha}(x_3) & 0 & \sin \bar{\alpha}(x_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \bar{\alpha}(x_3) & 0 & \cos \bar{\alpha}(x_3) \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\alpha}'(x_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha}'(x_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Abkürzend wird nun die Koordinate  $x_3$  durch  $x$  und die Ableitung  $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x}$  durch  $\bar{\alpha}'$  notiert.

Da für die Krümmung  $\|\hat{\mathbf{K}}\|^2 = \|\bar{\mathbf{R}}^T D_x \bar{\mathbf{R}}\|^2 = \|D_x \bar{\mathbf{R}}\|^2$  und

$$D_x \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} -\bar{\alpha}' \sin \bar{\alpha} & 0 & \bar{\alpha}' \cos \bar{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha}' \cos \bar{\alpha} & 0 & -\bar{\alpha}' \sin \bar{\alpha} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \|D_x \bar{\mathbf{R}}\|^2 = 2\bar{\alpha}'^2 \sin^2 \bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}'^2 \cos^2 \bar{\alpha} = 2|\bar{\alpha}'|^2 \quad (6.4)$$

gilt, folgt  $\|D_x \bar{\mathbf{R}}\|^2 = \|D_x \bar{\mathbf{A}}\|^2 = 2|\bar{\alpha}'|^2$ .

Die Drehung  $\bar{\alpha}$  soll auf dem oberen und unteren Rand bezüglich den Ableitungen  $\bar{\alpha}^{(n)}(0) = \bar{\alpha}^{(n)}(1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  periodisch sein. Durch

$$\bar{\alpha}(1/2 + x) = \bar{\alpha}(1/2 - x), \quad x \in [0, \frac{1}{2}], \quad (6.5)$$

fordert man weiterhin die Symmetrie der Drehung, was zugleich  $\bar{\alpha}^{(n)}(1) = (-1)^n \bar{\alpha}^{(n)}(0)$  impliziert. Daraus wiederum folgt  $\bar{\alpha}^{(n)}(1) = \bar{\alpha}^{(n)}(0) = 0$  für  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Für die Verschiebung  $u$  wird auf dem Rand  $u'(0) = u'(1)$  verlangt, sowie Symmetrie durch  $u'(1/2 + x) = u'(1/2 - x)$ .

Die Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}$  und deren symmetrischer und antisymmetrischer Anteil lauten dann

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}} &= \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} & 0 & u' \cos \bar{\alpha} - \sin \bar{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \bar{\alpha} & 0 & u' \sin \bar{\alpha} + \cos \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \\ \text{sym}[\bar{\mathbf{U}}] &= \begin{pmatrix} \cos \bar{\alpha} & 0 & (u' \cos \bar{\alpha})/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ (u' \cos \bar{\alpha})/2 & 0 & u' \sin \bar{\alpha} + \cos \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \\ \text{skew}[\bar{\mathbf{U}}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & (u' \cos \bar{\alpha} - 2 \sin \bar{\alpha})/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ (-u' \cos \bar{\alpha} + 2 \sin \bar{\alpha})/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Es wird die Formänderungsenergie aus Gl. 4.49 benutzt, wobei der volumetrische Anteil keinen Einfluss hat, da für  $\mathbf{F}$  aus 6.2 keine Volumenänderung stattfindet.

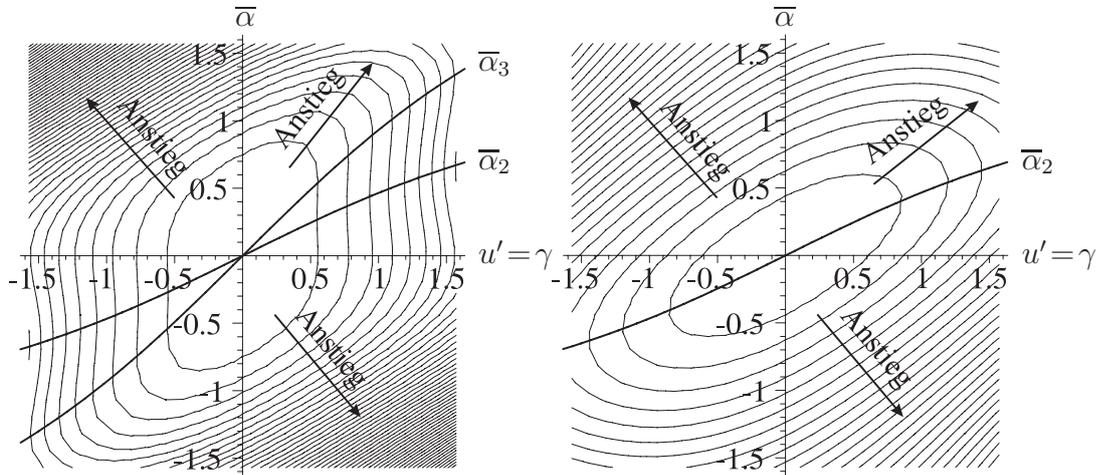
Weiterhin erscheinen kleine Drehungen  $|\bar{\alpha}|$  und Gradienten  $|u'|$  sinnvoll (was nicht notwendigerweise infinitesimal klein bedeutet). Dies geht mit den Restriktionen  $|\bar{\alpha}| < \pi/2$  und  $|u'| < 2$  im Folgenden einher. Die Krümmungsenergie aus Gl. 4.64 wird quadratisch mit dem Exponent  $q = 2$  angesetzt. Damit lautet das geometrisch exakte Variationsproblem für die einfache Scherung

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}}]\|^2 + 2\mu L_c^2 |\bar{\alpha}'|^2) dx &\mapsto \min. \quad \text{bzgl. } (u, \bar{\alpha}) \\ \text{auf } \Gamma_D: \quad u(0) = 0, u(1) = \gamma, \quad \text{auf } \Gamma'_D: \quad \bar{\alpha}(0) = \bar{\alpha}(1) = \bar{\alpha}_d, \\ \text{auf } \Gamma_N: \quad \bar{\alpha}'(0) = \bar{\alpha}'(1) = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}: \quad |\bar{\alpha}| < \frac{\pi}{2}, |u'| < 2.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Die spezifische Formänderungsenergie  $W_{\text{finite}}$  in Gl. 6.7 ist im vorliegenden Beispiel dann eine Funktion von  $u'$ ,  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\alpha}'$  gemäß

$$\begin{aligned}W_{\text{finite}}(u', \bar{\alpha}, \bar{\alpha}') &= \mu \left( 2(\cos \bar{\alpha} - 1)^2 + \frac{u'^2}{2} + \frac{u'^2 \sin^2 \bar{\alpha}}{2} + 2(\cos \bar{\alpha} - 1)u' \sin \bar{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{\mu_c}{2} \cos^2 \bar{\alpha} [2 \tan \bar{\alpha} - u']^2 + 2\mu L_c^2 |\bar{\alpha}'|^2.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Es werden zunächst homogene und glatte Lösungen mit  $u' = \gamma$  für das Problem 6.7 gesucht. Dann spielt die Krümmungsenergie keine Rolle ( $\bar{\alpha}' = 0$ ), was vorübergehend die Wahl von  $L_c = 0$  rechtfertigt. Unter dieser Voraussetzung lässt sich die spezifische Formänderungsenergie  $W_{\text{finite}}$  wie in Abb. 6.13 durch Höhenlinien auf  $(u', \bar{\alpha})$  darstellen.



**Abbildung 6.13:** Höhenlinien der inneren Energiedichte  $W_{\text{finite}}$  der homogenen Lösung  $u' = \gamma$  für  $L_c = 0$  und  $\mu_c = 0$  (links) bzw.  $\mu_c = \mu$  (rechts). Die Kurven  $\bar{\alpha}_2$  und  $\bar{\alpha}_3$  stellen homogene Lösungen in  $\bar{\alpha}$  dar.

Es zeigt sich, dass  $W_{\text{finite}}$  für  $\mu_c = 0$  im Gegensatz zu  $\mu_c = \mu$  nicht konvex in  $(u', \bar{\alpha})$  ist und bei gegebenem  $u' = \gamma$  mehrere homogene Lösungen für  $\bar{\alpha}$  in Frage kommen.

### 6.4.2 Euler-Lagrange Gleichungen des Cosserat-Modells

Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen erhält man aus den freien Variationen der Gl. 6.8 nach den Variablen  $u$  bzw.  $\bar{\alpha}$ . So resultiert das Gleichgewicht der Kräfte aus der freien Variation nach den Verschiebungen  $u$  unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu

$$\begin{aligned} \forall \delta u \in C_0^\infty([0, 1], \mathbb{R}) : \quad 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_0^1 W_{\text{finite}}(u' + t\delta u', \bar{\alpha}, \bar{\alpha}') dx \\ \Rightarrow 0 &= \int_0^1 \left[ -\mu u'' - \mu(2\bar{\alpha}' u' \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha} + u'' \sin^2 \bar{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. - 2\mu((\cos \bar{\alpha} - 1)\bar{\alpha}' \cos \bar{\alpha} - \bar{\alpha}' \sin^2 \bar{\alpha}) - \mu_c(-2\bar{\alpha}' u' \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} + u'' \cos^2 \bar{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. - 2\mu_c(-\bar{\alpha}' \sin^2 \bar{\alpha} + \bar{\alpha}' \cos^2 \bar{\alpha}) \right] \delta u dx, \end{aligned} \quad (6.9)$$

wobei bereits die partielle Integration und das Verschwinden der Testfunktion  $\delta u \in C_0^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  auf dem oberen und unteren Rand eingearbeitet sind.

Das Gleichgewicht der Momente resultiert aus der freien Variation von Gl. 6.8

nach der Drehung  $\bar{\alpha}$

$$\begin{aligned}
\forall \delta\bar{\alpha} \in C^\infty([0, 1], [0, 2\pi)) : \quad 0 &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_0^1 W_{\text{finite}}(u', \bar{\alpha} + t\delta\bar{\alpha}, \bar{\alpha}' + t\delta\bar{\alpha}') dx \\
\Rightarrow 0 &= \int_0^1 \left[ -4\mu(\cos\bar{\alpha} - 1) \sin\bar{\alpha} + \mu u'^2 \sin\bar{\alpha} \cos\bar{\alpha} + 2\mu u'(\cos\bar{\alpha} - 1) \cos\bar{\alpha} \right. \\
&\quad - 2\mu u' \sin\bar{\alpha} \sin\bar{\alpha} - \mu_c u'^2 \cos\bar{\alpha} \sin\bar{\alpha} - 2\mu_c u' \cos\bar{\alpha} \cos\bar{\alpha} \\
&\quad \left. + 2\mu_c u' \sin\bar{\alpha} \sin\bar{\alpha} + 4\mu_c \sin\bar{\alpha} \cos\bar{\alpha} - 4\mu L_c^2 \bar{\alpha}'' \right] \delta\bar{\alpha} dx \\
&\quad + \int_0^1 4\mu L_c^2 [\bar{\alpha}'(1) \delta\bar{\alpha}(1) - \bar{\alpha}'(0) \delta\bar{\alpha}(0)] dx \quad . \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Da  $\delta\bar{\alpha}(1)$  und  $\delta\bar{\alpha}(0)$  beliebig ist, folgt aus der letzten Zeile, dass auf dem Rand die natürliche Randbedingung  $\bar{\alpha}'(0) = 0$  und  $\bar{\alpha}'(1) = 0$  im Fall  $L_c > 0$  auftreten muss.

Soll der Integrand in Gl. 6.9 punktweise verschwinden, folgt daraus die starke Form des Kräftegleichgewichts

$$\begin{aligned}
0 &= u'' [2\mu + (\mu - \mu_c) \cos^2\bar{\alpha}] + 2(\mu - \mu_c) u' \bar{\alpha}' \sin\bar{\alpha} \cos\bar{\alpha} \\
&\quad + 2(\mu + \mu_c) [\cos^2\bar{\alpha} - \sin^2\bar{\alpha}] \bar{\alpha}' - 2\mu \bar{\alpha}' \cos\bar{\alpha} \quad . \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Soll der Integrand in Gl. 6.10 punktweise verschwinden, folgt daraus die starke Form des Momentengleichgewichts

$$\begin{aligned}
0 &= \mu \cos\bar{\alpha} (2(\cos\bar{\alpha} - 1) + u' \sin\bar{\alpha}) [u' - 2 \tan\bar{\alpha}] \\
&\quad - \mu_c (-\cos\bar{\alpha} \sin\bar{\alpha} [2 \tan\bar{\alpha} - u'] + 2) [u' - 2 \tan\bar{\alpha}] - 4\mu L_c^2 \alpha'' \quad . \quad (6.12)
\end{aligned}$$

### 6.4.3 Homogene Lösungen und Kriterium der Eindeutigkeit

Es wird nun eine homogene Lösung für das Verschiebungsfeld gefordert, womit nur noch die Lösung  $u(x) = \gamma x$  in Frage kommt. Damit ist auch die Ableitung des Verschiebungsfeldes  $u' = \gamma$  bekannt und das Problem reduziert sich auf die Lösung für das Drehfeld  $\bar{\alpha}$ .

Zunächst werden alle **homogenen** Lösungen  $\bar{\alpha}$  für den Fall  $\mu_c = 0$  bestimmt, welche zugleich die starke Form des Momentengleichgewichts

$$\begin{aligned}
0 &= -4\mu(\cos\bar{\alpha} - 1) \sin\bar{\alpha} + \mu u'^2 \sin\bar{\alpha} \cos\bar{\alpha} \\
&\quad + 2\mu u'(\cos\bar{\alpha} - 1) \cos\bar{\alpha} - 2\mu u' \sin\bar{\alpha} \sin\bar{\alpha} \quad (6.13)
\end{aligned}$$

gewährleisten. Da  $\cos\bar{\alpha} = 0$  keine Lösung unter der Voraussetzung  $|u'| < 2$  und  $|\bar{\alpha}| < \pi/2$  in Gl. 6.13 darstellt, darf diese durch  $\cos\bar{\alpha}$  dividiert werden. Nach

Umsortierung und unter Berücksichtigung von  $u' = \gamma$  folgt

$$0 = [2(\cos \bar{\alpha} - 1) + \gamma \sin \bar{\alpha}](\gamma - 2 \tan \bar{\alpha}) \quad . \quad (6.14)$$

Der erste Faktor  $[2(\cos \bar{\alpha} - 1) + \gamma \sin \bar{\alpha}]$  in Gl. 6.14 verschwindet offensichtlich für  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 = 0$  und stellt die erste Lösung dar.

Der zweite Faktor  $(\gamma - 2 \tan \bar{\alpha})$  verschwindet für  $\bar{\alpha}_2 = \arctan[\gamma/2]$ , womit die zweite Lösung gefunden ist.

Die dritte Lösung folgt nochmals aus dem ersten Faktor der Gl. 6.14. Setzt man diesen gleich Null, ist es mit

$$\frac{\gamma}{4} \sin \bar{\alpha} = \frac{1}{2}(1 - \cos \bar{\alpha}) \quad (6.15)$$

gleichbedeutend. Setzt man die bekannten trigonometrischen Beziehungen

$$\sin \bar{\alpha} = 2 \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2}, \quad \frac{1}{2}(1 - \cos \bar{\alpha}) = \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2} \quad (6.16)$$

in Gl. 6.15 ein, ergibt sich

$$\frac{\gamma}{4} \left[ 2 \sin \frac{\bar{\alpha}}{2} \cos \frac{\bar{\alpha}}{2} \right] = \sin^2 \frac{\bar{\alpha}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{\bar{\alpha}}{2}}{\cos \frac{\bar{\alpha}}{2}} = \tan \frac{\bar{\alpha}}{2}. \quad (6.17)$$

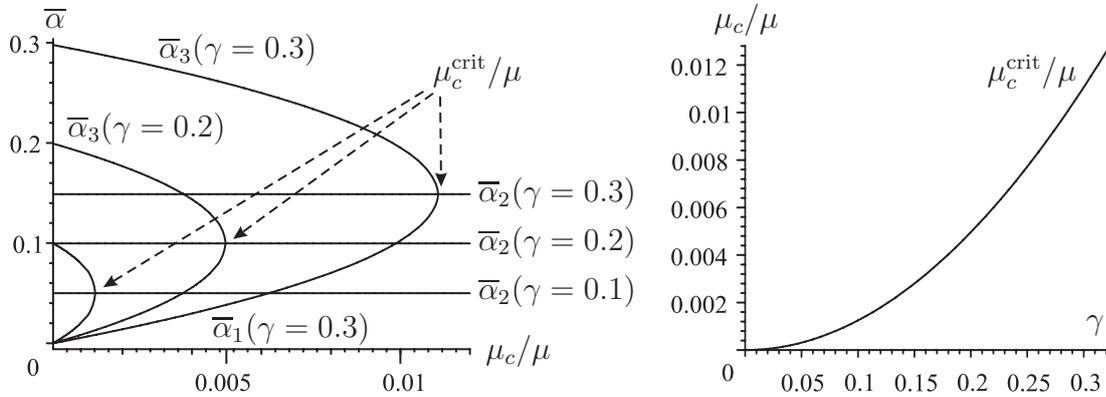
Zusammenfassend lauten die drei homogenen Lösungen

$$\bar{\alpha}_1 = 0, \quad \bar{\alpha}_2 = \arctan \frac{\gamma}{2}, \quad \bar{\alpha}_3 = 2 \arctan \frac{\gamma}{2}. \quad (6.18)$$

Adäquate Herleitungen im Fall  $\mu_c > 0$  führen zu dem Ergebnis, dass genau dann drei homogene Lösungen existieren, falls der Kopplungsmodul  $\mu_c$  unterhalb einer Grenze von  $\mu_c < \mu_c^{\text{crit}}$  liegt, wobei

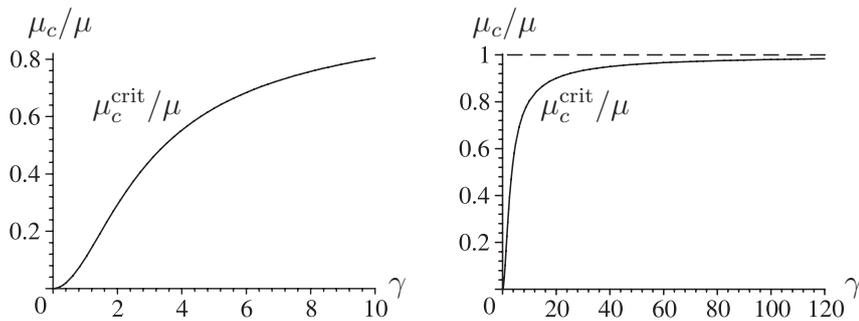
$$\mu_c^{\text{crit}}(\gamma) = \mu \frac{\sqrt{4 + \gamma^2} - 2}{\sqrt{4 + \gamma^2}} \quad (6.19)$$

von der Scherung  $\gamma$  abhängt. Für  $\mu_c \geq \mu_c^{\text{crit}}$  verbleibt nur die homogene Lösung  $\bar{\alpha}_2$ , wie es in Abb. 6.14 zu sehen ist.



**Abbildung 6.14:** Links: Homogene Lösungen  $\bar{\alpha}_3$  (obere Äste),  $\bar{\alpha}_2$  (mittlere Geraden) und  $\bar{\alpha}_1$  (untere Äste) für unterschiedliche  $\mu_c/\mu$  Verhältnisse sowie Scherungen  $\gamma$ . Rechts: Der Verzweigungspunkt  $\mu_c^{crit}/\mu$  ist eine Funktion der Scherung  $\gamma$ .

Die Verzweigung der homogenen Lösung unterhalb von  $\mu_c^{crit}$  bedeutet, dass  $\mu_c > 0$  nicht zur Gewährleistung einer eindeutigen Gleichgewichtslösung genügt! Im vorliegenden Beispiel hängt  $\mu_c^{crit}$  von der Größe der Scherung  $\gamma$  ab, was in ähnlicher Weise auch bei anderen Deformationen zutreffen wird.



**Abbildung 6.15:** Das Verhältnis  $\mu_c^{crit}/\mu$  ist für beliebige Scherung  $\gamma$  durch 1 beschränkt.

Das Verhältnis  $\mu_c^{crit}/\mu$  ist in Abb. 6.14 (rechts) für physikalisch sinnvolle Deformationen abgebildet. Aus mathematischer Sicht ist auch die in Abb. 6.15 gezeigte Schranke  $\mu_c = \mu$  interessant, welche dann eine eindeutige homogene Lösung für beliebige Scherung  $\gamma$  in diesem einfachen Beispiel gewährleistet.

In einem linearen COSSERAT-Modell kann man die Verzweigung der homogenen Lösung für  $\mu_c^{crit}$  nicht beobachten. Bereits die Approximation

exakter Drehwinkel  $\bar{\alpha}$  über  $\cos \bar{\alpha} \sim 1 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2}$ ,  $\sin \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}^3}{3!}$  und die Reduktion der Energiedichte aus Gl. 6.8 auf Terme vierter Ordnung

$$W_{\text{red}}(u', \bar{\alpha}, \bar{\alpha}') = \mu \left( \frac{1 + \bar{\alpha}^2}{2} u'^2 + \frac{\bar{\alpha}^4}{2} - \bar{\alpha}^3 u' \right) + 2\mu_c \left( \frac{u'}{2} - \bar{\alpha} \right) \left[ \left( \frac{u'}{2} - \bar{\alpha} \right) - \frac{\bar{\alpha}^2}{6} (3u' - 2\bar{\alpha}) \right] + 2\mu L_c^2 |\bar{\alpha}'|^2 \quad (6.20)$$

ändert die Charakteristik der Verzweigung.

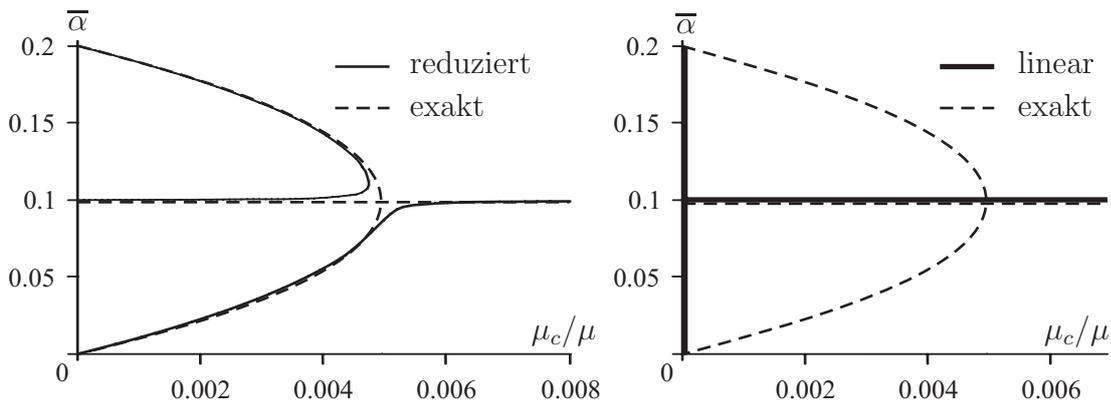
Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen, welche sich aus Gl. 6.20 ergeben, lauten

$$0 = u'' + \frac{2(\mu - \mu_c) \bar{\alpha} \bar{\alpha}' u'}{\mu(1 + \bar{\alpha}^2) + \mu_c(1 - \bar{\alpha}^2)} + \frac{(-4\mu_c - 3\mu) \bar{\alpha}^2 \bar{\alpha}'}{\mu(1 + \bar{\alpha}^2) + \mu_c(1 - \bar{\alpha}^2)} - \frac{2\mu_c \bar{\alpha}'}{\mu(1 + \bar{\alpha}^2) + \mu_c(1 - \bar{\alpha}^2)} \quad (6.21)$$

sowie

$$0 = \mu \left( \frac{1}{2} \bar{\alpha}^3 + \frac{1}{4} \bar{\alpha} u'^2 - \frac{3}{4} \bar{\alpha}^2 u' - L_c^2 \bar{\alpha}'' \right) - \mu_c \left( \frac{1}{4} \bar{\alpha} u'^2 + \frac{2}{3} \bar{\alpha}^3 - \bar{\alpha}^2 u' + \left( \frac{u'}{2} - \bar{\alpha} \right) \right). \quad (6.22)$$

Homogene Lösungen, welche das Kräftegleichgewicht in Gl. 6.21 sowie das Momentengleichgewicht in Gl. 6.22 bei einer Scherung  $\gamma = 0.2$  erfüllen, sind in Abb. 6.16 (links) dargestellt.



**Abbildung 6.16:** Homogene Lösungen  $\bar{\alpha}$  für  $\gamma = 0.2$  und unterschiedliche  $\mu_c/\mu$  Verhältnisse. Links: Lösung des reduzierten Ansatzes gemäß Gl. 6.20 im Vergleich zu Ansatz aus Gl. 6.8. Rechts: Lösung des linearen COSSERAT-Modells gemäß Gl. 6.23 im Vergleich zum Ansatz aus Gl. 6.8.

Obwohl es unterhalb eines gewissen  $\mu_c/\mu$  Verhältnisses wieder drei Lösungen in der reduzierten Theorie gibt, existiert kein echter Verzweigungspunkt für die

Energiedichte der Gl. 6.20. Weiterhin weicht die Approximation in der Umgebung von  $\mu_c \approx \mu_c^{\text{crit}}$  von der homogenen Lösung  $\bar{\alpha}_2 = \arctan \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$  deutlich ab.

Das COSSERAT-Modell mit linearer Kinematik und Formänderungsenergie

$$\begin{aligned} W_{\text{small}}(u', \bar{\alpha}, \bar{\alpha}') &= \mu \frac{u'^2}{2} + \mu_c \left( \frac{u'^2}{2} - 2\bar{\alpha} \cdot u' + 2\bar{\alpha}^2 \right) + 2\mu L_c^2 |\bar{\alpha}'|^2 \\ &= \mu \frac{u'^2}{2} + 2\mu_c \left( \frac{u'}{2} - \bar{\alpha} \right)^2 + 2\mu L_c^2 |\bar{\alpha}'|^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

führt auf die EULER-LAGRANGE-Gleichungen der Form

$$0 = u'' - 2 \frac{\mu_c}{\mu + \mu_c} \bar{\alpha}', \quad (6.24)$$

$$0 = \mu L_c^2 \bar{\alpha}'' - \mu_c \left( \bar{\alpha} - \frac{u'}{2} \right). \quad (6.25)$$

Homogene Lösungen, welche das Kräftegleichgewicht in Gl. 6.24 sowie das Momentengleichgewicht in Gl. 6.25 bei einer Scherung  $\gamma = 0.2$  erfüllen, sind in Abb. 6.16 (rechts) dargestellt. Für homogene Lösungen  $(u', \bar{\alpha}) = \text{const.}$  ist das Kräftegleichgewicht immer erfüllt. Für  $\mu_c > 0$  ist die Lösung eindeutig und lautet  $\bar{\alpha} = \gamma/2$ . Für  $\mu_c = 0$  determiniert das linearisierte Momentengleichgewicht die Rotation  $\bar{\alpha}$  nicht mehr, beliebige Werte sind als vertikale Linie in Abb. 6.16 (rechts) angedeutet.

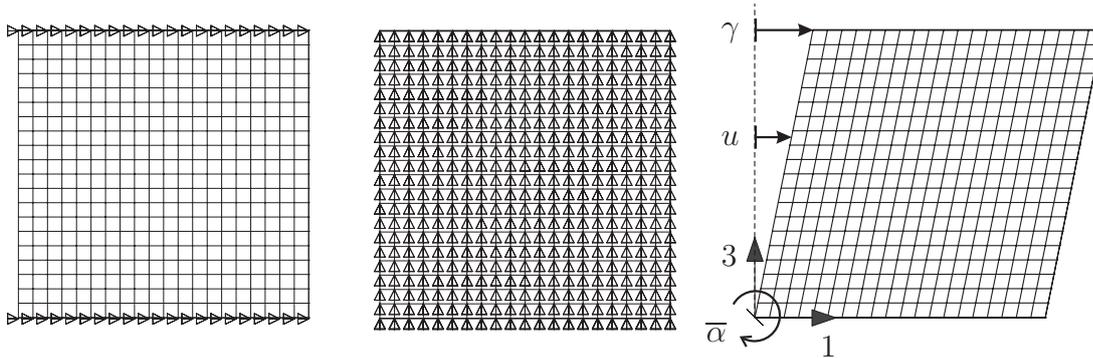
Es wird erwähnt, dass durchaus inhomogene Lösungen für dieses Beispiel in NEFF & MÜNCH [175] gefunden wurden. Solche Mikrostrukturlösungen werden dort sowohl analytisch als auch numerisch beobachtet. Sie weisen in horizontalen, laminierten Schichten unterschiedliche Scherwinkel und Rotationen auf.

#### 6.4.4 Variation der Randvorgaben

Um die Eindeutigkeit der homogenen Lösung im Beispiel zu erhalten, dienen Forderungen an die Rotationen auf dem Rand. Die folgende Diskussion basiert auf Ergebnissen des Finite-Element-Modells gemäß Kap. 5, weshalb zunächst Probengeometrie und Materialparameter dimensionslos spezifiziert werden. Danach wird der Drehwinkel  $\bar{\alpha}_d$  auf dem oberen und unteren Rand bei einer Scherung von  $\gamma = 0.2$  variiert und das Antwortverhalten untersucht.

In Abb. 6.17 ist die quadratische Probe mit der Kantenlänge 1 und deren Lagerung gegen Verschiebungen dargestellt. Es treten keine Verschiebungen in 2- und 3-Richtung auf. Der untere Rand wird in 1-Richtung gehalten, der obere um  $\gamma$

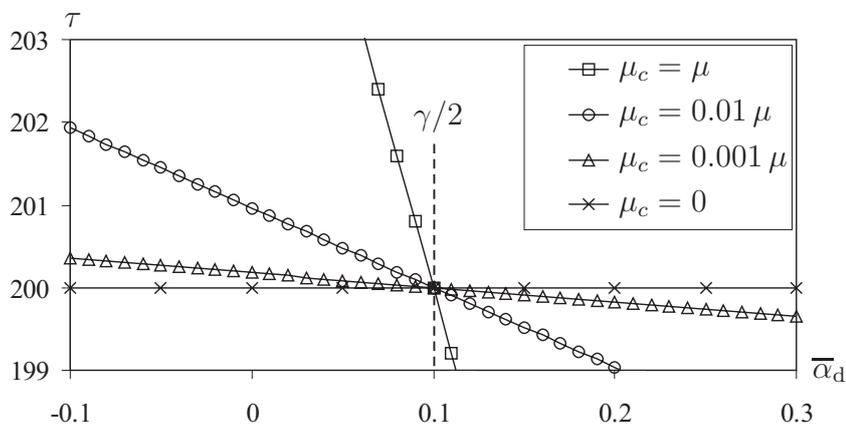
verschoben. Weiterhin sind nur Drehungen  $\bar{\alpha}$  um die 2-Achse erlaubt. Verschiebungen in 1-Richtung werden mit  $u$  bezeichnet. Die in Kap. 6.4.1 beschriebene Kinematik wird im Finite-Element-Model somit exakt wiedergegeben.



**Abbildung 6.17:** Finite-Elemente Netz mit Lagerungen (links und mittig) und Kinematik der einfachen Scherung (rechts).

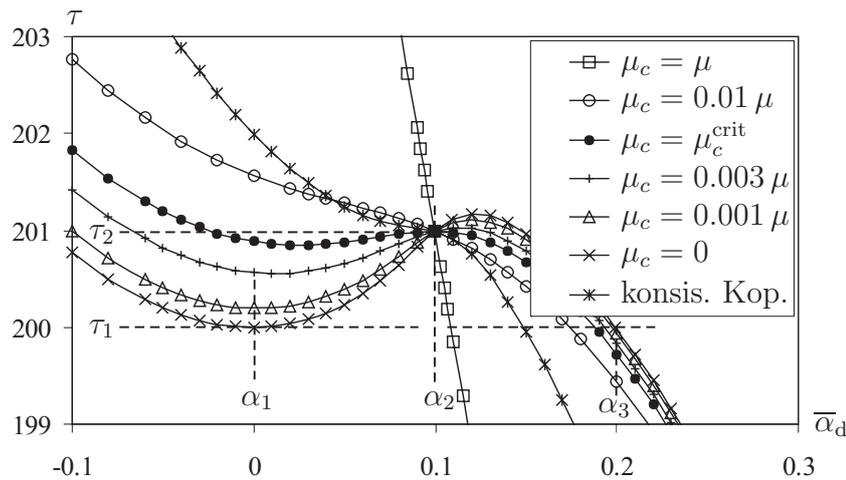
Die Struktur wird mit 20 mal 20 Scheibenelementen diskretisiert. Die Elemente besitzen 4-Knoten, lineare Ansatzfunktionen und beschreiben den ebenen Verzerungszustand. Die Materialparameter  $\mu = 1000$ ,  $\lambda = 1500$  und  $L_c = 0.05$  bleiben durchweg konstant.

In Abb. 6.18 ist das Ergebnis des linearen COSSERAT-Modells bezüglich der Randschubspannung  $\tau$  abgebildet. Diese ist für  $\mu_c > 0$  eine monotone Funktion der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$ , wobei für  $\mu_c = 0$  das Ergebnis wie erwartet von den Rotationen entkoppelt ist. Nur für  $\bar{\alpha}_d = \gamma/2 = 0.1$  ist die Schubspannung  $\tau_1 = \gamma \cdot \mu = 200$  vom Kopplungsmodul  $\mu_c$  unabhängig und stellt gleichzeitig die einzige homogene Lösung im linearen COSSERAT-Modell dar.



**Abbildung 6.18:** Schubspannung  $\tau$  der linearen COSSERAT-Theorie bei Variation der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$  und unterschiedlichen Kopplungsmoduli  $\mu_c$ .

In Abb. 6.19 ist das Ergebnis des nichtlinearen COSSERAT-Modells bezüglich der Randschubspannung  $\tau$  abgebildet.<sup>45</sup>



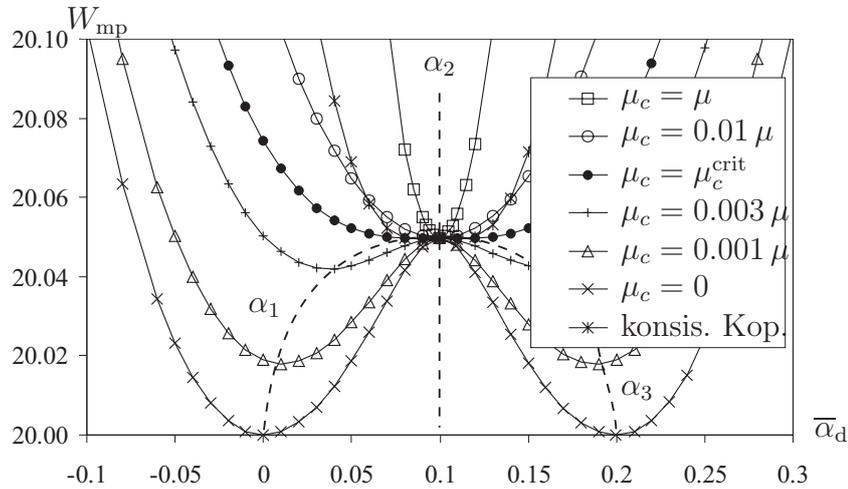
**Abbildung 6.19:** Schubspannung  $\tau$  der nichtlinearen COSSERAT-Theorie bei Variation der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$  und unterschiedlichen Kopplungsmoduli  $\mu_c$ .

Nur für  $\bar{\alpha}_d = \alpha_2 = \arctan[\gamma/2] = 0.0997$  ist die Schubspannung  $\tau_2 = 200.99$  in Abb. 6.19 unabhängig von der Wahl des Kopplungsmoduls  $\mu_c$ . Durch die entsprechende Vorgabe  $\bar{\alpha}_d$  auf dem Rand, werden die homogenen Lösungen mit  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$  und  $\bar{\alpha}_3$  auch numerisch erreicht.

In der Differenz zwischen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  machen sich bereits geometrisch nichtlineare Effekte durch die relativ große Scherung  $\gamma = 0.2$  bemerkbar. Für kleinere Scherung verschwindet diese Differenz und die homogenen Lösungen liefern einen nahezu gleichen Schermodul, vgl. Abb. 6.14.

Die Formänderungsenergie  $W_{mp}$  für das nichtlinear COSSERAT-Modell ist in Abb. 6.20 zu sehen. Für  $\mu_c \leq \mu_c^{\text{crit}}$  bilden die homogenen Lösungen  $\bar{\alpha}_1$  und  $\bar{\alpha}_3$  das energetische Minimum, ansonsten die homogene Lösung  $\bar{\alpha}_2$ . Schnittpunkte mit der gestrichelten Linie stellen homogene Lösungen für  $\bar{\alpha}$  dar, was sich durch das Verschwinden der Krümmungsenergie in Abb. 6.21 widerspiegelt.

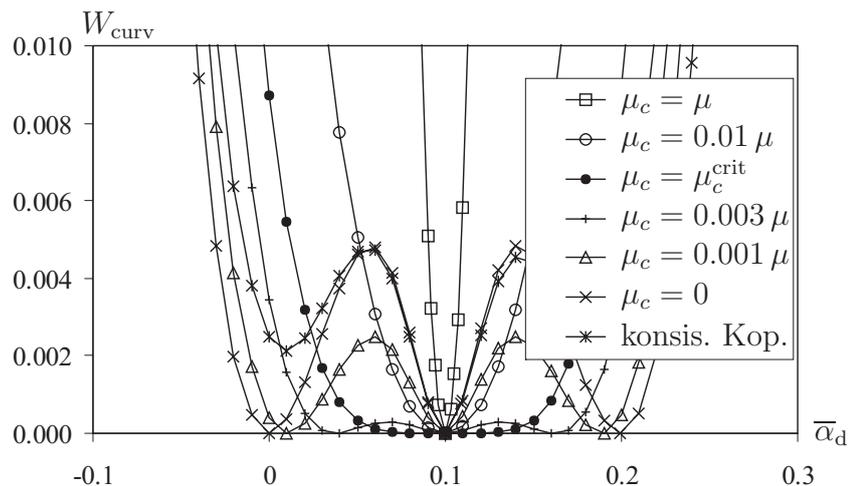
<sup>45</sup>Die Schubspannung  $\tau$  ist aus der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung.



**Abbildung 6.20:** Formänderungsenergie der nichtlinearen COSSERAT-Theorie bei Variation der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$  und unterschiedlichen Kopplungsmoduli  $\mu_c$ .

Der Verlauf der Krümmungsenergie in Abb. 6.21 erscheint für  $\mu_c = 0$  mit und ohne konsistente Kopplungsbedingung qualitativ gleich. Eine Eindeutigkeit der Lösung ist für konsistente Kopplung jedoch gegeben.

Für die Wahl  $L_c = 0.05$  nimmt die Krümmungsenergie im Vergleich zur Formänderungsenergie wesentlich kleinere Werte an, so dass sich die Gesamtenergie von der Formänderungsenergie kaum unterscheidet.



**Abbildung 6.21:** Krümmungsenergie der nichtlinearen COSSERAT-Theorie bei Variation der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$  und unterschiedlichen Kopplungsmoduli  $\mu_c$ .

Aus einer weniger detaillierten Sicht, ergibt sich aus diesem Beispiel für die praktische Anwendung des COSSERAT-Modells das Folgende.

Die Variation der Randvorgabe durch unterschiedliche  $\bar{\alpha}_d$  führt im Fall  $\mu_c = \mu$  zu großer Veränderung der Schubspannung  $\tau$ , vgl. Abb. 6.18 bzw. 6.19. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt als Grenzschichteffekt diskutiert.

Für kleines oder verschwindendes  $\mu_c$  ist der Einfluss von  $\bar{\alpha}_d$  auf die Schubspannung vergleichsweise gering. So unterscheidet sich  $\tau_1$  und  $\tau_2$  aus den homogenen Lösungen lediglich um 0.5%. Sofern die interne Länge  $L_c$  im Vergleich zu den Abmessungen der Probe um ca. Faktor 20 kleiner ist und der Kopplungsmodul  $\mu_c < 0.01 \mu$ , beeinflussen Randvorgaben an die Rotationen das Antwortverhalten nur schwach. Dies gilt jedoch nicht, wenn man am exakten Verlauf des Rotationsfeldes interessiert ist.

Die konsistente Kopplungsbedingung mit  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$  auf  $\Gamma'_D$  erscheint im Antwortverhalten neutral. Sie bedeutet die Stilllegung der zusätzlichen Kinematik des COSSERAT-Modells auf dem Rand. Dies wird für die praktische Anwendung dann relevant, wenn weder NEUMANNsche Vorgaben noch DIRICHLETSche Vorgaben zutreffend erscheinen. Man erreicht damit im vorliegenden Beispiel die Eindeutigkeit der Lösung.

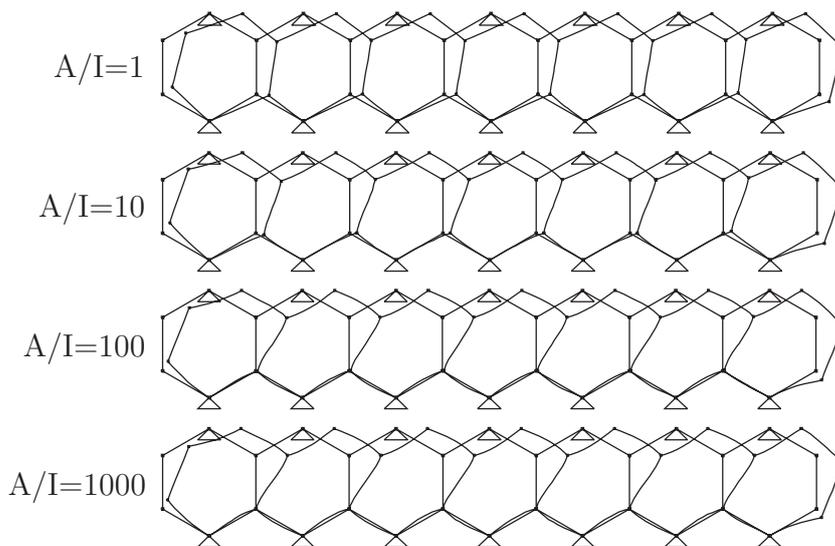
#### 6.4.5 Einfluss von Grenzschichten auf den Schermodul

Die Schubspannung in Abb. 6.18 bzw. Abb. 6.19 stellt durch  $\mu = \tau/\gamma$  ein direktes Maß des Schermoduls dar. Man erkennt besonders für  $\mu_c > 0.01 \mu$  eine relevante Abhängigkeit des Moduls von der Randvorgabe  $\bar{\alpha}_d$ . Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Abhängigkeit als Grenzschichteffekt weiterhin von der Probenhöhe sowie der internen Länge  $L_c$  abhängt.

Eine Veröffentlichung von DIEBELS & STEEB [41] behandelt u.a. Grenzschichteffekte an einer Wabenstruktur als Stabmodell unter Scherung. Über Auflagerkräfte wird auf den Schermodul des Modells geschlossen.

Dieser liegt stets höher, als es mit demselben Modell aus einem homogenen Zugversuch zu erwarten wäre. Weiterhin nimmt der Effekt bei geringer Probenhöhe zu. Im Unterschied zum Modell in Abb. 6.12 (links) werden die Stäbe in [41] auch gegen Verdrehung gelagert. Da in [41] die Stabrotationen konzeptionell mit den Rotationen eines linearen COSSERAT-Modells in Verbindung gebracht werden, entspricht dies hier der direkten Vorgabe von  $\bar{\alpha}_d = 0$  im Modell der einfachen Scherung.

Nun sollen sich zunächst die Wabenstäbe an den Auflagerpunkten drehen können, was in Abb. 6.22 durch die gelenkige Lagerung gegeben ist. Wie sich eine Verdrehung einstellt hängt jedoch vom Verhältnis zwischen Querschnittsfläche  $A$  und Biegeträgheitsmoment  $I$  ab.

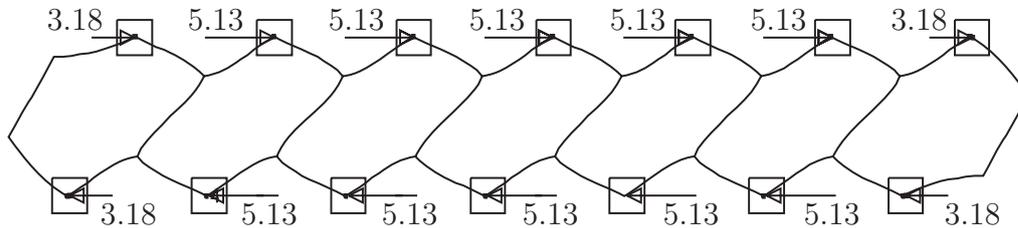


**Abbildung 6.22:** Scherung in einlagigem Wabenmodell mit verschiedenen  $A/I$  Verhältnissen.

Nimm man an, dass die Balkenstruktur aus runden Stäben mit Radius  $r$  besteht, lautet das Verhältnis  $A/I = (\pi r^2)/(\pi r^4/4) = 4/r^2$ . Da das Verhältnis keine dimensionslose Größe ist, werden nun konkret die Waben eines Aluminiumschaumes untersucht.

Dessen Waben werden über den Wabendurchmesser  $d = 1 \text{ mm}$  charakterisiert. Weiterhin ist die Querschnittsfläche der Wabenstäbe durch  $r = \sqrt{4/1000} \text{ mm}$  und den Elastizitätsmodul  $E = 70000 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Schon allein die Forderung zur Anwendbarkeit der Balkentheorie verlangt ungefähr  $r \leq 0.2 \text{ mm}$  und somit ein Verhältnis von mindestens  $A/I = 100/\text{mm}^2$ . Nun liegt hier das Verhältnis  $A/I = 1000/\text{mm}^2$  vor.

Die Struktur bestehe zunächst aus einer Lage mit sieben Waben, deren Stäbe oben und unten eingespannt sind. Die Oberseite wird gegenüber der Unterseite um eine halbe Wabenbreite geschert. In Abb. 6.23 ist die deformierte Struktur sowie dabei auftretende horizontale Auflagerkräfte zu sehen.



**Abbildung 6.23:** Gescherte Wabenstruktur mit horizontalen Auflagerkräften in  $[N]$ .

Die Einspannung der Stäbe entspricht einer Vorgabe der Rotation mit  $\bar{\alpha}_d = 0$  auf dem oberen und unteren Rand. Die Summe der horizontalen Auflagerkräfte ist im Vergleich zur Berechnung mit gelenkiger Lagerung um den Faktor  $32.01/28.96 = 1.11$  höher. Diese Erhöhung ist in einer einlagigen Wabenstruktur stärker ausgeprägt als in einer Struktur mit mehreren Lagen. So nimmt diese Erhöhung bei einer äquivalenten aber dreilagigen Wabenstruktur bereits auf den Faktor 1.04 ab.

Dieses kurze Beispiel zeigt, dass die Wabenstruktur unter Scherung Informationen zur Lagerung der Balken benötigt. Nach DIEBELS & STEEB [41] ist hier der Einfluss auf den Schermodul durch eine Grenzschicht zu erklären. Die COSSERAT-Theorie sei durch adäquate Randvorgaben, dem Parameter  $\mu_c$  und dem Parameter  $L_c$  in der Lage, solche Einflüsse zu modellieren.

Aus Kap. 6.4.4 geht hervor, dass hierbei der Kopplungsmodul  $\mu_c$  eine entscheidende Rolle spielt. Der Kopplungsmodul  $\mu_c$  präsentiert sich bei dieser Betrachtung weniger als Materialparameter, sondern als Grenzschichtparameter. Hierbei stehen  $\mu_c$  und  $L_c$  allerdings in einem nicht entwirrbaren Verhältnis, was deren Zuordnung erschwert.

Abschließend wird bemerkt, dass sich die einfache Scherung zur Identifikation der internen Länge  $L_c$  im Fall homogener Lösungen, wie sie analytisch und numerisch beobachtet werden, nicht eignet. Es sind Deformationen nötig, welche ein inhomogenes Drehfeld provozieren, damit die Krümmungsenergie und somit  $L_c$  überhaupt eine Rolle spielt. Deshalb finden hier detaillierte Parameterstudien bezüglich den COSSERAT-Parametern  $\mu_c$  und  $L_c$  an einem Torsionstest in Kap. 6.6 statt.

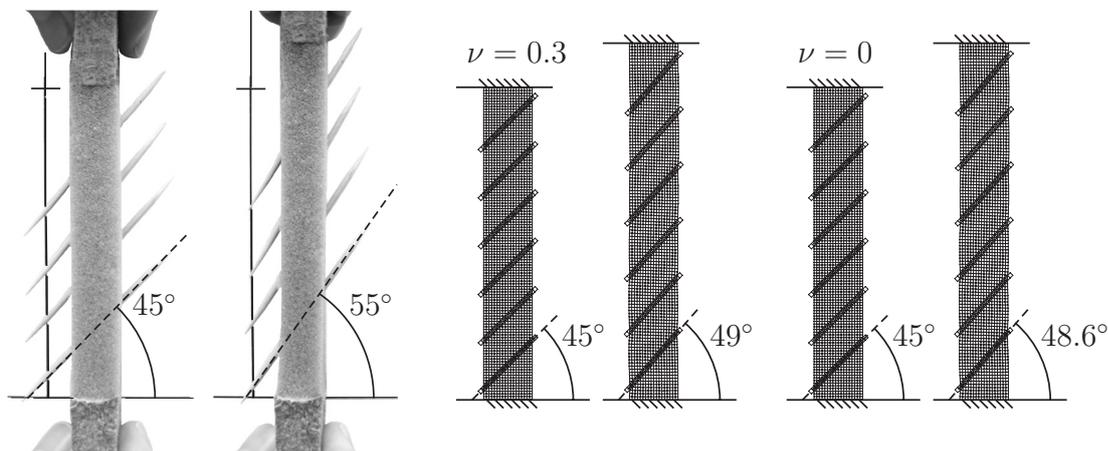
## 6.5 Transversal isotroper Zugtest

An einem Zugtest mit transversal isotropem Material soll eine mögliche Anschauung des Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  diskutiert werden. Nach Ansicht des Verfassers erfüllt  $\bar{\mathbf{R}}$  eine abstrakte Rolle im Kontext der Kinematik und der Minimierung der inneren Formänderungsenergie.

Dies impliziert ein einfaches Anschauungsbeispiel, wie es der Zugversuch ist. Bei homogener Zugdeformation in isotropem Material spielen Rotationen jedoch keine Rolle, weder in der Kinematik noch in der Formänderungsenergie.

Nun habe das Material eine ausgezeichnete, verstärkte Richtung (transversal isotrop), welche von der Zugrichtung unter  $45^\circ$  abweicht. In Abb. 6.24 (links) ist ein Versuchsmodell aus elastischem Schaum, armiert mit Holzzahnstochern, zu sehen. Die raue Oberfläche der Zahnstocher gewährleistet einen guten Verbund zwischen Matrix und Armierung.

Wird an dem Modell gezogen, drehen sich die Zahnstocher in Richtung der Zuglängsachse um  $\alpha \simeq 10^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn. Aus Gründen der Anschauung wird die Probe einer großen Längsdehnung von  $\varepsilon \simeq 15\%$  unterzogen.



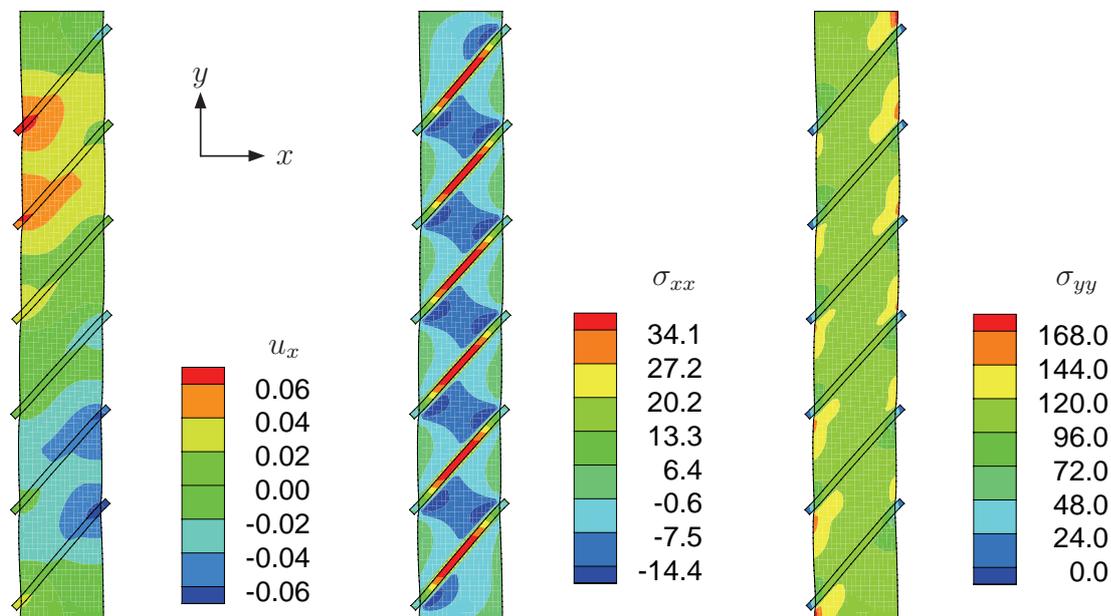
**Abbildung 6.24:** Versuchsmodell (links) und DA-FE-Modell mit Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  (mittig) bzw.  $\nu = 0$  (rechts) unter Zugbeanspruchung.

Um diese experimentelle Beobachtung zu verifizieren, wird die Situation in einem Finite-Element-Modell mit klassischem ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material nachgestellt, vgl. Abb. 6.24 (mittig und rechts). Die Ebene der Zahnstocher kann vereinfachend durch ebenen Verzerrungszustand modelliert werden, weshalb 4-Knoten Scheibenelemente Verwendung finden. Diese Elemente arbeiten mit linearen Ansatzfunktionen.

Die Matrix mit den Abmessungen  $b = 2$  sowie  $h = 12$  wird durch 30 mal 184 Elemente diskretisiert. Zusätzliche diskrete Elementreihen, welche unter  $45^\circ$  geneigt sind, armieren die Matrix in ähnlicher Weise wie im Versuchsmodell. Für Matrix und Armierung wird ein Elastizitätsmodul von  $E_1 = 600$  bzw.  $E_2 = 7 \cdot E_1 = 4200$  gewählt. Der Verbund zwischen Matrix und Armierung ist vereinfachend an den Elementknoten voll hergestellt.

Eine weitere Vereinfachung betrifft die Wahl gleicher Querkontraktionen für beide Materialien, welche zwischen  $\nu = 0$  und  $\nu = 0.49$  variiert wird. Dieses Modell soll im weiteren als DA-FE-Modell abgekürzt werden (diskret armiertes Finite-Element-Modell).

Man beobachtet im DA-FE-Modell ebenfalls eine Drehung der Armierung um  $\alpha \simeq 4^\circ$  **gegen** den Uhrzeigersinn, wobei verschiedene Querkontraktionszahlen eine untergeordnete Rolle spielen. Diese Drehung kann auch aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten in den Anteil  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  abgelesen werden. Dessen axialer Vektor besitzt die entsprechende Drehkomponente von  $\alpha \simeq 4^\circ$  **gegen** den Uhrzeigersinn.



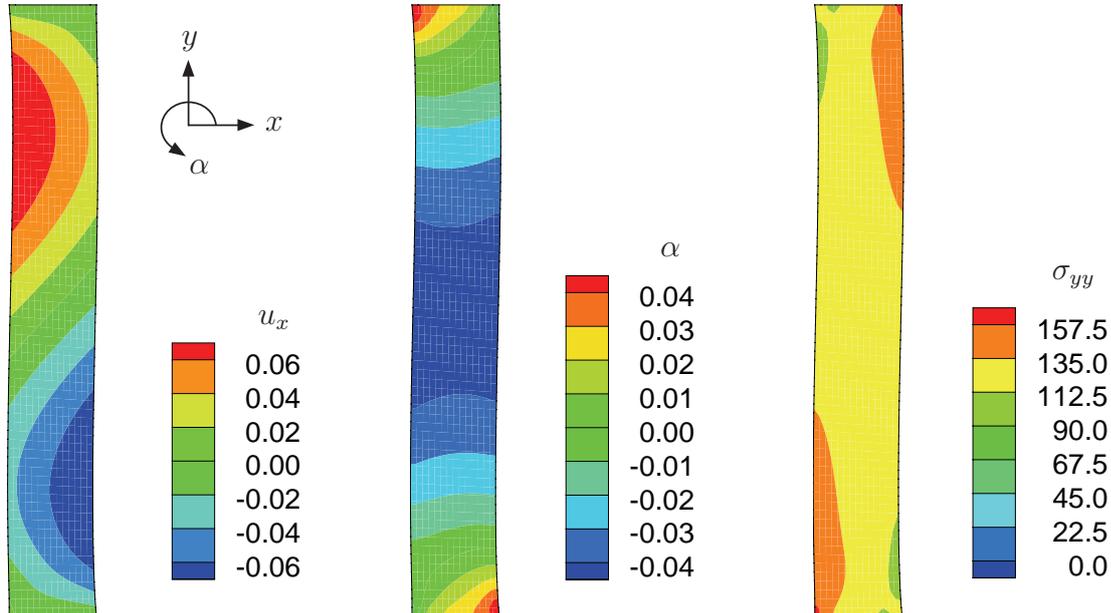
**Abbildung 6.25:** Horizontale Verschiebung  $u_x$ , Spannungskomponente  $\sigma_{xx}$  und Spannungskomponente  $\sigma_{yy}$  im DA-FE-Modell.

Das Verschiebungsfeld  $u_x$  in Abb. 6.25 zeigt, dass sich die Zugprobe in der unteren Hälfte nach links, bzw. in der oberen Hälfte nach rechts verschiebt, was einer

(umgekehrten) S-Kurve entspricht. Aus den Normalspannungskomponenten  $\sigma_{xx}$  bzw.  $\sigma_{yy}$  erkennt man weiterhin, dass die Matrix an den Enden der Armierung in horizontaler Richtung gedrückt wird, während in vertikaler Richtung höhere Zugspannungen aus der Faser in die Matrix übergehen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Armierung durch eine Drehung **gegen** den Uhrzeigersinn die aufgezwungene Verlängerung für sich abschwächt. Dabei muss die umgebende Matrix deformiert werden, was aber durch deren weiches Materialverhalten weniger Formänderungsenergie benötigt als die volle Verlängerung der steifen Armierung.

Aus dem DA-FE-Modell werden die phänomenologischen Materialparameter des klassisch transversal isotropen Materialmodells (KTI-Modell) durch Abgleich gewonnen. Bei einer Querkontraktion von  $\nu = 0.3$  im DA-FE-Modell liegen die Werte des KTI-Modells bei  $E_1 = 1071$ ,  $E_2 = 531$ ,  $\mu_{12} = 311$ ,  $\mu_{23} = 229$  und  $\nu_{12} = 0.098$ .



**Abbildung 6.26:** Horizontale Verschiebung  $u_x$ , polare Drehung  $\alpha$  und Spannungskomponente  $\sigma_{yy}$  im KTI-Modell.

Während das Versuchs- und DA-FE-Modell durch die Drehung der Armierung einen testspezifischen Vorgang auf mikroskopischer Ebene zeigen, kann dies das KTI-Modell nicht. Durch die Homogenisierung und durch den Verzicht auf eine explizite Ausrichtung der Kontinuumpunkte sind nur Ergebnisse auf

Makroebene verfügbar.

Die horizontale Verschiebung  $u_x$  in Abb. 6.26 indiziert wie im DA-FE-Modell eine S-Kurve. Die Neigung dieser S-Kurve gegen eine vertikale Linie entspricht der polaren Drehung  $\alpha$ . Diese makroskopische Drehung  $\alpha$  korrespondiert mit der beobachteten mikroskopischen Drehung der Armierung keineswegs. So ist z.B. im mittleren Teil der Probe eine **makroskopische Drehung im Uhrzeigersinn** zu erkennen.

Das COSSERAT-Modell mit  $\mu_c = \mu$  und  $L_c \simeq 0$  unterscheidet sich in sämtlichen Ergebnisverläufen nur unwesentlich vom KTI-Modell. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich die Mikro- und Makrorotation durch den hohen Kopplungsmodul  $\mu_c$  kaum differenziert. Für  $L_c > 0$  führt lediglich die Krümmung der S-Kurve zu energetisch zusätzlichen Anteilen in der Formänderungsenergie, wodurch sich das Material versteift.

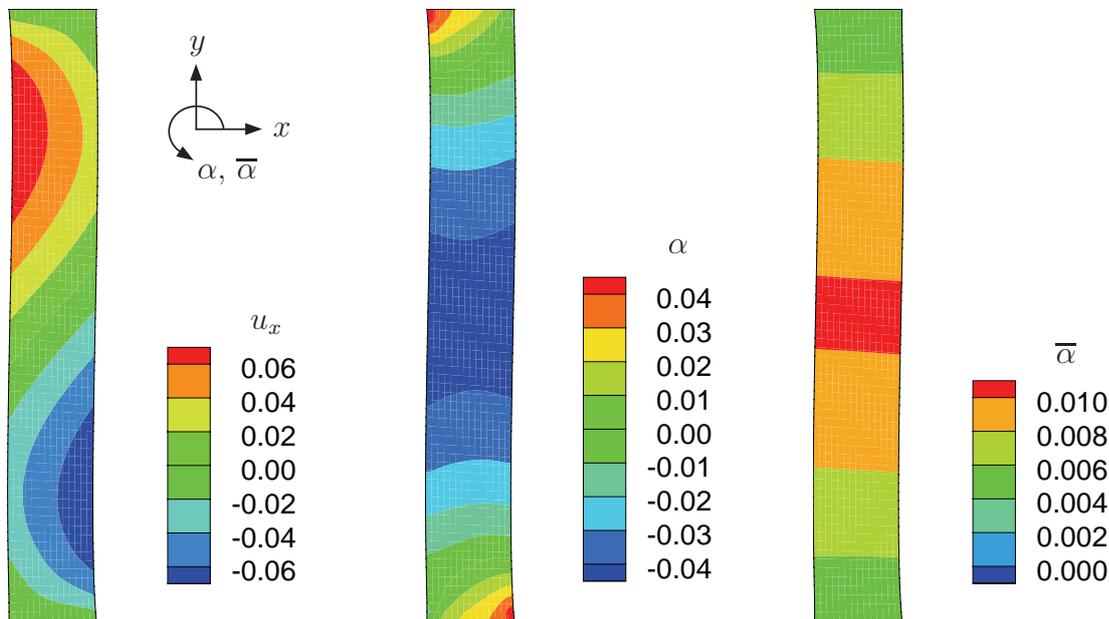
Im COSSERAT-Modell mit  $\mu_c = 0$  sind hingegen die Ergebnisse von der internen Länge  $L_c$  auch qualitativ abhängig und präsentieren sowohl die klassische Lösung mit zusätzlicher Information auf Mikroebene, als auch Mikrostrukturlösungen verschiedener Ausprägung.

Es sei bemerkt, dass man sich im Kontext dieses Beispiels die interne Länge als Drehfeder zwischen den Zahnstochern des Versuchsmodells vorstellen kann. Für großes  $L_c$  verlaufen diese im übertragenen Sinne nahezu parallel.

In einer faserverstärkten Matrix ist solch eine Drehfeder ein phänomenologischer Parameter, der von vielen Eigenschaften abhängt. Dazu gehört vor allem Länge, Form, Steifigkeit und Abstand der Fasern, die Steifigkeit der Matrix sowie der Verbund zwischen Faser und Matrix. Die Summe dieser Eigenschaften kann durch einen einzelnen phänomenologischen Parameter, wie es  $L_c$  ist, nur begrenzt erfassbar sein.

Doch ist offensichtlich, dass ein Material, dessen parallele Armierung kaum Möglichkeiten hat von dieser Parallelität abzuweichen, in einem homogenen Modell abbildbar ist (Fall großes  $L_c$ ).

Kann sich hingegen die Armierung innerhalb der Matrix ohne Rücksicht auf benachbarte Armierungen ungehindert drehen, ist zum einen die Homogenisierung, zum anderen die Anwendung einer elastischen Theorie fester Körper fraglich (Fall kleines  $L_c$ ). Völlig entkoppelte Drehungen ( $L_c = 0$ ) sind z.B. in losem Material wie Sand denkbar. Tatsächlich deutet der numerische Test zur Scherfuge einer Böschung in Kap. 8.5 darauf hin, dass sich mit einer **kleinen** internen Länge  $L_c$  die Charakteristik eines sandigen Bodens widerspiegelt.



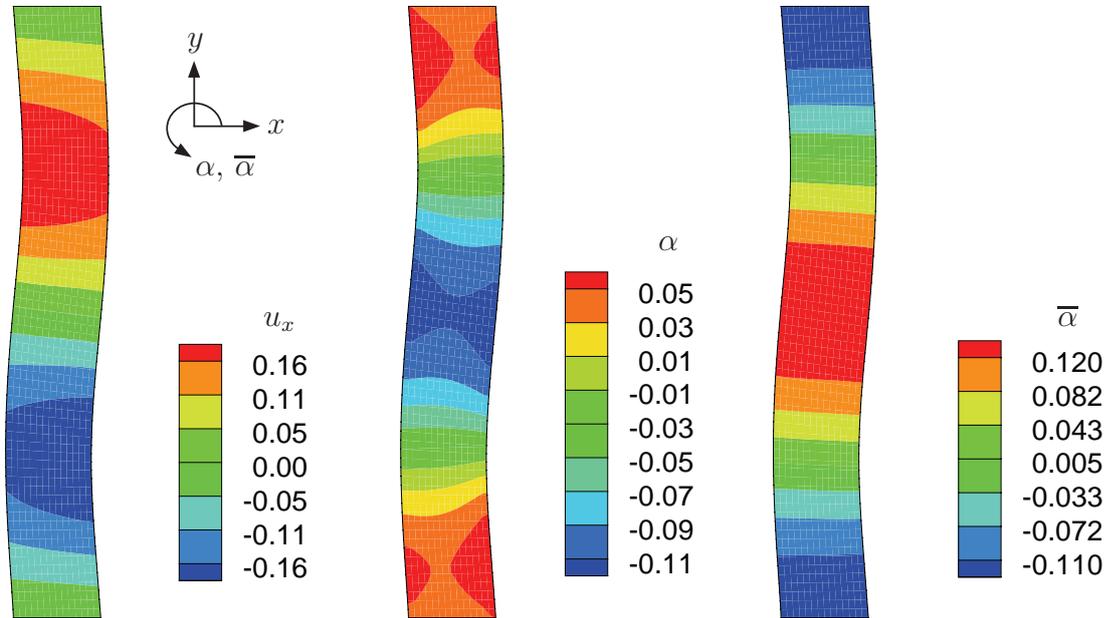
**Abbildung 6.27:** Horizontale Verschiebung  $u_x$ , polare Drehung  $\alpha$  und COSSERAT-Drehung  $\bar{\alpha}$  für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 3$ .

In Abb. 6.27 sind Ergebnisse des COSSERAT-Modells für  $L_c = 3$  abgebildet. Für  $L_c > 3$  ändern sich die Ergebnisse nur unwesentlich, weshalb von einer großen internen Länge gesprochen werden kann. Das Verschiebungsfeld  $u_x$  sowie das polare Drehfeld  $\alpha$  stimmen mit den Feldern aus dem KTI-Modell überein. Als zusätzliche Größe erscheint die COSSERAT-Drehung  $\bar{\alpha}$ , **welche eine Drehung der inneren Struktur gegen den Uhrzeigersinn aufweist** und über den gesamten Körper nahezu parallel verläuft.

Wird die interne Länge auf  $L_c = 1$  verringert, weicht die COSSERAT-Drehung von dieser Parallelität ab. Eine deutlich ausgeprägtere S-Kurve ist die Folge, was in Abb. 6.28 zu sehen ist.

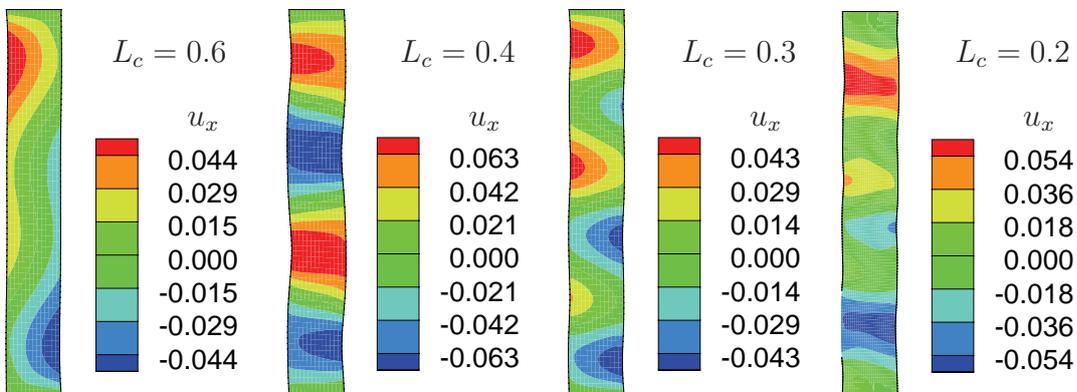
Obwohl die S-Kurve keine kürzeste Verbindung zwischen Ober- und Unterseite der Zugprobe darstellt, wird diese Form angestrebt, damit die Fasern durch Drehung einer Verlängerung entgegenwirken.

Bei weiterer Verringerung der internen Länge treten Mikrostrukturlösungen auf, welche auf plausible Weise sowohl die Drehung der Fasern ermöglichen, zugleich aber eine kürzere Verbindung zwischen Ober- und Unterseite der Probe beinhalten.



**Abbildung 6.28:** Horizontale Verschiebung  $u_x$ , polare Drehung  $\alpha$  und COSSERAT-Drehung  $\bar{\alpha}$  für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 1$ .

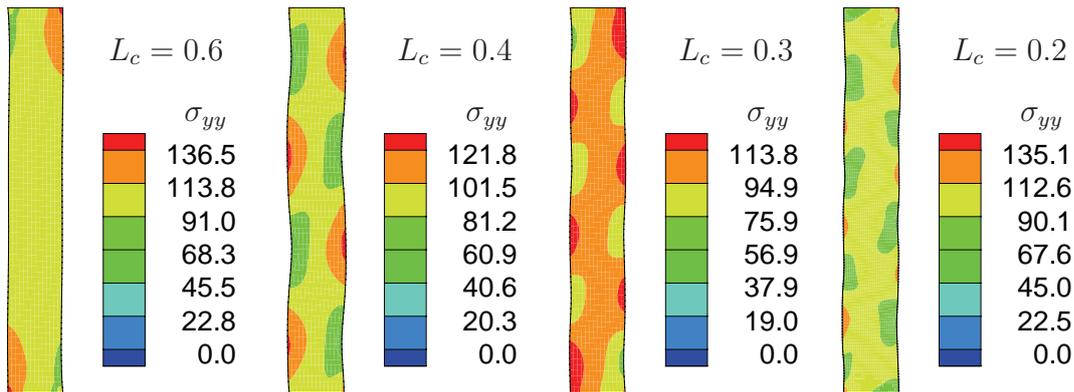
So zeigt Abb. 6.29 für  $L_c = 0.6$  den Übergang zur doppelten S-Kurve. Für  $L_c = 0.4$  ist diese doppelte S-Kurve deutlich ausgeprägter. Für  $L_c = 0.3$  ist der einfachen S-Kurve eine dreifache S-Kurve überlagert. Die Tendenz zu einer immer höher werdenden Anzahl an S-Kurven setzt sich jedoch hier nicht fort, wie man für  $L_c = 0.2$  erkennt. Vielmehr scheint sich die einfache S-Kurve wieder durchzusetzen.



**Abbildung 6.29:** Mikrostrukturlösungen für kleine interne Längen  $L_c$ .

Die COSSERAT-Lösungen basieren auf einem Netz mit 14 mal 84 bilinearen Fi-

niteten Elementen. Die Verringerung der internen Länge auf Werte  $L_c < 0.3$  ist in diesem Beispiel jedoch nur dann möglich, wenn das Finite-Element-Netz auf mindestens 35 mal 210 bilineare Elemente verfeinert wird. Alle Ergebnisse werden mit dem feineren Netz bestätigt und zeigen zudem besseres Konvergenzverhalten.



**Abbildung 6.30:** Vertikale Spannungskomponente  $\sigma_{yy}$  für kleine interne Längen  $L_c$ .

Die gezeigten Mikrostrukturlösungen verhalten sich prinzipiell weicher als für großes  $L_c$ . Aus dem Maximalwert und den Verläufen der vertikalen Spannungskomponente  $\sigma_{yy}$  in Abb. 6.30 geht jedoch hervor, dass kein klarer Trend für kleiner werdendes  $L_c$  vorliegt.

Die Integration der vertikalen Spannungskomponente über den oberen Rand ergibt eine nach oben gerichtete Auflagerreaktion  $A$ . Die COSSERAT-Lösung  $L_c = 3$  ergibt  $A = 213.05$ , was bereits dicht an dem Wert für  $L_c \rightarrow \infty$  mit  $A = 213.14$  liegt. Zum Vergleich ergibt die Mikrostrukturlösung für  $L_c = 0.4$  eine Auflagerkraft  $A = 181.90$ , während sie für  $L_c = 0.2$  auf  $A = 190.48$  ansteigt.

Es sei hierzu bemerkt, dass die Ergebnisse zwar eine Gleichgewichtslage darstellen, die Formulierung jedoch keine Gewähr für eine energetisch optimale Lösung gibt. Die gezeigte Mikrostrukturlösung für  $L_c = 0.2$  legt diese Vermutung nahe und weiterhin die Notwendigkeit, das Gebiet mit einer hinreichend hohen Anzahl an Finiten Elementen aufzulösen. Die Ergebnisse weisen somit lediglich auf die Möglichkeit der nichtlinearen COSSERAT-Theorie hin, solche Lösungen prinzipiell zu präsentieren.

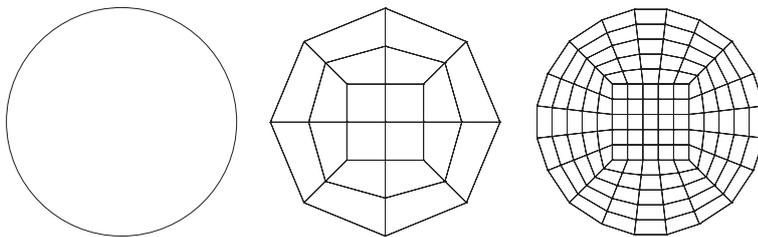
Auch die Anschauung des Versuchsmodells ist lediglich außerhalb der Mikrostrukturlösungen zutreffend.

## 6.6 Torsionstest

Nach Ansicht des Verfassers ist der Torsionstest für das COSSERAT-Modell ähnlich fundamental wie der Zugtest für klassische Modelle. Die Deformation wird von Beginn an durch ein in Stablängsrichtung veränderliches Drehfeld beschrieben, wodurch die Bedeutung von Rotation und Krümmung im Modell zum Tragen kommt. So haben die Variation der Materialparameter  $L_c$  und  $\mu_c$  im Torsionstest einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis.

Es wird ein Stab mit kreisförmig konstantem Querschnitt betrachtet, wobei die Stablänge  $L = 6$  cm, der Stabdurchmesser  $D = 1.2$  cm, der Elastizitätsmodul  $E = 21000$  kN/cm<sup>2</sup> und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  feste Größen sind und eine metallische Probe darstellen. Die im Test auftretenden Spannungen werden die VON MISES-Vergleichsspannung<sup>46</sup> von 30 kN/cm<sup>2</sup> nicht überschreiten und somit unterhalb der Streckgrenze von Stahl S355 liegen.

Der wölbfreie Kreisquerschnitt schließt Effekte aus Wölbkrafttorsion aus, was den erhöhten Aufwand bei der Diskretisierung rechtfertigt. Das Finite-Element-Netz wird zunächst durch eine Konvergenzstudie an klassisch linearem ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material auf seine Tauglichkeit geprüft. In Abb. 6.31 ist die prinzipiell gewählte Approximation des Kreisquerschnittes gezeigt, wobei die Elementnetze im Vergleich zum Kreis stets eine geringere Querschnittsfläche haben und damit einen geringeren Torsionswiderstand erwarten lassen.

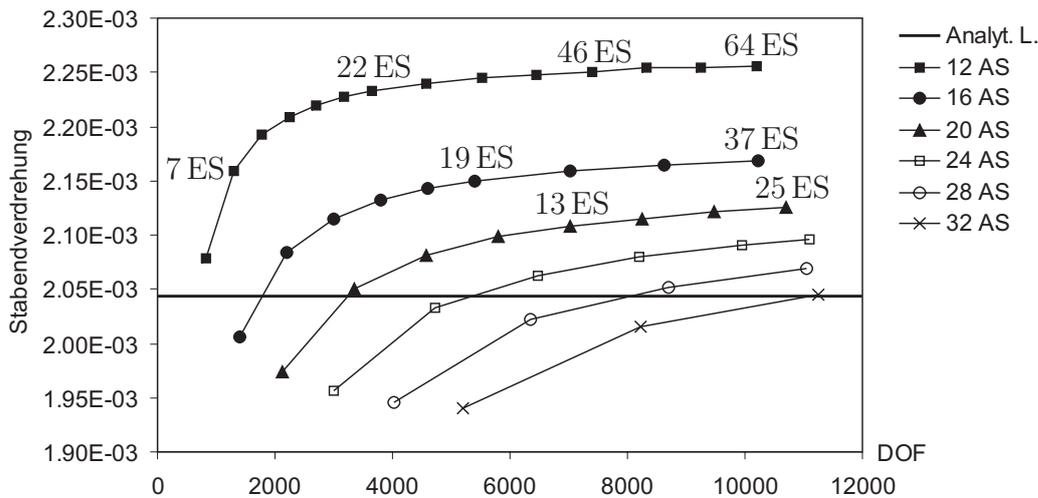


**Abbildung 6.31:** Diskretisierung des Kreisquerschnitts mit 8 (mittig) bzw. 20 (rechts) Elementen in Radialrichtung außen (Außensegmente).

Diese Querschnittsdifferenz wird mit zunehmender Netzfeinheit geringer, was jedoch mit einer erheblichen Zunahme der Freiheitsgrade einher geht. In Abb. 6.32 ist die Netzfeinheit in Stablängsrichtung - was durch die Anzahl an äquidistanten Elementschichten ES angezeigt wird - für verschieden feine Querschnittsdiskretisierungen AS (Anzahl der Außensegmente) variiert. Dabei wird die

<sup>46</sup> $\sigma_V = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2}$

gegenseitige Stabendverdrehung bei einer vorgegebenen Torsionsbelastung von  $M_T = 0.56 \text{ kN/cm}^2$  in Abhängigkeit der Freiheitsgrade (DOF) aufgetragen. Es werden 8-Knoten Volumenelemente verwendet, Vergleichsrechnungen mit 27-Knoten Volumenelementen liefern äquivalente Ergebnisse.



**Abbildung 6.32:** Stabendverdrehung für unterschiedliche Anzahl an Aussensegmenten AS in Abhängigkeit der äquidistanten Längsdiskretisierung mit Elementschichten ES.

Die Finite-Element-Lösung konvergiert gegen die analytische Lösung der gegenseitigen Stabendverdrehung  $\vartheta$  mit

$$\vartheta = \frac{M_T L}{GI_T} \quad , \quad I_T = \frac{\pi D^4}{32} \quad , \quad G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad . \quad (6.26)$$

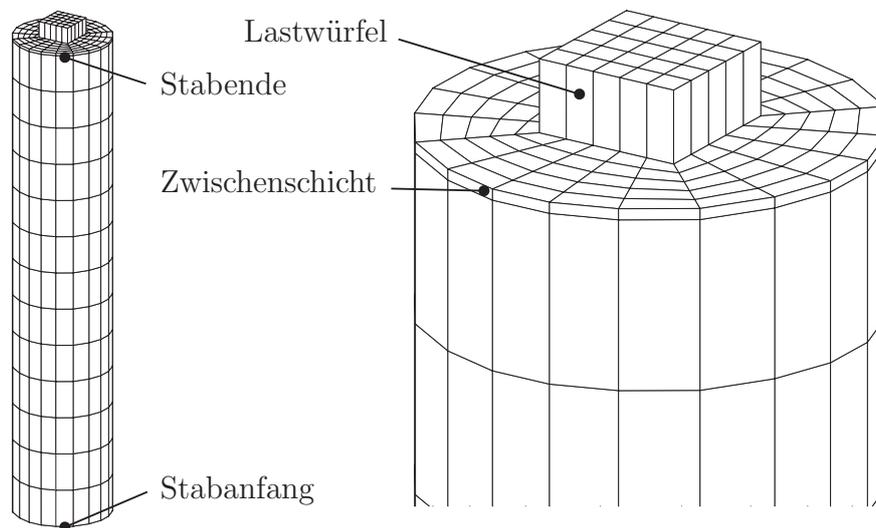
Da sich die Anzahl der Freiheitsgrade gegenüber klassischer Formulierung im COSSERAT-Kontinuum mehr als verdoppelt, wird die Diskretisierung mit 20 Außensegmenten und ca. 7000 DOF für die weiteren Untersuchungen gewählt, was 13 Elementschichten in Längsrichtung entspricht, vgl. Abb. 6.33.

Die Durchführung der numerischen Tests kann von dem Gebrauch des COSSERAT-Kontinuums dadurch profitieren, dass die Lasteinleitung auf folgende Weise geschieht. Ein Lastwürfel über der Probe erzeugt durch eingeprägte Volumenmomente ein gewünschtes Torsionsmoment und leitet dies über eine steife Zwischenschicht homogen in die Struktur ein. Die Modellierung ist in Abb. 6.33 dargestellt und erspart den Gebrauch paarweiser Einzelkräfte.

Am Stabanfang sind alle Verschiebungen fixiert, was dem Verkleben oder Verschweißen auf einer sehr steifen, festen Platte entspricht. Es ist damit auch keine

Querdehnung möglich. Am Stabende wird ebenfalls über eine verklebte oder verschweißte Platte die Torsionsbelastung in die Probe eingeleitet. Die Platte ist zwar drehbar um die Stablängsachse, lässt aber auch hier keine Querdehnung der Probe zu. Damit führt das Stabende unter der gewählten Beanspruchung genau Verschiebungen auf einer Kreisbahn aus. Die Rotationen unterliegen weder an den Stabenden noch auf dem freien Rand einer Vorgabe.

Die in Abb. 6.33 zu sehende Zwischenschicht wird deshalb mit einem fiktiven Elastizitätsmodul modelliert, welcher um den Faktor 10000 größer ist, als der der Probe selbst.



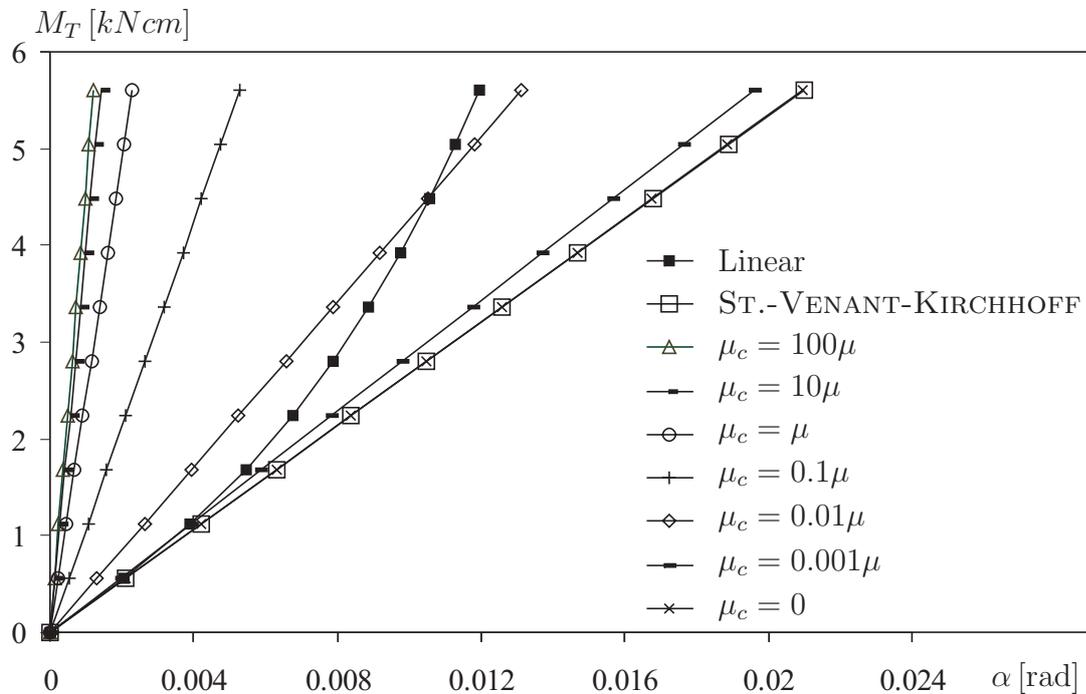
**Abbildung 6.33:** Probekörper mit Lasteinleitungsdetail.

Die nachfolgenden Diagramme basieren auf Ergebnissen im Mittelpunkt des Stabendes. Dort werden die Drehvektoren  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  und  $\hat{\alpha}$  der Rotationen  $\mathbf{R}$ ,  $\bar{\mathbf{R}}$  und  $\hat{\mathbf{R}}$  bezüglich der Verdrehung um die Stablängsachse untersucht.

Die erste Testreihe variiert den COSSERAT-Kopplungsmodul  $\mu_c$  und fixiert dabei die interne Länge auf  $L_c = 1$ , was als relativ großer interner Längenfaktor angesehen werden kann. Die makroskopische Stablängsverdrehung in Abb. 6.34 nimmt für zunehmendes  $\mu_c$  ab. Damit kann das Modell steiferes Verhalten als das klassische Modell aufweisen. Dies ist auch bereits zu Beginn der Deformation in der Anfangstangente zu erkennen.

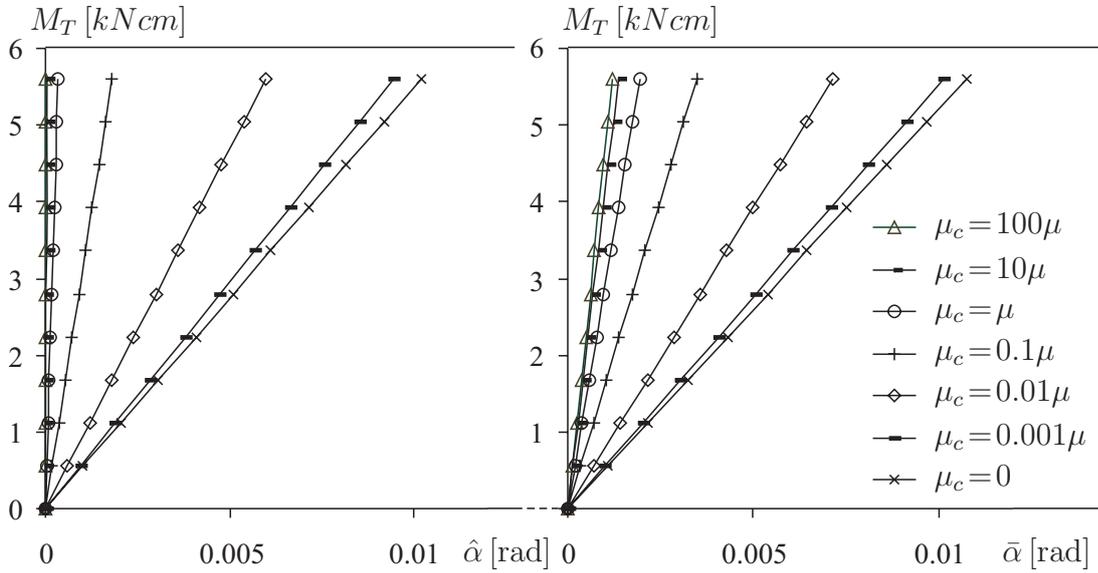
Dieser Versteifungseffekt resultiert aus der direkten Kopplung durch  $\mu_c$  zwischen  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  und  $\bar{\mathbf{R}}$ . Der Versteifungseffekt verschwindet vollständig bei Wahl von  $\mu_c = 0$ . In diesem Fall übernimmt  $\bar{\mathbf{R}}$  im wesentlichen eine über den Körper kon-

stante Verdrehung, nämlich die Starrkörperrotation. Das Feld  $\hat{\mathbf{R}}$  übernimmt die Gradienten der Stablängsverdrehung. Die Krümmung aus  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  und  $\hat{\mathbf{R}}$  stimmen dann vollständig miteinander überein und können somit als rein elastische Krümmung aufgefasst werden. Die elastische Krümmung führt jedoch zu keiner zusätzlichen Energie, wie es in einem "second grade continua" der Fall wäre.



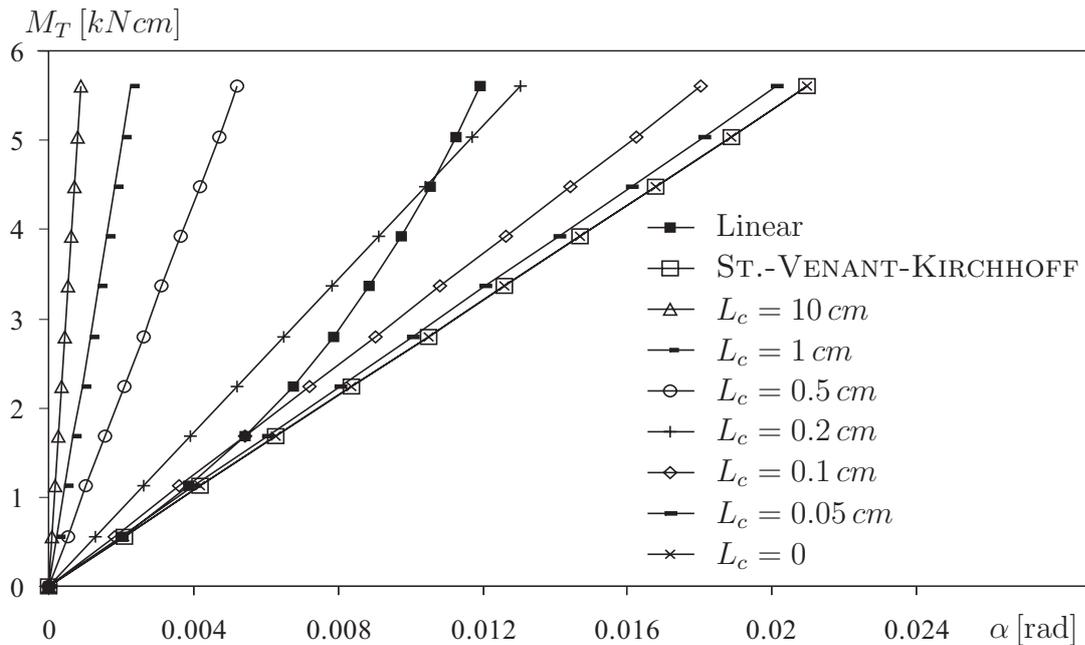
**Abbildung 6.34:** Moment-Verdrehungsdiagramm mit der Drehkomponente  $\alpha$  aus  $\mathbf{R} = \text{polar}[\mathbf{F}]$  um die Stablängsachse für  $L_c = 1 \text{ cm} = \text{konst.}$  und Variation von  $\mu_c$ .

Die folgenden beiden Diagramme lassen u.a. erkennen, wie die beiden COSSERAT-Felder  $\hat{\mathbf{R}}$  und  $\bar{\mathbf{R}}$  zusammen agieren. Für die Wahl eines großen Kopplungsmoduls  $\mu_c$  erzwingt das Modell Gleichheit zwischen  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  und  $\bar{\mathbf{R}}$ , was zu  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbb{1}$  führt und einem verschwindenden Drehvektor aus  $\hat{\mathbf{R}}$  am Stabende, wie Abb. 6.35 zeigt. Für  $\mu_c = 0$  setzt sich die Drehung  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  am Stabende zu zwei Hälften aus  $\hat{\mathbf{R}}$  und  $\bar{\mathbf{R}}$  zusammen.



**Abbildung 6.35:** Moment-Verdrehungsdiagramm mit der Drehkomponente  $\hat{\alpha}$  (links) und  $\bar{\alpha}$  (rechts) um die Stablängsachse für  $L_c = 1 \text{ cm} = \text{konst.}$  und Variation von  $\mu_c$ .

In Abb. 6.36 wird die interne Länge  $L_c$  bei gleichzeitig konstantem  $\mu_c = \mu$  variiert. Für  $L_c = 1 \text{ cm}$  wiederholt sich das Ergebnis aus Abb. 6.34.

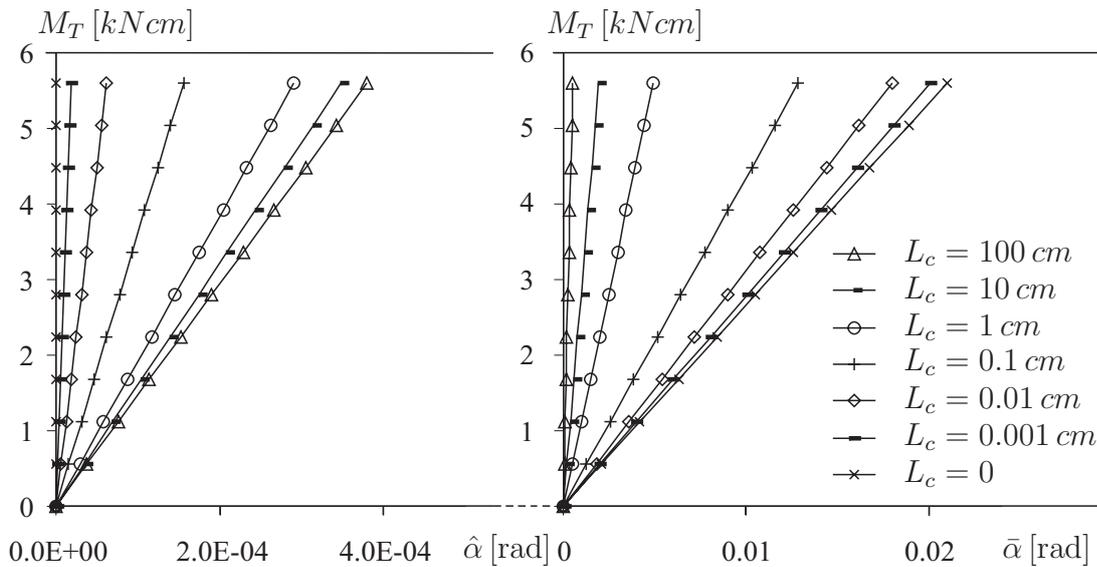


**Abbildung 6.36:** Moment-Verdrehungsdiagramm mit der Drehkomponente  $\alpha$  um die Stablängsachse für  $\mu_c = \mu = \text{konst.}$  und Variation von  $L_c$ .

Die makroskopische Stablängsdrehung  $\alpha$  in Abb. 6.36 nimmt für zunehmendes  $L_c$  ab. Damit kann das Modell wiederum steiferes Verhalten als das klassische Modell aufweisen und ist bereits zu Beginn der Deformation in der Anfangstangente zu erkennen.

Dieser Versteifungseffekt resultiert wiederum aus der direkten Kopplung durch  $\mu_c = \mu$  zwischen  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  und  $\bar{\mathbf{R}}$ . Da die Rotationen am Rand frei sind, hat dieser Versteifungseffekt nichts zu tun mit einem erwartbaren Grenzschichteffekt. Der Versteifungseffekt verschwindet vollständig für  $L_c = 0$ , was dem Ergebnis in Abb. 6.34 für  $\mu_c = 0$  gleicht, jedoch andere Hintergründe hat.

Im diesem Fall agiert  $\hat{\mathbf{R}}$  nicht mehr und  $\bar{\mathbf{R}}$  übernimmt sowohl die Starrkörperrotation als auch die Gradienten in der Stablängsverdrehung. Für  $L_c = 0$  ergeben Gradienten in  $\bar{\mathbf{R}}$  schließlich keine Krümmungsenergie.



**Abbildung 6.37:** Moment-Verdrehungsdiagramm mit der Drehkomponente  $\hat{\alpha}$  (links) und  $\bar{\alpha}$  (rechts) um die Stablängsachse für  $\mu_c = \mu = \text{konst.}$  und Variation von  $L_c$ .

Abb. 6.37 zeigt, dass für  $L_c = 0$  das Feld  $\hat{\mathbf{R}}$  nicht mehr agiert und  $\bar{\mathbf{R}}$  sowohl die Starrkörperrotation als auch die Gradienten der Stablängsdrehung übernimmt.

Für die Wahl  $\mu_c = 0$  und Variation der internen Länge  $L_c$  ist weiches Materialverhalten in Abb. 6.38 zu beobachten.

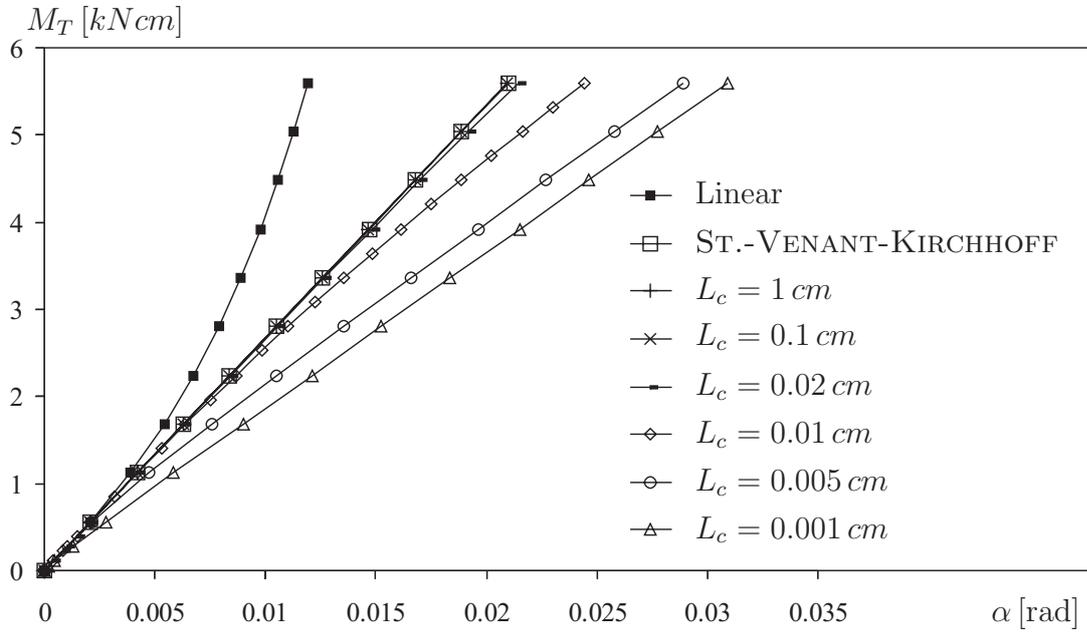


Abbildung 6.38: Moment-Verdrehungsdiagramm mit der Drehkomponente  $\alpha$  um die Stablängsachse für  $\mu_c = 0 = \text{konst.}$  und Variation von  $L_c$ .

Das weichere Materialverhalten ist durch die zusätzliche Kinematik im COSSERAT-Modell begründet. Im folgenden Kapitel wird eine physikalische Ursache für die zusätzliche Kinematik abgeleitet. Es wird hier vorweggenommen, dass die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C} = \text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}}$  in Abb. 6.39 die Erhöhung der Versetzungsdichte aus NYEScher Krümmung darstellt.<sup>47</sup> Diese Erhöhung ist an die Wahl der COSSERAT-Parameter  $\mu_c$  und  $L_c$  gebunden.

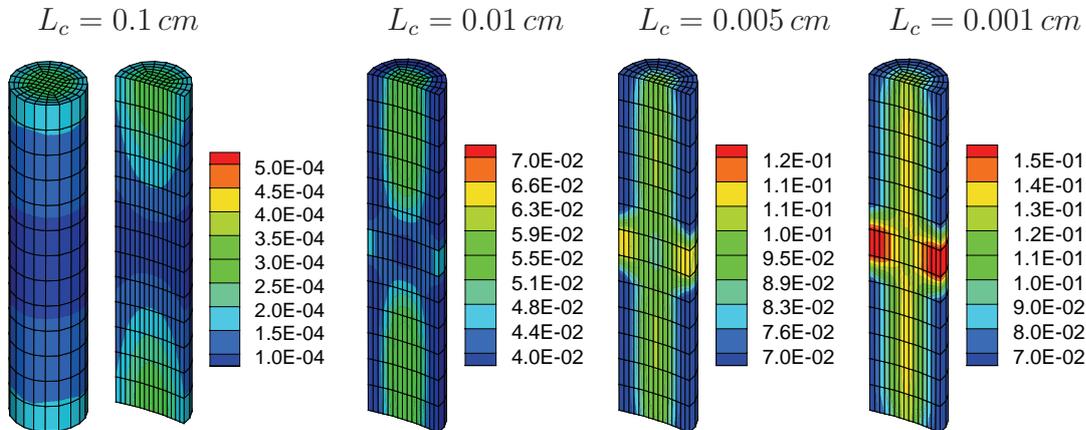


Abbildung 6.39: Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  für  $\mu_c = 0$  und unterschiedliche  $L_c$ .

<sup>47</sup>Dies geht jedoch mit gewissen Forderungen an das Modell einher, vgl. Kap. 7.8.

Im Fall  $\mu_c = 0$  und großer interner Länge  $L_c$  verschwindet sowohl die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  als auch der steifigkeitsmindernde Effekt in Abb. 6.38. Damit reguliert dieser Parameter eine Erscheinung, welche bei einem Abgleich mit ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material die Forderung  $L_c \rightarrow \infty$  stellt.

Im Fall  $\mu_c > 0$  verhält sich das COSSERAT-Modell im Vergleich zu ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material steifer, es sei denn die interne Länge verschwindet  $L_c \rightarrow 0$ , vgl. Abb. 6.36.

Soll der Schubmodul  $G$  im nichtlinearen COSSERAT-Modell unabhängig von der Bauteilgröße sein, was sich relativ zur internen Länge  $L_c$  skaliert, zeigen die numerischen Resultate, dass dann nur  $\mu_c = 0$  in Frage kommt. Wie aus Abb. 6.36 hervorgeht, tendiert für  $L_c \rightarrow \infty$  der Schubmodul  $G \rightarrow \infty$ , wodurch die Bezeichnung "Materialkonstante" nicht mehr gerechtfertigt ist.

**Man erkennt, dass der Parameter  $\mu_c$  das prinzipielle Verhalten des COSSERAT-Modells beeinflusst und damit über die Rolle eines Materialparameters hinausgeht. Es ist eher zutreffend, im Zusammenhang mit dem Kopplungsmodul  $\mu_c$  von einem Modellparameter zu sprechen.**

## 7 Versetzungs- und Cosserat-Theorie

Die Stellung der COSSERAT-Theorie zu einer Versetzungstheorie soll in diesem Kapitel untersucht werden. Dies motiviert sich zum einen aus dem formalen Übergang der COSSERAT-Theorie zu einer gradientenplastischen Theorie in Kap. 7.1. Zum anderen sind bereits Arbeiten zu diesem Thema bekannt, welche in Kap. 7.2 z.T. erörtert werden.

Danach folgen grundlegende Begriffe und Eigenschaften von Kristallen und Versetzungen in Kap. 7.3 und Kap. 7.4. Bestehende Erkenntnisse sowie neue Ideen versuchen in Kap. 7.4 bis Kap. 7.6 eine Brücke zwischen Vorgängen im Mikrobereich und einer makroskopischen Kontinuumstheorie mit Versetzungen zu schlagen. In Kap. 7.7 gelingt es, die Kinematik der COSSERAT-Theorie mit Teilen einer Kontinuumstheorie von Versetzungen zu verknüpfen und zu diskutieren. Numerische Beispiele in Kap. 8 setzen u.a. die Überlegungen fort.

### 7.1 Cosserat-Theorie und gradientenplastisches Modell

Arbeiten zu Plastizitätsmodellen mit höheren Gradienten sind z.B. von STEINMANN [221], MENZEL & STEINMANN [136], LIEBE et al. [129] und SVENDSEN [223, 224] bekannt.

Die drei Anteile der inneren Energie eines gradientenplastischen Modells seien

$$\overset{\text{int}}{\Pi} = \int_{\mathcal{B}_t} \underbrace{W_e(\tilde{\mathbf{V}}_e)}_{\text{Anteil1}} \, dv + \int_{\mathcal{B}_0} \underbrace{(\mu h^+ \|\tilde{\mathbf{F}}_p^T \tilde{\mathbf{F}}_p - \mathbb{1}\|^2)}_{\text{Anteil2}} + \underbrace{\mu L_c^2 \|\tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \text{Curl}_{\#}[\tilde{\mathbf{F}}_p]\|^2}_{\text{Anteil3}} \, dV, \quad (7.1)$$

wobei eine multiplikative Zerlegung (siehe z.B. KONDO [105], LEE [124], KRÖNER [108]) des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  gemäß

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{V}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p, \quad \mathbf{F} : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad \tilde{\mathbf{V}}_e : T\mathcal{B}_t \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad \tilde{\mathbf{F}}_p : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad (7.2)$$

in den angegebenen Tangentialräumen angesetzt sei.<sup>48</sup> Es wird darauf hingewiesen, dass dies vom Ansatz  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ ,  $\mathbf{F}_p : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_0$ , welcher in der Kristallplastizität Verwendung findet, abweicht.

Die innere Energiedichte  $W_e$  basiert auf der elastischen Verzerrung  $\tilde{\mathbf{V}}_e : T\mathcal{B}_t \rightarrow T\mathcal{B}_t$ , welche nur zwischen Tangentialräumen der Momentankonfiguration abbildet. Dadurch ist überhaupt erst die Zerlegung in symmetrische und

<sup>48</sup>Analog zur links Polarzerlegung  $\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V} : T\mathcal{B}_t \rightarrow T\mathcal{B}_t \in \text{PSym}(3)$ ,  $\mathbf{R} : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t \in \text{SO}(3)$ .

antisymmetrische Anteile möglich, wodurch der isotrope Ansatz

$$W_e(\tilde{\mathbf{V}}_e) = \mu \|\text{sym}[\tilde{\mathbf{V}}_e - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\tilde{\mathbf{V}}_e - \mathbb{1}]\|^2 + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\tilde{\mathbf{V}}_e] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\tilde{\mathbf{V}}_e]} - 1 \right)^2 \right) \quad (7.3)$$

formal dem Ansatz aus Gl. 4.49 der COSSERAT-Theorie entsprechen kann.

Anteil 2 in Gl. 7.1 beschreibt die Verfestigung des Materials bei plastischen Vorgängen und wird durch  $h^+$  als Verfestigungsparameter gewichtet. Anteil 3 bringt eine besondere Form der Gradienten durch  $\text{Curl}_\#[\tilde{\mathbf{F}}_p]$  in Ansatz und motiviert die Bezeichnung des Modells. Die interne Länge  $L_c$  übernimmt hierbei die Rolle eines Regularisierungsparameters.

Unterliegt die Deformation einer Starrkörperdrehung  $\mathbf{Q}$  gemäß

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{V}}_e\tilde{\mathbf{F}}_p = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{V}}_e\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_p, \quad (7.4)$$

folgt aus der Erweiterung in Gl. 7.4, dass sich für  $\tilde{\mathbf{F}}_p \rightarrow \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_p$  das Verzerrungsmaß  $\tilde{\mathbf{V}}_e \rightarrow \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{V}}_e\mathbf{Q}^T$  objektiv verhält.

Die Verzerrungsmaße in Anteil 2 und Anteil 3 der Gl. 7.1 zeigen sich wegen

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^T \tilde{\mathbf{F}}_p \rightarrow (\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_p)^T (\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_p) = \tilde{\mathbf{F}}_p^T \tilde{\mathbf{F}}_p \quad (7.5)$$

und

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \text{Curl}_\#[\mathbf{F}_p] \rightarrow (\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{F}}_p)^{-1} \text{Curl}_\#[\mathbf{Q}\mathbf{F}_p] = \tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \text{Curl}_\#[\mathbf{F}_p] = \tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \text{Curl}_\#[\mathbf{F}_p] \quad (7.6)$$

invariant gegen Starrkörperdrehung.

Variation der inneren Energie in Gl. 7.1 bezüglich  $\tilde{\mathbf{F}}_p$  führt auf die thermodynamisch konjugierten Spannungen  $\Sigma = \partial_{\tilde{\mathbf{F}}_p}^{\text{int}} \Pi$ . Zusammen mit einer nichtlokalen, elasto-plastischen Fließregel, basierend auf der LIE-Ableitung von  $\tilde{\mathbf{F}}_p$  in der Form

$$\tilde{\mathbf{F}}_p^{-1} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{F}}_p = \mathfrak{f}(\Sigma) \quad (7.7)$$

und einer Fließfunktion

$$\mathfrak{f} : \mathbb{M}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{M}^{3 \times 3}, \quad (7.8)$$

wird das gradientenplastische Modell 7.1 geschlossen [161, 176, 169].

Nimmt der Verfestigungsparameter  $h^+$  sehr große Werte an (Grenzfall  $h^+ \rightarrow \infty$ ), so muss bei endlicher Energie in 7.1  $\tilde{\mathbf{F}}_p \in \text{SO}(3)$  liegen und kann im Folgenden als  $\tilde{\mathbf{F}}_p = \tilde{\mathbf{R}}_p \in \text{SO}(3)$  erkannt werden. Damit geht Gl. 7.2 über in

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{V}}_e \tilde{\mathbf{R}}_p, \quad \mathbf{F} : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad \tilde{\mathbf{V}}_e : T\mathcal{B}_t \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad \tilde{\mathbf{R}}_p : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t. \quad (7.9)$$

Der weitere Übergang zur COSSERAT-Theorie findet dadurch statt, dass in Gl. 7.9 die Linksstreckung  $\tilde{\mathbf{V}}_e \notin \text{PSym}$  in eine Rechtsstreckung  $\tilde{\mathbf{U}}_e \notin \text{PSym}$  gemäß

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{R}}_p \tilde{\mathbf{U}}_e, \quad \mathbf{F} : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t, \quad \tilde{\mathbf{U}}_e : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_0, \quad \tilde{\mathbf{R}}_p : T\mathcal{B}_0 \rightarrow T\mathcal{B}_t \quad (7.10)$$

überführt wird. Der Übergang ist eindeutig und es gilt

$$\tilde{\mathbf{U}}_e = \tilde{\mathbf{R}}_p^T \tilde{\mathbf{V}}_e \tilde{\mathbf{R}}_p. \quad (7.11)$$

Nimmt man an, dass sich die Evolution für  $\tilde{\mathbf{F}}_p$  asymptotisch einem stationären Punkt genähert hat, folgt  $\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{F}}_p = 0$ . Dann geht Gl. 7.7 über in

$$\mathbf{f}(\Sigma) = 0 \quad . \quad (7.12)$$

Falls  $\mathbf{f}(\Sigma) = 0 \Rightarrow \Sigma = 0$ , dann impliziert Gl. 7.12  $\Sigma = 0$ . Nähere Betrachtung zeigt, dass  $\Sigma = 0$  in diesem Fall nichts anderes als die Momentenbilanz des COSSERAT-Modells darstellt. Weiterhin verschwindet der Anteil 2 in Gl. 7.1 und Anteil 3 geht über in die COSSERAT-Krümmungsenergie.

Da die COSSERAT-Theorie mit  $\bar{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}_e$  und  $\bar{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}_p$  allen Anforderungen obiger Theorie genügt (Abbildung der Tangentialräume, Zugehörigkeit der Gruppen), den entwickelten Spezialfall der inneren Energie exakt repräsentiert und die Randbedingungen entsprechend angepasst werden können, liegt die Identifikation zum obigen gradientenplastischen Modell vor.

Dies motiviert eine detailliertere Betrachtung zur Physik von Versetzungen und deren Relevanz zum vorliegenden COSSERAT-Modell. Im nachfolgenden Abschnitt werden u.a. nochmals Literaturstellen zu diesem Thema erörtert.

## 7.2 Versetzungen in kristallinem Material

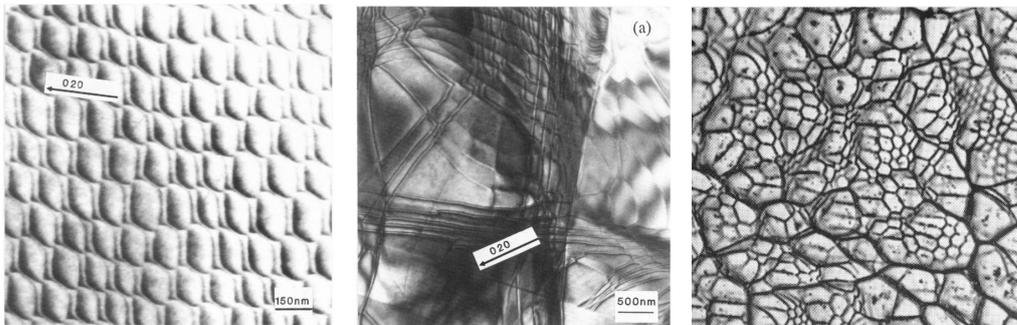
Die Entdeckung von Versetzungen geht nach NABARRO [151] auf eine Reihe von Wissenschaftlern zurück. Die Arbeiten von CLAUSIUS<sup>49</sup>, BURTON<sup>50</sup>, KÁRMÁN

<sup>49</sup>Cf. R. Clausius, *Annln Phys. Chem.* 76 46 (1849).

<sup>50</sup>C. V. Burton, *Phil. Mag.* [5] 33 191 (1892).

& FÖPPL<sup>51</sup>, MASING & POLANYI<sup>52</sup>, PRANDTL<sup>53</sup>, OROWAN<sup>54</sup>, TAYLOR<sup>55</sup>, BURGERS<sup>56</sup> sind u.a. zu nennen. Den englischen Ausdruck für Versetzungen prägte LOVE<sup>57</sup>, in einer Abhandlung zur Elastizität, welcher hier mit: "I have ventured to call them dislocations" zitiert sei.

HEDGES & MITCHELL<sup>58</sup> gelang es zuerst in Silber-Bromid Kristallen durch Anlagerung von Silberatomen einzelne Versetzungslinien zu beobachten. Die Gitterverzerrungen um eine Versetzungslinie können mit einer Reihe von Methoden sichtbar gemacht werden.<sup>59</sup> Diese eignen sich grundsätzlich auch zur Bestimmung der skalaren Versetzungsdichte  $\Lambda_d$ .



**Abbildung 7.1:** TEM Bild eines regulären (links) und eines irregulären (mittig) Versetzungsnetzwerks aus YANG et al. [240]. Rechts: Hexagonales Versetzungsnetzwerk (dünne Linien) zwischen Kleinwinkelkorngrenzen (starke Linien) in einer Silber-Chlorid Probe aus JONES & MITCHELL [96].

Auch Wissenschaftler aus völlig anderen Gebieten verfassten Arbeiten zur Versetzungstheorie. Als Beispiel seien interdisziplinäre Arbeiten von THOMPSON<sup>60</sup>, GRAY<sup>61</sup> und RUDBERG<sup>62</sup> (vgl. Abb. 7.2) genannt.

<sup>51</sup>Th. v. Kármán und L. Föppl, *Enzykl. math. Wiss.* 4 [31] 695 (1913).

<sup>52</sup>G. Masing und M. Polanyi, *Ergebn. exakt. Naturw.* 2 177 (1923).

<sup>53</sup>L. Prandtl, *Z. angew. Math. Mech.* 8 85 (1928).

<sup>54</sup>E. Orowan, *Z. Phys.* 89 634 (1934).

<sup>55</sup>G.I. Taylor, *Proc. R. Soc.* A145 362 (1934).

<sup>56</sup>J. M. Burgers, *Proc. K. ned. Akad. Wet.* 42 293 (1939).

<sup>57</sup>A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 3rd ed., Cambridge University Press, (1920).

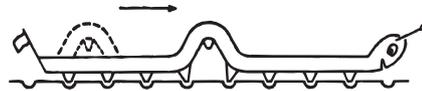
<sup>58</sup>J.M. Hedges und J.W. Mitchell, *Phil.Mag.* 44, 223 (1953).

<sup>59</sup>Z.B. Ätzen, IR-Mikroskopie, Transmissionselektronenmikroskopie (TEM), Feldionenmikroskopie.

<sup>60</sup>D'Arcy W. Thompson, *Growth and Form*, Cambridge University Press (1942).

<sup>61</sup>J. Gray, *How Animals Move*, Cambridge University Press (1953).

<sup>62</sup>E. G. Rudberg, *J. Inst. Metals* 88 97 (1959-60).



**Abbildung 7.2:** Durch das aufeinanderfolgende Anheben immer nur eines Beines kann sich eine Raupe fortbewegen. Das angehobene Bein versinnbildlicht eine Versetzung. Aus RUDBERG [193].

Fast alle Aspekte der Plastizität gründen sich auf das Wesen von Versetzungen, siehe z.B. DIETER [45], KRÖNER [109], GLEITER [75]. Weiterhin basieren nach KRÖNER [112] sämtliche Eigenspannungen eines Körpers auf inneren, irreversiblen Materialumlagerungen, wie es z.B. durch Versetzungen geschieht. So bringt KRÖNER Eigenspannungszustände mit konkreten Versetzungsverteilungen in Verbindung.

ORTIZ & REPETTO formulieren in [183] eine Kontinuumstheorie für duktile Einkristalle, wobei geometrische Inkompatibilität bei plastischer Deformation auftritt und durch Drehung der inneren Struktur ausgeglichen wird.<sup>63</sup> Dieser Ausgleich ist in der Literatur durch geometrisch notwendige Versetzungen<sup>64</sup> erklärt [181], [34], [211], [117], [92], [75], [66].

Zur Stellung der COSSERAT-Theorie im Hinblick auf Versetzungen sind aus den sechziger Jahren u.a. Veröffentlichungen von GÜNTHER [88], SCHAEFER [204] und KRÖNER [115] bekannt, welche jedoch z.T. kontrovers diskutiert wurden SIMMONS et al. [213]. KRÖNER [116] dokumentierte 1968 ein IUTAM-Symposium, welches die Kontinuumstheorie von Versetzungen und die COSSERAT-Theorie in Kontext stellt.

Es ist hier jedoch von entscheidendem Interesse, dass KRÖNER in [110] die Erscheinung von antisymmetrischen Spannungen aufgrund von Versetzungen ausschließt, zugleich aber einen nichtsymmetrischen Verzerrungstensor für die Behandlung von Versetzungseffekten fordert.<sup>65</sup>

<sup>63</sup> Zitat aus ORTIZ & REPETTO [183]: "A strategy for minimizing the energy of the crystal is, in essence, to attempt to construct compatible deformations satisfying the following requirements: the plastic deformation field consists locally of single slip; the elastic deformation consists locally of a lattice rotation, which ensures the absence of "long-range stresses"; and the average deformation matches a prescribed macroscopic value."

<sup>64</sup> Geometric Necessary Dislocations, kurz GND

<sup>65</sup> Zitat aus KRÖNER [110]: "Es wird gezeigt, dass zur vollständigen Beschreibung des Zustands eines Körpers, der durch Versetzungen beansprucht wird, nichtsymmetrische Verzerrungstensoren  $\varepsilon$  aber nur symmetrische Spannungstensoren  $\sigma$  herangezogen werden müssen. Der antisymmetrische Teil von  $\varepsilon$  beschreibt Gitterrotationen bzw. -krümmungen, wie sie z.B. bei plastisch verformten Medien röntgenographisch nachgewiesen werden."

KRÖNERS Arbeiten denken die Verwendung einer COSSERAT-Theorie an, doch entstammen sie einer Zeit, in welcher lineare COSSERAT-Modelle diskutiert wurden und damit die Wahl des Kopplungsmoduls  $\mu_c = 0$  nicht möglich ist, wie in Kap. 4.5 vorgeführt.

Im Fall  $\mu_c > 0$  führt das lineare und nichtlineare COSSERAT-Modell jedoch i. allg. zu ausgeprägten antisymmetrischen Spannungen  $\sigma$ . Da im vorliegenden nichtlinearen COSSERAT-Modell dieser Konflikt durch die Wahl von  $\mu_c = 0$  beseitigt werden kann, erscheint es lohnenswert, den Zusammenhang zwischen Versetzungstheorie und COSSERAT-Theorie erneut zu diskutieren.

### 7.3 Definition, Entstehung und Auftreten von Kristallen

Kristalle sind anisotrope, homogene Körper, welche aus einer periodisch angeordneten Struktureinheit bestehen. Die Struktureinheit bezeichnet man als Einheitszelle und deren Anordnung als Kristallgitter, wodurch eine innere Ordnung im Kristall entsteht. Liegt ein Festkörper ohne innere Ordnung vor, wird dieser als amorph bzw. als Glas bezeichnet.

Kristalline Materialien können in Polykristalle und Monokristalle (Einkristalle) klassifiziert werden. Ein Polykristall besteht aus vielen kleinen Kristallen (Kristallite), welche durch Korngrenzen getrennt sind. Doch selbst aufwändig gezüchtete Einkristalle besitzen Gitterfehler wie z.B. Versetzungen.



**Abbildung 7.3:** Links: Aluminiumkristallite. Mittig: Schneeflocke mit Kristallisationskeim im Zentrum. Rechts: Monokristall (Pyromorphit) mit kleinem Zwillings.

Sinkt die Temperatur einer Schmelze etwas unter den Schmelzpunkt, nimmt die thermische Bewegung einzelner Atome einen so geringen Wert an, dass gegenseitige Bindungen durch thermische Schwingung nicht mehr aufgebrochen werden. Kühlt die Schmelze genügend langsam aus, kommt es zur Bildung eines einheitlichen Kristallgitters, welches durch Fernordnung geprägt ist. Man bezeichnet diesen Vorgang als Kristallisation.

Sinkt die Temperatur der Schmelze so schnell, dass sich die Atome nicht periodisch ordnen können, so entsteht die amorphe Form, welche eine geringere

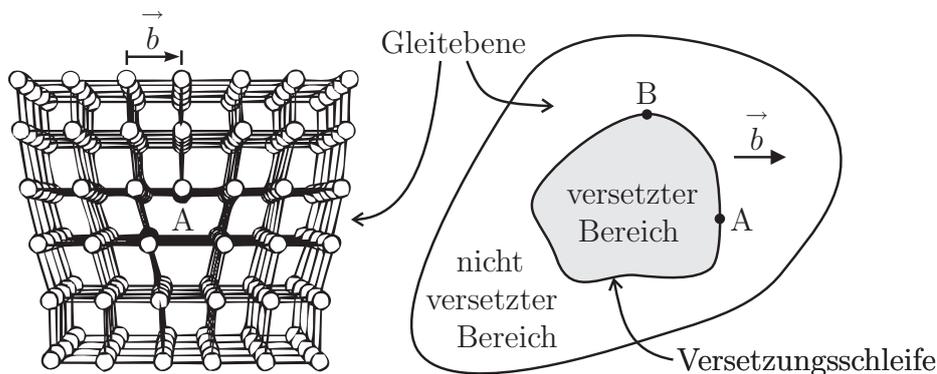
Dichte als ihre kristallinen Gegenstücke hat. Das einheitliche Gitter hat eine kleinere freie Enthalpie als das amorphe Glas, welches lediglich über eine Nahordnung verfügt.

Ausgangspunkt für die Kristallbildung ist ein Kristallisationskeim, welcher bei sinkender Temperatur wächst. Existieren viele solcher Kristallkeime oder setzt die Kristallisation an mehreren Stellen gleichzeitig ein, so entsteht ein Polykristall. In vielen Fällen kommt es im Zuge der Kristallisation zu einem verwachsen zweier Kristalle gleicher Struktur und Zusammensetzung, welche man in Folge als Kristallzwilling bezeichnet.

Kristalline Materialien sind im Bauwesen überall zu finden. Metalle erstarren im Regelfall kristallin was auch sämtliche Baustahlarten betrifft. Zement und damit auch die Matrix in Beton bildet beim Aushärten Kristallite. Natursteine wie z.B. Granit sind ebenfalls kristallin.

## 7.4 Versetzungen auf Mikroebene

Versetzungen stellen eindimensionale Gitterfehler im Kristall dar. Im Gegensatz zu Punktfehlern (Leerstellen, Zwischengitteratome, Substitutionsatome), handelt es sich bei Versetzungen um linienförmige Imperfektionen. Diese sind durch Fehlen einer ganzen Linie von Atomen vorstellbar.



**Abbildung 7.4:** Links: Gittermodell mit Stufenversetzung im Punkt A. Rechts: Ansicht auf die Gleitebene. Die Versetzungsschleife verläuft im Punkt A senkrecht zum BURGERSchen Vektor  $\vec{b}$ .

Die Versetzungslinie ist von einem Gebiet mit verzerrtem Gitter umgeben. Richtung und Größe der Verzerrung werden mathematisch durch den BURGERSchen

Vektor  $\vec{b}$  erfasst, welcher sich entlang einer Versetzungslinie in Richtung und Betrag nicht ändert (z.B. KRÖNER [111], COTTRELL [34], NABARRO [151]). Im Fall der Stufenversetzung ist  $\vec{b}$  in Abb. 7.4 dargestellt.

Stehen BURGERScher Vektor  $\vec{b}$  und Versetzungslinie senkrecht aufeinander, wie in Punkt A der Abb. 7.4, handelt es sich um eine reine Stufenversetzung. Liegen BURGERScher Vektor und Versetzungslinie parallel, wie in Punkt B der Abb. 7.4, handelt es sich um eine reine Schraubenversetzung. Es sind auch beliebige Mischformen zwischen diesen Grundtypen möglich.

Die Versetzungslinien von Stufen- und Schraubenversetzungen können nicht im Medium enden, sondern bilden geschlossene Kurven oder ein Netzwerk wie in Abb. 7.1 (rechts).

Das Verzerrungsfeld in der Umgebung einer Versetzung erzeugt ein Spannungsfeld, was natürlich mit Energie verbunden ist. Die Energie für ein Stück Versetzungslinie variiert grundsätzlich mit der Orientierung der Versetzung im Kristall. In isotropem Material kann man die Versetzungsenergie jedoch nahezu konstant ansehen und als erste Näherung mit einem Stück eindimensionaler Seifenhaut der Vorspannung  $T$  identifizieren [34], [151], [117]. Die Vorspannung  $T$  der Versetzungslinie wird näherungsweise durch eine Funktion des gemittelten Schubmoduls  $\mu$  und des BURGERSchen Vektors  $\vec{b}$  gemäß

$$T = C_1 \mu \|\vec{b}\|^2 \quad (7.13)$$

angegeben [34]. Die Konstante  $C_1$  liegt im Bereich 0.3 bis 0.5. Im Folgenden wird  $C_1 = 0.5$  verwendet. Das Spannungsfeld um eine Versetzungslinie bedeutet zugleich, dass unter der Einwirkung eines äußeren Spannungsfeldes ein energetischer Gradient für die Versetzung entsteht. Dies kann man als Kraftwirkung auf die Versetzungslinie interpretieren. Nach NOWICK [180] steht die Kraftwirkung  $q$  senkrecht zur Versetzungslinie und ihr Betrag lautet

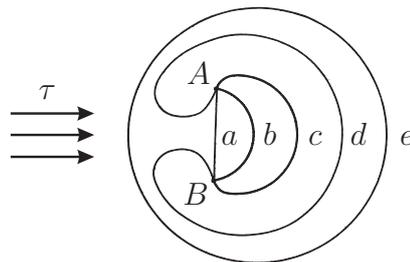
$$q = \tau \|\vec{b}\| \quad , \quad (7.14)$$

wobei  $\tau$  die Schubspannung in Gleitebene und Gleitrichtung ist. Da  $\|\vec{b}\|$  längs der Versetzungslinie konstant ist, wirkt  $q$  wie eine konstante Streckenlast. Die Antwort der Versetzungslinie auf eine Kraft ist eine Bewegung, deren Kinematik durch die Kristallstruktur bestimmt ist. Es wird prinzipiell in Klettern und Gleiten der Versetzungslinie unterschieden.

Klettern ist eine Kinematik senkrecht zur Gleitebene, was vor allem mit Störungen im Kristallgitter und hohen Temperaturen als Aktivierungsenergie einhergeht. Hier sei zunächst nur das Gleiten, eine Kinematik parallel zur Gleitebene näher behandelt. Kristallebenen zwischen Atomlagen mit dichtester Packung und

großem Schichtabstand bilden Gleitebenen. Durchquert die Ausrichtung der Versetzung solche Lagen kommt es zu Ausklinkungen (jogs). Weiterhin bevorzugt die Versetzung in einer dichtest gepackten Kristallebene auch die dichtest gepackte Richtung (PEIERL valleys), was i. allg. zu periodischen Knicken (kinks) führt. Diese Effekte sind nicht von vorrangiger Bedeutung für diese Arbeit und werden im Folgenden zurückgestellt.

Plastische Vorgänge setzen bei genauerer Betrachtung nicht erst spontan beim Erreichen einer Fließspannung ein. Es wird ein Potential im Material aufgebaut, welches mit derselben Kinematik<sup>66</sup> wie das eigentliche Fließen einher geht. Ein anerkanntes Modell von COTTRELL [34] und KRÖNER [109] basiert auf dem **zunächst reversiblen Ausbeulen<sup>67</sup> von Versetzungslinien** in der Gleitebene (Abb. 7.6), welches den Beginn des FRANK-READ-Mechanismus (Abb. 7.5) darstellt.

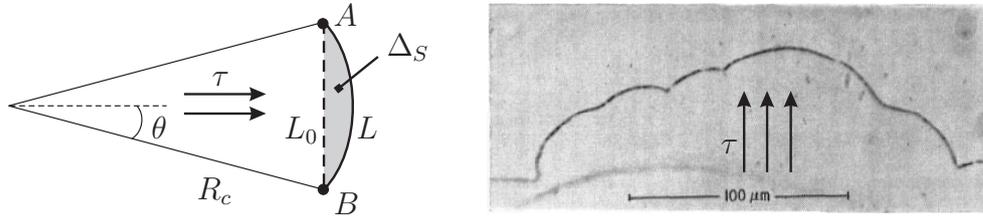


**Abbildung 7.5:** FRANK-READ-Mechanismus zur Beschreibung des Übergangs vom Ausbeulen eines Versetzungssegments hin zum irreversiblen Drift. Linie a zwischen Knoten A und Knoten B ist ein einzelnes Versetzungssegment, welches sich unter anwachsender Belastung zu den Kurven b,c,d und e entwickelt. Während sich die Kurven b,c und d bei Entlastung zur Ausgangslinie a zurückbilden, hat sich Kurve e bereits separiert. Da Kurve e bei Entlastung nicht zu Kurve a zurückkehrt, handelt es sich um einen irreversiblen Prozess.

In Abb. 7.6 ist eine Versetzungslinie durch Verankerungen in Punkt A und B am Gleiten behindert und beult deshalb zunächst in einem Segment, ähnlich einer gespannten Saite, aus. Fremdatome, andere Versetzungen oder Korn- und Phasengrenzen stellen Verankerungen dar. Die plastische Verformbarkeit nimmt daher mit höherer Anzahl von Fremdatomen, höherer Versetzungsdichte und kleinerem Korndurchmesser ab.

<sup>66</sup>Wandern von Versetzungen

<sup>67</sup>KRÖNER verwendet den Begriff des Ausbeulens für Versetzungslinien, was hier übernommen wird, jedoch nicht in Bezug zum Ausbeulen von mechanischen Strukturen zu bringen ist.



**Abbildung 7.6:** Links: Ein Versetzungssegment der Länge  $L_0$  (gestrichelte Linie) ist an den Punkten  $A$  und  $B$  verankert. Unter Schubbeanspruchung  $\tau$  in der Gleitebene beult die Versetzung näherungsweise zu einem Kreisbogen mit dem Radius  $R_c$  aus. Rechts: Das TEM Bild zeigt das Ausbeulen einer Versetzungslinie in einzelnen Segmenten (aus CHILDS und SLIFKIN [28]).

Für geringe Schubspannung  $\tau$  gibt z.B. NOWICK [180] den Krümmungsradius beim Ausbeulen einer Versetzung durch

$$R_c = T/(\tau \|\vec{b}\|) = \mu \|\vec{b}\|/(2\tau) \quad (7.15)$$

mit dem Schubmodul  $\mu$  an. Die Versetzungslinie  $A - B$  in Abb. 7.6 überstreicht beim Ausbeulen die Fläche

$$\Delta_s = (2/3) R_c^2 \theta^3 \simeq (2/3) R_c^2 (L_0/(2R_c))^3 = L_0^3/(12R_c) \quad . \quad (7.16)$$

Mit dem Krümmungsradius aus Gl. 7.15 folgt für die Näherung in Gl. 7.16

$$\Delta_s \simeq (L_0^3 \tau)/(6\mu \|\vec{b}\|) \quad . \quad (7.17)$$

Wird ein quadratischer Probewürfel mit Einheitsvolumen  $V$  von einer Stufenversetzung  $\vec{b}$  vollständig durchwandert, so erfährt dieser eine Schubverzerrung  $\|\vec{b}\|/V^{1/3}$ . Überstreichen nun  $N$  solcher Stufenversetzungen unter geringer Schubbelastung  $\tau$  lediglich die Fläche  $\Delta_s$  kann eine dazu linear proportionale Schubverzerrung durch

$$\varepsilon_{ae} := \frac{\|\vec{b}\|}{V^{1/3}} \frac{\Delta_s}{V^{2/3}} N = \|\vec{b}\| \Delta_s \frac{N}{V} \simeq \frac{L_0^3 \tau N}{6\mu V} \quad (7.18)$$

definiert werden. Die skalare Versetzungsdichte  $\Lambda_d$  ist die Summe aller  $N$  Versetzungslinienlängen  $L_0$  im Einheitsvolumen  $V$  und durch

$$\Lambda_d = (L_0 N)/V \quad (7.19)$$

gegeben. Somit schreibt sich die Näherung in Gl. 7.18 auch durch

$$\varepsilon_{ae} \simeq (L_0^2 \tau \Lambda_d)/(6\mu) \quad . \quad (7.20)$$

Die Federsteifigkeit  $\tau/\varepsilon_{ae} = (6\mu)/(L_0^2\Lambda_d)$  aus Gl. 7.20 erfasst als reziproker Wert die Kinematik aus Versetzungsausbeulen. Er ist mit dem reziproken Wert der von Versetzungseffekten freien Schubsteifigkeit  $\hat{\mu}$  in Reihe zu schalten

$$1/\mu = 1/\hat{\mu} + \varepsilon_{ae}/\tau \quad . \quad (7.21)$$

Die effektive Schubsteifigkeit  $\mu$  wird bei dieser Reihenschaltung um den Wert

$$\Delta\mu = \mu - \hat{\mu} = -(\varepsilon_{ae}/\tau)\mu\hat{\mu} \quad (7.22)$$

geringer. Unter Verwendung von Gl. 7.18 ergibt sich daraus

$$\Delta\mu/\hat{\mu} = -(1/6)L_0^2\Lambda_d \quad . \quad (7.23)$$

Die Abnahme des Schubmoduls ist in diesem Modell somit nicht mehr vom Betrag des BURGERSchen Vektors  $\vec{b}$  abhängig, sondern nur noch vom Quadrat der Segmentlänge  $L_0$  und der skalaren Versetzungsdichte  $\Lambda_d$ .

GLEITER [75] spricht in diesem Zusammenhang von einem anelastischen Prozeß.<sup>68</sup> Er unterscheidet Anelastizität durch Versetzungsrelaxation, Versetzungsresonanz und Versetzungs-Defektwechselwirkung. Dabei wird die Anelastizität durch Versetzungsrelaxation, wie in Abb. 7.6 dargestellt, als wichtigster Effekt eingestuft. Er basiert auf der Kopplung zwischen Versetzungs- und Kristallgitterenergie.

Anelastizität gemäß Gl. 7.23 ist auch für den Elastizitätsmodul  $E$  zu erwarten, da sich die Längsdeformation im Zugversuch als Kombination aus Scherung und hydrostatischer Deformation zerlegen lässt. Im Fall isotroper Elastizität gilt mit dem Kompressionsmodul  $K$  die Beziehung

$$3/E = 1/\mu + 1/(3K) \quad . \quad (7.24)$$

Da der Kompressionsmodul keine Versetzungseffekte bemerkt<sup>69</sup> lautet die Differenz zwischen dem gemessenen Elastizitätsmodul  $E$  und dem von Versetzungseffekten freien Elastizitätsmodul  $\hat{E}$

$$\Delta E = E - \hat{E} = \frac{3}{1/\mu + 1/K} - \frac{3}{1/\hat{\mu} + 1/K} = (1/\hat{\mu} - 1/\mu) \frac{E\hat{E}}{3} \quad . \quad (7.25)$$

<sup>68</sup> KRÖNER bezeichnet diesen Effekt in [109] als diaelastische Suszeptibilität und weist darauf hin, dass die Größe des Effekts von der Ordnung Prozent ist. Der wahre Schubmodul sei das auf eine Netzwerkdicke Null extrapolierte  $\mu$ .

<sup>69</sup> Die Messung des Kompressionsmoduls findet in einem hydrostatischen Spannungszustand statt, aus dem kein energetischer Gradient für eine Versetzung resultiert.

Unter Verwendung von  $(1/\hat{\mu} - 1/\mu) = -\varepsilon_{ae}/\tau$  aus Gl. 7.21 und nach Division der Gl. 7.25 durch  $\hat{E}$  folgt

$$\Delta E/\hat{E} = -(\varepsilon_{ae} E)/(3\tau) \quad . \quad (7.26)$$

Nutzt man die Beziehung aus Gl. 7.20 lässt sich Gl. 7.26 durch

$$\Delta E/\hat{E} = -(L_0^2 \Lambda_d E)/(18\mu) = L_0^2 \Lambda_d (1 + \nu)/9 \quad (7.27)$$

angeben, wobei auch die bekannte Beziehung  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  eingearbeitet ist. Vergleicht man die relative Abnahme des Schubmoduls aus Gl. 7.23 mit der relativen Abnahme des Elastizitätsmoduls aus Gl. 7.27 durch einen Faktor

$$f = \frac{\Delta\mu/\hat{\mu}}{\Delta E/\Delta\hat{E}} = \frac{3}{2(1+\nu)} \quad , \quad (7.28)$$

so ist dieser nur noch eine Funktion der Querkontraktionszahl  $\nu$ . Im Grenzfall  $\nu = 0$  ist der anelastische Effekt auf den Schubmodul nach Gl. 7.28 um 50 % höher. Im Grenzfall  $\nu = 0.5$  ist der Effekt auf beide Module gleich. Für Stahl mit  $\nu = 0.3$  ergibt sich ein um 15 % höherer Effekt auf den Schubmodul. Dies bedeutet jedoch, dass der Effekt durch einen Vergleich der Elastizitätsmodule aus Zug- und Scherversuchen nur zu 15 % repräsentiert wird.

Daher ist es sinnvoller den Effekt absolut zu messen. NOWICK berichtet in [180] von Beobachtungen in Scherversuchen, welche eine Veränderung des Schubmoduls  $\mu$  durch Versetzungseffekte zwischen 1% und 23% beziffern. Nach Einbringen von Gitterstörungen durch Fremdatome oder durch Bestrahlung haben metallische Proben einen höheren Schubmodul erreicht als ohne diese Maßnahmen. Dies geht mit der Beobachtung einher, dass Gitterstörungen die Segmentlänge  $L_0$  verkürzen und somit nach Gl. 7.23 den Effekt deutlich verringern.<sup>70</sup>

Dem Ausbeulen der Versetzungslinien in Abb. 7.6 steht eine Erhöhung der Versetzungsenergie entgegen. In BRUINSMA et al. [21] ist die Kinematik des Versetzungsausbeulens und die damit verbundene Energie durch ein komplexes Modell behandelt. Diese Arbeit beschränkt sich auf die vereinfachten Betrachtungen ab Gl. 7.15, wobei die Ergebnisse mit denen aus [21] qualitativ vergleichbar sind.

---

<sup>70</sup> Zitat NOWICK [180]: "All of these experiments add up to the rather remarkable fact that if one wishes to measure precisely the shear modulus characteristic of a pure perfect crystal, the very highest purity and well-annealed material should not be used. Rather, to obtain the correct value, one must use slightly impure or irradiated material, in order to eliminate the dislocation contribution."

Im Modell der Abb. 7.6 erfahren die Versetzungslinien eine geometrische Verlängerung  $\Delta L = L - L_0$ , wobei sich die Bogenlänge zu

$$L = 2 R_c \Theta \quad , \quad \Theta = \arcsin[L_0/(2 R_c)] \quad (7.29)$$

berechnet und somit

$$\Delta L = 2 R_c \arcsin[L_0/(2 R_c)] - L_0 \quad (7.30)$$

ergibt. Die Approximation  $\arcsin[x] \approx x$  ist hier nicht sinnvoll und weist auf die höhere Ordnung dieser Verlängerung hin. Der funktionale Zusammenhang in Gl. 7.30 mit dem mikroskopischen Ausbeulradius  $R_c$  soll nun auf die makroskopische Schubverzerrung  $\varepsilon_{ae}$  transformiert werden. Aus Gl. 7.15 mit 7.20 gewinnt man

$$R_c = (\|\vec{b}\| L_0^2 \Lambda_d)/(12 \varepsilon_{ae}) \quad (7.31)$$

und Einsetzen in Gl. 7.30 ergibt

$$\Delta L = \left( \frac{C_1}{\varepsilon_{ae}} \arcsin \left[ \frac{\varepsilon_{ae}}{C_1} \right] - 1 \right) L_0 \quad , \quad C_1 = \frac{\|\vec{b}\| L_0 \Lambda_d}{6} \quad (7.32)$$

Mit der Taylor-Entwicklung  $\arcsin[x] = x + \frac{x^3}{3!} + o(x)$  und Abbruch nach dem zweiten Term nähert man Gl. 7.32 an durch

$$\Delta L \simeq \frac{\varepsilon_{ae}^2 L_0}{6 C_1^2} \quad (7.33)$$

Die verzerrte Umgebung einer Versetzungslinie ändert sich mit Verlängerung dieser Linie näherungsweise nicht, womit nach Gl. 7.13 die Vorspannung  $T$  der Linie konstant bleibt. Die Versetzungsenergie nimmt jedoch mit dem Ausbeulen und der damit verbundenen geometrischen Verlängerung der Linie zu, was unter Verwendung von Gl. 7.33 mit einer volumenspezifischen, anelastischen Energiedichte

$$W_{ae} = \frac{\Delta L T}{V} = \frac{3 \mu}{\Lambda_d^2 L_0 V} \varepsilon_{ae}^2 \quad (7.34)$$

einhergeht. NOWICK [180] gibt für einen reinen Kristallwürfel mit  $V = 1 \text{ cm}^3$  typische Werte  $\Lambda_d \approx 1 \cdot 10^8/\text{cm}^2$  und  $L_0 \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  (ca. 1000 Atomabstände) an. Damit lässt sich  $W_{ae}$  abschätzen zu

$$W_{ae} \approx \frac{\mu}{10^{11}} \varepsilon_{ae}^2 \quad (7.35)$$

Geht man selbst von wesentlich kürzeren Linienlängen  $L_0 \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$  und einer niedrigeren Versetzungsdichte  $\Lambda_d \approx 1 \cdot 10^6/\text{cm}^2$  aus, ist die zu erwartende

Energiedichteerhöhung aus Schubverzerrung  $\varepsilon_{ae}$  im Vergleich zur elastischen Schubverzerrungen  $\varepsilon$  um den Faktor  $10^{-5}$  schwächer. Die Konsequenz daraus wird in Kap. 7.7 zur Diskussion des COSSERAT-Parameters  $\mu_c$  wieder aufgegriffen.

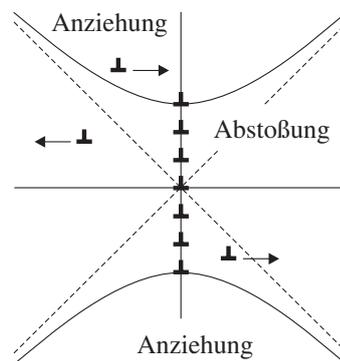
Aus einem mikroskopisch motivierten Modell in Abb. 7.6 sind makroskopische Größen des anelastischen Effekts, nämlich die Verzerrung  $\varepsilon_{ae}$  und die Energiedichte  $W_{ae}$  erarbeitet worden. Weitere Betrachtungen auf Meso- und Makroebene sind jedoch nötig um einen Zusammenhang zur COSSERAT-Theorie zu schaffen.

## 7.5 Kleinwinkelkorngrenzen und Korngrenzen

Die Interaktion von Versetzungen findet über relativ große Distanzen statt und führt zu sogenannten Kleinwinkelkorngrenzen, vgl. Abb. 7.7.

Stufenversetzungen gleichen Vorzeichens, ordnen sich dabei in einer Linie an und bilden Versetzungswände, was in der Literatur als Polygonisation bzw. Bildung von Kleinwinkelkorngrenzen bezeichnet wird.

Eine Kleinwinkelkorngrenze vermittelt zwischen Orientierungsunterschieden benachbarter Kristallite durch die Versetzungswand. Bis zu einem Orientierungsunterschied von ca. 15 Grad können Kleinwinkelkorngrenzen vermitteln und man spricht noch von einem Einkristall. Ansonsten nimmt die Versetzungsstruktur zwischen den Kristalliten komplexe oder ungeordnete Formen an, was als Korngrenze bezeichnet wird, siehe z.B. KRÖNER [111].



**Abbildung 7.7:** Bei der Polygonisation übt eine Versetzungswand auf andere Versetzungen Kräfte über relativ große Distanzen ("long-range") aus. Liegt die Gleitebene der Versetzung über oder unterhalb der beiden hyperbolischen Äste, wird die Versetzung zur Linie der Versetzungswand angezogen, ansonsten abgestoßen. Aus NABARRO [151].

Kleinwinkelkorngrenzen folgen dem Ausbeulen der Versetzungslinien. Dabei

durchwandert die Versetzungswand ein gewisses Gebiet. Das Kristallgitter dieses Gebietes erfährt dadurch eine Veränderung der Orientierung, siehe z.B. (NABARRO [151]). Kleinwinkelkorngrenzen können somit als zusätzliche Kinematik betrachtet werden, welche die Deformation auf Kristallitebene relaxiert.

Es liegt nahe, die Ebene der Kleinwinkelkorngrenzen als Mesoebene zu bezeichnen. Denn es lassen sich einzelne Versetzungen in der Kleinwinkelkorngrenze erkennen, doch setzt sich die Wand über das individuelle Verhalten einzelner Versetzungen hinweg. Der Schritt auf eine makroskopische Beschreibung in Kap. 7.6 sowie der Bezug zur COSSERAT-Theorie in Kap. 7.7 wird auf dieser Erkenntnis basieren.

## 7.6 Eine Kontinuumstheorie für Versetzungen

Dieser Abschnitt stellt KRÖNERS Kontinuumstheorie der Versetzungen [108] leicht modifiziert vor und gibt bildliche Erweiterungen, um den Bezug zur COSSERAT-Theorie anschaulicher zu gestalten.

Die gemittelte Wirkung von Versetzungsbewegungen lässt sich als Verzerrungstensor erfassen, wobei reversible und irreversible Bewegungen zunächst keinen Unterschied darstellen. Dazu führt NYE [181] einen zweistufigen Tensor  $\beta = \alpha_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  zur räumlichen Beschreibung der Versetzungsdichte ein. Dieser erfasst die Anzahl  $N$  von Versetzungslinien (pro Einheitsfläche), welche mit BURGERSchem Vektor  $\vec{b}$  eine Einheitsfläche mit Normale  $\mathbf{r} = r_k \mathbf{e}_k$  durchsetzen. Die Komponenten von  $\beta$  lauten

$$\beta_{jk} = N \vec{b}_j r_k \quad , \quad \left[ \frac{1}{m^2} \right] [m][1] = \left[ \frac{m}{m^2} \right] \quad . \quad (7.36)$$

KRÖNER verwendet Gl. 7.36 als Basis für seine Kontinuumstheorie [108]. Bei der notwendigen Mittelung verwischt sich jedoch der individuelle Charakter einzelner Versetzungslinien. Das Tensorfeld der Versetzungen mißt an jedem Punkt nur noch den Gesamt-BURGERS-Vektor  $db_j$  aller durch ein beliebig gerichtetes, inkrementelles Einheitsflächenelement  $dF_k$  durchlaufenden Versetzungslinien

$$\beta_{jk} = db_j/dF_k \quad , \quad \left[ \frac{m}{m^2} \right] \quad . \quad (7.37)$$

Es wird darauf hingewiesen, dass KRÖNER in seinen Arbeiten die transponierte Darstellung für  $\beta$  verwendet. Trotzdem wurde die in dieser Arbeit übliche Form für Ableitungen beibehalten.

KRÖNER bezeichnet  $\beta$  eine vollkommen orientierte, pauschale Versetzungsdichte. Die Komponenten  $\beta_{jk}$  sind als Versetzungslinien in  $k$ -Richtung zu deuten, deren

BURGERS-Vektor in  $j$ -Richtung zeigt. Für  $j = k$  liegen Schraubenversetzungen, sonst Stufenversetzungen vor.

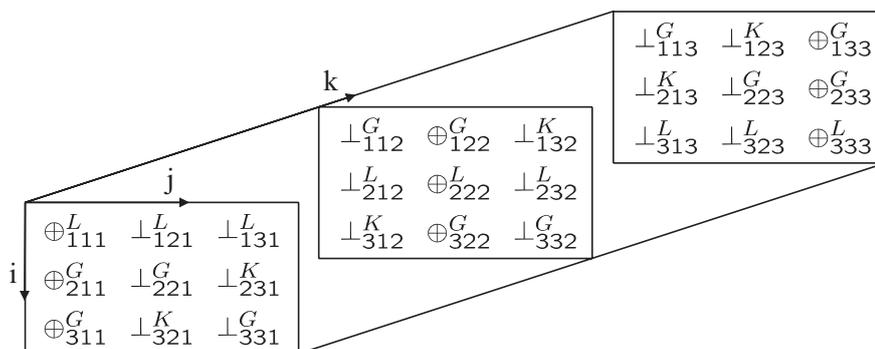
Wie bereits erwähnt, wandern Versetzungen durch ein entsprechendes Kraftfeld und verändern dabei Form und Orientierung von Kristalliten, was nun unter dem Begriff Distorsion zusammengefasst wird.

Durch Kenntnis des Typs, der Anzahl und der Bewegungsrichtung aller Versetzungen lässt sich die Distorsion beschreiben. Da es neun unabhängige Versetzungskomponenten  $\alpha_{jk}$  und drei unabhängige Wanderungsrichtungen  $\vec{w}_i$  gibt, besteht die Distorsion aus 27 möglichen Ursachen.

Die Anzahl gewanderter Versetzungen pro Typ und **pro Längeneinheit** wird durch  $N_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1..3$  erfasst, wobei  $i$  die Wanderungsrichtung und  $j, k$  den Typ der Versetzung gemäß Gl. 7.37 angibt. Tabelle 7.1 fasst die physikalische Bedeutung sämtlicher Kombinationen in  $i, j$  und  $k$  zusammen.

	Versetzungsart	Wanderungsrichtung	Wanderungsmodus	Symbol
$j \neq k$	Stufenversetzung	$i = j$	gleiten	$\perp^G$
$j \neq k$	Stufenversetzung	$i \neq j$ $i \neq k$	klettern (erzeugt Dehnung in $j$ -Richtung)	$\perp^K$
$j \neq k$	Stufenversetzung	$i = k$	Verschiebung längs der Versetzungslinie	$\perp^L$
$j = k$	Schraubenversetzung	$i \neq j$ $i \neq k$	gleiten (klettern ist prinzip. nicht möglich)	$\oplus^G$
$j = k$	Schraubenversetzung	$i = k$	Verschiebung längs der Versetzungslinie	$\oplus^L$

**Tabelle 7.1:** Übersicht der Versetzungsarten und Wanderungsmodi.



**Abbildung 7.8:** Dreidimensionales Bild von  $N_{ijk}$  mit Symbolen der Wanderungsmodi.

Abb. 7.8 zeigt die Anordnung der Distorsionszahlen  $N_{ijk}$  unter Verwendung der Symbole aus Tab. 7.1 in einem  $ijk$ -Rahmen.

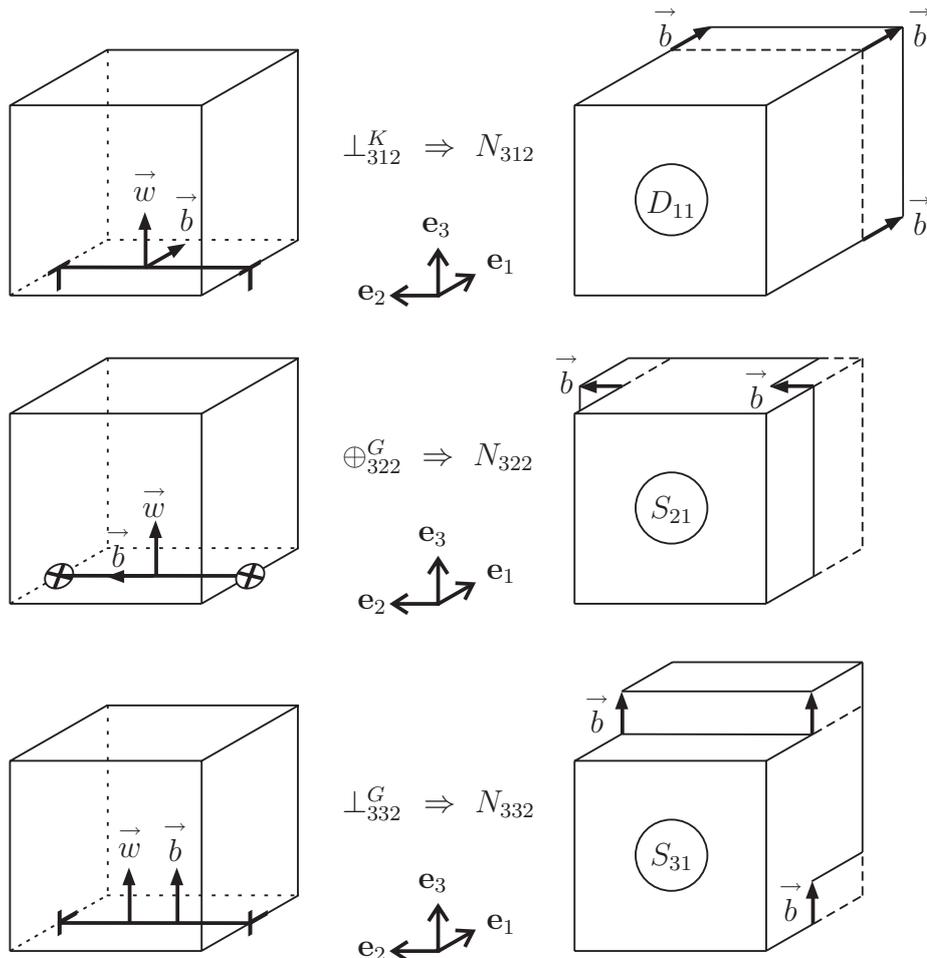


Abbildung 7.9: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{312}$ ,  $N_{322}$  und  $N_{332}$ .

Neben dem Gleiten einer Stufen- oder Schraubenversetzung tauchen in den Wanderungsmodi auch Klettern und Längsverschiebung von Versetzungslinien auf. Während das Klettern zu einer reinen Dehnung in  $j$ -Richtung führt, hinterlässt die Wanderung längs einer Versetzungslinie kaum Distorsion.

Näherungsweise werden Einträge aus Längsverschiebung einer Versetzungslinie durch Nullkomponenten ersetzt. Dies weicht etwas vom Vorgehen KRÖNERS ab, der diese Einträge per Definition seines Distorsionstensors eliminiert. Hier wird die Distorsion  $\varepsilon_{ijk}^p$  definiert durch

$$\varepsilon_{ijk}^p := N_{ijk} \|\vec{b}\| \quad , \quad N_{ijk} = 0 \quad \forall i = k \quad . \quad (7.38)$$

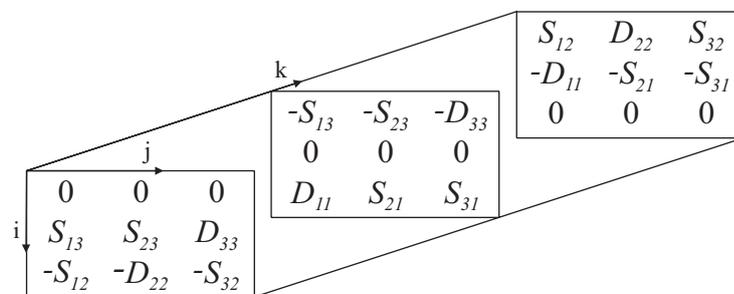
Die Wirkung der verbleibenden 18 Distorsionskomponenten wird an Probewürfeln in Abb. 1.7 vorgeführt. Alle weiteren Fälle finden sich im Anhang A.8.

Im linken Teil der Abb. 1.7 zeigt die Richtung  $\vec{w}$  an, wie eine Versetzung mit BURGERSvektor  $\vec{b}$  den Würfel vollständig durchwandert. Im rechten Teil sind daraus resultierende diskrete Dehnungen bzw. Scherungen abgebildet. Bei kontinuierlicher Verteilung einer hohen Zahl solcher Vorgänge sind makroskopische Dehnungen  $D_{ii}$  bzw. Scherungen  $S_{ij}$  zu erwarten, was jeweils auf den Würfeln rechts vermerkt ist.

Setzt man die makroskopischen Wirkungen  $D_{ii}$  und  $S_{ij}$  in den Distorsionstensor an den Stellen der Ursache ein, erhält man das Bild in Abb. 7.10. Es ist ersichtlich, dass die 18 Wanderungsmodi lediglich 9 grundsätzlich verschiedene Wirkungen haben, weshalb unter Ausnutzung der Antisymmetrie die Definition eines zweistufigen Distorsionstensors

$$\hat{\varepsilon}_{jl}^p = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \varepsilon_{ijk}^p = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} N_{ijk} \|\vec{b}\| \quad , \quad N_{ijk} = 0 \quad \forall i = k \quad (7.39)$$

möglich ist. In Gl. 7.39 wird die Distorsion  $\hat{\varepsilon}^p$  über die mikroskopische Ursache  $N_{ijk}$  und  $\vec{b}$  explizit beschrieben.



**Abbildung 7.10:** Dreidimensionales Bild von  $\varepsilon_{ijk}^p$  mit Wirkung der Wanderungsmodi.

Zugleich kennt man bei kontinuierlicher Verteilung einer hohen Zahl von Versetzungen die makroskopische Wirkung von  $\hat{\varepsilon}^p$

$$\hat{\varepsilon}^p = \begin{bmatrix} D_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & D_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad . \quad (7.40)$$

Der Tensor in Gl. 7.40 entspricht nach Art der Einträge einem Verzerrungstensor.

Die Funktion der Gl. 7.39 und 7.40 lässt sich am Beispiel einer einfachen Scherung veranschaulichen. Möchte man die Deformation in Abb. 7.11 allein durch Versetzungsbewegung erreichen, kann über

$$\hat{\varepsilon}_{13}^p = \frac{1}{2} (N_{211} - N_{112}) \|\vec{b}\| = \gamma/h \quad (7.41)$$

die erforderliche Art und Anzahl an Versetzungsbewegungen bestimmt werden.

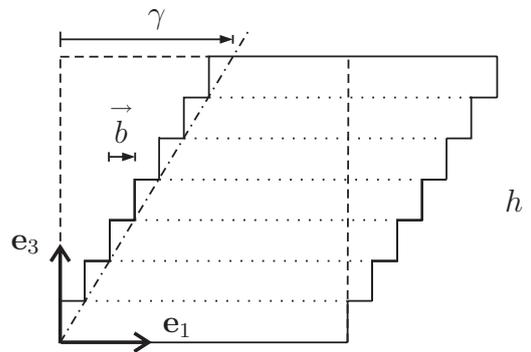


Abbildung 7.11: Versetzungsbewegungen führen zu einer einfachen Scherung.

## 7.7 Cosserat-Theorie als Kontinuum mit Versetzungen

In Kap. 7.4 und Kap. 7.5 wurde dargestellt, wie anelastische Deformation durch Ausbeulen von Versetzungslinien stattfinden kann. Anelastische Deformation ist reversibel,<sup>71</sup> basiert jedoch auf den gleichen Mechanismen wie Plastizität, vgl. z.B. [75]. Zur mikromechanischen Beschreibung von Ursache und Wirkung wurde in Kap. 7.6 der Distorsionstensor  $\hat{\varepsilon}^P$  eingeführt. Wie sich dieser Distorsionstensor im COSSERAT-Modell repräsentieren kann wird nun dargestellt.

Dazu wird der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  lokal in drei Anteile zerlegt, vgl. CLAYTON et al. [30].<sup>72</sup> Eine rein elastische Deformation, repräsentiert durch den Tensor  $\mathbf{F}^e$ , eine rein plastische Deformation mit  $\mathbf{F}^p$  und eine rein anelastische Deformation mit  $\mathbf{F}^{ae}$ . Damit ergibt sich

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{ae} \mathbf{F}^p \quad . \quad (7.42)$$

<sup>71</sup> Anelastizität geht auch mit viskosen, raten-abhängigen Effekten einher. Diese machen sich aber nur bei hochfrequenten Lastwechselspielen bemerkbar und werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

<sup>72</sup>CLAYTON benutzt  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^i \mathbf{F}^p$ , wobei  $\mathbf{F}^p$  die Gitterstruktur in einem gemittelten Sinn intakt lässt. Weiterhin repräsentiert  $\mathbf{F}^e \mathbf{F}^i$  die gesamte Gitterdeformation und  $\mathbf{F}^i$  ist die, nach elastischer Entlastung verbleibende, Gitterdeformation aufgrund von Gitterfehlern, Defekten und Gitterdrehungen.

Schließt man zunächst permanente plastische Deformationen durch  $\mathbf{F}^p = \mathbb{1}$  aus und zerlegt  $\mathbf{F}^e$  polar gemäß  $\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e$ , folgt

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \mathbf{F}^{ae} \quad , \quad \mathbf{U}^e \in \text{PSym} \quad . \quad (7.43)$$

Es ist ersichtlich, dass im Fall  $\mathbf{F}^{ae} \neq \mathbb{1}$  die Rotation  $\mathbf{R}^e$  nicht mehr die polare Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  darstellt, sondern eine davon unabhängige Größe. Genau hier spiegelt sich der Grundgedanke der COSSERAT-Theorie wieder. Die Identifikation

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^e \quad , \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^e \mathbf{F}^{ae} \quad (7.44)$$

stellt die Brücke zwischen COSSERAT- und Versetzungstheorie dar. Die Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}$  kann hierbei je nach Blickwinkel des Betrachters entweder die physikalische Rolle  $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^e \mathbf{F}^{ae}$  oder die abstrakte Rolle  $\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}$  einnehmen.

Die zusätzliche Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  in  $\bar{\mathbf{R}}$  erlaubt also der Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}$  in bestimmten Grenzen vom elastischen und symmetrischen rechts-Streck Tensor  $\mathbf{U}^e$  abzuweichen und damit anelastische Deformationen  $\mathbf{F}^{ae} \neq \mathbb{1}$  zu erlauben. Die Einschränkung auf eine bestimmte anelastische Deformationen wird später diskutiert.

Definiert man den anelastischen Deformationsgradienten über die Distorsion  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  gemäß

$$\mathbf{F}^{ae} := \mathbb{1} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (7.45)$$

und die elastische Verzerrung durch

$$\mathbf{U}^e := \mathbb{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e \in \text{Sym} \quad , \quad (7.46)$$

ergibt sich aus Gl. 7.44

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^e \mathbf{F}^{ae} = \mathbb{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^e + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^e \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad . \quad (7.47)$$

Mit dem antisymmetrischen bzw. symmetrischen Anteil der Verzerrung

$$\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] = \text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] + \text{skew}[\boldsymbol{\varepsilon}^e \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \approx \text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \quad , \quad (7.48)$$

$$\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \text{sym}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] + \text{sym}[\boldsymbol{\varepsilon}^e \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \approx \boldsymbol{\varepsilon}^e + \text{sym}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] \quad (7.49)$$

können folgende Überlegungen stattfinden.

Vernachlässigt man den quadratischen Term in Gl. 7.48, erhält man eine von elastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  unabhängige Identifikation zwischen COSSERAT- und Versetzungstheorie.

In der spezifischen Formänderungsenergiegedichte der Gl. 4.49 wird die quadratische Norm der antisymmetrischen Verzerrung  $\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]$  durch den Kopplungsmodul  $\mu_c$  beaufschlagt. In der spezifischen, anelastischen Formänderungsenergiegedichte der Gl. 7.34 wird das Quadrat der Verzerrung  $\varepsilon_{ae}$  durch den Faktor  $(3\mu)/(\Lambda_d^2 L_0 V)$  beaufschlagt. Die skalare Verzerrung  $\varepsilon_{ae}$  repräsentiert für den Fall des einsetzenden FRANK-READ-Mechanismus einen Anteil des allgemeinen Distorsionstensors  $\hat{\varepsilon}^P$ . Wie der Anteil  $\varepsilon_{ae}$  in  $\hat{\varepsilon}^P$  angeordnet ist, spielt für den Abgleich der Energiedichten beider Modelle im isotropen Fall keine Rolle und ein direkter Vergleich liefert dann die Beziehung

$$\mu_c = (3\mu)/(\Lambda_d^2 L_0 V) \quad . \quad (7.50)$$

Die Betrachtungen in Kap. 7.4 zur spezifischen, anelastischen Formänderungsenergie gelten nur bei **geringer bzw. einsetzender** Deformation. In diesem Bereich liefert die Abschätzung in Kap. 7.4 Werte für den Kopplungsmodul im Bereich  $\mu_c = 10^{-5} \mu$  bis  $\mu_c = 10^{-11} \mu$ . Möglicherweise liegt in dieser Betrachtung ein Hinweis, dass der Kopplungsmodul  $\mu_c$  keine konstante Größe darstellt, sondern von der Deformation abhängig ist.

Symmetrische anelastische Verzerrungen  $\text{sym}[\hat{\varepsilon}^P]$  sind in Gl. 7.49 auch bei Vernachlässigung quadratischer Terme mit elastischen Verzerrungen  $\varepsilon^e$  additiv gekoppelt. Eine energetisch gesonderte Behandlung ist somit im COSSERAT-Modell nicht möglich. Dies impliziert, dass die anelastische Verzerrung  $\text{sym}[\hat{\varepsilon}^P]$  nicht modelliert werden kann, schließlich sind verschiedene Materialparameter für die völlig unterschiedlichen Effekte zu erwarten.

Dies geht auch mit der Tatsache einher, dass im COSSERAT-Modell lediglich 3 zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden und hier den drei Kinematiken in  $\text{skew}[\hat{\varepsilon}^P]$  zur Verfügung stehen.

Nachfolgende Betrachtungen finden deshalb unter der Einschränkung

$$\text{sym}[\hat{\varepsilon}^P] = 0 \quad (7.51)$$

statt. Die anelastische Deformation in Gl. 7.45 beschränkt sich dann auf

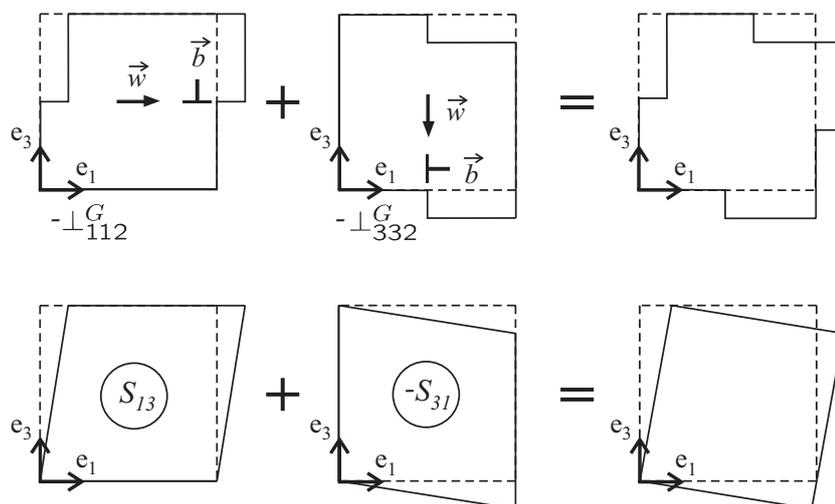
$$\mathbf{F}^{ae} = \mathbb{1} + \text{skew}[\hat{\varepsilon}^P] \quad (7.52)$$

und stellt für kleine Werte  $\text{skew}[\hat{\varepsilon}^P]$  eine linearisierte Rotation dar

$$\mathbf{R}^{ae} \approx \mathbb{1} + \text{skew}[\hat{\varepsilon}^P] \quad . \quad (7.53)$$

Kleine Rotationen  $\mathbf{R}^{ae}$  sind mit der Voraussetzung von Anelastizität konform.

In Abb. 7.12 ist für einen antisymmetrischen Fall<sup>73</sup> in  $\hat{\varepsilon}^P$  das Mikro- und Makromodell dargestellt. Man erkennt die daraus resultierende Rotation.



**Abbildung 7.12:** Mikromodell (oben) und Makromodell (unten) für einen antisymmetrischen Fall in  $\hat{\varepsilon}^P$ .

Der Deformationsgradient gemäß Gl. 7.43 lautet nach Einschränkung in Gl. 7.52

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{ae} \quad , \quad \mathbf{U}^e \in \text{Sym} \quad , \quad (7.54)$$

und kann erweitert werden zu

$$\mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{R}^e \mathbf{R}^{ae}}_{\text{polar}[\mathbf{F}]} \underbrace{(\mathbf{R}^{ae})^T \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{ae}}_{\mathbf{U}} \quad , \quad (\mathbf{R}^{ae})^T \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{ae} \in \text{Sym} \quad . \quad (7.55)$$

Wie bereits in Gl. 7.55 markiert, findet sich die Polarzerlegung von  $\mathbf{F}$  in der Erweiterung wieder und ergibt die direkten Zusammenhänge

$$\text{polar}[\mathbf{F}] = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^{ae} \quad , \quad \mathbf{U} = (\mathbf{R}^{ae})^T \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{ae} \quad , \quad \mathbf{U} \in \text{Sym} \quad . \quad (7.56)$$

Die Identifikation gemäß Gl. 7.44 lautet nun

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^e = \text{polar}[\mathbf{F}] (\mathbf{R}^{ae})^T \quad , \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^e \mathbf{R}^{ae} = \mathbf{R}^{ae} \mathbf{U} \quad , \quad (7.57)$$

und kann den Übergang zwischen den beiden Kontinuumstheorien detaillierter als in Gl. 7.44 angeben. Dies ist auch zu erwarten, nachdem sich der anelastische Effekt nun auf Drehungen beschränkt.

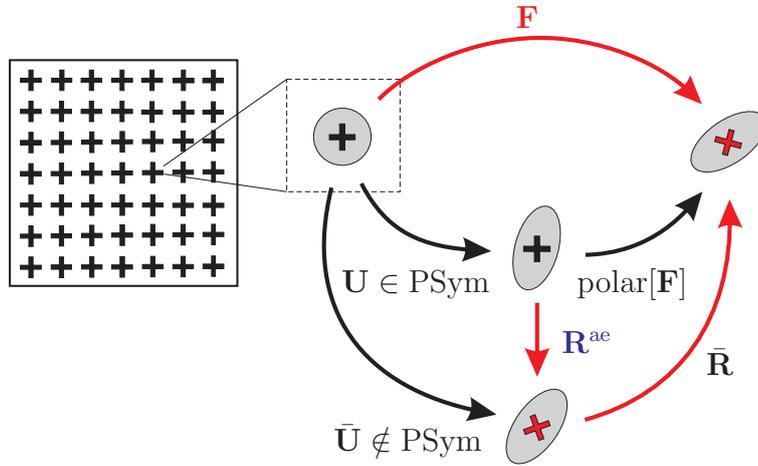
Die Abweichung der COSSERAT-Rotation von der Makrorotation  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  wurde in Gl. 3.60 durch  $\bar{\mathbf{R}} = \text{polar}[\mathbf{F}] \hat{\mathbf{R}}^T$  mit der zusätzlichen Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  zum

<sup>73</sup> Es gilt für die Verzerrungskomponenten:  $S_{13} = -S_{31}$  sonst  $S_{ij} = 0$ .

Ausdruck gebracht. Unter Verwendung der Identifikation in Gl. 7.57 ist die physikalische Ursache für zusätzliche Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  nun ersichtlich

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{ae}} \approx \mathbb{1} + \text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}] \quad . \quad (7.58)$$

Die Zusatzkinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  kann somit ihre Ursache in antisymmetrischer Distorsion  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}$  haben, falls dies nicht durch großen Vorfaktor  $\mu_c$  energetisch unterdrückt wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur anelastische Drehungen  $\mathbf{R}^{\text{ae}}$  gemäß Gl. 7.53 betrachtet, vgl. auch Abb. 7.13.



**Abbildung 7.13:** Kinematik des COSSERAT-Kontinuums nach Identifikation mit anelastischer Drehung  $\mathbf{R}^{\text{ae}}$ .

Der axiale Vektor der Drehung  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{ae}} \approx \mathbb{1} + \text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}]$  lautet näherungsweise

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \text{axl}[\hat{\mathbf{R}}] \approx \text{axl}[\text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}]] = -\frac{1}{2}\epsilon_{akl}\hat{\varepsilon}_{kl}^{\text{p}}\mathbf{e}_a \quad (7.59)$$

und beschreibt Gitterverdrehungen aus Distorsion durch Versetzungsbewegung.

Im Fall inhomogener Gitterverdrehungen definiert der Drehvektor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  die NYEsche Gitterkrümmung [181] durch

$$\boldsymbol{\kappa} := \text{Grad}[\hat{\boldsymbol{\alpha}}] \approx \text{Grad}[\text{axl}[\text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}]]] = -\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\hat{\varepsilon}_{kl,j}^{\text{p}}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad . \quad (7.60)$$

In Gl. 7.60 ist auch der approximative Bezug zur anelastischen Verzerrung  $\text{skew}[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{p}}]$  zu sehen. Tatsächlich zeigt NYE in [181], dass der Versetzungsdichtentensor  $\boldsymbol{\beta}$  und die NYEsche Gitterkrümmung aus Gl. 7.60 in Beziehung stehen

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\kappa}^T - \text{tr}[\boldsymbol{\kappa}]\mathbb{1} \quad , \quad (7.61)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\beta}^T - \frac{1}{2}\text{tr}[\boldsymbol{\beta}]\mathbb{1} \quad . \quad (7.62)$$

Unter Hinzunahme von Gl. 7.60 gewinnt man aus Gl. 7.61 den Zusammenhang zwischen Versetzungsdichte  $\beta$  und anelastischer Verzerrung  $\text{skew}[\hat{\epsilon}^P]$

$$\begin{aligned}
\beta &= \kappa^T - \text{tr}[\kappa] \mathbb{1} \approx \left(-\frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \hat{\epsilon}_{kl,i}^P + \frac{1}{2} \epsilon_{akl} \hat{\epsilon}_{kl,a}^P \delta_{ij}\right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_{jh} \epsilon_{hkl} \hat{\epsilon}_{kl,a}^P \delta_{ai} - \delta_{ij} \delta_{ha} \epsilon_{hkl} \hat{\epsilon}_{kl,a}^P) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_{jh} \delta_{ai} - \delta_{ij} \delta_{ha}) \epsilon_{hkl} \hat{\epsilon}_{kl,a}^P \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = -\frac{1}{2} \epsilon_{jab} \epsilon_{hib} \epsilon_{hkl} \hat{\epsilon}_{kl,a}^P \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= -\epsilon_{jab} \nabla_a \left(\frac{1}{2} \epsilon_{hib} \epsilon_{hkl} \hat{\epsilon}_{kl}^P\right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = -\nabla_a \epsilon_{abj} (\text{skew}[\hat{\epsilon}^P])_{bi}^T \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= -(\nabla \times (\text{skew}[\hat{\epsilon}^P]^T))_{ji} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = -(\text{Curl}_b[\text{skew}[\hat{\epsilon}^P]])_{ji} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\
&= -(\text{Curl}_b[\text{skew}[\hat{\epsilon}^P]])_{ij}^T \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = -\text{Curl}_\#[\text{skew}[\hat{\epsilon}^P]] \quad . \tag{7.63}
\end{aligned}$$

**Gl. 7.63** besagt, dass NYESche Krümmung eine kompatible Krümmung darstellt<sup>74</sup> und nur über antisymmetrische Anteile von  $\hat{\epsilon}^P$  zustande kommt. Erfasst die COSSERAT-Theorie antisymmetrische Anteile von  $\hat{\epsilon}^P$  durch  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{ae}}$ , dann ist NYESche Krümmung Bestandteil des Modells.

Es wird noch bemerkt, dass KRÖNER in [108] den Zusammenhang der Gl. 7.63 allgemeiner zu

$$\beta = -\text{Curl}_\#[\hat{\epsilon}^P] \tag{7.64}$$

angibt. In [110] folgt als Konsequenz aus Gl. 7.64 der Zusammenhang

$$\text{Curl}_\#[\epsilon_2] + \kappa = \beta^T - \frac{1}{2} \text{tr}[\beta^T] \mathbb{1} \quad , \tag{7.65}$$

wobei der Term  $\text{Curl}_\#[\epsilon_2]$  bei bestimmten Versetzungsverteilungen verschwindet, welche zugleich einem energetischen Energieminimum entsprechen. Diese Verteilungen werden in [110] genauer diskutiert:

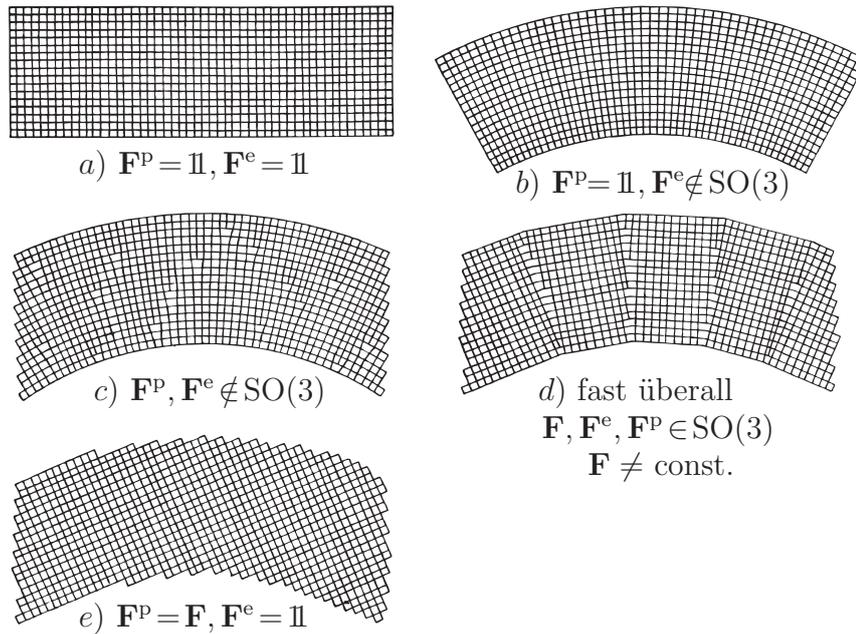
”NYE betrachtet Scharen von diskreten Versetzungslinien in Kristallen, die so dicht beieinander liegen sollen, dass es sinnvoll ist, über eine größere Anzahl von ihnen zu mitteln. NYEs Ergebnisse, soweit sie uns hier interessieren, lauten: Jede solche Verteilung von Versetzungslinien lässt sich durch einen nichtsymmetrischen ortsabhängigen Tensor 2. Stufe<sup>75</sup> beschreiben. Mit jeder Verteilung von Versetzungen ist eine bestimmte mittlere Krümmung des Gitters des betreffenden Kristalls verbunden. Diese ändert sich nicht, wenn man die Dichte der Versetzungen (etwa  $n_i$  pro  $\text{cm}^2$  und BURGERS-Vektor  $\vec{b}_i$ )

<sup>74</sup> Kompatible Krümmungen leiten sich über Gradienten eines Drehfeldes ab.

<sup>75</sup> Dies ist hier die Versetzungsdichte  $\beta$ .

steigert und gleichzeitig die BURGERS-Vektoren  $\vec{b}_i$  abnehmen lässt, so dass die Produkte  $n_i \vec{b}_i$  konstant bleiben. Wenn man in dieser Weise die  $\vec{b}_i$  gegen 0 gehen lässt, verschwindet bei ganz speziellen Versetzungsverteilungen die elastische Energie, während die Gitterkrümmung erhalten bleibt. Das Bestreben, solche Versetzungsanordnungen zu bilden, führt z.B. zu den bekannten Erscheinungen der Polygonisation und der Feinkorngrenzbildung. Für solche Versetzungsanordnungen minimaler Energie konnte NYE den Zusammenhang zwischen Versetzungstensor  $\beta$  und Gitterkrümmungstensor  $\kappa$  angeben. Er lautet  $\kappa = \beta^T - \frac{1}{2}\text{tr}[\beta^T] \mathbb{1}$ .“ Weitere Aspekte dazu sind im Anhang A.9 zu finden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass **das Auftreten lediglich antisymmetrischer Anteile von  $\hat{\varepsilon}^p$  die energetisch vorteilhafte Form der Versetzungsverteilung in Kleinwinkelkorngrenzen impliziert.**



**Abbildung 7.14:** Die fünf Zustände eines Einkristalls. a) Unverzerrt. b) Elastisch verbogen. c) Plastisch verbogen. d) Polygonisiert. e) Rekristallisiert. Bilder aus NABARRO [151].

In Abb. 7.14 aus NABARRO [151] sind die fünf idealisierten Zustände des Einkristalls abgebildet. Zustand b) und c) zeichnen sich durch große elastische Verzerungsenergie im Kristallgitter aus, denn  $\|\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbb{1}\| \gg 0$  da  $\mathbf{F}_e \notin \text{SO}(3)$ .

Im Fall c) sind zudem Terme  $\text{Curl}_{\sharp}[\varepsilon_2]$  in Gl. 7.65 zu erwarten. Dies ist im polygonisierten Zustand d) nicht der Fall: Die lokale elastische Verzerrungsenergie

ist sehr klein, es gilt überwiegend  $\|\mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e - \mathbb{1}\| = 0$ , denn bis auf die Bereiche der Versetzungswand besteht der polygonisierte Zustand nur aus Gitterdrehungen, also  $\mathbf{F}_e \in \text{SO}(3)$  fast überall. Die verbleibende Energie im polygonisierten Kristall findet sich in den inkompatiblen Gitterdrehungen, welche sich nach Mittelung in nicht verschwindender NYEscher Gitterkrümmung niederschlägt. Man kann NYEsche Gitterkrümmung makroskopisch durch die Forderung

$$\boldsymbol{\beta}_{\text{Nye}} \sim \text{Curl}_{\#}[\mathbf{F}^{\text{P}}], \quad \mathbf{F}^{\text{P}} \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{F}^e \in \text{SO}(3) \quad (7.66)$$

definieren.

**Das Auftreten von lediglich  $\mathbf{F}^{\text{P}} \in \text{SO}(3)$ ,  $\mathbf{F}^e \in \text{SO}(3)$  korrespondiert mit der energetisch vorteilhaften Form der Versetzungsverteilung in Kleinwinkelkorngrenzen.**

Das COSSERAT-Modell erlaubt in diesem Kontext plastische Verdrehungen durch Polygonisation wie in Fall d). **Somit behandelt das COSSERAT-Modell genau den Fall der NYEschen Krümmung, also dass Versetzungen Kleinwinkelkorngrenzen entlang von Versetzungswänden bilden.**

Die Anordnung ganzer Versetzungswände bei der Polygonisation erzeugt Spannungsfelder im Material, welche als nicht lokal zu betrachten sind.<sup>76</sup> Im Folgenden wird untersucht, wie diese Spannungsfelder im Zusammenhang mit Momentenspannungen des COSSERAT-Modells stehen.

## 7.8 Momentenspannungen und Versetzungen

Nachdem der Bezug zwischen COSSERAT- und Versetzungstheorie hauptsächlich auf kinematischer Ebene erörtert wurde, soll nun die Bedeutung der Momentenspannung diskutiert werden.

Über die Versetzungsdichte  $\boldsymbol{\beta}$  aus Gl. 7.36 und der NYEschen Krümmung lässt sich die Potentialfunktion

$$W_{\text{NYE}} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\kappa} \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\kappa}^T, \boldsymbol{\kappa} \rangle - \frac{1}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\kappa}])^2 \quad (7.67)$$

angeben, welche wegen

$$\frac{\partial W_{\text{NYE}}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}^T - \text{tr}[\boldsymbol{\kappa}] \mathbb{1} = \boldsymbol{\beta} \quad (7.68)$$

---

<sup>76</sup> Spannungsfelder aus Versetzungswänden sind durch "long range stresses" gekennzeichnet. Das Spannungsfeld einer einzelnen Versetzung hingegen durch "short range stresses", vgl. z.B. [108], [151].

speziell als Versetzungspotential aufzufassen ist.

Bringt man  $W_{\text{NYE}}$  mit der Krümmungsenergiedichte des COSSERAT-Modells in Verbindung, hängt die physikalische Bedeutung von Momentenspannungen direkt an dem Begriff der Versetzungsdichte.

Die Krümmungsmessung und damit die Krümmungsenergiedichte basiert im COSSERAT-Modell jedoch nicht allein auf der zusätzlichen Kinematik  $\text{Grad}[\hat{\mathbf{R}}]$  und somit nach Gl. 7.58 auf  $\text{Grad}[\mathbf{R}^{ae}]$ , sondern auf Ableitungen der Gesamttortion  $\bar{\mathbf{R}}$ .<sup>77</sup>

Die Krümmungen in Kap. 3.1.3 nutzen den antisymmetrischen Term  $\mathbf{K}^j$  aus Gl. 3.62, welcher sich nach Identifikation zur Versetzungstheorie in Gl. 7.58 durch

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^j &= \bar{\mathbf{R}}^T \bar{\mathbf{R}}_{,j} = (\text{polar}[\mathbf{F}] \mathbf{R}^{aeT})^T (\text{polar}[\mathbf{F}] \mathbf{R}^{aeT})_{,j} \\ &= \mathbf{R}^{ae} (\text{polar}[\mathbf{F}])^T (\text{polar}[\mathbf{F}])_{,j} \mathbf{R}^{aeT} + \mathbf{R}^{ae} \mathbf{R}^{aeT}_{,j} \end{aligned} \quad (7.71)$$

ausschreibt. Der erste Ausdruck in Gl. 7.71 wird lediglich mit  $R^{ae}$  konjugiert, ansonsten steht er in keinem Zusammenhang mit der anelastischen Kinematik des Modells und somit in keinem Zusammenhang mit Versetzungen und NYEscher Krümmung. Er ist eine spezielle Form der zweiten Ableitung der Deformation, was prinzipiell in Kontinua zweiten Grades in Ansatz gebracht wird und elastische Gitterkrümmung beschreibt.

Der zweite Ausdruck in Gl. 7.71 betrifft hingegen lediglich die anelastische Kinematik des Modells und steht im Zusammenhang mit NYEscher Gitterkrümmung.

Es stellt sich nun die Frage, ob die gemischte Messung in Gl. 7.71 die Identifikation zur Versetzungsenergie in Gl. 7.67 zulässt. Tatsächlich stellen die beiden Terme in Gl. 7.71 zwei verschiedene Ursachen für dieselbe Wirkung - eine Momentenspannung, dar.

In Kap. 3.3.3 hat ein Homogenisierungsprozess gezeigt, dass die Lokalität der Formulierung über das Auftreten von Momentenspannungen entscheidet. Auch

<sup>77</sup>Die Verwendung von  $\bar{\mathbf{R}}$  als Prozessvariable innerhalb der COSSERAT-Theorie führt prinzipiell auf ein anderes mathematisches Modell als unter Verwendung von  $\hat{\mathbf{R}}$ . Erkennbar wird dies bei Betrachtung der ersten COSSERAT-Verzerrung für beide Fälle:

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} \quad , \quad (7.69)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} = \hat{\mathbf{R}} (\text{polar}[\mathbf{F}])^T \mathbf{F} = \hat{\mathbf{R}} \mathbf{U} \quad . \quad (7.70)$$

In Gl. 7.69 bleibt  $\bar{\mathbf{R}}$  als Prozessvariable und die Verzerrung als Funktion von  $\mathbf{F}$  bestehen. In Gl. 7.70 wird  $\hat{\mathbf{R}}$  als Prozessvariable angestrebt, was zugleich dazu führt, nur noch einen Teil von  $\mathbf{F}$ , nämlich die reine (symmetrische) Streckung  $\mathbf{U}$  zu betrachten.

in [115] werden Momentenspannungen als Konsequenz einer nicht lokalen Kontinuumstheorie betrachtet und zudem die Proportionalitäten

Momentenspannung  $\sim$  Elastische Gitterkrümmung

Momentenspannung  $\sim$  NYEsche Gitterkrümmung

erörtert. Abb. 7.14 b) zeigt eine elastische Gitterkrümmung. Man erkennt in der Abbildung, wie die Atome des Materials den Abstand zu den Nachbaratomen im Vergleich zu Abb. 7.14 a) ändern, woraus der größte und zugleich auf Atomabstände **lokalisierbare** Widerstand gegen diese Deformation resultiert.

Die freien Elektronen eines Metalls, welche fundamental zur Kohäsion des Kristalls beitragen, werden in Abb. 7.14 b) jedoch auch auf Bahnen des gekrümmten Zustandes gezwungen, was eine Erhöhung der Energie bedeutet und daher mit einem Widerstand gegen diesen gekrümmten Zustand einher geht [115]. Möchte man diesen Widerstand erfassen, kann dies in einer Kontinuumstheorie durch Berücksichtigung von Momentenspannungen geschehen. Die Bildung von Kristallstrukturen deutet auf die Bedeutung und Länge der Bahnen freier Elektronen hin und dass es sich hierbei um einen nichtlokalen Effekt handelt [115].

Zur Ursache von Momentenspannungen aus NYEscher Gitterkrümmung wird in [115] die mikroskopische Spannungsverteilung einer Kleinwinkelkorngrenze untersucht. Es zeigen sich Oszillationen und Unstetigkeiten im mikroskopischen Spannungsverlauf. Somit ist die Lokalisierung einer makroskopischen Theorie auf beliebig kleine Volumenelemente  $dV$  nicht möglich, da es die Glattheit physikalischer Felder voraussetzt.

KRÖNER verwendet deshalb ein finites Volumenelement  $\Delta V$ , welches eine große Anzahl von Versetzungen einschließt. Der gewählte Homogenisierungsprozess für  $\Delta V$  lässt die Oszillationen im Verlauf der mikroskopischen Spannung nicht mehr erkennen, jedoch resultiert aus den Unstetigkeiten eine Größe, welche den Charakter einer Momentenspannungen besitzt.

Somit dringt nur noch die Information von Unstetigkeiten entlang einer Versetzungswand auf makroskopische Ebene vor und wird dort durch eine Momentenspannung approximativ erfasst. KRÖNER gelingt es damit einen Zusammenhang zwischen Momentenspannungen und NYEscher Gitterkrümmung anzugeben, welcher sich wie eine konstitutive Beziehung präsentiert

$$\hat{\mathbf{m}}_{ij} = a_{ijkl} \kappa_{kl} \quad . \quad (7.72)$$

Im konkret gewählten Fall regelmäßiger Kleinwinkelkorngrenzen, folgt für die konstitutiven Parameter  $a_{ijkl}$  die Proportionalität

$$a_{ijkl} \sim \frac{\mu}{1-\nu} d^2 \quad , \quad (7.73)$$

wobei  $d$  der Abstand von Gleitebenen ist.

Die gemischte Form der Krümmungsmessung in Gl. 7.71 erfasst nun elastische Gitterkrümmung und NYEsche Gitterkrümmung additiv und simultan.

Die interne Länge  $L_c$  bzw. die Momentenspannung quantifiziert somit die Wirkung zweier verschiedener Ursachen. Ist die elastische Krümmung gegenüber NYEscher Krümmung vernachlässigbar, übernimmt  $L_c$  die eindeutige Rolle der Konstitution gemäß Gl. 7.73. Für geringe Deformation erscheint diese Annahme sinnvoll und deckt sich mit der Einschränkung in Kap. 7.7.

In numerischen Beispielen des Kap. 8 wird u.a. der vorgestellte Bezug zur Versetzungstheorie diskutiert. Bei Beschränkung auf kleine elastische Krümmung, was Term 1 in Gl. 7.71 betrifft, registriert das Krümmungsmaß hauptsächlich NYEsche Krümmung und damit die Veränderung eines Versetzungsfeldes. Da diese Veränderung den Anfangszustand plastischer Effekte beschreibt, kann auch von initialer Plastizität geredet werden. Die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  entspricht dann einer Zunahme der skalaren Versetzungsdichte  $\Lambda_d$ .

## 8 Numerische Beispiele Teil 2

### 8.1 Stochastische Rotationsimperfektion und Anwendung

Es wird zunächst ein Verfahren zur Generierung einer stochastisch gestörten Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0^{\text{imp}}$  vorgestellt. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass ein rotatorisches Imperfektionsfeld an den GAUSSPUNKTEN die Störung bewirkt.

Die daraus resultierende Imperfektionsenergie kann das Verfahren so steuern, dass unterschiedliche Elementgrößen zulässig sind, was für eine Finite-Element-Formulierung nötig ist. In einem Druckversuch findet das Verfahren Anwendung.

#### 8.1.1 Algorithmus für rotatorisches Imperfektionsfeld

Obwohl die COSSERAT-Theorie durch das Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  den Punkten des Kontinuums eine individuelle Richtung verleiht, ist diese in der Referenzkonfiguration zunächst homogen und neutral  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$ . Reale Werkstoffe weichen i. allg. von solch einer spannungsfreien, homogenen Situation ab, was die Grundidee in Abb. 8.1 motiviert.

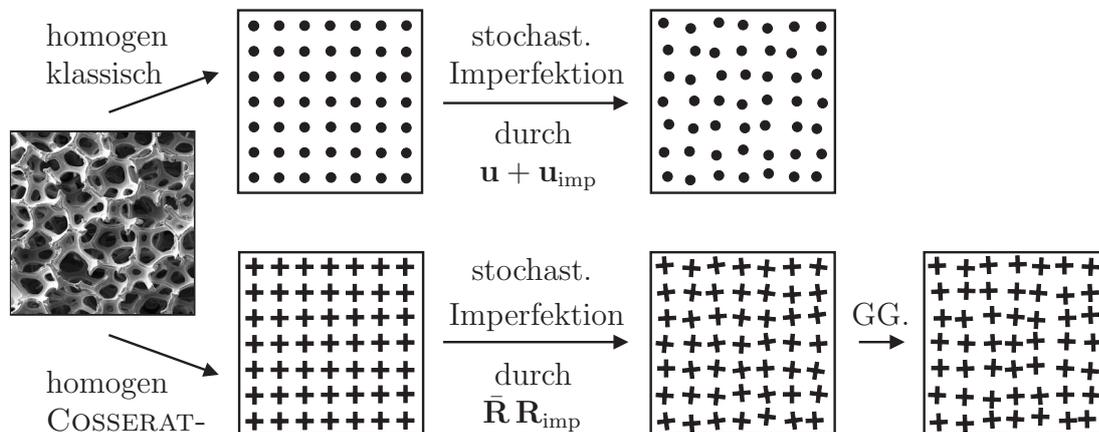


Abbildung 8.1: Grundidee zur Einbringung stochastischer Imperfektionen.

Es wird durch den Drucktest in Kap. 8.1.2 belegt, dass das volle Spektrum an erreichbaren Deformationen, bei perfekten stofflichen und geometrischen Bedingungen innerhalb der COSSERAT-Theorie und deren Numerik verloren geht. Insbesondere bei symmetrischen Geometrien und Randvorgaben, kann der numerische Algorithmus ohne weitere Maßnahmen eine energetisch günstigere, asymmetrische Lösungen nicht finden. Der Druckstab weist bekanntlich eine Verzweigung der Lösung auf und bietet sich als Beispiel an.

In der Baustatik haben sich Verfahren wie die begleitende Eigenwertanalyse zur Behandlung stabilitätsgefährdeter Bauteile bewährt. Nähert sich die Lösung einer Verzweigung, wird das Bauteil durch eine Eigenform gestört, um der Deformation einen eindeutigen Trend vorzugeben. In der Ingenieurpraxis genügt es oft, stabilitätsgefährdete Bauteile bereits mit einer Anfangsimperfektion (meist die erste Eigenform) zu versehen. Die Wahl, Größe und Richtung der Imperfektion stellt jedoch eine Wertung dar, was der Willkür realer Imperfektionen nicht entspricht.

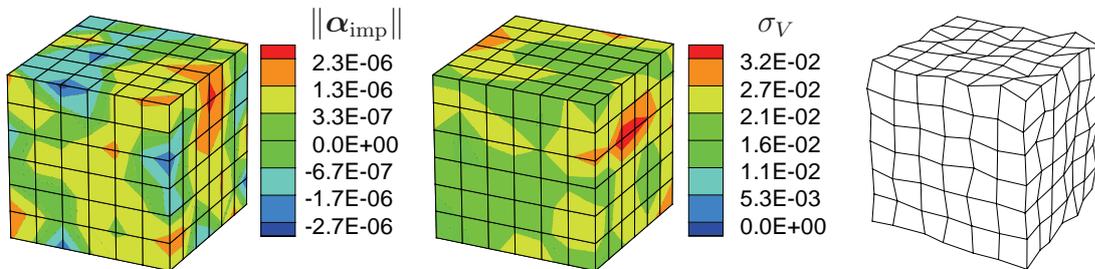
In Abb. 8.1 ist die Grundidee des hier angestrebten Imperfektionsverfahrens dargestellt. Im klassischen Kontinuum wäre die Störung der inneren Homogenität durch Addition eines Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}_{\text{imp}}$  denkbar.

Dem COSSERAT-Modell können auch wahlweise Rotationsimperfektionen  $\mathbf{R}_{\text{imp}}$  durch  $\bar{\mathbf{R}}\mathbf{R}_{\text{imp}}$  permanent überlagert werden. Da in der Anfangskonfiguration zunächst  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$  gilt, lautet die initiale COSSERAT-Verzerrung

$$\bar{\mathbf{U}}^{\text{ini}} = (\bar{\mathbf{R}}\mathbf{R}_{\text{imp}})^T \mathbf{F} = \mathbf{R}_{\text{imp}}^T \in \text{SO}(3) \quad . \quad (8.1)$$

Diese initiale Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}^{\text{ini}}$  stellt für  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{R}} = \mathbb{1}$  i. allg. keinen Gleichgewichtszustand dar. Sucht man dafür das Gleichgewicht im Finite-Element-Modell gemäß Gl. 5.60, stellen sich bereits in der Referenzkonfiguration Drehungen  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_0$  und Verschiebungen  $\mathbf{u}_0$  ein. Daraus resultieren Eigenspannungen bzw. eine spezifische Formänderungsenergie  $W_{\text{imp}}$ .

In Abb. 8.2 ist für einen quadratischen Würfel aus Stahl mit der Kantenlänge 1 cm das Ergebnis einer Störung durch Rotationsimperfektionen mit  $W_{\text{imp}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kN/cm}^2$  dargestellt.



**Abbildung 8.2:** Links: Norm des Eigenvektors  $\boldsymbol{\alpha}_{\text{imp}}$  von  $\mathbf{R}_{\text{imp}}$ . Mittig: VON MISES-Vergleichsspannung  $\sigma_V$  [ $\text{kN/cm}^2$ ]. Rechts: Verformung in 100000-facher Überhöhung.

Die spezifische Formänderungsenergie  $W_{\text{imp}}$  wird durch den Algorithmus der

Abb. 8.3 in die Grenzen

$$W_{\text{imp}} \in [0.99 W_{\text{imp}}^{\text{ref}}; 1.01 W_{\text{imp}}^{\text{ref}}] \quad (8.2)$$

gezwungen. Die Grenzen erlauben hier willkürlich eine Streuung der spezifischen Formänderungsenergie  $W_{\text{imp}}$  von 2%.

Durch den Aufbau der Störung direkt an den GAUSSpunkten, kann der Algorithmus alle Schritte mit eckiger Umrandung in Abb. 8.3 auf Elementebene, ohne Kommunikation mit den Nachbarelementen durchführen.

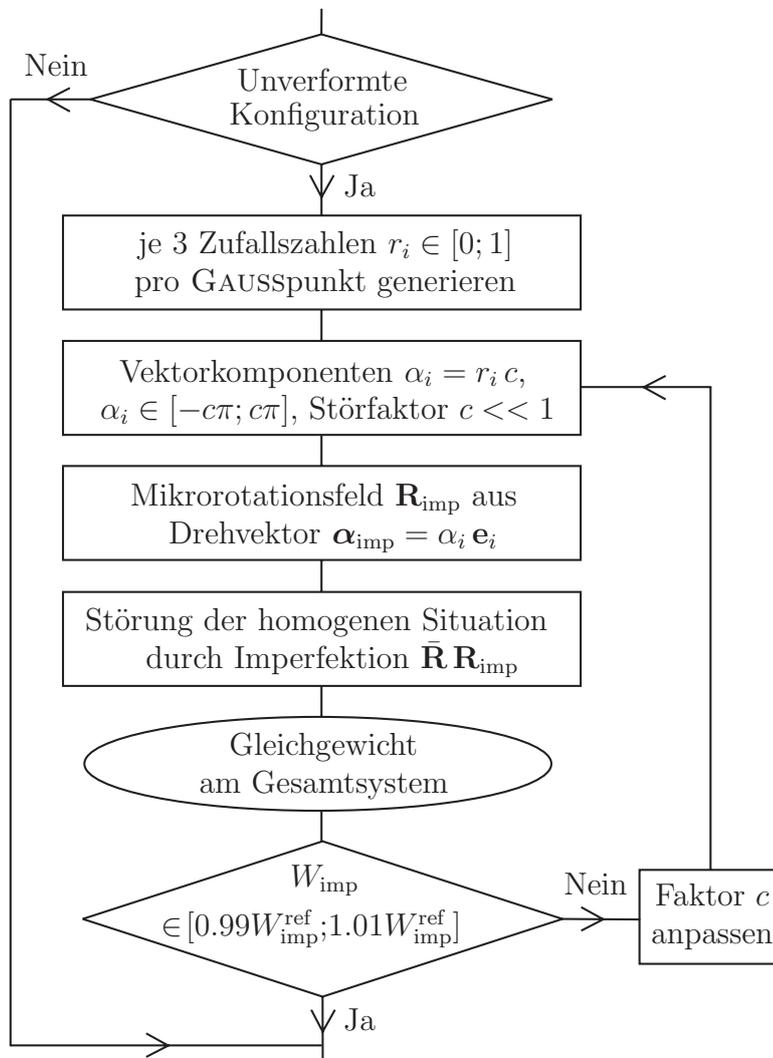


Abbildung 8.3: Ablauf zur Erzeugung der rotatorischen Störung.

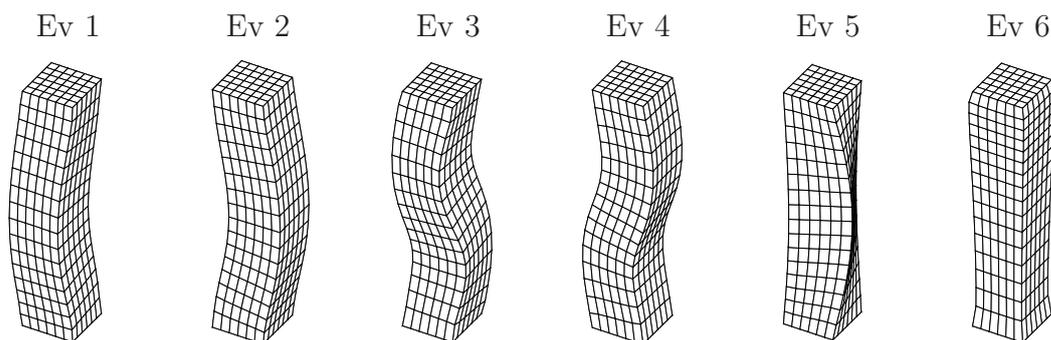
Zunächst sind in jedem Element einmalig Zufallszahlen  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  pro GAUSSpunkt zu generieren und zu speichern. Weiterhin wird in jedem Element ein Störfaktor  $c$  eingeführt, welcher die Zufallszahlen  $r_i$  zu Komponenten der

Drehvektoren  $\bar{\alpha}_{\text{imp}}$  transformiert. Ist die Störung in allen Elementen aufgebaut, wird durch den üblichen Algorithmus das Gleichgewicht am Gesamtsystem erzeugt. Eine Nachlaufrechnung überprüft, ob die gemittelte, spezifische Formänderungsenergie  $\int_{\mathcal{B}_0^e} W_{\text{imp}} dV / \int_{\mathcal{B}_0^e} dV$  im Intervall der Gl. 8.2 liegt. Durch eine iterative Schleife wird der Störfaktor  $c$  elementweise solange angepasst, bis das Intervall eingehalten wird.

### 8.1.2 Drucktest

Ein Drucktest soll die Anwendung des Imperfektionsalgorithmus aus Abb. 8.3 vorführen. Weiterhin ist die Stabilität und Verzweigung der Lösung innerhalb der COSSERAT-Theorie Mittelpunkt der Diskussion. Dazu wird ein gedrungener Stab der Länge  $L = 2$  mit quadratischem Querschnitt der Fläche  $A = 0.16$  einer Stauchung unterzogen. Stabunter- und Oberseite der Druckprobe sind fest mit einer starren Lasteinleitungsplatte verklebt, so dass Querverformungen dort vollständig behindert sind.

Das Material sei hoch elastisch<sup>78</sup> und habe innerhalb der Stauchung den konstanten Elastizitätsmodul  $E = 1 \cdot 10^6$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$ . Wie aus dem Last-Verschiebungsdiagramm 4.2 hervorgeht, ist das COSSERAT-Modell in der Lage, Stauchungen dieser Größenordnung zu beschreiben.



**Abbildung 8.4:** Eigenformen der ersten sechs Eigenvektoren Ev des Druckstabes aus einer Eigenwertanalyse am Stabilitätspunkt bei Verwendung von ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material.

In Abb. 8.4 sind die niedrigsten Eigenformen einer begleitenden Eigenwertanalyse am Stabilitätspunkt bei Verwendung von ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material dargestellt.

<sup>78</sup>elastische Stauchung bis 15 % sei erlaubt

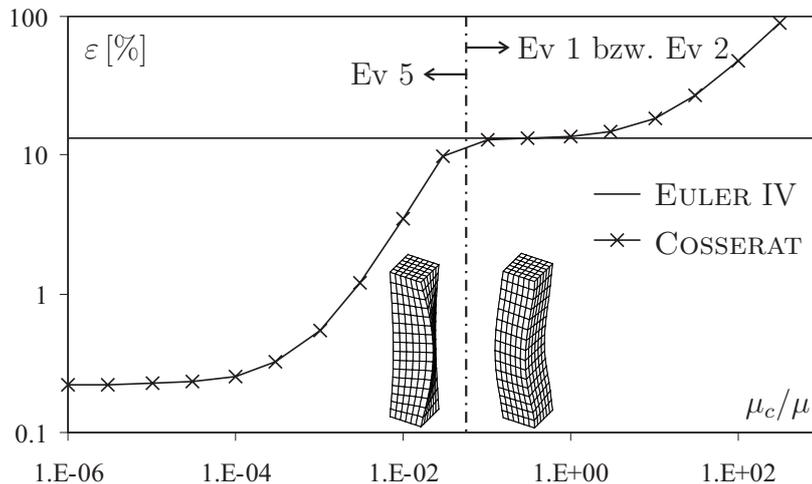
Aus Sicht der Stabstatik handelt es sich um EULERfall IV mit der charakteristischen Knicklänge  $s_k = L/2$  und der Knicklast  $F_{\text{krit}} = \pi^2 EI/s_k^2$ . Die EULERSche Knicklast wird im vorliegenden Fall bei

$$\varepsilon_{\text{krit}} = \frac{F_{\text{krit}}}{EA} = 0.1316 = 13.16 \% \quad (8.3)$$

bzw.  $\Delta L_{\text{krit}} = \varepsilon_{\text{krit}} L = 0.2632$  erreicht.

Die Determinante der tangentialen Gesamtsteifigkeit  $\mathbf{K}_T(\mathbf{p}^*)$  am Entwicklungspunkt  $\mathbf{p}^*$  lässt auch im COSSERAT-Modell Rückschlüsse über ein indifferentes Gleichgewicht zu. Nähert sich  $\det[\mathbf{K}_T]$  einem Nulldurchgang, deutet dies hier auf eine Verzweigung hin.

Im doppelt logarithmischen Diagramm 8.5 ist die kritische Stauchung  $\varepsilon_{\text{krit}}$  bei Erreichen der Verzweigungslast über dem Verhältnis  $\mu_c/\mu$  aufgetragen. Auffällig sind zwei ausgeprägte Plateaus im Verlauf. Nicht nur die Verzweigungslast, sondern auch die Art der Verzweigung ist im vorliegenden Beispiel vom Kopplungsmodul  $\mu_c$  abhängig. Der Studie liegt eine interne Länge von  $L_c = 0.02$  zugrunde.

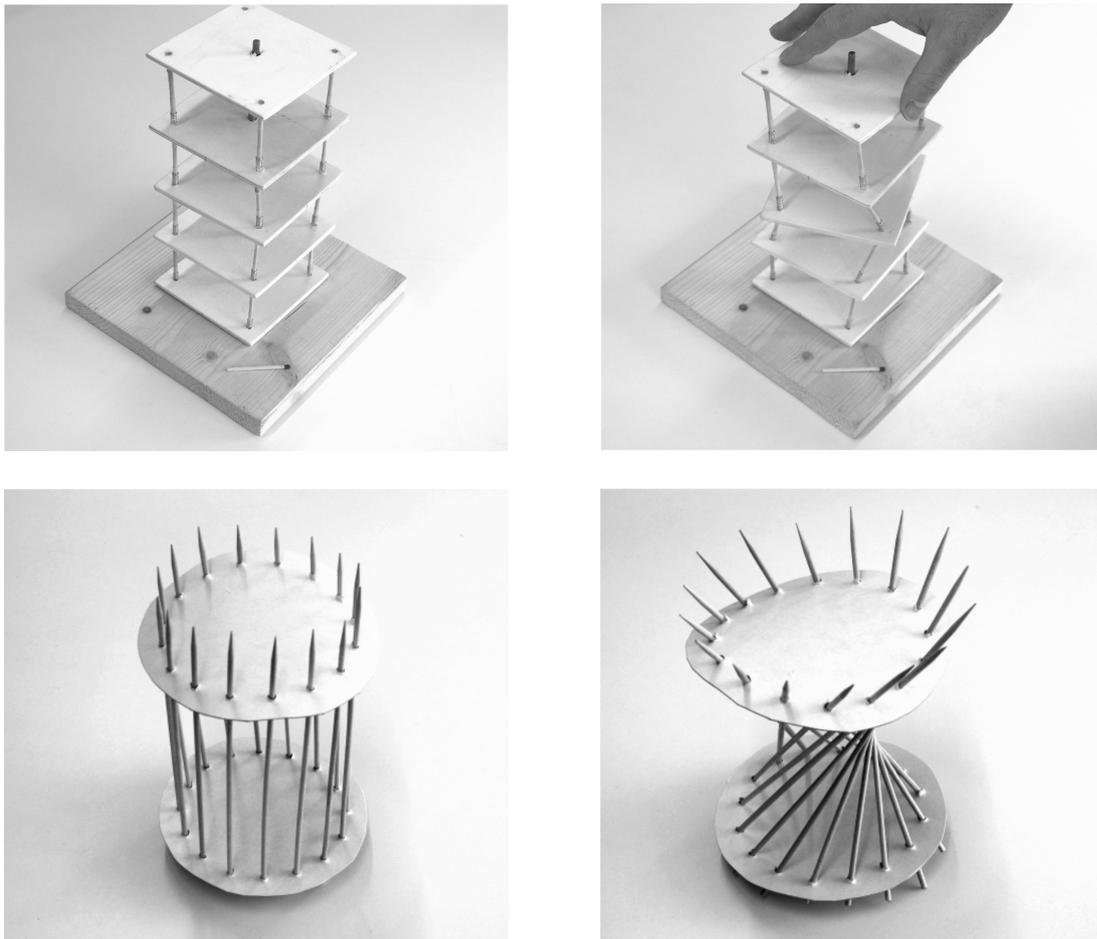


**Abbildung 8.5:** Kritische Stauchung  $\varepsilon_{\text{krit}}$  als Funktion des Verhältnisses  $\mu_c/\mu$ .

Während am Verzweigungspunkt für  $\mu_c \geq 0.1 \mu$  eine Imperfektion gemäß Ev 1 bzw. Ev 2 auf einen stabilen Lösungspfad führt, ist dies für  $\mu_c \leq 0.03$  nur durch eine Imperfektion gemäß Ev 5 aus Abb. 8.4 möglich.

Aus dieser Beobachtung lässt sich schließen, dass sich das COSSERAT-Modell bezüglich der Verzweigung nur dann wie ein klassisches Modell verhält, wenn

$\mu_c$  genügend groß ist. Andernfalls tauchen alternative, vom Modell energetisch favorisierte Deformationen in Erscheinung. So kann sich eine Struktur durch Verwindung durchaus verkürzen, was Anschauungsmodelle in Abb. 8.6 exemplarisch zeigt.



**Abbildung 8.6:** Modelle zur Veranschaulichung der Verwindung unter Druck.

Das obere Modell aus Holzscheiben, welches über fünf Ebenen durch Holzstäbe miteinander verbunden ist, wird einer Druckbelastung in vertikaler Richtung ausgesetzt. Durch Verdrehung der mittleren Ebenen stellen sich die Holzstäbe schräg, was die Verkürzung der Gesamtstruktur geometrisch bedingt. Die Drehung der obersten und untersten Ebene ist dabei behindert. Auch können sich die Holzscheiben nur drehen und in vertikaler Richtung bewegen, was durch einen fest eingespannten Holzstab längs durch die Struktur erreicht wird. Alle Holzscheiben können sich jedoch längs des zentralen Holzstabes vertikal bewegen. Die Stäbe zwischen den Ebenen schließen durch Gelenke mit Drehfedern aus Federstahldraht an die Scheiben an, so dass sich das Modell nach Wegnahme der Druckbelastung

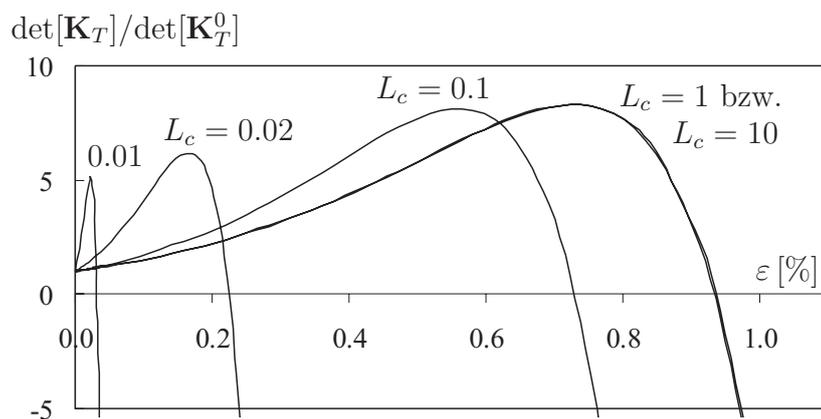
in die Ausgangsposition zurück bewegt.

Das untere Modell zeigt auf noch einfachere Weise, wie die gegenseitige Drehung zweier durch Holzstäbe verbundener Ebenen dazu führt, dass sich eine Struktur geometrisch verkürzt.

Im weiteren konzentriert sich diese Arbeit auf den Lösungspfad, welcher durch eine Imperfektion gemäß Ev 5 (Verwindung) im COSSERAT-Modell auftritt.

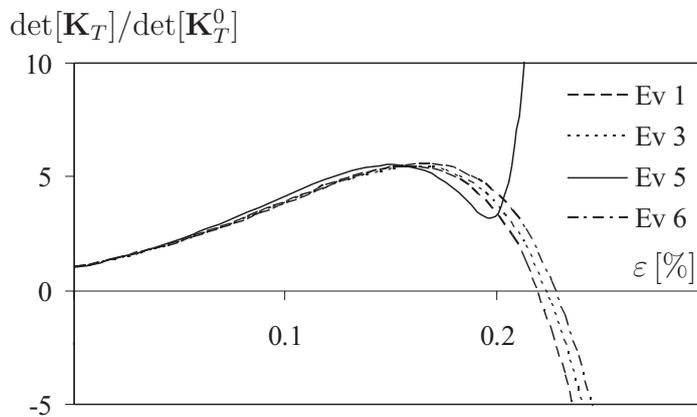
Das Plateau für kleines  $\mu_c$  im Diagramm 8.5 fällt mit der Lösung  $\mu_c = 0$  zusammen. Auch ändert sich die Charakteristik der Lösung für  $\mu_c \leq 0.03$  nicht, weshalb nun Untersuchungen mit  $\mu_c = 0$  und unterschiedlichen internen Längen  $L_c$  folgen.

Die Determinante der tangentialen Steifigkeit  $\mathbf{K}_T$  im Verhältnis zur Determinante der Anfangstangente  $\mathbf{K}_T^0$  in Abb. 8.7 führt vor Augen, dass die Verzweigung auch in Abhängigkeit der internen Länge  $L_c$  steht. Ohne Vorgabe der maßgebenden Imperfektion, ergibt sich stets ein Nulldurchgang, wenn auch erst bei unterschiedlichen Stauchungen  $\varepsilon$ .



**Abbildung 8.7:** Verhältnis  $\det[\mathbf{K}_T]$  zu  $\det[\mathbf{K}_T^0]$  für  $\mu_c = 0$  und unterschiedliche  $L_c$ .

In Abb. 8.8 ist der Verlauf der Determinante unter Verwendung verschiedener Vorverformungen in der Referenzkonfiguration zu sehen. Die Art der Vorverformung entspricht den jeweiligen Eigenvektoren aus Abb. 8.4.



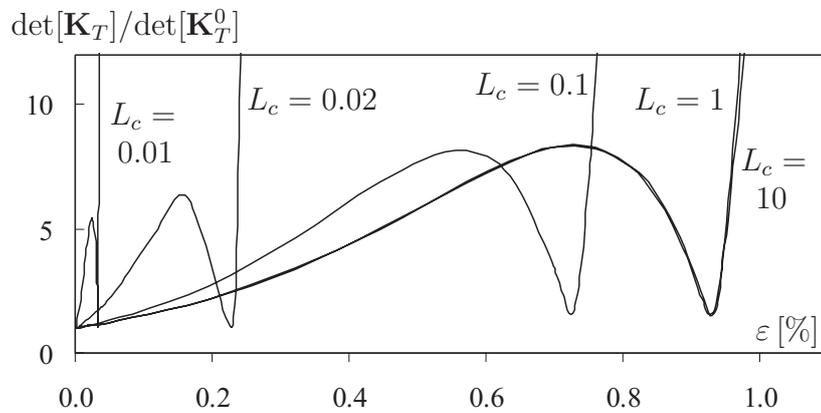
**Abbildung 8.8:** Verhältnis  $\det[\mathbf{K}_T]$  zu  $\det[\mathbf{K}_T^0]$  für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.02$ . Die Referenzkonfiguration ist durch Vorverformung gemäß Eigenvektoren Ev 1 bis Ev 6 aus Abb. 8.4 modifiziert.

Beinhaltet die Wahl der Vorverformung jedoch nicht die energetisch stabile Deformation, oder ist die Beaufschlagung zu gering, beobachtet man weiterhin ein Nulldurchgang der Determinante. Dies ist in Abb. 8.8 für den Fall  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.02$  exemplarisch vorgeführt. Lediglich eine Beaufschlagung mit dem Ev 5 führt in eine stabile Konfiguration.

Um die explizite Auswahl einer Anfangsverformung zu umgehen, kann der Algorithmus aus Kap. 8.1.1 dienen. Die stochastische Störung der Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}_0^{\text{imp}}$  durch ein rotatorisches Imperfektionsfeld an den GAUSSpunkten genügt, um im Beispiel den Lösungsalgorithmus auf den energetisch stabilen Pfad zu bringen.

Für verschiedene stochastische Störungen verfolgt das Modell mit  $\mu_c = 0$  stets eine Deformation, welche sich durch ein um die Stablängsachse drehendes Rotationsfeld auszeichnet. Die daraus resultierende Verwindung ist unabhängig von der eingebrachten Imperfektionsenergiedichte  $W_{\text{imp}}$ . Die Ausprägung der Verwindung hängt lediglich von der internen Länge  $L_c$  ab, vgl. dazu auch Abb. 8.12. Nur die Drehrichtung der Verwindung ist vom stochastischen Imperfektionsfeld abhängig, was jedoch keine Rolle spielt.

Das Verhältnis der Determinante aus  $\mathbf{K}_T$  zu  $\mathbf{K}_T^0$  in Abb. 8.9 basiert auf Berechnungen mit  $\mu_c = 0$  und stochastischer Störung der Imperfektionsenergiedichte  $W_{\text{imp}} = 1 \cdot 10^{-6}$ .

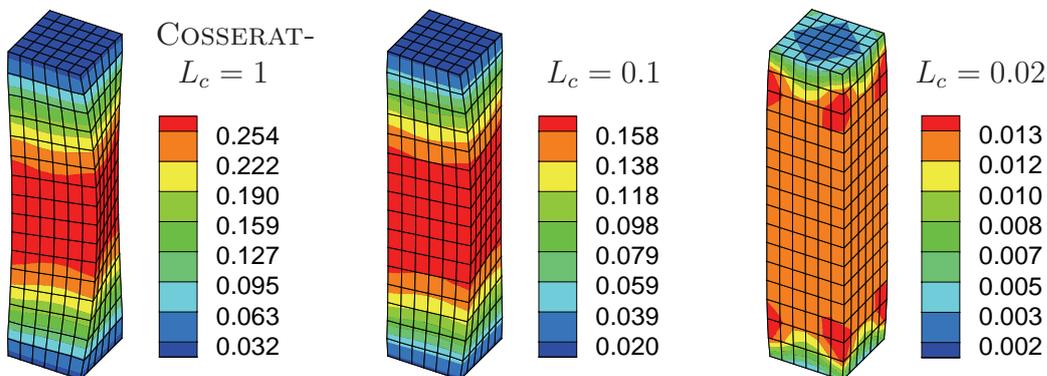


**Abbildung 8.9:** Verhältnis  $\det[\mathbf{K}_T]$  zu  $\det[\mathbf{K}_T^0]$  für  $\mu_c = 0$ , stochastische Rotationsimperfection und unterschiedliche  $L_c$ .

Aus dem Diagramm 8.7 und 8.9 geht weiterhin hervor, dass die Verzweigung der Lösung im Fall  $L_c \rightarrow 0$  bei einer Stauchung  $\varepsilon \rightarrow 0$  zu erwarten ist, also ab dem Beginn der Deformation.

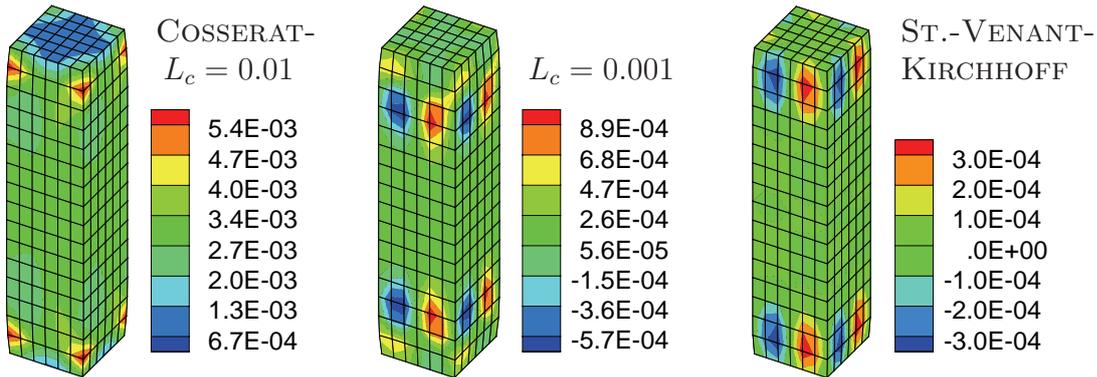
Man erkennt jedoch auch eine obere Grenze für  $\varepsilon_{\text{krit}}$ . Die Verläufe für  $L_c = 1$  und  $L_c = 10$  unterscheiden sich kaum, was auch für noch größere interne Längen zutrifft.

Den folgenden Ergebnissen liegt eine stochastische Störung mit  $W_{\text{imp}} = 1 \cdot 10^{-6}$  und die Verfolgung eines stabilen Lösungspfades bis zur Stauchung  $\varepsilon = 10\%$  zugrunde. Die Verläufe in Abb. 8.10 und 8.11 zeigen die Drehkomponente der makroskopischen Drehung  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  um die Stablängsachse am verformten System. Während man für große interne Längen eine Verdrehung in der Deformation erkennt, ist dies für kleine  $L_c$  nicht mehr der Fall.



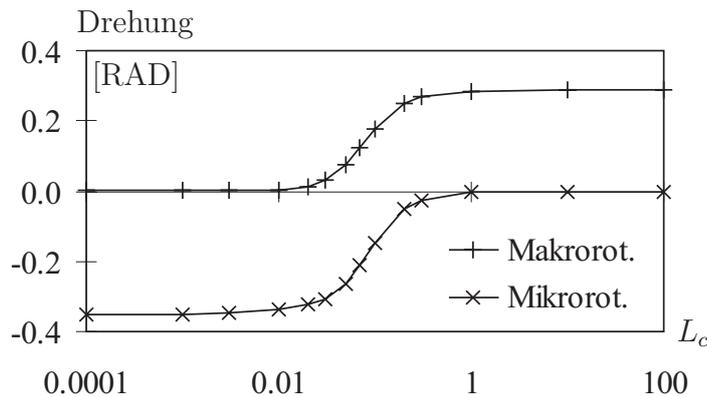
**Abbildung 8.10:** Makroskopische Drehung um Stablängsachse für große und moderate interne Längen  $L_c$ .

Die makroskopische Drehung um die Stablängsachse nähert sich für kleine interne Längen dem Verlauf der ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Lösung an, wie der Vergleich in Abb. 8.11 zeigt.



**Abbildung 8.11:** Makroskopische Drehung um Stablängsachse für kleine interne Längen  $L_c$  im Vergleich zur ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Lösung.

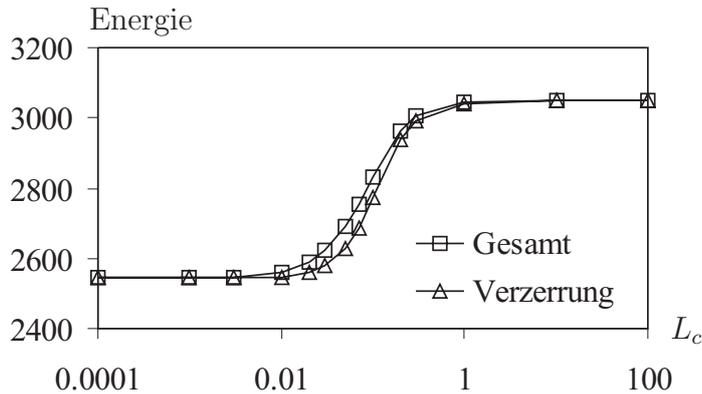
Obwohl die Verwindung der Probe für kleine interne Längen  $L_c$  verschwindet, agiert die zusätzliche Kinematik des COSSERAT-Modells. Aufschluss darüber gibt Abb. 8.12, welche die Drehung aus Makrorotation  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  sowie die Drehung aus COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  in Stabmitte (bei  $L/2$ ) als Funktion von  $L_c$  aufträgt. Die Kurven zeichnen einen Verlauf mit gewisser Differenz, welche als zusätzliche Kinematik zu betrachten ist.



**Abbildung 8.12:** Verdrehung um die Stablängsachse aus COSSERAT-Rotation und Makrorotation für  $\mu_c = 0$  und verschiedene interne Längen  $L_c$ .

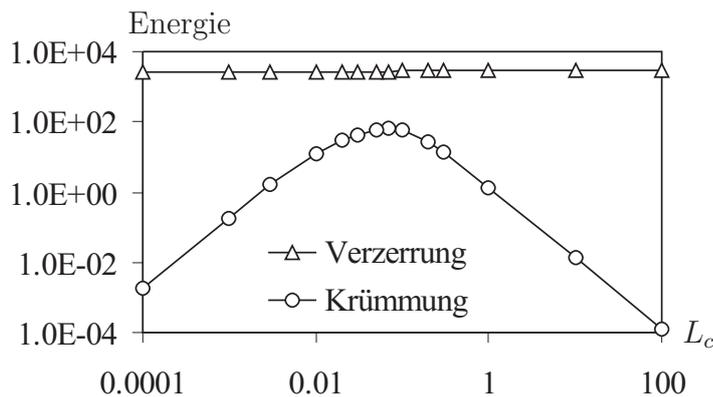
Die zusätzliche Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  kann gegenüber einem COSSERAT-Modell mit  $\mu_c = \mu$  die innere Formänderungsenergie verringern. Dies gilt besonders für kleine  $L_c$ , wobei eine untere und obere Grenze den Effekt beschränkt. So liegt die gesamte

Formänderungsenergie in Abb. 8.13 zwischen den Grenzwerten 2546 und 3047, während sie für  $\mu_c = \mu$  und  $L_c = 0$  bei 3422 liegt.



**Abbildung 8.13:** Gesamte Formänderungsenergie und Verzerrungsenergie für  $\mu_c = 0$  und verschiedene interne Längen  $L_c$ .

Die gesamte Formänderungsenergie unterscheidet sich lediglich im Intervall  $L_c \in (0.003; 1)$  nennenswert von der Verzerrungsenergie. Außerhalb dieses Intervalls fällt die Krümmungsenergie quantitativ nicht ins Gewicht. In diesem Beispiel erreicht die Krümmungsenergie einen Maximalwert von 65 bei  $L_c \approx 0.07$ .



**Abbildung 8.14:** Verzerrungsenergie und Krümmungsenergie im Vergleich. Auch hier für  $\mu_c = 0$  und verschiedene interne Längen  $L_c$ .

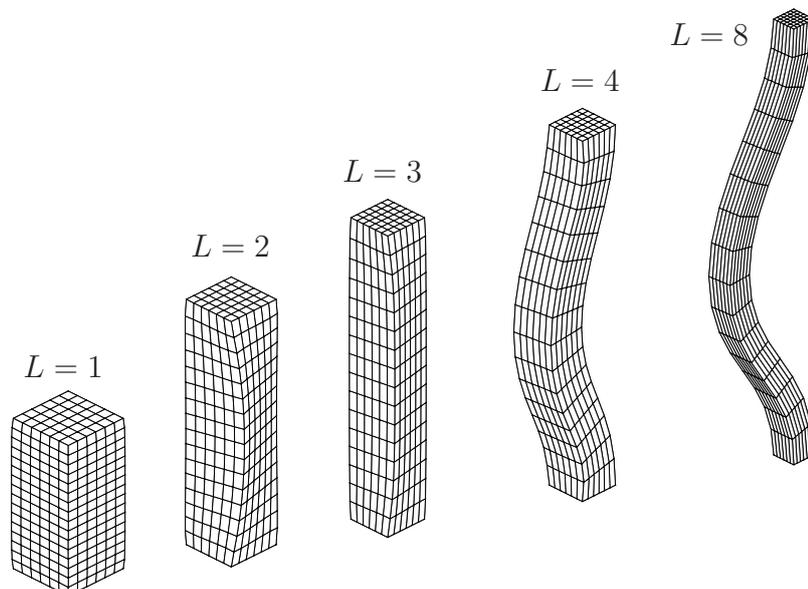
Aus Abb. 8.14 ist ersichtlich, dass die Krümmungsenergie der Verzerrungsenergie quantitativ untergeordnet ist. Trotzdem ist das Verhalten bezüglich Stabilität und Deformation eng an die Wahl der internen Länge und damit an die Krümmungsenergie gebunden.

Die vorliegenden Ergebnisse des COSSERAT-Modells lassen sich für  $\mu_c = 0$  im Sinne des Kap. 7.7 interpretieren. Bei kleinen internen Längen agiert die COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  so, dass sich weicheres Verhalten im Sinne von Anelastizität einstellt. Dieser Effekt kann bereits zu Beginn der Deformation einsetzen und äußert sich **nicht** durch sichtbare Verwindung der Struktur. Dies geht aus der Makrorotation in Abb. 8.12 für  $L_c < 0.01$  hervor.

Die zusätzliche Kinematik des COSSERAT-Modells ist weniger geometrisch sondern mehr als interne Variable initialer, plastischer Vorgänge zu betrachten. Wird die dafür notwendige innere Krümmung durch großen internen Längenparameter  $L_c \geq 1$  unterdrückt, reagiert das Modell mit einer direkt sichtbaren Verwindung der Struktur.

Es sei noch bemerkt, dass die sichtbare Verwindung für große  $L_c$  bei schlanken Druckstäben weniger bis gar nicht mehr zu beobachten ist. Bei großer Schlankheit knicken die Proben bei geringer Last aus und die Verwindung bleibt klein.

Zur Demonstration dieses Sachverhaltes wird die Länge des Druckstabes bei gleich bleibendem Querschnitt zwischen  $L = 1$  und  $L = 8$  variiert. Den folgenden Ergebnissen liegt wieder eine stochastische Störung mit  $W_{\text{imp}} = 1 \cdot 10^{-6}$  und die Verfolgung eines stabilen Lösungspfades bis zur Stauchung  $\varepsilon = 10\%$  zugrunde. In Abb. 8.15 sind die verformten Strukturen für die Parameter  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 1$  zu sehen.



**Abbildung 8.15:** Deformation für  $\mu_c = 0$ ,  $L_c = 1$  und Variation der Probenlänge.

Die Probe der Länge  $L = 1$  durchläuft keinen Stabilitätspunkt bis zur endgültigen Stauchung von  $\varepsilon = 10\%$ . Dementsprechend ist weder Verwinden noch Ausknicken zu beobachten. Die Probe der Länge  $L = 2$  entspricht dem oben diskutierten Fall mit Verwindung. Für  $L = 3$  ist die Verwindung bereits schwächer ausgeprägt. Für  $L = 4$  ist sowohl Verwinden als auch Ausknicken zu beobachten. Der Fall  $L = 8$  ist nahezu frei von einer Verwindung und knickt stark aus.

Die Verwindung beeinflusst den Widerstand gegen das Zusammendrücken der Probe. Jedoch ist der Effekt im Vergleich zur Abminderung des Widerstands durch Knicken wesentlich geringer. In Abb. 8.16 ist die erforderliche Druckkraft  $F$  für verschieden schlanke Proben über der Stauchung  $\varepsilon$  abgetragen.

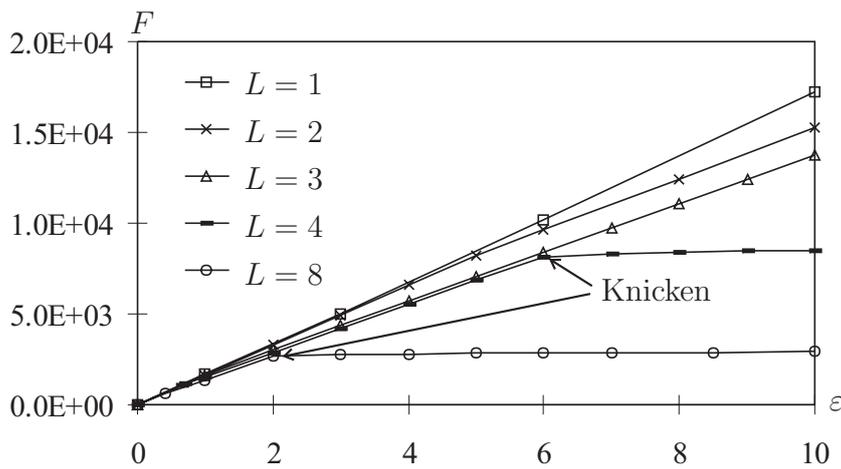


Abbildung 8.16: Deformation für  $\mu_c = 0$ ,  $L_c = 1$  und Variation der Probenlänge.

## 8.2 Kragarm

Ein gedrungener, eingespannter Stab aus Stahl wird einachsiger Biegung ausgesetzt. Der Stab hat die Länge  $L = 5\text{ cm}$ , einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge  $b = h = 1\text{ cm}$ , einen Elastizitätsmodul von  $E = 21000\text{ kN/cm}^2$  und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$ .

Der Stab soll an der Einspannung mit einer starren Platte verschweißt sein, so dass dort jegliche Verschiebungen unterbunden sind. Das Modell ist in Abb. 8.17 dargestellt. Eine über die gesamte Balkenlänge konstante Volumenlast  $q = 0.04\text{ kN/cm}^3$  belastet den Stab. Diese wird entgegen der 3-Richtung gleichmäßig über die Querschnittsfläche eingetragen.

Das Finite-Element-Netz soll auf Basis einer Vergleichsstudie gewählt werden. Die Absenkung  $f$  am Ende des Kragarmes berechnet sich nach TIMOSHENKO-Balkentheorie mit einer effektiven Schubfläche von  $A_S = \frac{5}{6}A$  zu

$$f = f_{\text{Biegung}} + f_{\text{Schub}} = \frac{3qL^4}{2Ebh^3} + \frac{3qL^2}{5\mu bh} = 0.00184\text{ cm} \quad (8.4)$$

und wird als analytischer Vergleichswert herangezogen. Der Anteil aus Schub beträgt in der vorliegenden Situation 3.2% der Absenkung aus Biegung. Die Balkenlösung liefert eine maximale Biegenormalspannung von  $3\text{ kN/cm}^2$  an der Einspannung des Stabes.

Da in der Balkentheorie die Querkontraktion des Materials keine Beachtung findet, auch bezüglich den Effekten an der Einspannung, wird in der Vergleichsstudie mit  $\nu = 0$  gearbeitet.

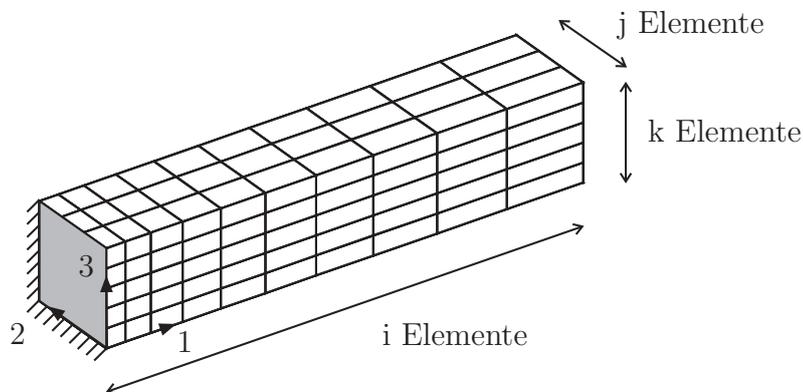
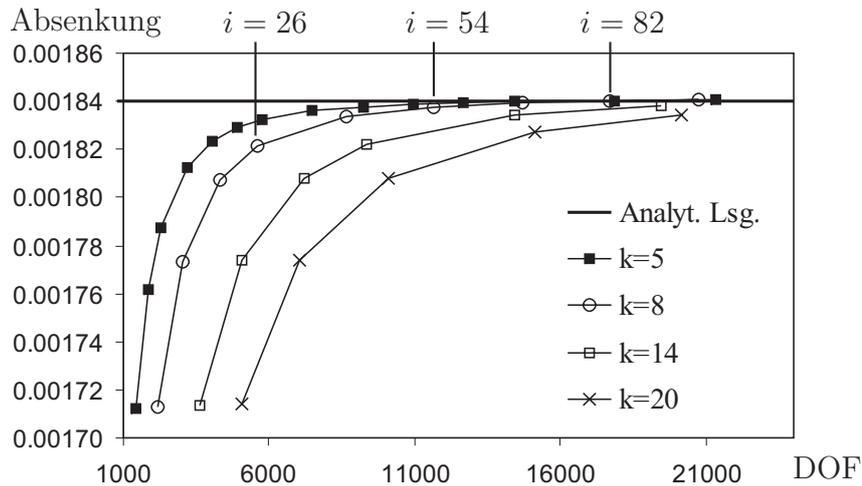


Abbildung 8.17: Diskretisierung und Lagerung des Stabs.

Durch Netzverdichtung an der Einspannung wird dem quadratischen Anstieg von Biegemoment und Krümmung in diesem Bereich Rechnung getragen. So sind 50%

der 8-Knoten Volumenelemente<sup>79</sup> im ersten Drittel der Probe verwendet.



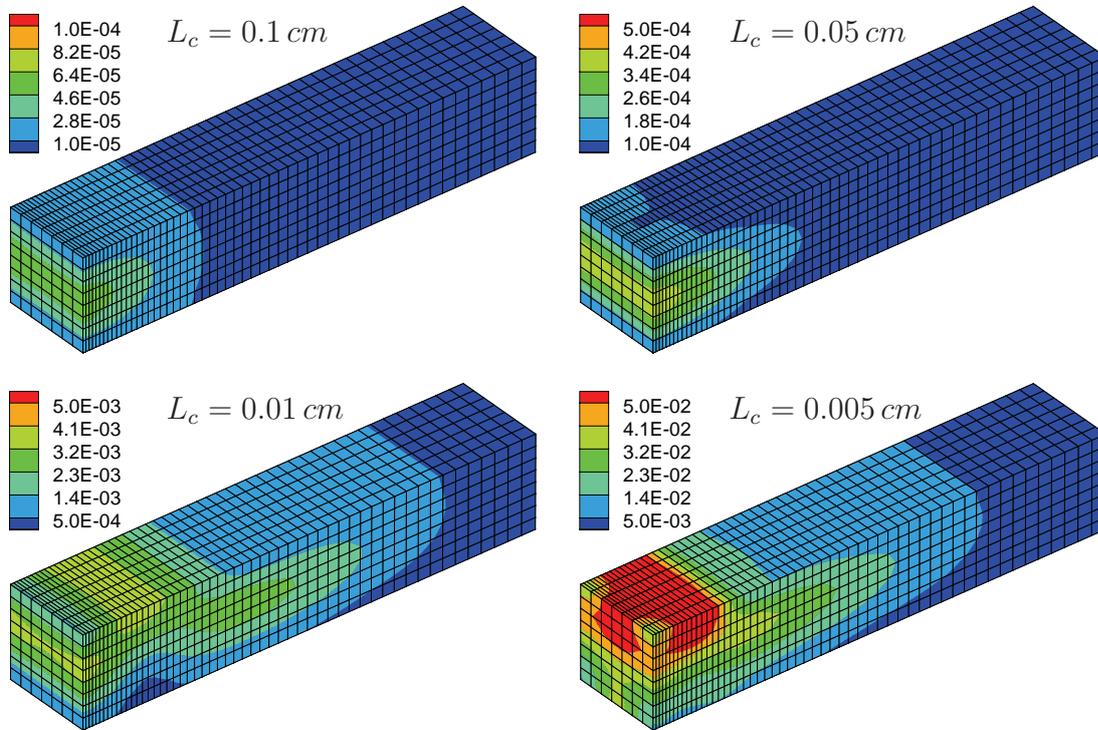
**Abbildung 8.18:** Absenkung am Stabende für ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material und  $j = 7$  Elemente in der Breite,  $k$  Elemente über der Höhe und  $i$  Elemente in Stabrichtung.

Aus Abb. 8.18 geht hervor, dass ein Finite-Element-Netz mit  $i = 54$ ,  $j = 7$  und  $k = 8$  (3024 Elemente mit linearen Ansatzfunktionen) die analytische Lösung zufriedenstellend repräsentiert. Den weiteren Berechnungen liegt dieses Netz zugrunde.

Das COSSERAT-Modell ergibt Last-Verschiebungskurven, welche dieselbe Charakteristik wie im Torsionstest aufweisen. Für  $\mu_c > 0$  ist steiferes Verhalten des Materials zu beobachten, was mit großem  $L_c$  zunimmt. Für  $\mu_c = 0$  ist keine nennenswerte Abweichung zur Steifigkeit klassischen ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Materials festzustellen, sofern  $L_c$  genügend groß - jedoch dann beliebig, gewählt wird. Mit  $\mu_c = 0$  und kleiner interner Länge  $L_c$  tritt wiederum weiches Verhalten auf, was auf die zusätzliche Kinematik im COSSERAT-Modell zurückgeführt wird.

So zeigt Abb. 8.19 die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$ , welche hauptsächlich im Auflagerbereich auf NYESche Krümmung und damit einer Erhöhung der Versetzungsdichte  $\Lambda_d$  hinweist. Für  $L_c < 0.05 \text{ cm}$  konzentriert sich die Erhöhung der Versetzungsdichte in den unter Zugspannung stehenden Bereich auf der Oberseite.

<sup>79</sup>Elemente mit linearen Ansatzfunktionen



**Abbildung 8.19:** Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  für  $\mu_c = 0$  und unterschiedliche  $L_c$ .

Die Ursache für das unsymmetrische Verhalten bei kleiner interner Länge  $L_c$  wird durch die Unsymmetrie der Last-Verschiebungskurve bei Zug- und Druckbeanspruchung begründet, vgl. Abb. 4.2. Andere Unsymmetrien sind hier nicht vorhanden. Eine Verformung im Zugbereich benötigt im vorliegenden COSSERAT-Modell geringere Formänderungsenergie als dieselbe Verformung im Druckbereich. Die zusätzliche Kinematik  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{ae}}$  ist bestrebt, unter Bildung von NYEScher Krümmung, die COSSERAT-Verzerrung  $\bar{\mathbf{U}}$  so einzustellen, dass die Gesamtenergie im Modell minimal wird.

Sofern man die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  für  $\mu_c = \mu$  überhaupt mit Versetzungsdichte in Verbindung bringen kann, zeigt Abb. 8.20, dass sich diese anders verhält. Die Absolutwerte sind geringer und näher an der Einspannung lokalisiert.

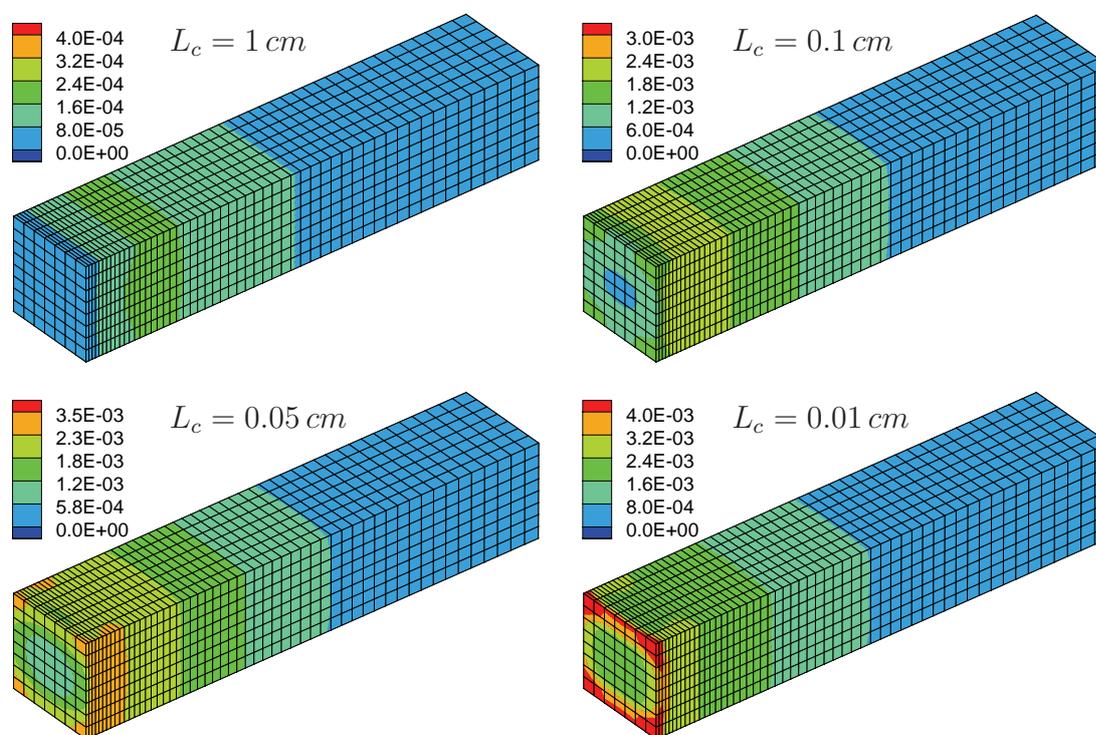
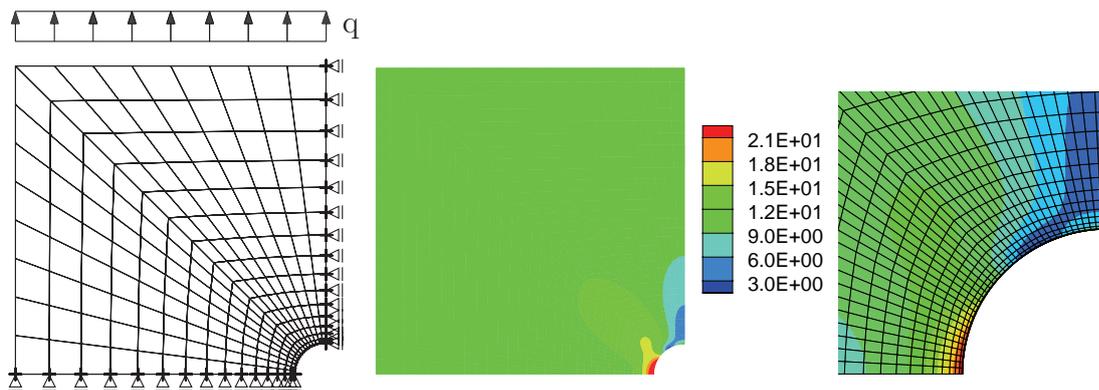


Abbildung 8.20: Norm der Krümmung  $\mathcal{C}$  für  $\mu_c = \mu$  und unterschiedliche  $L_c$ .

### 8.3 Scheibe mit Loch

Die homogene, einaxiale Zugbeanspruchung eines Körpers wird durch ein kreisrundes Loch gestört. Dabei auftretenden Kerbspannungen liegen über den homogenen Spannungen im ungestörten Bereich. Aus experimentellen Versuchen und numerischen Simulationen ist bekannt, dass plastische Effekte auf der Berandung des Loches einsetzen, z.B. RAMM et al. [188] oder GRAMMENOUDIS & TSAKMAKIS [79]. Dies führt im Weiteren zur Ausbildung eines Scherbandes oder bei Wechselbeanspruchung zur Ermüdung des Materials.

Nachfolgende Untersuchung findet an einem scheibenartigen Ausschnitt einer langen Probe statt und setzt ebenen Verzerrungszustand voraus. Die Scheibe ist  $b = 20$  cm breit bzw. hoch, besitzt den Elastizitätsmodul  $E = 21000$  kN/cm<sup>2</sup> und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$ . Das Loch mit Radius  $r = 1$  cm liegt im Zentrum der Scheibe. Die maximale Belastung ist mit  $q = 6$  kN/cm so gewählt, dass auftretende Spannungsspitzen<sup>80</sup> unterhalb der Streckgrenze von Stahl S355 liegen. In der Scheibe sind unter dieser Last kleine Verzerrungen und damit auch kleine elastische Krümmungen zu erwarten. Weiterhin wird die COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  in der nahen Umgebung der Identität liegen.



**Abbildung 8.21:** Links: Grobes Netz, Geometrie und Randbedingungen des Modells. Mittig: VON MISES-Vergleichsspannung für  $q = 6$  kN/cm und ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material. Rechts: Vergrößerung im Bereich der Störung mit VON MISES-Vergleichsspannung und feinem Netz.

Die Lagerung und Belastung des Modells ist Abb. 8.21 (links) zu entnehmen. Unter Ausnutzung von Symmetrie wird nur die linke obere Ecke der Scheibe modelliert. Auf den beiden Symmetrieachsen muss der Drehvektor  $\bar{\alpha}$  aus

<sup>80</sup> als VON MISES-Vergleichsspannung gemessen

Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  dem Nullvektor entsprechen, um Symmetrie zu gewährleisten. Durch Netzverdichtung im Bereich der Störung wird den zu erwartenden Inhomogenitäten Rechnung getragen.

Die Spannungskonzentration am Rand des Loches wird durch die COSSERAT-Parameter  $\mu_c$  und  $L_c$  beeinflusst. So ist Abb. 8.22 zu entnehmen, wie sich der Kerbspannungsfaktor  $f := \max\{\sigma_V\}/\sigma_{\text{homogen}}$  mit  $\sigma_{\text{homogen}} := q \cdot b/(b - r)$  für zunehmendes  $L_c$  bis zu einer gewissen Grenze vermindert.<sup>81</sup>

Die Verminderung und deren Grenze hängt jedoch vom Parameter  $\mu_c$  ab. Unabhängig von der Wahl der internen Länge  $L_c$  ist für verschwindenden Parameter  $\mu_c$  keine Abminderung zu beobachten. Dies unterstreicht die Andersartigkeit des COSSERAT-Modells für  $\mu_c = 0$ , welches für die hier betrachteten kleinen Lasten praktisch die klassisch, linear-elastische Antwort liefert. Auch für  $L_c \rightarrow \infty$  findet dann kein Abbau der Spannungskonzentration statt, da das Problem fast entkoppelt.

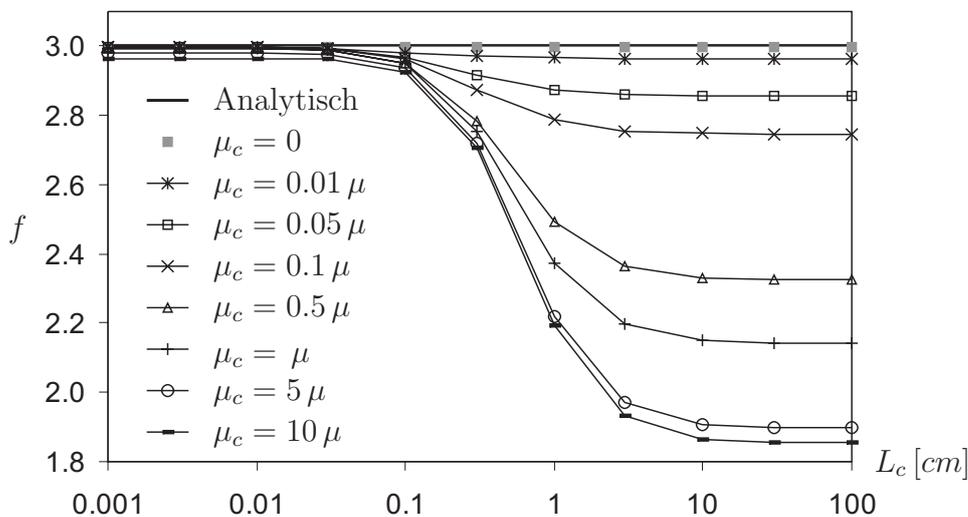


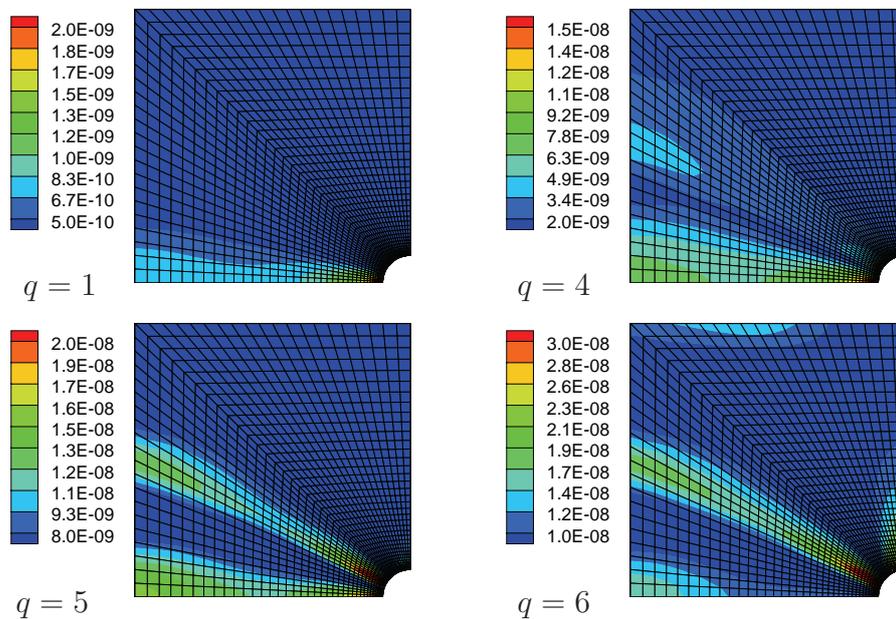
Abbildung 8.22: Kerbspannungsfaktor.

Doch ist lediglich für  $\mu_c = 0$  die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  auch noch weit außerhalb der Störung erhöht. Die Krümmung  $\mathfrak{C}$  lokalisiert sich in Zonen, welche sich mit zunehmender Höhe der Belastung z.T. erst entwickeln, wie in Abb. 8.23 gezeigt.

Die Variation der internen Länge  $L_c$  für  $\mu_c = 0$  verändert das grundsätzliche Verhalten nur quantitativ, die Form und Lage der Zonen bleibt weitgehend gleich.

<sup>81</sup> Das analytische Ergebnis für den Kerbspannungsfaktor  $f$ , welches eine unendlich ausgehende Scheibe voraussetzt, kann auf die vorliegende endliche Scheibe durch die Definitionen zum Kerbspannungsfaktor in guter Näherung übertragen werden, da  $r \ll b$ .

Die Norm der Krümmung in Abb. 8.22 weist im Sinne von Anelastizität Bänder mit erhöhter Versetzungsdichte auf. Unter geringer Belastung  $q = 1$  entwickelt sich zunächst ein horizontales Band. Es verläuft damit auf einer Linie, in welcher die Zugnormalspannung in vertikaler Richtung maximal ist. Bei zunehmender Beanspruchung entwickelt sich ein stärkeres und geneigtes Band. Unter der Belastung  $q = 6$  tritt das horizontale Band in den Hintergrund und ein vertikales Band erscheint.



**Abbildung 8.23:** Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  für  $L_c = 0.01 \text{ cm}$  und zunehmende Belastung  $q$ .

Diese sukzessive Entwicklung von Bändern mit erhöhter Versetzungsdichte zeigt, dass initiale Plastizität in diesem Modell einen komplexen Hintergrund besitzt, welcher z.B. nicht ausschließlich mit der Vergleichsspannung in Abb. 8.21 korrespondiert. In diesem Zusammenhang kann es für ein Modell mit Plastizität vorteilhaft sein, diese Information zu involvieren, z.B. in einem Fließkriterium.

## 8.4 Halbkugelschale mit Öffnung

Eine Halbkugelschale mit Radius  $R = 10$  zur Mittelfläche, Wanddicke  $t = 0.1$  und einer Öffnung unter  $\vartheta = 18^\circ$  zur Rotationsachse wird häufig zur Überprüfung nichtlinearer Schalenformulierungen verwendet. Die Belastung der Schale findet durch Einzellasten am unteren Rand so statt, dass große Verschiebungen und Drehungen auftreten, vgl. Abb. 8.24 (rechts).

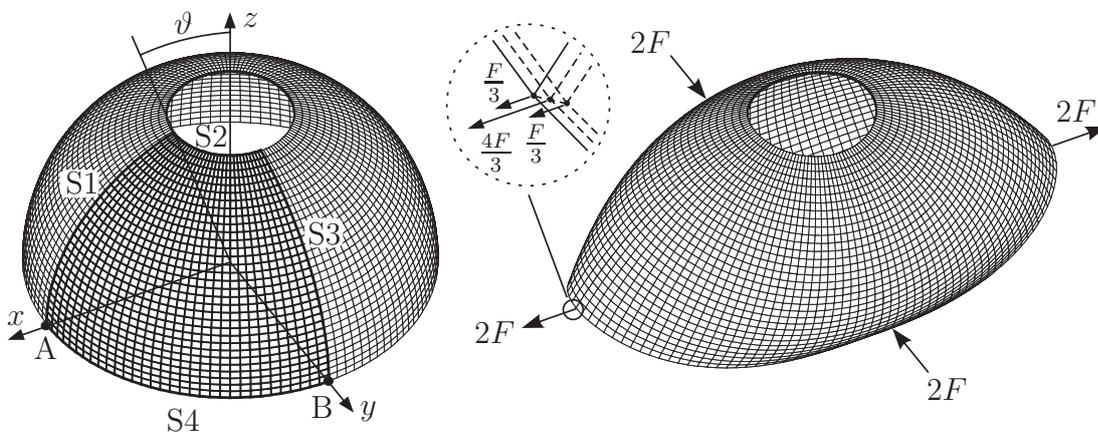


Abbildung 8.24: System der Halbkugelschale und unter Belastung  $F = 1000$ .

Das elastische ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Material ist durch den Elastizitätsmodul  $E = 6.825 \cdot 10^7$  und die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  charakterisiert.

Das System soll unter Ausnutzung der doppelten Symmetrie berechnet werden. Dadurch verschwinden auf der Linie S1 die Verschiebungen in  $y$ -Richtung sowie die Drehungen um die  $x$ - und  $z$ -Achse. Auf der Linie S3 verschwinden die Verschiebungen in  $x$ -Richtung sowie die Drehungen um die  $y$ - und  $z$ -Achse. Die Forderungen bezüglich der Rotationen auf S1 und S3 stellen eine Einschränkung des Lösungsraumes für die COSSERAT-Theorie dar. Auf die Untersuchung dieses Sachverhaltes wird hier jedoch verzichtet. Die Linien S2 und S4 unterliegen keinen Vorgaben an Verschiebungen und Drehungen.

Für ein hinreichend feines Elementnetz und durch Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen kann das Modell Lockingeffekte weitgehend unterdrücken. Es genügt die isoparametrische Vernetzung mit 16 Elementen auf den Linien S1 bis S4, sowie einem Element in Dickenrichtung der Schale. Bei einer Schalendicke  $t = 0.01$  wären mindestens 32 Elemente auf den Linien S1 bis S4 notwendig, um Lockingeffekte zu unterdrücken.

Da die Visualisierung ein Netz durch alle Oberflächenknoten legt, zeigt Abb. 8.24 und Abb. 8.29 Netze mit scheinbar doppelter Anzahl an Elementen.

Die Belastung  $F = 1000$  kann für  $\mu_c = \mu$  in 5 Lastschritten mit jeweils 6 Iterationen erreicht werden. Für  $\mu_c = 0$  ist die Anzahl der erforderlichen Lastschritte von der internen Länge  $L_c$  abhängig. Während für  $L_c = 0.1$  noch 10 Lastschritte genügen, werden für  $L_c = 0.01$  bereits 40 Lastschritte benötigt. Dabei treten bereits erkennbare Abweichungen zur klassischen Lösung auf, was sich für kleineres  $L_c$  weiter verstärkt und immer feinere Lastinkrementierung erfordert.

In den folgenden Last-Verschiebungsdiagrammen liegt die Vergleichslösung einer Schalentheorie nach WAGNER & GRUTTMANN [234] vor. Diese Lösung wird auch durch eine Schalenformulierung von SIMO et al. [215] bestätigt und ist in den Diagrammen als ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Lösung gekennzeichnet.

Am Punkt  $A$  bzw.  $B$  der Abb. 8.24 wird die Verschiebung  $u$  bzw.  $v$  im Verlauf der Laststeigerung erfasst und in den Diagrammen aufgetragen. In der Literatur ist es üblich  $u$  und  $v$  in demselben Diagramm aufzutragen, wovon hier jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit abgesehen wird.

In Abb. 8.25 und Abb. 8.26 variiert die interne Länge  $L_c$  bei festem Kopplungsmodul  $\mu_c = \mu$ . Die COSSERAT-Lösung nähert sich für  $L_c = 0$  der ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Lösung dicht an, der Unterschied ist auf verbleibende Lockingeffekte zurückzuführen und verschwindet bei feinerem Netz. Für  $L_c = 1$  scheint die Lösung unbegrenzte Steifigkeit anzunehmen, was wie im Torsionstest als nicht physikalisch sinnvoll erachtet wird.

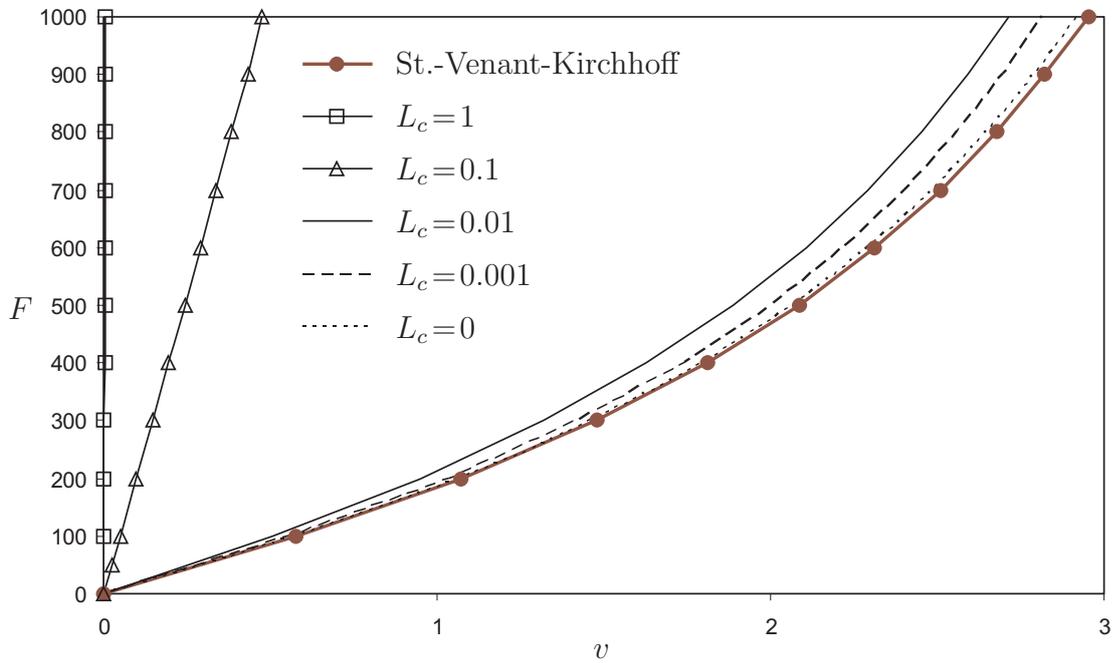


Abbildung 8.25: Last-Verschiebungsdiagramm  $v$  für  $\mu_c = \mu$  und unterschiedliche  $L_c$ .

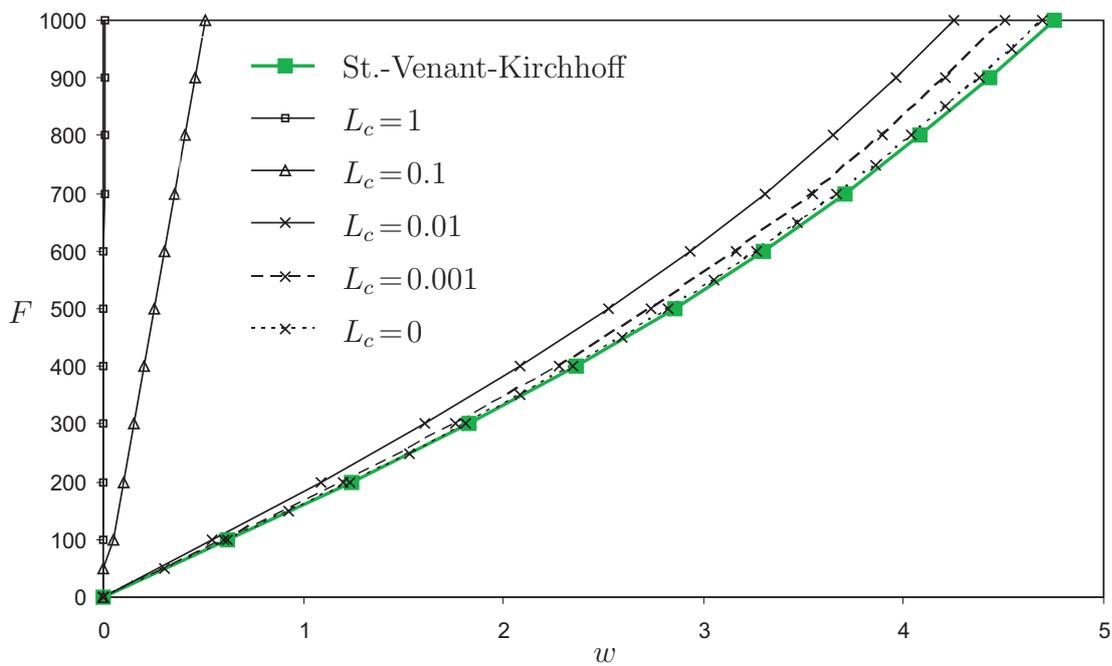


Abbildung 8.26: Last-Verschiebungsdiagramm  $w$  für  $\mu_c = \mu$  und unterschiedliche  $L_c$ .

Im Fall  $\mu_c = 0$  zeigt Abb. 8.27 und Abb. 8.28 je nach interner Länge  $L_c$  steiferes als auch weiches Verhalten.

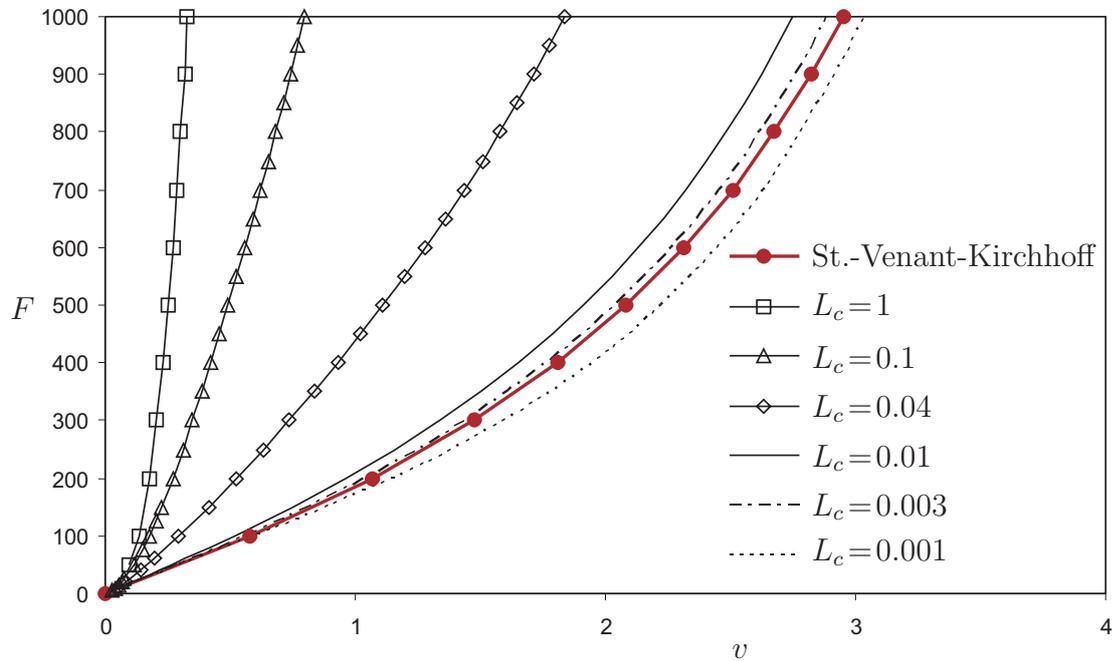


Abbildung 8.27: Last-Verschiebungsdiagramm  $v$  für  $\mu_c = 0$  und unterschiedliche  $L_c$ .

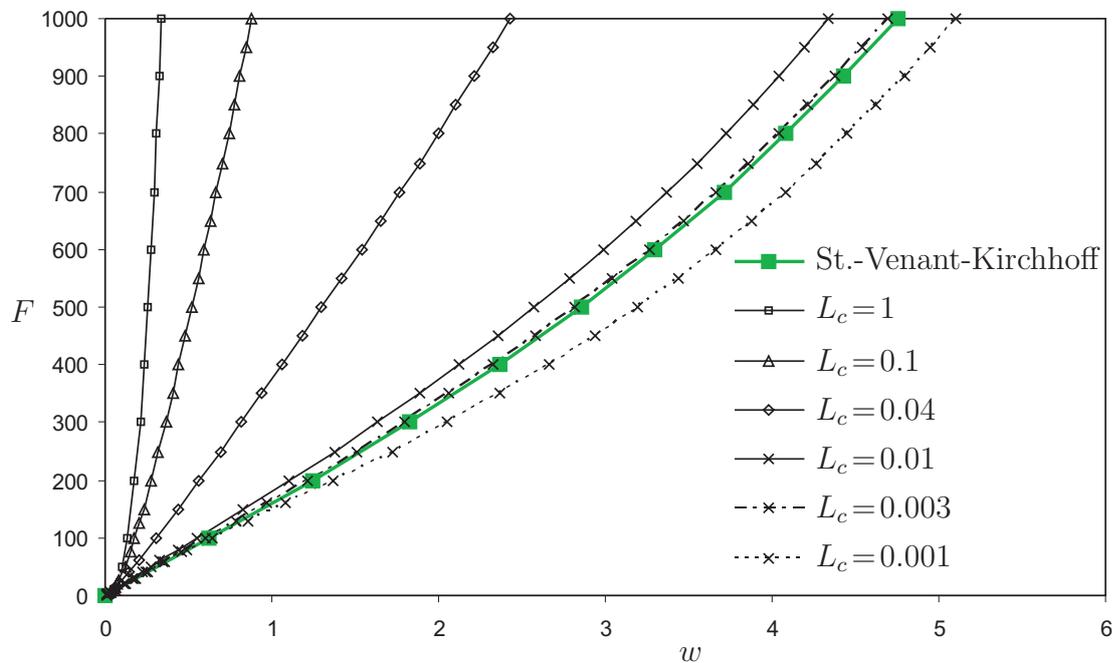
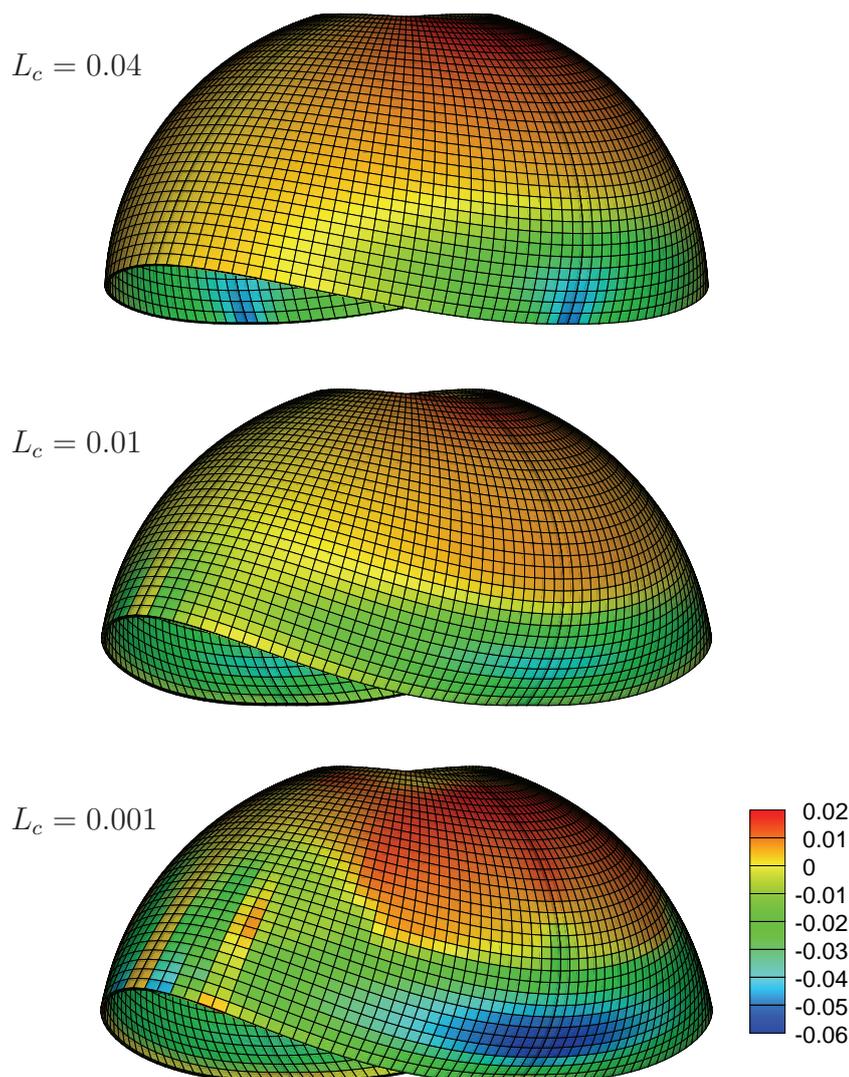


Abbildung 8.28: Last-Verschiebungsdiagramm  $w$  für  $\mu_c = 0$  und unterschiedliche  $L_c$ .

Für  $\mu_c = 0$  repräsentiert die Last-Verschiebungskurve mit  $L_c = 1$  näherungsweise die obere Grenze der Steifigkeit. Für  $F = 1000$  ist die Lösung mit  $L_c = 10$  nur 1.97 % und mit  $L_c = 100$  nur 1.99 % steifer.

Weiterhin ist die Anfangstangente  $T$  für  $\mu_c = 0$  unabhängig von der Wahl der internen Länge  $L_c$ , was mit Beobachtungen in anderen Tests konform ist.



**Abbildung 8.29:** Drehkomponente  $\hat{\alpha}_1$  der zusätzlichen Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  für  $\mu_c = 0$  und verschiedene  $L_c$ .

Sowohl Verzerrungen als auch Krümmungen sind im Beispiel so groß, dass der Anteil an elastischer Krümmung nicht wie in den Beispielen des Kap. 6.6, 8.2 und 8.3 gering ist. So stellt nach der Diskussion in Kap. 7.8 die Krümmung  $\mathfrak{C}$  ein gemischtes Maß für elastische und NYESche Krümmung dar. Die interne Länge  $L_c$  bestimmt damit Momentenspannungen aus zwei unterschiedlichen Ursachen. So ist es nicht eindeutig möglich, die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  direkt mit der Versetzungsdichte zu korrelieren. Davon wird hier auch Abstand genommen.

Doch deutet das weichere Verhalten für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.001$  im Verlauf der weiteren Deformation auf die zusätzliche Freiheit im COSSERAT-Modells hin. Die gezielte Betrachtung der zusätzlichen Kinematik  $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{\text{ae}}$  ist nach Gl. 7.71 die einzige Möglichkeit die beiden Ursachen der Krümmung auseinander zu halten.

Deshalb wird durch die Drehkomponente  $\hat{\alpha}_1$  der zusätzlichen Kinematik  $\hat{\mathbf{R}}$  in Abb. 8.29 die Abweichung der COSSERAT-Rotation  $\bar{\mathbf{R}}$  von der Makrorotation  $\text{polar}[\mathbf{F}]$  gezielt dargestellt.

Während sich für  $L_c = 0.04$  vor allem im Bereich der Lasteinleitung eine Drehung  $\hat{\alpha}_1$  einstellt, verlagert sich dieser Bereich für kleinere  $L_c$  nach oben in einen Bereich mit Biegezugspannungen.

Ein klassisches Materialmodell sagt z.B. über die Vergleichsspannung hauptsächlich im Bereich der Lasteinleitung Spannungsspitzen vorher. Im COSSERAT-Modell ist dies auch der Fall, doch sind für  $\mu_c = 0$  weitere Informationen in den Ergebnissen enthalten.

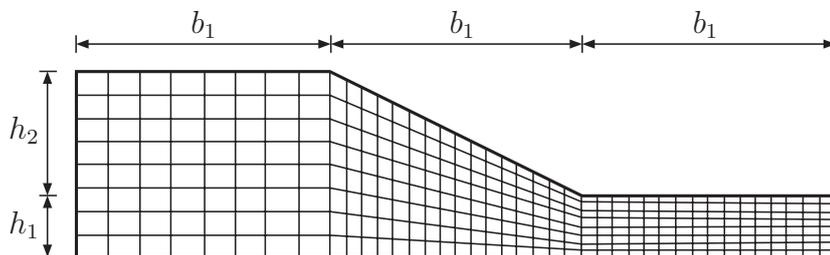
So überlagern anelastische Effekte aus Biegezugbereichen die Effekte im Lasteinleitungsbereich, sofern die interne Länge  $L_c$  klein ist.

## 8.5 Scherfugen einer Böschung

Ausblickend soll demonstriert werden, wie die innere Kinematik der COSSERAT-Theorie bekannte Verhältnisse beim Grundbruch einer Böschung widerspiegelt. Die Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$ , welche bisher mit einer Erhöhung der Versetzungsdichte in Zusammenhang gebracht wird, erscheint bei diesem aus dem Grundbau bekannten Beispiel als Indikator, wo und wie mit dem Einsetzen von Scher- bzw. Gleitfugen zu rechnen ist.

Böden mit geringer Kohäsion<sup>82</sup>  $c_B$  und hohem Reibungswinkel<sup>83</sup>  $\varphi_B$  bilden beim Versagen der Böschung ebene, böschungsparelle Gleitflächen. In kohäsiven Böden werden dagegen gekrümmte Gleitflächen (Gleitkreise) beobachtet.

Eine Veröffentlichung von SCHANZ [206] untersucht mit Hilfe der Finite-Element-Methode die Standsicherheit einer homogenen, dränierten Böschung mit Neigungsverhältnis 2:1. Die Geometrie sowie ein Elementnetz<sup>84</sup> sind in Abb. 8.30 dargestellt.



**Abbildung 8.30:** Geometrie und ein Elementnetz entnommen aus SCHANZ [206].

Die Berechnung von SCHANZ setzt ebenen Verzerrungszustand voraus. Die seitlichen Ränder und die Netzunterkante werden, jeweils senkrecht zur Kante, mit festen Lagern gehalten. Es wird elastisch, ideal-plastisches Stoffgesetz mit MOHR-COULOMBSCHER Bruchbedingung verwendet. Grundwasser wird nicht berücksichtigt, auch werden keine Auflasten angesetzt.

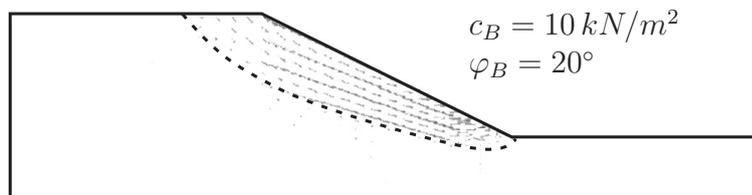
Abb. 8.31 und 8.32 zeigen den Verschiebungsplot aus [206] im rechnerischen

<sup>82</sup> Die Bodenmechanik versteht unter Kohäsion (auch Haftfestigkeit oder Scherfestigkeit) die zusammenhaltenden Kräfte in bindigen Böden. Sie ist nur bei Böden merklich, die sehr kleine Körner enthalten, wie z.B. Ton und Schluff. Die Kohäsion sorgt im Boden oder im feinkörnigen Lockergestein für den inneren Zusammenhalt der einzelnen Teilchen untereinander.

<sup>83</sup> Der Reibungswinkel oder Winkel der inneren Reibung ist der Winkel, unter dem körniges Material belastet werden kann, ohne abzurutschen oder zu versagen. Er ist ein Maß für die Reibung und Rauigkeit der Körner untereinander. Bei Schüttgut nennt man den Winkel auch Schüttwinkel, bei einer Aufschüttung Böschungswinkel.

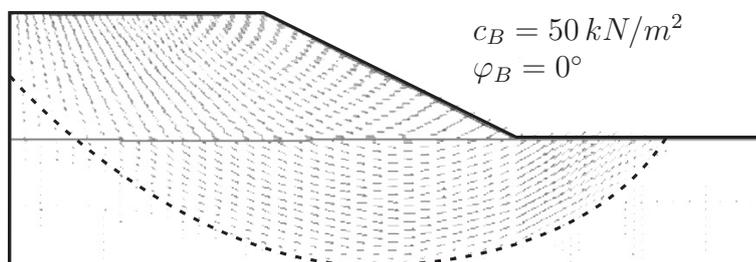
<sup>84</sup> Das Elementnetz ist hier von zwei Fällen nur für Fall 1 dargestellt.

Bruchzustand für zwei Fälle. Der Verfasser hat mit der gestrichelten Linie den Bereich abgegrenzt, welcher sich relativ zum anderen bewegt.



**Abbildung 8.31:** Fall 1 zeigt eine böschungsparelle Gleitfuge, aus SCHANZ [206].

Fall 1 mit der Geometrie  $h_1 = 5\text{ m}$ ,  $h_2 = 10\text{ m}$ ,  $b_1 = 20\text{ m}$  und den Bodenparametern  $E = 100\text{ MN/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$ ,  $\varphi_B = 20^\circ$  und  $c_B = 10\text{ kN/m}^2$  zeigt eine weitgehend böschungsparelle Gleitfuge. Es handelt sich hierbei um einen schwach kohäsiven Boden mit mittlerem Reibungswinkel, wie man es z.B. bei einem Sandboden vorfindet.



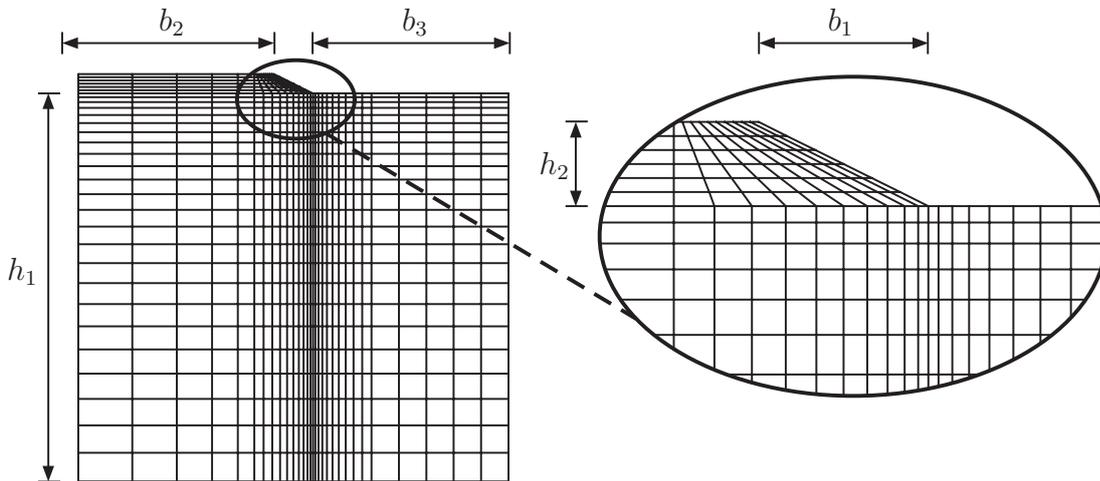
**Abbildung 8.32:** Fall 2 zeigt einen Gleitkreis als Böschungsversagen, aus SCHANZ [206].

Im Fall 2 mit der Geometrie  $h_1 = 10\text{ m}$ ,  $h_2 = 10\text{ m}$ ,  $b_1 = 20\text{ m}$  und den Bodenparametern  $E = 100\text{ MN/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$ ,  $\varphi_B = 0^\circ$  und  $c_B = 50\text{ kN/m}^2$  bildet sich ein Gleitkreis. Es handelt sich um einen stark kohäsiven Boden, welcher keine innere Reibung besitzt. Ton oder Schluff (Silt) sind Beispiele für solche Böden.

Nachfolgend wird die Böschung mit dem COSSERAT-Modell untersucht. Es wird ebenfalls ebener Verzerrungszustand vorausgesetzt, jedoch ein größerer Bereich in der Umgebung der Böschung simuliert, wie es Abb. 8.33 zeigt.

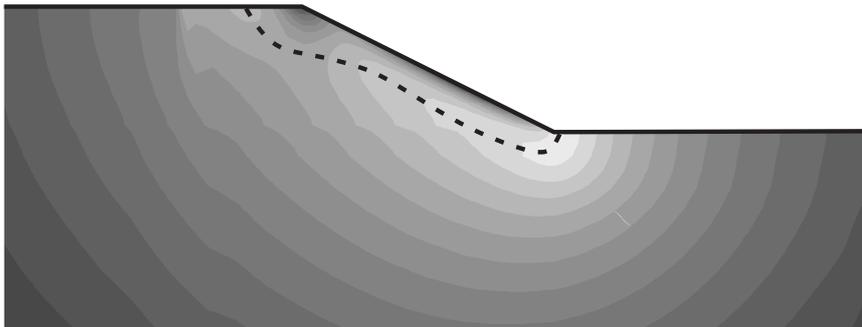
Die Abmessungen  $h_1 = 200\text{ m}$ ,  $h_2 = 10\text{ m}$ ,  $b_1 = 20\text{ m}$ ,  $b_2 = 100\text{ m}$ ,  $b_3 = 100\text{ m}$  sind so gewählt, dass die Lagerungsbedingungen hinreichend weit von den Vorgängen im Bereich der Böschung entfernt sind. Dadurch ist es für diese Vorgänge unerheblich, ob die Lagerung an den Rändern beide Verschiebungskomponenten oder

nur die Verschiebungskomponente senkrecht zum Rand fixiert. Die Drehungen des COSSERAT-Modells sind auf dem Rand frei.



**Abbildung 8.33:** Abmessungen und qualitatives Finite-Element-Netz für die Berechnung mit der COSSERAT-Theorie.

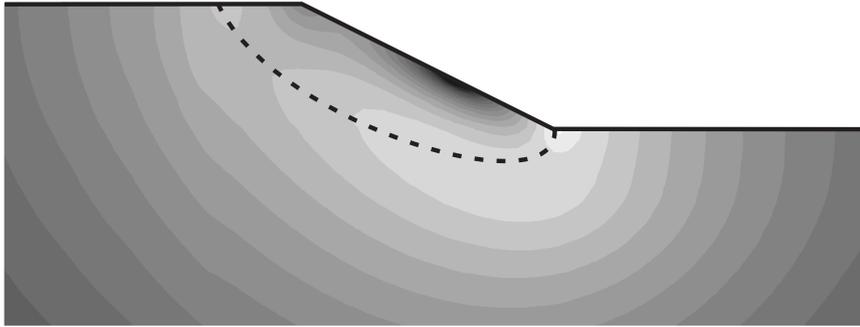
Aus visuellen Gründen ist in Abb. 8.33 ein Finite-Element-Netz mit 810 Elementen dargestellt, was qualitativ das Netz der Berechnung mit 3480 Elementen repräsentiert. In der Berechnung werden 48 Elemente über die Höhe  $h_1$ , 20 Elemente über die Höhe  $h_2$ , 20 Elemente über die Breite  $b_1$ , 10 Elemente über die Breite  $b_2$  und 30 Elemente über die Breite  $b_3$  verwendet. Ihre Anordnung verdichtet sich im Bereich der Böschung. Die Elemente besitzen lineare Ansatzfunktionen.



**Abbildung 8.34:** Ausschnitt des COSSERAT-Modells im Bereich der Böschung für  $\mu_c=0$  und  $L_c=0.005\text{ m}$ . Helle Bereiche zeigen eine erhöhte Norm der Krümmung  $\mathcal{C}$  an.

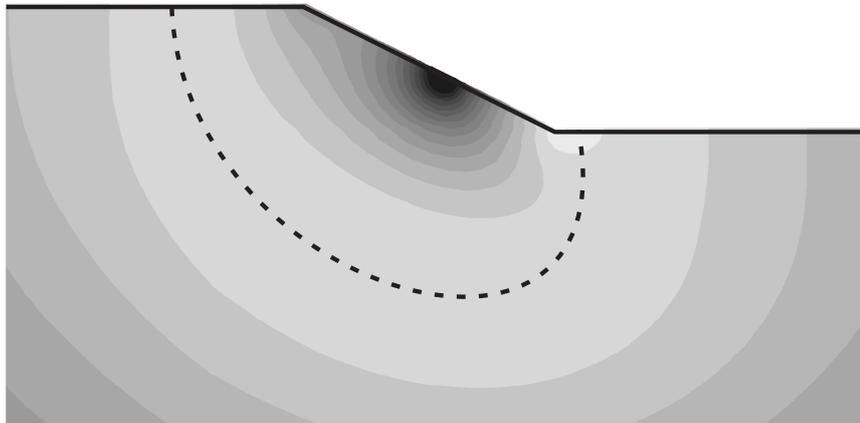
Die gestrichelte Linie in Abb. 8.34 deutet im Zentrum der hellen Bereiche darauf hin, dass hier Informationen für eine böschungsparelle Gleitfuge vorliegt. Basiert die Fließregel eines elasto-plastischen Modells auch auf der Norm der Krümmung  $\mathcal{C}$ , ist die erhöhte Wahrscheinlichkeit einer plastischen Deformation

in diesen Bereichen gegeben. Die Ähnlichkeit der gestrichelten Linie in Abb. 8.34 und Abb. 8.35 zu Fall 1 aus der Berechnung von SCHANZ ist offensichtlich.



**Abbildung 8.35:** Ausschnitt des COSSERAT-Modells im Bereich der Böschung für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.02\text{ m}$ . Helle Bereiche zeigen eine erhöhte Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  an.

Für größere Werte der internen Länge  $L_c$  nimmt die gestrichelte Linie in Abb. 8.36 und Abb. 8.37 immer mehr die Form eines Gleitkreises an.

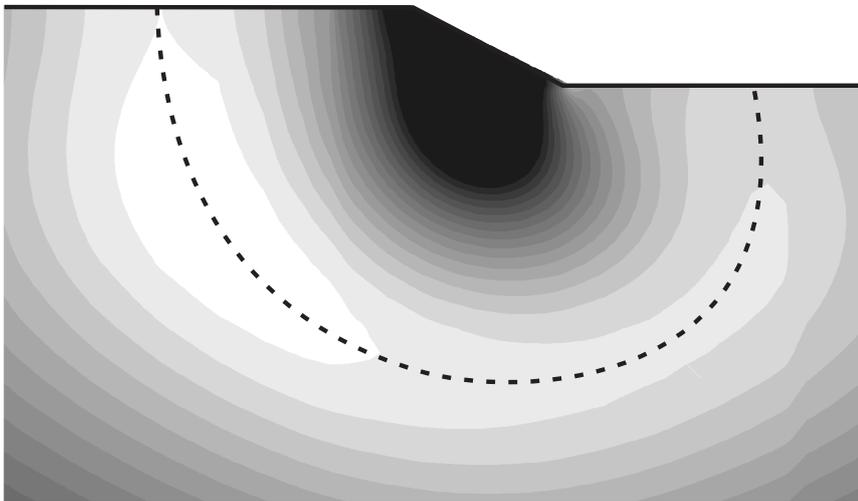


**Abbildung 8.36:** Ausschnitt des COSSERAT-Modells im Bereich der Böschung für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.08\text{ m}$ . Helle Bereiche zeigen eine erhöhte Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  an.

Die interne Länge  $L_c$  beeinflusst die Krümmung  $\mathfrak{C}$  so, dass die gestrichelte Linie im Zentrum erhöhter Norm von  $\mathfrak{C}$  den Effekt von Bodenparametern bezüglich der Scherfuge widerspiegelt. Hierbei kann  $L_c$  mit dem Verhältnis der Bodenparameter  $c_B/\varphi_B$  in Verbindung gebracht werden, also zum Verhältnis zwischen Kohäsion und Reibungswinkel des Bodens.

Es sei nochmals hervorgehoben, dass es weiterer Forschung bedarf um zu klären, inwiefern sich das COSSERAT-Modell zur Vorhersage von Grundbruchvorgängen eignet.

Die hier rein qualitativen Vergleiche lassen immerhin die Vermutung zu, dass in der betrachteten Böschung bereits im elastischen COSSERAT-Modell Tendenzen zu erkennen sind, wo und wie sich irreversible Vorgänge entwickeln. Dies erinnert an die zusätzliche Kinematik bei Anelastizität in Kristallen, welche durch das COSSERAT-Modell beschrieben werden, vgl. Kap. 7.7. In Erdreich ist die zusätzliche Kinematik des COSSERAT-Modells jedoch mit anderen physikalischen Ursachen zu begründen.



**Abbildung 8.37:** Ausschnitt des COSSERAT-Modells im Bereich der Böschung für  $\mu_c = 0$  und  $L_c = 0.32 \text{ m}$ . Helle Bereiche zeigen eine erhöhte Norm der Krümmung  $\mathfrak{C}$  an.

Der Verfasser weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass das vorliegende COSSERAT-Modell keinen konkreten Mechanismus, wie man ihn z.B. in einem plastischen Modell kennt, bietet. Auch ist die interne Länge  $L_c$  nicht direkt mit einem Korndurchmesser sondern mit phänomenologischen Parametern wie Kohäsivität und Reibungswinkel des Bodens gekoppelt.

Von einer höheren Warte aus betrachtet, bietet das vorliegende COSSERAT-Modell jeglicher Deformation an, durch eine bestimmte zusätzliche Kinematik die Gesamtenergie zu minimieren, sofern der Kopplungsmodul  $\mu_c$  dies durch kleine oder verschwindende Werte zulässt. Die Minimierung kann weiterhin desto lokaler erfolgen, je kleiner die interne Länge  $L_c$  ist. Dies erklärt die unterschiedlichen Bereiche in Abb. 8.34 bis 8.37, welche durch die gestrichelten Linien abgegrenzt werden.

Wie es auch in Kap. 6.5 am Beispiel eines transversal isotropen Zugtests diskutiert wird, stößt man mit  $L_c \rightarrow 0$  an eine Grenze des Modells, da die Auflösung des inneren Zusammenhalts im Material nicht mit den Grundsätzen eines homogenen Modells in Übereinstimmung zu bringen ist.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Formulierung, Anwendung und Interpretation einer geometrisch exakten COSSERAT-Theorie. Die wichtigsten Schritte lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Der Behandlung von Rotationen im dreidimensionalen Raum wird besondere Beachtung geschenkt. Durch die Verwendung von Quaternionen gewinnt die numerische Formulierung an Effizienz und Genauigkeit. Das Wesen von Quaternionen ist innerhalb der geometrischen Algebra erklärt. Zur numerischen Behandlung endlicher Rotationen wird ein Algorithmus konstruiert.
- Das COSSERAT-Kontinuum erhält neben einem Verschiebungsfeld ein Drehfeld zur Beschreibung der Kinematik. Diese Erweiterung wird herausgearbeitet und später auf mögliche Ursachen untersucht.  
Die Drehimpulsbilanz erweitert sich durch unsymmetrische Spannungen, Momentenspannungen und eingeprägte Momente. Der Hintergrund für unsymmetrischer Spannungen und Momentenspannungen wird u.a. mit Hilfe eines Homogenisierungsmodells erörtert. Als Ergebnis ist die COSSERAT-Theorie in das Feld nicht-lokaler Kontinuumstheorien zu stellen.
- Die Anwendung dieser geometrisch exakten COSSERAT-Theorie wird mit Hilfe einer nichtlinearen Finite-Element-Formulierung durchgeführt. Da die Rotationen endlich und im dreidimensionalen Raum sind, ist die Umsetzung in einen NEWTON-RAPHSON-Algorithmus zwar aufwändig, doch schematisch. Das Drehfeld wird zur Formulierung einer strukturbezogenen Momentenlast genutzt, was u.a. zur Simulation dünner magnetischer Strukturen innerhalb eines äußeren Magnetfeldes nützlich ist.
- Die konstitutiven Beziehungen dieses COSSERAT-Modells werden in mehreren Schritten erarbeitet. Ein teilweiser Abgleich mit der klassisch linearen Elastizität im isotropen und transversal isotropen Fall findet statt. In der Formänderungsenergie aus COSSERAT-Verzerrung taucht jedoch im isotropen und transversal isotropen Fall ein Materialparameter auf, welcher als Kopplungsmodul  $\mu_c$  bekannt ist. Die Wahl dieses Kopplungsmoduls ist umstritten.
- Durch eine Erweiterung der Formänderungsenergie, was auf nichtlineare Spannungen führt, erhält das vorliegende Modell die Möglichkeit, dem Kopplungsmodul  $\mu_c$  kleine Werte oder gar den Wert 0 zuzuweisen. Das Drehfeld wird in diesem Fall allein durch die nichtlineare Kinematik an

die Verschiebungen gekoppelt. Eine geometrisch lineare COSSERAT-Theorie kann somit die Option  $\mu_c = 0$  nicht bieten.

- Die Regularisierung des Drehfelds findet über Krümmungsenergie statt, welche als Parameter eine interne Länge  $L_c$  involviert. Da  $L_c$  in nicht entwirrbarer Wechselwirkung mit  $\mu_c$  steht, erscheint die Wahl von  $L_c = 0$  **oder**  $\mu_c = 0$  attraktiv, um klare Aussagen für das COSSERAT-Modell zu treffen. Für den ersten Fall mit  $L_c = 0$  bietet sich die Kombination mit  $\mu_c = \mu$  an, da dann ein klassisches BIOT-Modell vorliegt. Für den zweiten Fall mit  $\mu_c = 0$  kann  $L_c$  als phänomenologischer Parameter mit physikalischen Experimenten abgestimmt werden. Dies kann nur dann erfolgreich sein, wenn sich der maßgebende physikalische Effekt im COSSERAT-Modell theoretisch widerspiegelt und weiterhin im Experiment angesprochen wird (z.B. im Torsionstest).
- Der Kopplungsmodul  $\mu_c$  ist nach Ansicht des Verfassers weniger als Materialparameter, sondern als Modellparameter zu betrachten. Er beeinflusst das Verhalten des Modells in der Weise, dass verschiedenartige physikalische Effekte im Grundsatz involvierbar sind. In dieser Arbeit wird der Randschichteffekt, der Effekt aus Mikrostruktur, die elastische Gitterkrümmung<sup>85</sup> sowie die NYESche Krümmung diskutiert. Für den letztgenannten Fall wird eine deformationsabhängige Veränderung von  $\mu_c$  physikalisch begründet in Erwägung gezogen.

In numerischen Beispielen wird die Zuverlässigkeit der verwendeten Algorithmen und des Finite-Element-Modells grundlegend vorgeführt. Ein analytisches Vergleichsbeispiel dient sowohl zur Diskussion der COSSERAT-Theorie als auch zur Überprüfung der numerischen Formulierung. Ein Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur findet ebenso statt. Allerdings ist dies nur für bestimmte COSSERAT-Parameter möglich. So sind dem Autor keine numerischen Untersuchungen über das Verhalten einer COSSERAT-Theorie bekannt, welche dem Kopplungsmodul  $\mu_c$  den Wert 0 zuweisen.

Für die spezielle Wahl von  $\mu_c = 0$  treten im COSSERAT-Modell nicht-klassische Deformationen auf. Mikrostrukturlösungen in einem transversal anisotropen Zugtest unterstreichen zum einen die Abweichung von einer rein lokalen Theorie.

---

<sup>85</sup>Die Wahl des Kopplungsmoduls  $\mu_c > 0$  liefert im wesentlichen ein Gradienten-Elastizitätsmodell.

Last-Verschiebungskurven zeigen zum anderen, dass eine zusätzliche Kinematik die Steifigkeit der Probekörper tatsächlich herabsetzt.

Eine Erklärung dafür wird über den Zusammenhang zu einer Kontinuumstheorie für Versetzungen erzielt.<sup>86</sup> Es liegen bereits Arbeiten zu einer Beziehung zwischen COSSERAT- und Versetzungstheorie vor, wobei eine nichtlineare COSSERAT-Theorie mit verschwindend kleinem Kopplungsmodul  $\mu_c$  jedoch nicht bekannt ist. Diese Forderung ist in der vorliegenden Arbeit an einem einfachen Versetzungsmodell erarbeitet worden. Als Konsequenz erlaubt die nichtlineare COSSERAT-Theorie unsymmetrische Verzerrungen ohne übermäßige unsymmetrische CAUCHY-Spannungen. Für  $\mu_c = 0$  sind unsymmetrische CAUCHY-Spannungen ein Produkt der nichtlinearen Formulierung und damit von höherer Ordnung.

Als physikalisches Bindeglied zwischen COSSERAT- und Versetzungstheorie wird die NYESche Krümmung betrachtet. Unter diesem Aspekt zeigen weitere numerische Beispiele u.a. das Potential des vorliegenden COSSERAT-Modells für eine gradientenplastische Theorie. In der COSSERAT-Krümmung finden sich im vorliegenden Modell unter gewissen Voraussetzungen Hinweise zu initialen, plastischen Vorgängen.

Im Zuge weiterer Forschungsarbeiten werden folgende Punkte von Interesse sein:

- Zur effizienten Berechnung strukturmechanischer Bauteile bietet sich eine Schalenformulierung an, welche auf der vorgestellten COSSERAT-Theorie basiert. Einen Vorschlag dafür findet man in NEFF & CHELMINSKI [166].
- Zur Simulation magnetischer Einwirkung auf magnetische Strukturen ist das COSSERAT-Modell geeignet, auch im Fall des hier behandelten Volumenmodells. Der Interaktion zwischen dem Magnetfeld der Struktur und dem einwirkenden Magnetfeld ist hier allerdings keine Rechnung getragen. Die Kopplung dieser Felder bietet weitere Möglichkeiten zur Forschung. Weiterhin kann im Rahmen einer elektromechanischen Kopplung für z.B. piezokeramisches Material der Effekt von ponderomotorischen Kräften untersucht werden. Hinter diesem Begriff verbergen sich Momentenspannungen, welche aus Polarisation und elektrischem Feld hervorgehen. Das COSSERAT-Modell erfasst Momentenspannungen als Zustandsgröße.
- Ein gradientenplastisches Modell kann den vorgestellten Bezug des COSSERAT-Modells zur Versetzungstheorie beispielsweise zur Definition ei-

<sup>86</sup>Was andere Ursachen nicht ausschließt.

nes Fließkriteriums nutzen. So bekommen initiale plastische Vorgänge bereits Einfluss auf die weitere Deformation.

- Ein mikromorphes Modell besitzt als konsequente Erweiterung der COSSERAT-Kinematik ein weiteres Feld zur Beschreibung lokaler, volumetrischer Änderungen. Das COSSERAT-Modell dient so als Ausgangspunkt für diese Erweiterung. Zur Simulation schaumartiger Materialien ist solch ein mikromorphes Modell von Interesse.
- Beim transversalen Zugtest in Kap. 6.5 wird für den Fall  $\mu_c = 0$  und  $L_c \rightarrow 0$  angesprochen, dass es zu numerischen Problemen kommt. Dies ist bei dieser speziellen Parameterwahl auch in anderen Beispielen zu beobachten. Diesen Fall kann man als Material mit latenter Mikrostruktur betrachten, vgl. z.B. CAPRIZ [23]. Eine vollständige Lösung dieses Problems in 2-D gibt die Diplomarbeit von FISCHLE [65]. So bestätigen sich in der Arbeit von FISCHLE experimentelle Beobachtungen bezüglich plastischer Deformationen in einem Einkristall aus Kupfer, welche in der Arbeit von ZAAFARANI et al. [241] behandelt werden. Der 2-D Lösungsansatz weist weiterhin den Weg, latente Mikrostrukturlösungen auch in 3-D numerisch zu erzielen.

## A Anhang

### A.1 Der Curl-Operator

Der Curl-Operator für Tensorfelder mindestens erster oder höherer Stufe wird allgemein auch als Rotation bezeichnet. Dies wird in dieser Arbeit vermieden, da der Begriff anders belegt ist.

Der Curl-Operator für ein Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  wird durch

$$\begin{aligned} \text{Curl}[\mathbf{v}] &:= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.1)$$

definiert und stellt wiederum ein Vektorfeld dar.

Für zwei Vektorfelder  $\mathbf{v}_1(x, y, z)$ ,  $\mathbf{v}_2(x, y, z)$  und ein Skalarfeld  $U(x, y, z)$  gelten folgende Rechenregeln

$$\text{Curl}[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] = \text{Curl}[\mathbf{v}_1] + \text{Curl}[\mathbf{v}_2] \quad (1.2)$$

$$\text{Curl}[U\mathbf{v}] = U \text{Curl}[\mathbf{v}] + \text{Grad}[U] \times \mathbf{v} \quad (1.3)$$

Die Definition des Curl-Operators motiviert sich aus der Forderung, dass jedes Potentialfeld  $\mathbf{v}$  mit  $\mathbf{v} = \text{Grad}[U(x, y, z)]$  stets wirbelfrei ist

$$\text{Curl}[\text{Grad}[U]] = 0 \quad (1.4)$$

und liefert die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Feld  $\mathbf{v}(x, y, z)$  konservativ ist. Dies wird für jedes beliebige Skalarfeld  $U(x, y, z)$  immer erfüllt falls

$$\text{Curl}[\text{Grad}[U]] := \nabla \times (\text{Grad}[U]) = \nabla \times (U\nabla) = \nabla \times (\nabla U) \quad (1.5)$$

Stellt man diese Forderung im übertragenen Sinn auch an die Rotation des Gradienten eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}(x, y, z)$

$$\text{Curl}[\text{Grad}[\mathbf{v}]] = 0 \quad (1.6)$$

wird dies für jedes beliebige Vektorfeld  $\mathbf{v}(x, y, z)$  stets erfüllt wenn

$$\text{Curl}[\text{Grad}[\mathbf{v}]] := \nabla \times (\text{Grad}[\mathbf{v}])^T = \nabla \times (\mathbf{v} \otimes \nabla)^T = \nabla \times (\nabla \otimes \mathbf{v}) \quad (1.7)$$

Die Transposition in Gl. 1.7 ist für obige Forderung notwendig und impliziert sich aus der Definition des Gradienten eines Vektorfeldes. Identifiziert man den zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A} = \text{Grad}[\mathbf{v}]$  schreibt sich Gl. 1.7 zu

$$\text{Curl}_b[\mathbf{A}] := \nabla \times (\mathbf{A})^T = \nabla_a \epsilon_{aij} A_{ki} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad . \quad (1.8)$$

Da in der Fachliteratur immer wieder auch folgende Definition auftaucht

$$\text{Curl}_\#[\mathbf{A}] := (\nabla \times (\mathbf{A})^T)^T = (\text{Curl}_b[\mathbf{A}])^T \quad , \quad (1.9)$$

wird die zusätzliche Indizierung mit  $b$  bzw.  $\#$  eingeführt. In der Definition mit  $b$  ist immer das Kreuzprodukt zwischen Nablaoperator und einer Zeile von  $\mathbf{A}$  spaltenweise angeordnet, während dieses Kreuzprodukt in der Definition mit  $\#$  wieder zeilenweise angeordnet ist.

ORTIZ & REPETTO verwenden z.B. in [184] den Ausdruck  $\mathbf{A} \times \nabla$ , welcher näher an der Definition mit  $\#$  liegt

$$\mathbf{A} \times \nabla = -\text{Curl}_\#[\mathbf{A}] \quad . \quad (1.10)$$

Die Rotation eines beliebigen Vektorfeldes ist stets quellfrei

$$\text{Div}[\text{Curl}[\mathbf{v}]] = 0 \quad , \quad (1.11)$$

womit sich auch zeigen lässt, dass

$$\text{tr}[\text{Grad}[\text{Curl}[\mathbf{v}]]] = 0 \quad . \quad (1.12)$$

Ebenso ist die Rotation  $\text{Curl}_\#[\mathbf{A}]$  eines beliebigen Tensorfeldes  $\mathbf{A}$  stets quellfrei

$$\text{Div}[\text{Curl}_\#[\mathbf{A}]] = \text{Div}[(\text{Curl}_b[\mathbf{A}])^T] = 0 \quad , \quad (1.13)$$

wobei die Aussage in Gl. 1.13 nur dann richtig ist, wenn die Transposition des  $\text{Curl}_b[\mathbf{A}]$  verwendet wird.

## A.2 Übersicht einiger Kontinuumsmodelle

Die für diese Arbeit relevanten Kontinuumsmodelle werden in kompakter Form dargestellt. Dies dient als Hilfestellung, auf Vollständigkeit wird verzichtet.

<p>Deformation <math>\varphi : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3</math> , <math>\mathbf{F} = \nabla \varphi</math></p> <p><math>\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{Biot}}^{\text{lin}}(\nabla \varphi) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \text{min. bzgl. } \varphi</math> , <math>\varphi _{\Gamma_D} = g_D</math></p> <p><math>W_{\text{Biot}}^{\text{lin}}(\mathbf{F}) := \mu \ \mathbf{U} - \mathbb{1}\ ^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\mathbf{U} - \mathbb{1}])^2</math></p> <p><math>\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}</math> , symmetrischer Strecktensor</p>
--

**Tafel A.1:** Isotropes, physikalisch lineares BIOT-Modell.

<p>Deformation <math>\varphi : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3</math> , <math>\mathbf{F} = \nabla \varphi</math></p> <p><math>\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{Biot}}^{\text{nili}}(\nabla \varphi) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \text{min. bzgl. } \varphi</math> , <math>\varphi _{\Gamma_D} = g_D</math></p> <p><math>W_{\text{Biot}}^{\text{nili}}(\mathbf{F}) := \mu \ \mathbf{U} - \mathbb{1}\ ^2 + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\mathbf{U}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\mathbf{U}]} - 1 \right)^2 \right)</math></p> <p><math>\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}}</math> , symmetrischer Strecktensor</p>
---

**Tafel A.2:** Isotropes, physikalisch nichtlineares BIOT-Modell.

<p>Deformation <math>\varphi : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3</math> , <math>\mathbf{F} = \nabla \varphi</math></p> <p><math>\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{SVK}}(\nabla \varphi) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \text{min. bzgl. } \varphi</math> , <math>\varphi _{\Gamma_D} = g_D</math></p> <p><math>W_{\text{SVK}}(\mathbf{F}) = \frac{\mu}{4} \ \mathbf{C} - \mathbb{1}\ ^2 + \frac{\lambda}{8} (\text{tr}[\mathbf{C} - \mathbb{1}])^2</math></p> <p><math>\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}</math> , rechter CAUCHY-GREEN-Tensor</p>
---

**Tafel A.3:** Isotropes ST.-VENANT-KIRCHHOFF-Modell.

$$\begin{aligned} & \text{Deformation } \varphi : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = \nabla \varphi \\ & \int_{\mathcal{B}_0} W^{\text{lin}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } \varphi, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = g_D \\ & W^{\text{lin}} = \mu \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 \\ & \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\nabla \varphi - \mathbb{1}] = \text{sym}[\nabla \mathbf{u}], \quad \text{infinitesimaler Verzerrungstensor} \\ & \mathbf{F} = \mathbb{1} + \nabla \mathbf{u}, \quad \text{Verschiebung } \mathbf{u} \end{aligned}$$

Tafel A.4: Isotrope, lineare Elastizität.

$$\begin{aligned} & \text{Deformation } \varphi : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F} = \nabla \varphi \\ & \int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{Trans}}^{\text{lin}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } \varphi, \quad \varphi|_{\Gamma_D} = g_D \\ & W_{\text{Trans}}^{\text{lin}} = \mu_T \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}])^2 \\ & \quad + \alpha \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}] \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}] + 2(\mu_L - \mu_T) \text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^2 \mathbf{M}] + \frac{\beta}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}])^2 \\ & \mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \text{Vorzugsrichtung } \mathbf{a} \\ & \boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}[\nabla \varphi - \mathbb{1}] = \text{sym}[\nabla \mathbf{u}], \quad \text{infinitesimaler Verzerrungstensor} \\ & \mathbf{F} = \mathbb{1} + \nabla \mathbf{u}, \quad \text{Verschiebung } \mathbf{u} \end{aligned}$$

Tafel A.5: Transversal isotrope, lineare Elastizität.

<p>LAMÉ-Parameter <math>\mu, \lambda</math>  klassischer Schermodul <math>G = \mu</math></p> <p>COSSERAT-Kopplungszahl <math>N^2 := \frac{\mu_c}{\mu + \mu_c} = \frac{\kappa}{2(\mu^* + \kappa)}, \quad 0 \leq N \leq 1</math></p> <p>COSSERAT-Kopplungsmodul <math>\mu_c = \frac{\kappa}{2}, \quad \mu^* = \mu - \mu_c</math></p> <p>klassische POISSON-Zahl <math>\nu := \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} = \frac{\lambda}{2\mu^* + 2\lambda + \kappa}</math></p> <p>NEFF: <math>W_{\text{mp}}(\bar{\epsilon}) = \mu \ \text{sym}[\bar{\epsilon}]\ ^2 + \mu_c \ \text{skew}[\bar{\epsilon}]\ ^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\bar{\epsilon}])^2</math>  <math>= \frac{\mu + \mu_c}{2} \ \bar{\epsilon}\ ^2 + \frac{\mu - \mu_c}{2} \langle \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^T \rangle + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\bar{\epsilon}])^2</math></p> <p>ERINGEN: <math>W_{\text{mp}}(\bar{\epsilon}) = \frac{\mu^* + \kappa}{2} \ \bar{\epsilon}\ ^2 + \frac{\mu^*}{2} \langle \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^T \rangle + \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\bar{\epsilon}])^2</math>  <math>W_{\text{curv}} = \frac{\gamma + \beta}{2} \ \text{sym}[\nabla\Phi]\ ^2 + \frac{\gamma - \beta}{2} \ \text{skew}[\nabla\Phi]\ ^2 + \frac{\alpha}{2} \text{tr}[(\nabla\Phi)^2]</math></p> <p><math>\Phi = \text{axl}[\bar{\mathbf{A}}]</math> vgl. Tafel <a href="#">A.12</a></p>
--

**Tafel A.6:** Verschiedene Darstellungsformen der Energie in linearen, mikropolaren Theorien [35].

<p>Die Bedingungen an die Wahl der Materialparameter lauten:</p> $\mu \geq 0, \quad 2\mu + 3\lambda \geq 0, \quad \mu_c \geq 0$ $\gamma + \beta \geq 0, \quad (\gamma + \beta) + 3\alpha \geq 0, \quad \gamma - \beta \geq 0$ <p>vergleiche dazu auch NEFF [159].</p>
---

**Tafel A.7:** Positiv semi-definite COSSERAT-Energie im linear elastischen Fall.

NEFF & FOREST [173] S. 259:

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} W_{\text{mp}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = (\mu + \mu_c) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\mu - \mu_c) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T + \lambda \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbb{1}$$

NEFF [159] S. 4:

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} W_{\text{mp}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 2\mu \text{sym}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] + 2\mu_c \text{skew}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] + \lambda \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbb{1}$$

LAKES [119] S. 55 ( $\mu^*$  entspricht hier nicht  $\mu$ , sondern  $2\mu^* + \kappa = 2\mu$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} W_{\text{mp}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = (2\mu^* + \kappa) \text{sym}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] + \kappa \text{skew}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] + \lambda \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbb{1}$$

ERINGEN [56] S. 120 (verwendet dort allerdings  $\mu$  anstelle von  $\mu^*$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} W_{\text{mp}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = (\mu^* + \kappa) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mu^* \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T + \lambda \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}] \mathbb{1}$$

NOWACKI [179] (es ist  $\alpha = \mu_c$  und  $\boldsymbol{\gamma} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{\boldsymbol{\gamma}} W_{\text{mp}}(\boldsymbol{\gamma}) = (\mu + \alpha) \boldsymbol{\gamma} + (\mu - \alpha) \boldsymbol{\gamma}^T + \lambda \text{tr}[\boldsymbol{\gamma}] \mathbb{1}$$

**Tafel A.8:** Verschiedene Darstellungsformen der Spannungs-Dehnungsbeziehung in linearen, mikropolaren Theorien.

$$(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}) : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{GBR}}(\nabla \boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\boldsymbol{\varphi}) \rightarrow \text{min. bzgl. } (\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{R}})$$

$$\boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_D} = g_D, \text{ direkte Vorgabe von Verschiebungen}$$

$$\mu_c = 0 \quad , \quad L_c = 0$$

$$W_{\text{GBR}}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}) = \mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} \notin \text{Sym}$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \text{skew}[\mathbf{F} \bar{\mathbf{R}}^T] \cdot \bar{\mathbf{R}} & \text{Modellierungsvariante} \\ \text{skew}[\mathbf{S}_1 \mathbf{F}^T] \cdot \bar{\mathbf{R}} & \text{Modellierungsvariante} \end{cases}$$

Für  $\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = 0$  folgt z.B.  $\text{skew}[\mathbf{S}_1 \mathbf{F}^T] \cdot \bar{\mathbf{R}} = 0$ , was der Momentengleichung im COSSERAT-Modell (siehe Tafel A.10) für  $L_c = 0$  entspricht.

**Tafel A.9:** Visko-elastisches Modell von NEFF [154] zur Beschreibung von "Grain-Boundary-Relaxation".

$$(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{mp}}(\nabla\varphi, \bar{\mathbf{R}}) + W_{\text{curv}}(\nabla\bar{\mathbf{R}}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } (\varphi, \bar{\mathbf{R}})$$

$$\varphi|_{\Gamma_D} = g_D, \quad \bar{\mathbf{R}}|_{\Gamma'_D} = \begin{cases} \bar{\mathbf{R}}_D, \text{ direkte Vorgabe von Drehungen} \\ \text{polar}[\nabla\varphi], \text{ konsistente Kopplung mit } \nabla\varphi \text{ auf } \Gamma_D = \Gamma'_D \\ \text{frei, keine Bedingung an } \bar{\mathbf{R}} \end{cases}$$

$$W_{\text{mp}}(\nabla\varphi, \bar{\mathbf{R}}) = \mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 \\ + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right)$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} \notin \text{Sym}$$

$$W_{\text{curv}}^{\text{Curl}}(\nabla\bar{\mathbf{R}}) = \frac{\mu}{q} (1 + 2L_c^2 \|\mathfrak{C}\|^2)^{\frac{q}{2}}, \quad \mathfrak{C} = \text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}}$$

**Tafel A.10:** Isotropes, nichtlineares COSSERAT-Modell.

$$(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) : \mathcal{B}_0 \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$$

$$\int_{\mathcal{B}_0} W_{\text{mp}}(\nabla\varphi, \bar{\mathbf{R}}) + W_{\text{curv}}(\nabla\bar{\mathbf{R}}) \, dV + \Pi^{\text{ext}}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) \rightarrow \min. \text{ bzgl. } (\varphi, \bar{\mathbf{R}})$$

$$\varphi|_{\Gamma_D} = g_D, \quad \bar{\mathbf{R}}|_{\Gamma'_D} = \begin{cases} \bar{\mathbf{R}}_D, \text{ direkte Vorgabe von Drehungen} \\ \text{polar}[\nabla\varphi], \text{ konsistente Kopplung mit } \nabla\varphi \text{ auf } \Gamma_D = \Gamma'_D \\ \text{frei, keine Bedingung an } \bar{\mathbf{R}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{mp}}(\nabla\varphi, \bar{\mathbf{R}}) &= \mu_T \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right) \\ &\quad + \alpha \text{tr}[\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] \mathbf{M}] \text{tr}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] \\ &\quad + 2(\mu_L - \mu_T) \text{tr}[(\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}])^2 \mathbf{M}] \\ &\quad + \frac{\beta}{2} (\text{tr}[\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}] \mathbf{M}])^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \text{Vorzugsrichtung } \mathbf{a}$$

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} \notin \text{Sym}$$

$$W_{\text{curv}}^{\text{Curl}}(\nabla\bar{\mathbf{R}}) = \frac{\mu}{q} (1 + 2L_c^2 \|\mathbf{c}\|^2)^{\frac{q}{2}}, \quad \mathbf{c} = \text{Curl}_{\sharp}[\bar{\mathbf{R}}] \cdot \bar{\mathbf{R}}$$

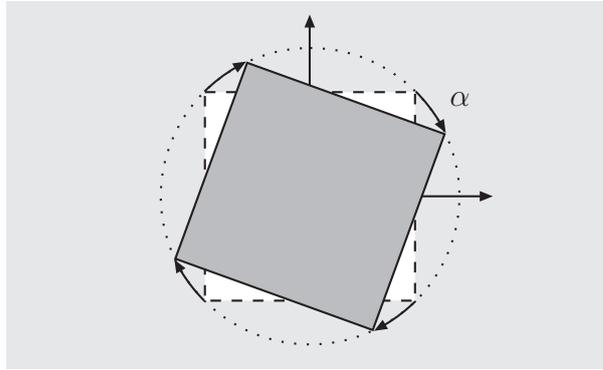
Tafel A.11: Transversal isotropes, nichtlineares COSSERAT-Modell.



### A.3 Betrachtungen zum Kopplungsmodul

Die innere Verzerrungsenergiedichte  $W_{\text{mp}}$  wird für einen konkreten Fall in 2-D im Hinblick auf den Kopplungsmodul  $\mu_c$  untersucht.

In Abb. 1.1 ist dargestellt, wie sich ein Punkt und dessen grau markierte Umgebung innerhalb des Kontinuums durch  $\bar{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{R}}(\alpha)$  verdreht.



**Abbildung 1.1:** Verdrehung eines Punktes und dessen Umgebung innerhalb eines Kontinuums.

Ein Winkel  $\alpha$  parametrisiert hierbei die Rotation durch

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

und es gilt

$$\text{sym}[\tilde{\mathbf{R}}] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} . \quad (1.15)$$

Da wegen  $\det[\bar{\mathbf{U}}] = \det[\tilde{\mathbf{R}}] = 1$  keine Volumenänderung stattfindet, beträgt die Verzerrungsenergiedichte  $W_{\text{mp}}$  des hier verwendeten COSSERAT-Modells für den Fall  $\mu_c = \mu$

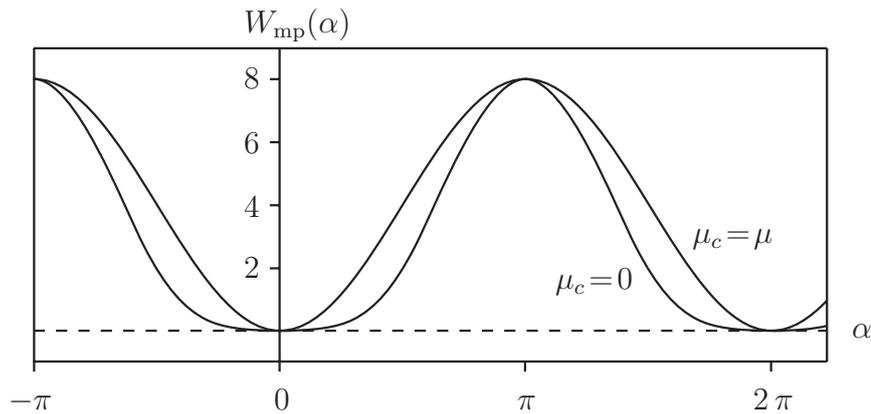
$$\|\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{R}} - \mathbb{1}\|^2 = 2(\cos \alpha - 1)^2 + 2\sin^2 \alpha = 4(1 - \cos \alpha) \quad (1.16)$$

und für den Fall  $\mu_c = 0$

$$\|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}}] - \mathbb{1}\|^2 = \|\text{sym}[\tilde{\mathbf{R}}] - \mathbb{1}\|^2 = 2(1 - \cos \alpha)^2 . \quad (1.17)$$

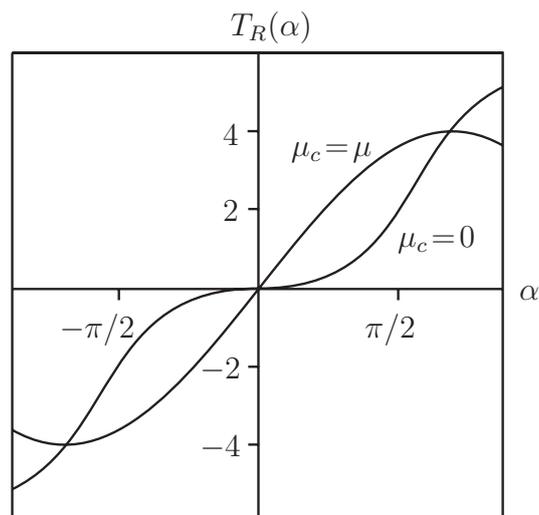
Der Verlauf der Verzerrungsenergiedichten aus Gl. 1.16 und 1.17 ist in Abb. 1.2 in Abhängigkeit der Verdrehung  $\alpha$  zu sehen. Kleine oder verschwindende Werte für  $\mu_c$  führen in diesem Beispiel dazu, dass sich  $W_{\text{mp}}$  von einer trigonometrischen

Funktion 1. Ordnung zu einer trigonometrischen Funktion 2. Ordnung hinbewegt. Doch in beiden Fällen gilt  $W_{\text{mp}} = 0$  nur dann, wenn  $\alpha = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .



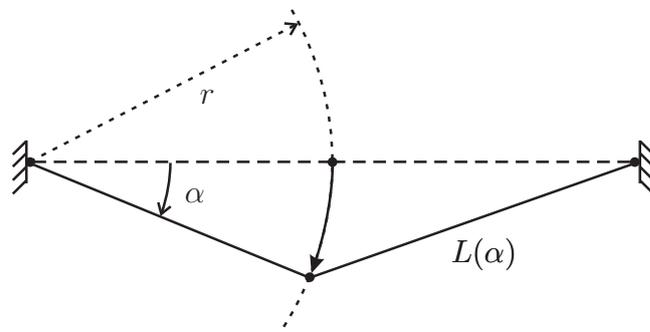
**Abbildung 1.2:** Verzerrungsenergiedichte  $W_{\text{mp}}$  in Abhängigkeit der Verdrehung  $\alpha$ .

Die Ableitung der Verzerrungsenergiedichte wird als Federkennlinie mit der Reaktionskraft  $T_R$  gegen die Verdrehung  $\alpha$  in Abb. 1.3 aufgetragen. Unabhängig von der Wahl für  $\mu_c$  ist die Federkennlinie im Bereich  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$  streng monoton wachsend. Es ist jedoch zu erkennen, dass die Reaktionskraft im Fall  $\mu_c = 0$  eine horizontale Tangente an der Stelle  $\alpha = 0$  besitzt.



**Abbildung 1.3:** Federkennlinie mit Reaktionskraft  $T_R$  gegen die Verdrehung  $\alpha$ .

Nun lässt für den Bezug zwischen  $T_R$  und  $\alpha$  eine mechanische Analogie finden und zwar im Verhalten einer Saite der Länge  $2r$ , welche auf einer Kreisbahn ausgelenkt wird, wie es in Abb. 1.4 gezeigt ist.



**Abbildung 1.4:** Auslenkung einer Saite auf einer Kreisbahn um den Winkel  $\alpha$ .

Die Länge  $L$  hängt von der Auslenkung um den Winkel  $\alpha$  in der Weise

$$\begin{aligned} L^2(\alpha) &= r^2 (5 - 4 \cos \alpha) \\ \Rightarrow L(\alpha) &= r \sqrt{5 - 4 \cos \alpha} = r \sqrt{1 + (4 - 4 \cos \alpha)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

ab (Cosinussatz). Taylorentwicklung und Vernachlässigung höherer Terme führt auf die Approximation

$$L(\alpha) \sim r \left[ 1 + \frac{1}{2} (4 - 4 \cos \alpha) \right] = r [1 + 2(1 - \cos \alpha)] \quad . \quad (1.19)$$

Für den rechten Teil der Saite lautet dann das Quadrat der Längenänderung

$$(L(\alpha) - r)^2 \sim (r [1 + 2(1 - \cos \alpha)] - r)^2 = 4r^2 (1 - \cos \alpha)^2 \quad , \quad (1.20)$$

was qualitativ mit der Verzerrungsenergiedichte aus Gl. 1.17 für den Fall  $\mu_c = 0$  übereinstimmt.

## A.4 Isotrope Abbildungen

Der Gruppe aller zweistufigen Tensoren werden lineare Abbildungen definiert, welche wiederum auf zweistufige Tensoren mit speziellen Eigenschaften führen.

- Die Abbildung der Spur:

Das dyadische Produkt zweier Einheitstensoren  $\mathbb{1}$  definiert über

$${}^{tr}\mathbf{J} := \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \delta_{ij} \delta_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.21)$$

eine Abbildung vierter Stufe mit der Eigenschaft

$${}^{tr}\mathbf{J}_{ijkl} = {}^{tr}\mathbf{J}_{klij} \quad . \quad (1.22)$$

${}^{tr}\mathbf{J}$  bildet jeden zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  auf den Einheitstensor  $\mathbb{1}$  ab, welcher noch mit der Spur von  $\mathbf{A}$  zu multiplizieren ist<sup>87</sup>

$${}^{tr}\mathbf{J} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : {}^{tr}\mathbf{J} = \text{tr}[\mathbf{A}] \mathbb{1} = T_{kk} \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad . \quad (1.23)$$

- Die Abbildung der Symmetrie:

Die Abbildung  ${}^S\mathbf{J}$  (symmetric-constraint) vierter Stufe wird definiert über

$${}^S\mathbf{J} := \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.24)$$

und projiziert aus einem beliebigen Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{A}$  den symmetrischen Anteil

$${}^S\mathbf{J} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : {}^S\mathbf{J} = \text{sym}[\mathbf{T}] \quad . \quad (1.25)$$

Es gilt die Eigenschaft

$${}^S\mathbf{J}_{ijkl} = {}^S\mathbf{J}_{klij} \quad . \quad (1.26)$$

- Die Abbildung der Antisymmetrie:

Die Abbildung  ${}^A\mathbf{J}$  (skew-symmetric-constraint) vierter Stufe wird definiert über

$${}^A\mathbf{J} := \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \frac{1}{2} \epsilon_{pij} \epsilon_{pkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.27)$$

---

<sup>87</sup>In der Literatur wird  ${}^{tr}\mathbf{J}$  manchmal durch  $\mathbf{II}$  symbolisiert.

und projiziert aus einem beliebigen Tensor  $\mathbf{A}$  zweiter Stufe den antisymmetrischen Anteil

$$\overset{A}{\mathbf{J}} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \overset{A}{\mathbf{J}} = \text{skew}[\mathbf{A}] \quad . \quad (1.28)$$

Es gilt die Eigenschaft

$$\overset{A}{\mathbf{J}}_{ijkl} = \overset{A}{\mathbf{J}}_{klij} \quad . \quad (1.29)$$

- Die Selbstabbildung:

Die Abbildung  $\mathbf{II}$  (general-no-constraint) vierter Stufe wird definiert über

$$\mathbf{II} := \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.30)$$

und projiziert einen zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  wieder auf sich selbst ab

$$\mathbf{II} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{II} = \mathbf{A} \quad . \quad (1.31)$$

Es gilt die Eigenschaft

$$\mathbf{II}_{ijkl} = \mathbf{II}_{klij} \quad . \quad (1.32)$$

- Die Abbildung der Transposition:

Die Abbildung  $\overset{T}{\mathbf{II}}$  vierter Stufe wird definiert über

$$\overset{T}{\mathbf{II}} := \delta_{il} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad (1.33)$$

und projiziert den zweistufigen Tensor  $\mathbf{A}$  in seine transponierte Form

$$\overset{T}{\mathbf{II}} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \overset{T}{\mathbf{II}} = \mathbf{A}^T \quad . \quad (1.34)$$

Es gilt die Eigenschaft

$$\overset{T}{\mathbf{II}}_{ijkl} = \overset{T}{\mathbf{II}}_{klij} \quad . \quad (1.35)$$

#### A.4.1 Isotrope zentralsymmetrische Materialien

Nach MINDLIN [142] spielen für zentralsymmetrische, isotrope Materialgesetze die Abbildungen  $\overset{tr}{\mathbf{J}}$ ,  $\overset{S}{\mathbf{J}}$  und  $\overset{A}{\mathbf{J}}$  eine wesentliche Rolle, da sie invariant bei zentraler Inversion und beliebiger Rotation sind. Ist in solch einem Material die von einer Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  geweckte Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  linear abhängig, dann gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = (a_1 \overset{tr}{\mathbf{J}} + a_2 \overset{S}{\mathbf{J}} + a_3 \overset{A}{\mathbf{J}}) : \boldsymbol{\varepsilon} =: \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} \quad . \quad (1.36)$$

Die Kommutativität in Gl. 1.36 folgt aus den Eigenschaften 1.22, 1.26, 1.29 und bedeutet in Indexnotation  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$ . Der Tensor  $\mathbb{C}$  vierter Stufe wird auch Stofftensor genannt.

So schreibt sich der Stofftensor für hyperelastisches Material mit den Lamé Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  wegen

$$a_1 = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.37)$$

$$a_2 = a_3 = 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad (1.38)$$

zu

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \mathbf{J}^{tr} + 2\mu (\mathbf{J}^S + \mathbf{J}^A) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.39)$$

und lässt sich anschaulich darstellen wie folgt

$kl \rightarrow$	11	22	33	12	13	23	21	31	32	
$ij \downarrow$										
11	$\lambda + \mu$	$\lambda$	$\lambda$	0	0	0	0	0	0	
22	$\lambda$	$\lambda + \mu$	$\lambda$	0	0	0	0	0	0	
33	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda + \mu$	0	0	0	0	0	0	
12	0	0	0	$\mu$	0	0	0	0	0	(1.40)
13	0	0	0	0	$\mu$	0	0	0	0	
23	0	0	0	0	0	$\mu$	0	0	0	
21	0	0	0	0	0	0	$\mu$	0	0	
31	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	0	
32	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	

Es ist zu beachten, dass die Wahl von  $a_2 = a_3$  für ein symmetrisches Verzerrungsmaß  $\boldsymbol{\varepsilon}$  keine Bedeutung hat und somit  $a_3$  gar nicht zur Diskussion steht. Dies ist in der COSSERAT-Theorie mit prinzipiell unsymmetrischen Verzerrungen nicht der Fall.

## A.5 Stofftensor und transversale Isotropie

Die Beschreibung der Formänderungsenergie in Kap. 4.4 basiert auf der Invariantendarstellung mit Koeffizienten  $\mu_T$ ,  $\mu_L$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ . Aus praktischen Materialversuchen sind jedoch i. allg. Ingenieurparameter wie Elastizitätsmoduli  $E_i$ , Schermoduli  $\mu_{ij}$  und Querkontraktionen  $\nu_{ij}$  in Raumrichtungen  $i$  bzw.  $j$  bekannt (z.B. ALTENBACH et al. [2]). Die Richtungen  $i, j$  seien im Folgenden orthogonal, weiterhin soll es sich zunächst um orthotropes Material handeln.

Die Umrechnung zwischen Koeffizienten in der Invariantendarstellung und Ingenieurparametern ist unter bestimmten Voraussetzungen eindeutig und basiert auf dem linear-elastischen Materialgesetz

$$\mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.41)$$

durch den elastischen Tangentenmodul  $\mathbb{C}$ . Aus Gründen der Darstellung werden die Komponenten der Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  nun vektoriell angeordnet, was unter Ausnutzung der Symmetrie von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  lediglich sechs Einträge erfordert. Dann präsentiert sich Gl. 1.41 in Matrixschreibweise

$$\mathbb{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

und spiegelt am einfachsten die Zusammenhänge zwischen Spannung und Dehnung durch das HOOKsche Gesetz wieder. Die Definition der Querkontraktion

$$\nu_{ij} := -\frac{\varepsilon_{ii}}{\varepsilon_{jj}} \quad (1.43)$$

besagt, dass bei einer erzwungenen Dehnung in Richtung  $j$  zugleich eine freie Dehnung in Richtung  $i$  auftritt. Führt man z.B. einen homogenen Zugversuch mit  $\sigma_{22}$  (alle anderen Spannungskomponenten sind null) durch, folgt unter Verwendung des HOOKschen Gesetzes aus Zeile 1 in Gl. 1.42

$$-\frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} = \varepsilon_{11} \quad \Leftrightarrow \quad -\nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_2} = \varepsilon_{11} \quad \Leftrightarrow \quad -\nu_{12} \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} \quad . \quad (1.44)$$

Aus der Annahme symmetrischer Spannungen und Verzerrungen folgt, dass  $\mathbb{C}^{-1}$  ebenfalls symmetrisch ist und die Beziehungen

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_3} = \frac{\nu_{31}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_3} = \frac{\nu_{32}}{E_2} \quad (1.45)$$

gelten. Dies führt auf eine Darstellung mit neun Materialparametern

$$\mathbb{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ sym & & & & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{\mu_{23}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Im Fall der transversalen Isotropie soll nun die Vorzugsrichtung mit der 1-Richtung zusammenfallen. Dann gilt

$$E_2 = E_3, \nu_{12} = \nu_{13}, \mu_{12} = \mu_{13} \quad (1.47)$$

und die auf 6 Ingenieur-Parameter reduzierte Darstellung

$$\mathbf{C}^{-1,ti} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ & sym & & & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{\mu_{23}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

folgt. Die Schermoduli werden oft durch  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_L$  bzw.  $\mu_{23} = \mu_T$  in lateraler bzw. transversaler Richtung unterschieden.<sup>88</sup>

Da in der transversalen Ebene zusätzlich die Gleichung

$$\mu_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad (1.49)$$

gilt, beschreiben fünf Ingenieurkonstanten die fünf Koeffizienten in Invariantendarstellung.

Die freie Formänderungsenergie in Gl. 4.32 ergibt durch zweimalige Ableitung nach  $\boldsymbol{\varepsilon}$  den transversal isotropen Tangentenmodul  $\mathbf{C}^{ti} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^2 W_0$  in Argumenten der Materialkoeffizienten aus Invariantendarstellung

$$\mathbf{C}^{ti} = \begin{pmatrix} \lambda + 4\mu_L - 2\mu_T + 2\alpha + \beta & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu_T & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu_T & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu_L & 0 & 0 \\ & sym & & & \mu_L & 0 \\ & & & & & \mu_T \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Die Materialkoeffizienten der Invariantendarstellung präsentieren sich durch die Matrixkomponenten

$$\begin{aligned} \mu_T &= \mathbf{C}_{66}^{ti}, \mu_L = \mathbf{C}_{44}^{ti}, \lambda = \mathbf{C}_{23}^{ti}, \\ \alpha &= \mathbf{C}_{12}^{ti} - \mathbf{C}_{23}^{ti}, \beta = \mathbf{C}_{11}^{ti} + \mathbf{C}_{23}^{ti} - 4\mathbf{C}_{44}^{ti} + 2\mathbf{C}_{66}^{ti} - 2\mathbf{C}_{12}^{ti}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

<sup>88</sup>Dies ist auch für  $E_1 = E_L, E_2 = E_T, \nu_{12} = \nu_L$  und  $\nu_{23} = \nu_L$  möglich, was jedoch nicht üblich ist.

welche aus einer Invertierung von  $\mathbb{C}^{-1,ti}$  aus Gl. 1.48 in Ingenieurparametern vorliegen

$$\mathbb{C}^{ti} = \begin{pmatrix} \frac{E_1(1-\nu_{23}^2)}{D} & \frac{E_1(1+\nu_{23})\nu_{12}}{D} & \frac{E_1(1+\nu_{23})\nu_{12}}{D} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E_2-E_1\nu_{12}^2}{D} & \frac{E_2\nu_{23}+E_1\nu_{12}^2}{D} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E_2-E_1\nu_{12}^2}{D} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu_{12} & 0 & 0 \\ & sym & & & \mu_{12} & 0 \\ & & & & & \mu_{23} \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

$$D := \frac{E_2 - E_2\nu_{23}^2 - 2E_1\nu_{12}^2 - 2E_1\nu_{12}^2\nu_{23}}{E_2} = 1 - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{21} - 2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23}.$$

Die Invertierung setzt die positive Definitheit von  $\mathbb{C}^{-1,ti}$  und somit die Forderungen

$$\begin{aligned} \mu_L > 0, \mu_T > 0, E_1 > 0, E_2 > 0, \\ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{pmatrix} > 0 & \Leftrightarrow \frac{1}{E_1 E_2} - \frac{\nu_{12}^2}{E_2^2} > 0 \\ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{pmatrix} > 0 & \Leftrightarrow \frac{1}{E_2^2} - \frac{\nu_{23}^2}{E_2^2} > 0 \\ \det \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} \end{pmatrix} > 0 & \Leftrightarrow \frac{1 - \nu_{23}^2}{E_1 E_2^2} - \frac{2(\nu_{12}^2\nu_{23} + \nu_{12}^2)}{E_2^3} > 0. \end{aligned}$$

Aus Gl. 1.51 und Gl. 1.52 erhält man die Umrechnungsvorschrift

$$\begin{aligned} \mu_T &= \mu_{23}, \mu_L = \mu_{12}, \lambda = \frac{E_2\nu_{23} + E_1\nu_{12}^2}{D}, \\ \alpha &= \frac{E_1\nu_{12}(1 + \nu_{23} - \nu_{12}) - E_2\nu_{23}}{D}, \\ \beta &= \frac{E_2\nu_{23} + E_1(1 - \nu_{23}^2 + \nu_{12}^2 - 2\nu_{12} - 2\nu_{12}\nu_{23})}{D} - 4\mu_{12} + 2\mu_{23} \end{aligned} \quad (1.53)$$

mit  $D$  aus Gl. 1.52.

Durch sinngemäßes Vorgehen erhält man die Umrechnungsvorschrift von Materialkoeffizienten der Invariantendarstellung auf Ingenieurkonstanten

$$\begin{aligned} \mu_{23} &= \mu_T, \mu_{12} = \mu_L, E_1 = \frac{A}{\lambda + \mu_T}, E_2 = \frac{4\mu_T A}{B}, \nu_{12} = \frac{2\mu_T(\lambda + \alpha)}{B}, \\ A &:= 2\alpha\mu_T + 4\mu_L\lambda - \lambda\mu_T + 4\mu_L\mu_T - 2\mu_T^2 + \beta\lambda + \beta\mu_T - \alpha^2, \\ B &:= \mu_T(4\alpha + 8\mu_L - 4\mu_T + 2\beta) + \lambda(4\mu_L + \beta) - \alpha^2. \end{aligned} \quad (1.54)$$

## A.6 Zur Existenz globaler Minima für positiven Kopplungsmodul

Es wird für den Fall  $0 < \mu_c \leq \mu$  gezeigt, dass im COSSERAT-Modell bei endlicher interner Energie  $\Pi_{int}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) < K$  (mit der Schranke  $K$ ) die Deformation  $\varphi$  ebenfalls beschränkt ist. Dies spielt im Beweis der Existenz globaler Minima mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung eine wesentliche Rolle.

$$\begin{aligned}
\Pi_{int}(\varphi, \bar{\mathbf{R}}) &= \int_{\mathcal{B}_0} W_{mp}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}) + \underbrace{W_{curv}^{curl}(\nabla \bar{\mathbf{R}})}_{>0} dV \geq \int_{\mathcal{B}_0} W_{mp}(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{R}}) dV \\
&= \int_{\mathcal{B}_0} \mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 \\
&\quad + \frac{\lambda}{4} \underbrace{\left( (\det[\bar{\mathbf{U}}] - 1)^2 + \left( \frac{1}{\det[\bar{\mathbf{U}}]} - 1 \right)^2 \right)}_{\geq 0} dV \\
&\geq \int_{\mathcal{B}_0} \mu \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 dV \quad (\mu > \mu_c) \\
&\geq \int_{\mathcal{B}_0} \mu_c \|\text{sym}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 + \mu_c \|\text{skew}[\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}]\|^2 dV \\
&= \int_{\mathcal{B}_0} \mu_c \|\bar{\mathbf{U}} - \mathbb{1}\|^2 dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mu_c \|\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F} - \mathbb{1}\|^2 dV \\
&= \mu_c \int_{\mathcal{B}_0} \|\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}\|^2 - 2\langle \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}, \mathbb{1} \rangle + 3 dV = \mu_c \int_{\mathcal{B}_0} \|\mathbf{F}\|^2 - 2\langle \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}, \mathbb{1} \rangle + 3 dV \\
&\geq \mu_c \int_{\mathcal{B}_0} \|\mathbf{F}\|^2 - 2\|\bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{F}\| \|\mathbb{1}\| + 3 dV \geq \mu_c \int_{\mathcal{B}_0} \underbrace{\|\mathbf{F}\|^2 - 2\|\mathbf{F}\| \sqrt{3} + 3}_{\text{quadr. Gl. in } \|\mathbf{F}\|} dV \\
&\Rightarrow \int_{\mathcal{B}_0} \|\mathbf{F}\|^2 - 2\|\mathbf{F}\| \sqrt{3} + 3 dV < \frac{K}{\mu_c} \\
&\Rightarrow \int_{\mathcal{B}_0} \|\mathbf{F}\|^2 dV = \int_{\mathcal{B}_0} \|\nabla \varphi\|^2 dV < C_1 \frac{K}{\mu_c} . \tag{1.55}
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung impliziert, dass für  $\mu_c > 0$  die minimierende Deformation  $\varphi$  im SOBOLEV-Raum  $H^1(\mathcal{B}_0)$  liegt, siehe NEFF [160, 155].

Hierbei ist  $H^1(\mathcal{B}_0) := \{\varphi : \mathcal{B}_0 \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \int_{\mathcal{B}_0} \|\varphi\|^2 + \|\nabla \varphi\|^2 dV < \infty\}$ . Es ist bemerkenswert, dass die Abschätzung unabhängig vom Rotationsfeld  $\bar{\mathbf{R}}$  gültig ist, sobald man einen positiven Kopplungsmodul  $\mu_c$  annimmt.

## A.7 Erläuterungen zur Magnetostatik

Die magnetische Flussdichte

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{H}}) = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{H}}) \quad (1.56)$$

setzt sich im inneren eines Materials aus der äußeren magnetischen Erregung  $\vec{\mathbf{H}}$  und der Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}$  zusammen. In Vakuum reduziert sich Gl. 1.56 auf  $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}}$ , somit erfasst  $\vec{\mathbf{M}}$  die Materialeigenschaft völlig. Die magnetische Feldkonstante  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  wird im Vakuum gemessen.

In magnetischen Werkstoffen ist die Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}$  eine Funktion von  $\vec{\mathbf{H}}$  und der Vorgeschichte von  $\vec{\mathbf{H}}$ , was die Hysteresekurve in Abb. 1.5 zeigt.

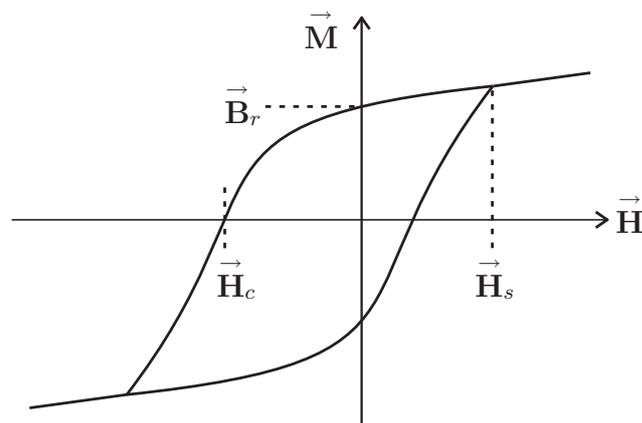


Abbildung 1.5: Hysteresekurve für ferromagnetisches Material.

Wird ferromagnetisches Material durch magnetische Erregung mit der Sättigungsfeldstärke  $\vec{\mathbf{H}}_s$  magnetisiert, verbleibt nach dem Entfernen von  $\vec{\mathbf{H}}_s$  die remanente magnetische Flussdichte  $\vec{\mathbf{B}}_r$  im Material, was mit der irreversiblen Magnetisierung

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{B}}_r \quad (1.57)$$

gleichzusetzen ist. Wird vollständig magnetisiertes Material einer der Magnetisierung entgegengesetzten magnetischen Erregung mit Koerzitivfeldstärke  $\vec{\mathbf{H}}_c$  ausgesetzt, verliert es seine Magnetisierung völlig.

In dieser Arbeit wird lediglich der näherungsweise linear verlaufende Bereich in der Umgebung von  $\vec{\mathbf{B}}_r$  betrachtet. Hier lässt sich Gl. 1.56 durch

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}^r(\vec{\mathbf{H}}) + \vec{\mathbf{M}}^i \quad (1.58)$$

mit einer reversiblen Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow r}$  und der irreversiblen Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i}$  beschreiben. Die gesamte Magnetisierung setzt sich dann gemäß

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow r}(\vec{\mathbf{H}}) + \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i} \quad (1.59)$$

additiv aus beiden Anteilen zusammen. Über die Definition der magnetischen Suszeptibilität

$$\kappa := \left\| \frac{\partial \vec{\mathbf{M}}}{\partial \vec{\mathbf{H}}} \right\| \quad (1.60)$$

schreibt sich Gl. 1.58 auch durch

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} + \underbrace{\mu_0 \kappa \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i}}_{\vec{\mathbf{M}}} = \mu_0 \vec{\mathbf{H}} (1 + \kappa) + \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i} \quad (1.61)$$

Über das Vorzeichen der magnetischen Suszeptibilität  $\kappa$  können Stoffe in zwei Gruppen unterteilt werden.

Die Gruppe der Diamagnete mit  $-1 < \kappa < 0$  haben das Bestreben, bei äußerer magnetischer Erregung  $\vec{\mathbf{H}}$  das Magnetfeld  $\vec{\mathbf{M}}$  in ihrem Inneren abzuschwächen.

Die Gruppe der Paramagnete mit  $\kappa > 0$  richtet ihre atomaren (und/oder molekularen) Magnete in Richtung der magnetischen Erregung  $\vec{\mathbf{H}}$  aus und verstärkt damit das Magnetfeld  $\vec{\mathbf{M}}$  im inneren eines Körpers. Ferromagnete sind als Untergruppe der Paramagnete zu betrachten und haben die Besonderheit, dass ihre Suszeptibilität gemäß Gl. 1.60 von der Vorgeschichte der magnetischen Erregung abhängt, was sich in der Steigung der Hysteresekurve in Abb. 1.5 widerspiegelt.

Der Faktor  $\mu_r = (1 + \kappa)$  in Gl. 1.61 wird auch als magnetische Permeabilität bezeichnet und liegt für Diamagnete zwischen 0 und 1. Für Paramagnete ist  $\mu_r > 1$  und für Ferromagneten sind Werte bis  $\mu_r = 5 \cdot 10^5$  (amorphe Metalle) bekannt.

Das eingeprägte, volumenbezogene Drehmoment  $\tilde{\mathbf{d}}$  in Kap. 5.5 unterliegt der Einschränkung für Gl. 1.58 und erfasst wegen

$$\tilde{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{M}} \times \vec{\mathbf{H}} = (\mu_0 \kappa \vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i}) \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i} \times \vec{\mathbf{H}} \quad (1.62)$$

nur die irreversible Magnetisierung  $\vec{\mathbf{M}}^{\rightarrow i}$ .

## A.8 Distorsion an mikroskopischen Probewürfeln

In Kap. 7.6 wird die Wirkung wandernder Versetzungen als Distorsionstensor  $\varepsilon_{ijk}^p$  eingeführt. Ergänzend zu Abb. 1.7 folgen nun alle weiteren Fälle.

Es wird angemerkt, dass bei einer Stufenversetzung die Versetzungslinie (Daumen), der BURGERSche Vektor (Zeigefinger) und die Richtung der eingeschobenen Kristallebene (Mittelfinger) in einem Rechtssystem mathematisch positiv definiert werden (rechte Hand Regel).

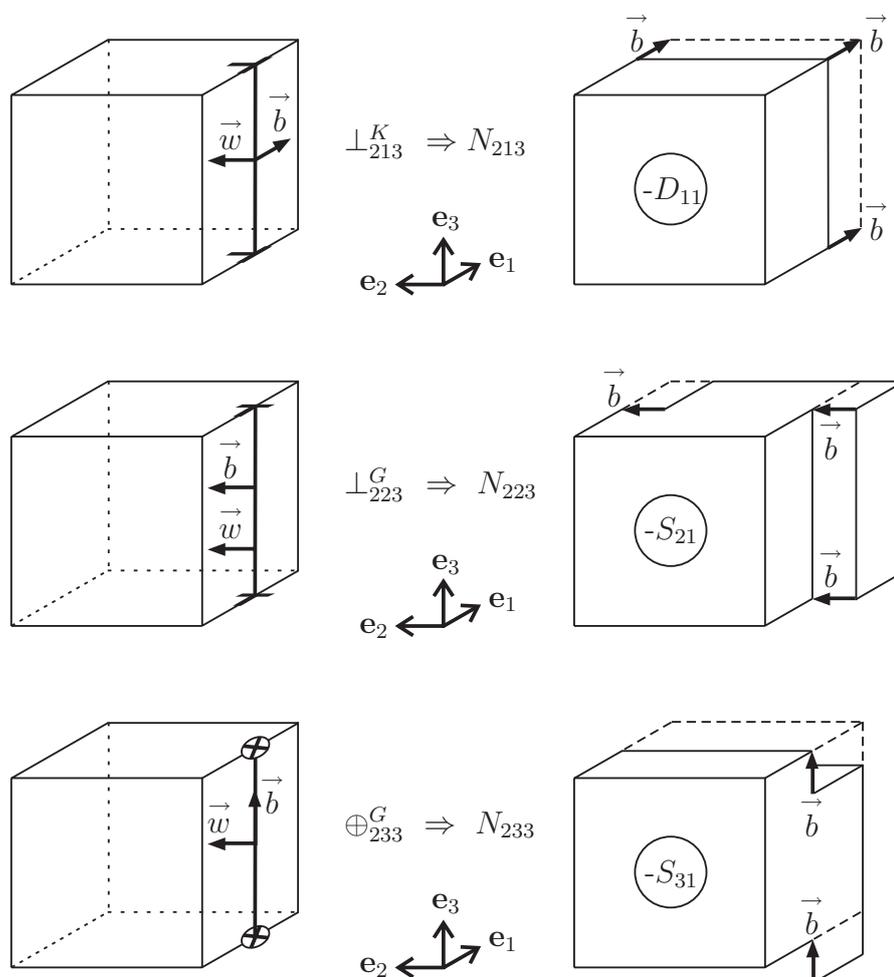


Abbildung 1.6: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{213}$ ,  $N_{223}$  und  $N_{233}$ .

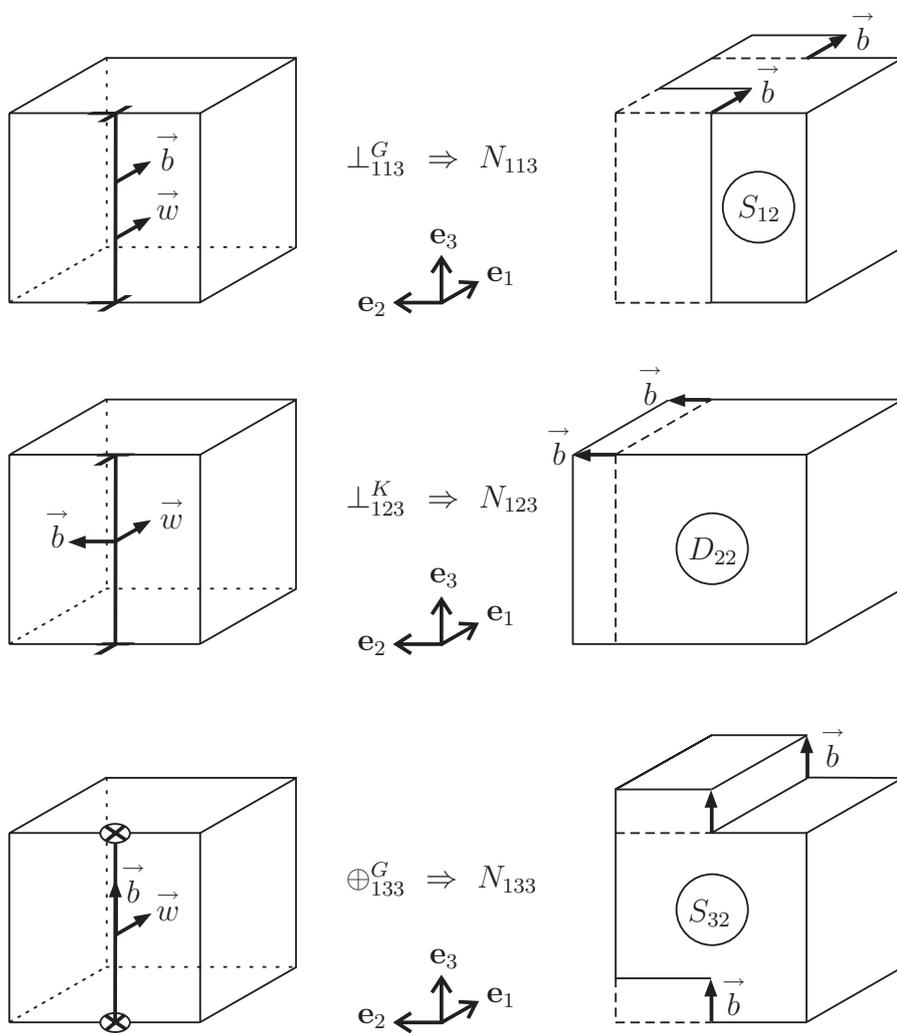


Abbildung 1.7: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{113}$ ,  $N_{123}$  und  $N_{133}$ .

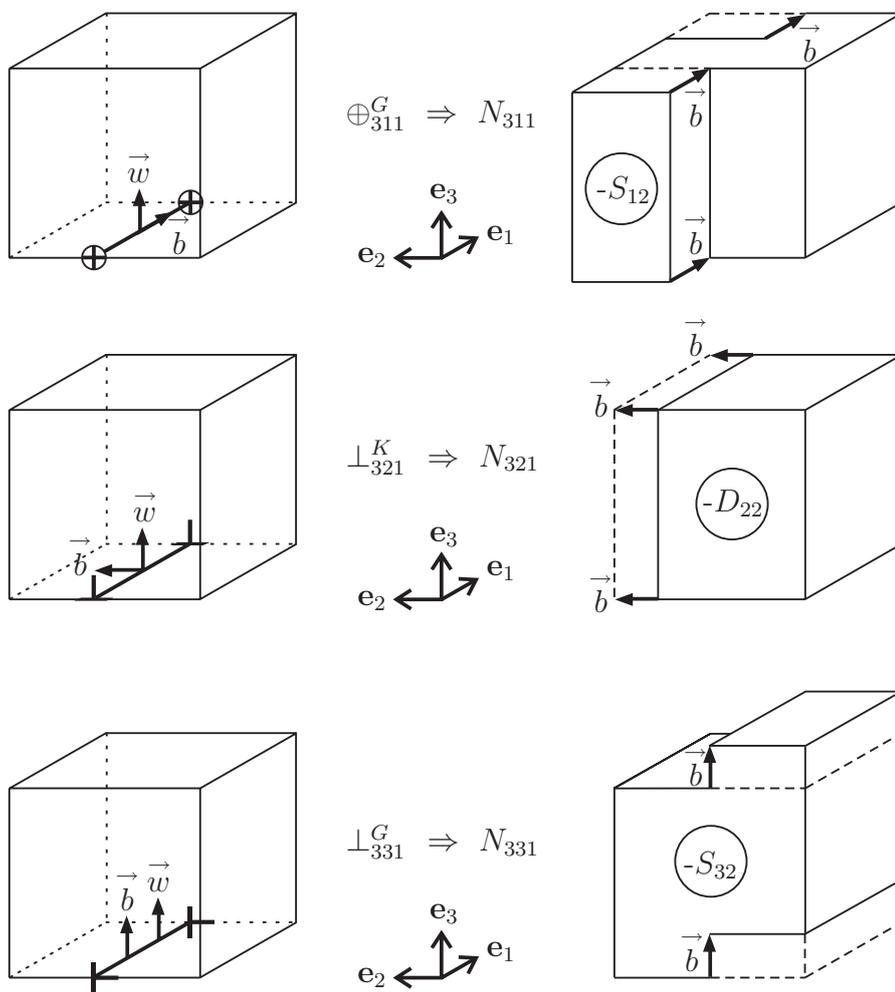


Abbildung 1.8: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{311}$ ,  $N_{321}$  und  $N_{331}$ .

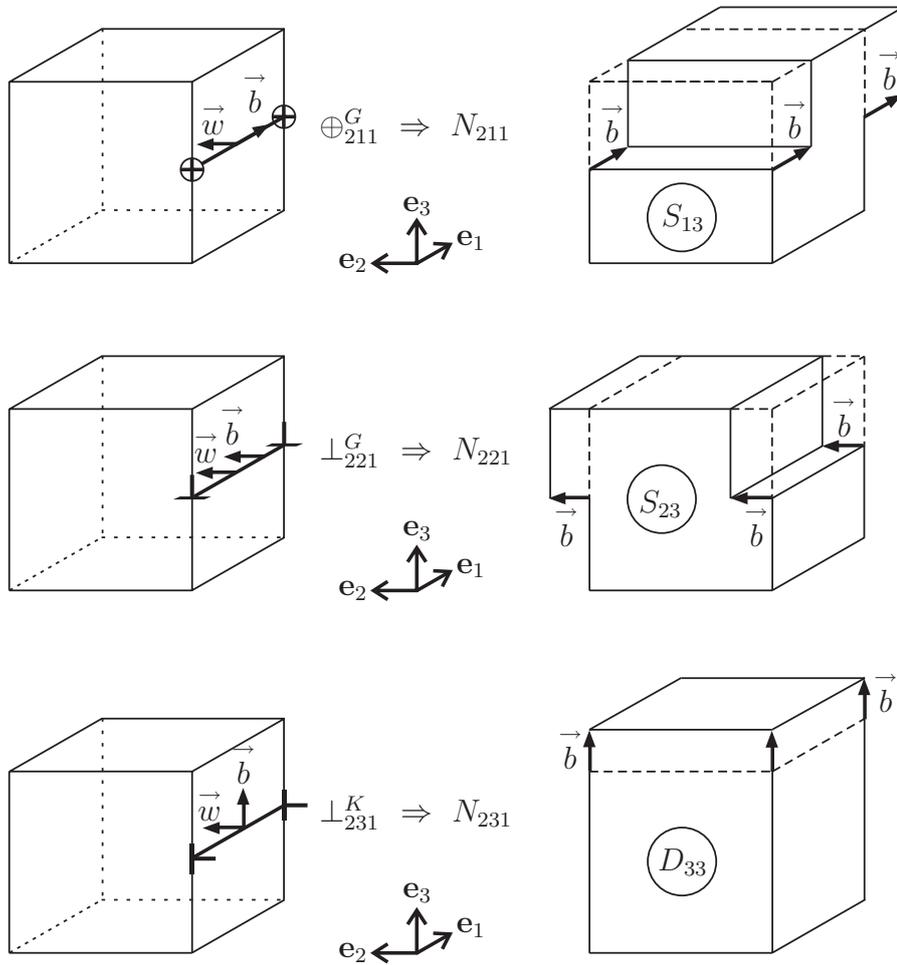


Abbildung 1.9: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{211}$ ,  $N_{221}$  und  $N_{231}$ .

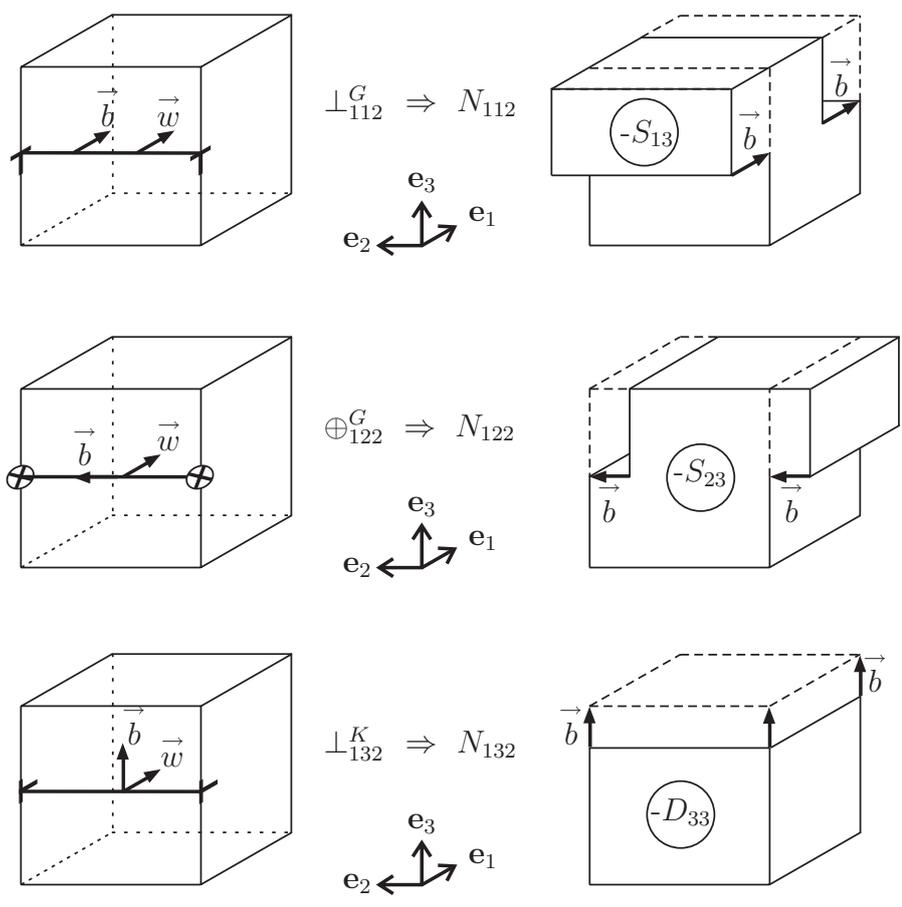


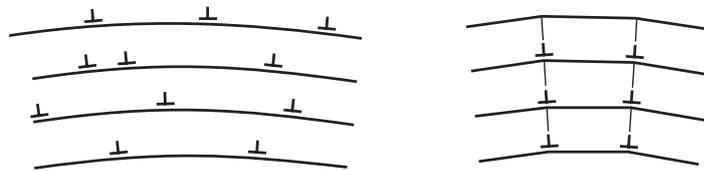
Abbildung 1.10: Mikromodelle zur Wirkung von  $N_{112}$ ,  $N_{122}$  und  $N_{132}$ .

## A.9 Weitere Aspekte zur Versetzungstheorie

DIETER erklärt in [45] den Spezialfall der Polygonisation:

”The term polygonization was used originally to describe the situation that occurs when a single crystal is bent to a relatively small radius of curvature and then annealed. Bending results in the introduction of an excess number of dislocations of one sign. These dislocations are distributed along the bent-glide planes as shown in Fig. 1.11a. When the crystal is heated, the dislocations group themselves into the lower-energy configuration of a low-angle boundary by dislocation climb. The resulting structure is a polygonlike network of low-angle boundaries (Fig. 1.11b).

Since low-angle boundaries consist of simple dislocation arrays, a study of their properties should provide valuable information on dislocation behavior. PARKER and WASHBURN<sup>89</sup> demonstrated that a **low-angle boundary moves as a unit** when subjected to a shear stress.”



**Abbildung 1.11:** Die durch Biegung resultierenden Versetzungen gleichen Vorzeichens streben die Gruppierung in Kleinwinkelkorngrenzen an. Entnommen aus DIETER [45].

Eine bereits in Kap. 7.4 erwähnte Eigenschaft von Versetzungen kann aus Gl. 7.63 oder Gl. 7.64 ersehen werden. Versetzungen bilden stets geschlossene Kurven oder Netzwerke, wodurch der Versetzungsdichtetensor  $\beta$  ein von Quellen freies Feld ist

$$\text{Div}[\beta] = 0 \quad . \quad (1.63)$$

KRÖNER [108] teilt wandernde Versetzungen in zwei Gruppen ein. Zur ersten Gruppe gehören diejenigen Versetzungen, die sich im Laufe der Verformung im Innern des Körpers wieder annihilieren oder aus dem Körper austreten. Diese Versetzungen sind am Ende des Vorgangs nicht mehr da. Die zweite Gruppe bilden diejenigen Versetzungen, die im Innern des Körpers mit einer räumlichen Dichte  $\beta$  verbleiben. Der zweistufige Distorsionstensor aus Gl. 7.39

$$\hat{\varepsilon}_{jl}^p = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \varepsilon_{ijk}^p = -\frac{1}{2} \epsilon_{ikl} N_{ijk} \|\vec{b}\| \quad , \quad N_{ijk} = 0 \quad \forall \quad i = k \quad , \quad (1.64)$$

<sup>89</sup>E. R. Parker and J. Washburn, *Trans. Metall. Soc. AIME*, vol. 194, pp. 1076-1078, 1952.

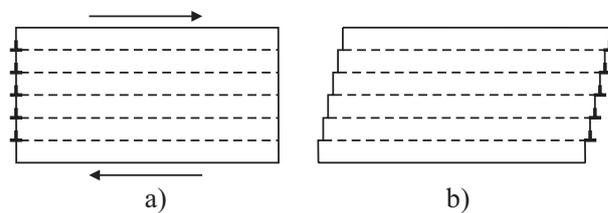
welcher nach einer formalen Homogenisierung einen Verzerrungstensor mit den Einträgen

$$\hat{\epsilon}^P = \begin{bmatrix} D_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & D_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

darstellt, wird nun durch eine HELMHOLTZ-Zerlegung weiter untersucht

$$\hat{\epsilon}^P = \text{Grad}[\mathbf{s}^P] + \text{Curl}[\mathbf{Z}^P] \quad . \quad (1.66)$$

Der Anteil  $\text{Grad}[\mathbf{s}^P]$  in Gl. 1.66 stellt eine kompatible Distorsion dar<sup>90</sup> und wird durch Versetzungen der ersten Gruppe erzeugt. Kompatible Distorsion resultiert somit nur aus Versetzungen, welche sich gegenseitig annihilieren oder aus dem Körper austreten. In Abb. 1.12 ist solch ein Fall dargestellt, in welchem Versetzungen in einen Körper hinein wandern, ihn vollständig durchwandern und dann wieder austreten.



**Abbildung 1.12:** a) Versetzungen wandern in einen Körper hinein und durchwandern ihn vollständig. b) Es resultiert ein deformierter, kompatibler Körper.

In Abb. 1.12 hat sich innerhalb des Körpers die Versetzungsdichte nicht verändert, was auch mit Gl. 7.64 durch  $\beta = -\text{Curl}_\#[\text{Grad}[\mathbf{s}^P]] = 0$  ersichtlich ist. Die Schar der Versetzungen hat in jedem Teilkörper die gleiche Distorsion erzeugt und man stellt somit keine Inkompatibilitäten innerhalb des deformierten Körpers fest.

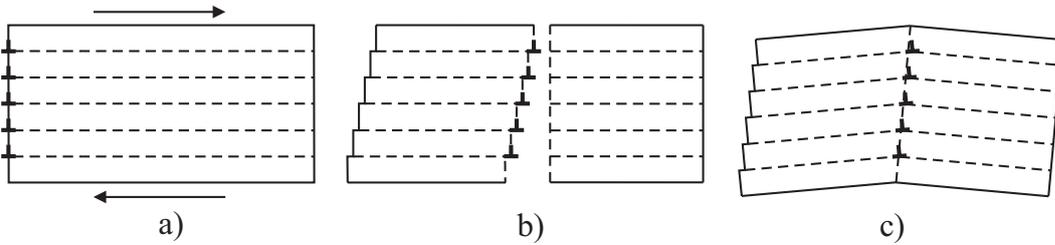
Bleiben jedoch während der Wanderung Versetzungen mit einer Dichte  $\beta$  stecken, so wird die verformende Schar dauernd kleiner und die Distorsion nimmt nach Gl. 7.64 durch  $\text{Curl}_\#[\hat{\epsilon}^P] = -\beta$  ab, womit auch das negative Vorzeichen plausibel ist.

In Abb. 1.13 bleibt die Schar der Versetzungen genau in der Mitte des Körpers stecken. Vor Durchführung der Versetzungswanderung, wird der Körper in der

---

<sup>90</sup>Gradient eines Vektorfeldes

Mitte in zwei Teile gedanklich zerschnitten. Die Versetzungswand durchwandert nur den linken Teil, welcher eine plastische Distorsion erleidet.



**Abbildung 1.13:** a) Versetzungen wandern in einen Körper bis zur Mitte hinein. b) Die Inkompatibilität der Versetzungswand muss in c) durch Überlagerung einer nichtplastischen Distorsion ausgeglichen werden, damit der Körper kompakt bleibt.

KRÖNER [108] schreibt zu Abb. 1.13: ”Man bemerkt, dass der Zusammenhang der Volumenelemente zerstört ist. Die Gitterstruktur hat jedoch die gleiche Richtung wie am Anfang. Dass die Volumenelemente im allgemeinen nicht mehr aneinander passen können, folgt leicht aus der Überlegung, dass der Distorsionstensor  $\hat{\epsilon}^P$  neun unabhängige Komponenten hat. Aus der Elastizitätstheorie weiß man aber, dass er nur drei unabhängige Komponenten haben dürfte, wenn der Zusammenhang gewahrt bleiben sollte, und zwar müßte er die Form  $\text{Grad}[\mathbf{s}^P]$  haben, ... . Hieraus folgt, dass die plastische Distorsion  $\text{Curl}[\mathbf{Z}^P]$  für das Nichtpassen verantwortlich ist. Zerschneiden wir den Körper nicht vor der Versetzungswanderung, so bleibt er natürlich kompakt. Das heißt, es muß sich der plastischen Distorsion  $\hat{\epsilon}^P$  eine nichtplastische Distorsion  $\epsilon^e$  überlagern, die dafür sorgt, dass der Körper zusammenbleibt. Die Distorsion  $\epsilon^e$  muß offenbar einen Anteil

$$\text{Curl}[\mathbf{Z}^e] = -\text{Curl}[\mathbf{Z}^P] \quad (1.67)$$

enthalten, welcher im allgemeinen nicht mehr spannungsfrei ist. ... Schließlich wird  $\epsilon^e$  noch einen elastischen Anteil  $\text{Grad}[\mathbf{s}^e]$  enthalten

$$\epsilon^e = \text{Grad}[\mathbf{s}^e] + \text{Curl}[\mathbf{Z}^e] \quad , \quad (1.68)$$

der dafür sorgt, dass die elastische Energie so gering wird, wie es nur mit der vorgeschriebenen plastischen Distorsion  $\epsilon^P$  verträglich ist. Die gesamte Distorsion, die der Körper erleidet ist also

$$\begin{aligned} \epsilon^e + \epsilon^P &= \text{Grad}[\mathbf{s}^e] + \text{Curl}[\mathbf{Z}^e] + \text{Grad}[\mathbf{s}^P] + \text{Curl}[\mathbf{Z}^P] \\ &= \text{Grad}[\mathbf{s}^e] - \text{Curl}[\mathbf{Z}^P] + \text{Grad}[\mathbf{s}^P] + \text{Curl}[\mathbf{Z}^P] = \text{Grad}[\mathbf{s}^e + \mathbf{s}^P] \quad . \end{aligned} \quad (1.69)$$

Die Verschiebungen  $\mathbf{s}^e + \mathbf{s}^P$  geben an, wohin jeder Punkt des Mediums aus seiner Ausgangslage durch die Versetzungswanderung verschoben wird und zeigen, dass diese Verschiebungen teils plastischer teils elastischer Natur sind.”

Man kann dies jedoch auch so auffassen, dass man vom energetischen Standpunkt vor allem plastische Distorsionen zu erwarten hat, welche möglichst keine elastischen Spannungen erzeugen, sondern Kompatibilität über antisymmetrische Anteile von  $\text{Curl}[\mathbf{Z}^p]$  herstellen. Solch eine Situation ist in Abb. 1.13 c) dargestellt. Hier treten starre Drehungen der Volumenelemente auf, bei denen die Netzebenen spannungsfrei mitgedreht werden. Die dabei entstehende Netzebenenkrümmung ist der Sonderfall der NYESchen Krümmung.

KRÖNER bemerkt weiterhin, dass die elastische Distorsion  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  ein Zustandstensor ist, während dies für  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  nicht zutrifft, da die Distorsion  $\text{Grad}[\mathbf{s}^p]$  zwar die äußere Form eines Mediums (vgl. Abb. 1.12), nicht aber seinen Zustand ändert; denn nach einer reinen Distorsion  $\text{Grad}[\mathbf{s}^p]$  sind am Ende weder Spannungen noch Gitterkrümmungen noch Versetzungen im Körper.

KRÖNER spricht so in [112] den Bezug zur COSSERAT-Theorie an:

” In ihrem im Jahre 1909 erschienenen Buch [33] haben die Gebr. COSSERAT die Theorie eines Körpers entwickelt, dessen ”Punkte” nicht nur elastisch verschoben, sondern darüber hinaus in meßbarer Weise elastisch verdreht werden konnten. Schon damals dachte man an kristalline Körper als Anwendungsgebiet, doch blieb unklar, wie man sich z.B. den Zustand eines Kristalls vorzustellen hatte, dessen Bausteine zwar Drehungen, aber keine Verschiebungen erlitten hatten. ... Man kann sich das Zustandekommen einer **makroskopisch spannungsfreien Drehung** der Gitterstruktur eines Massenelements heute gut veranschaulichen. Wie BURGERS & BRAGG gefunden haben, gibt es gewisse flächenhafte Anordnungen von Versetzungen (sog. Korngrenzanordnungen), die keine makroskopischen Spannungsfelder hervorrufen, sondern nur Orientierungsänderungen zwischen benachbarten Kristallbereichen vermitteln. Wirken beispielsweise auf das Massenelement Momente ein, die seine Orientierung drehen wollen, so kann es diesem Zwang nachgeben, wenn sich in bestimmter Anordnung Versetzungsschleifen bilden, die das Element drehen und gleichzeitig als Korngrenzen den Übergang zu den Nachbarelementen vermitteln. Die Versetzungsbildung, oder noch besser, die damit äquivalente Drehung der Massenelemente kann elastisch genannt werden, wenn nach Wegnahme der Drehmomente eine zur Rückdrehung führende Anihilation der Versetzungsschleifen erfolgt. Wirken auf alle Massenelemente des Körpers Momente wie oben, jedoch in verschiedener Stärke, so werden sich ortsveränderliche Drehungen der Gitterstruktur ergeben, die in einer makroskopisch spannungsfreien Gitterkrümmung resultieren.”

## Literatur

- [1] E.L. Aero and E.V. Kuvshinskii. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Soviet Physics-Solid State*, 2:1272–1281, 1961. [1.1](#)
- [2] H. Altenbach, J. Altenbach, and W. Kissing. *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer, Berlin, 2004. [4.4](#), [A.5](#)
- [3] W.B. Anderson and R.S. Lakes. Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam. *J. Mat. Sci.*, 29:6413–6419, 1994. [1.1](#)
- [4] S. Antman. *Nonlinear Problems of Elasticity.*, volume 107 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, 1995. [1.1](#)
- [5] J. Argyris. An excursion into large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 32:85–155, 1982. [2](#)
- [6] Y. Başar and D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer, Berlin, 2000. [2.2](#), [3.1.2](#)
- [7] J. Badur and W. Pietraszkiewicz. On geometrically non-linear theory of elastic shells derived from pseudo-Cosserat continuum with constrained micro-rotations. In W. Pietraszkiewicz, editor, *Finite Rotations in Structural Mechanics*, number 19, pages 19–32. Springer, 1985. [1.1](#)
- [8] J. Badur and H. Stumpf. *On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory*, volume 72. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1989. [1.1](#)
- [9] D. Balzani, P. Neff, J. Schröder, and G.A. Holzapfel. A polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data. *Int. J. Solids Struct.*, 43(20):6052–6070, 2006. [4](#)
- [10] J.P. Bardet. Introduction to computational granular mechanics. In B. Cambou, editor, *Behaviour of Granular Materials*, CISM Courses and Lectures No. 385, pages 99–169. Springer, Heidelberg, 1998. [1.1](#)
- [11] Y. Basar. A consistent theory of geometrically non-linear shells with independent rotation vector. *Int. J. Solids Struct.*, 23:1401–1415, 1987. [1.1](#)
- [12] N. Büchter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration - a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 34:39–59, 1992. [2](#), [2.2](#)

- 
- [13] K. Berglund. Investigation of a two-dimensional model of a micropolar continuum. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 29:383–392, 1977. 1.1
- [14] D. Besdo. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mechanica*, 20:105–131, 1974. 1.1
- [15] D. Besdo. Inelastic behavior of plane frictionless block-systems described as Cosserat media. *Arch. Mech.*, 37:603–619, 1985. 1.1
- [16] M. Bischoff and E. Ramm. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 40:4427–4449, 1997. 1.1
- [17] J.P. Boehler. Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations. In J.P. Boehler, editor, *Application of Tensor Functions in Solid Mechanics*, CISM Courses and Lectures, pages 171–186, Heidelberg, 1987. Springer. 4, 4.2
- [18] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer, Heidelberg, 1982. 3.1.3
- [19] C. Bouby, D. Fortune, W. Pietraszkiewicz, and C. Vallee. Direct determination of the rotation in the polar decomposition of the deformation gradient by maximizing a Rayleigh quotient. *Z. Angew. Math. Mech.*, 85:155–162, 2005. 1.1
- [20] B. Brank, D. Peric, and F. Damjanic. On large deformations of thin elastoplastic shells: implementations of a finite rotation model for quadrilateral shell element. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 40:689–726, 1997. 1.1
- [21] R. Bruinsma, B. I. Halperin, and A. Zippelius. Motion of defects and stress relaxation in two-dimensional crystals. *The American Physical Society*, 25:579–604, 1982. 7.4
- [22] N. Büchter and E. Ramm. Shell theory versus degeneration—a comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 34:39–59, 1992. 1.1
- [23] G. Capriz. Continua with latent microstructure. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 90:43–56, 1985. 1.1, 9
- [24] G. Capriz and P. Podio-Guidugli. Formal structure and classification of theories of oriented media. *Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV*, 115:17–39, 1977. 1.1

- 
- [25] G. Capriz and P. Podio-Guidugli. Structured continua from a Lagrangian point of view. *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV*, 135:1–25, 1983. [1.1](#)
- [26] G. Capriz, P. Podio-Guidugli, and W.O. Williams. On balance equations for materials with affine structure. *Meccanica*, 17:80–84, 1982. [1.1](#)
- [27] S. Casolo. Macroscopic modelling of structured materials: relationship between orthotropic Cosserat continuum and rigid elements. *Int. J. Solids Struct.*, 43:475–496, 2006. [1.1](#)
- [28] C.B. Childs and L.M. Slifkin. Dislocations and nuclear particle tracks in silver chloride crystals. *Brit. J. Appl. Phys.*, 16:771–781, 1965. [7.6](#)
- [29] P.G. Ciarlet. *Three-Dimensional Elasticity.*, volume 1 of *Studies in Mathematics and its Applications*. Elsevier, Amsterdam, first edition, 1988. [3.1.2](#), [3.1.2](#), [3.1.3](#)
- [30] J.D. Clayton, D.L. McDowell, and D.J. Bammann. Modeling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 22(2):210–256, 2006. [7.7](#)
- [31] S. Cleja-Tigoio. Couple stresses and non-Riemannian plastic connection in finite elasto-plasticity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 53:996–1013, 2002. [1.1](#)
- [32] H. Cohen and C.N. DeSilva. Nonlinear theory of elastic directed surfaces. *J. Mathematical Phys.*, 7:960–966, 1966. [1.1](#)
- [33] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils (Translation: Theory of deformable bodies, NASA TT F-11 561, 1968), Paris, 1909. [1.1](#), [A.9](#)
- [34] A.H. Cottrell. *Theory of Crystal Dislocations*. Documents on Modern Physics. Gordon and Breach, New York, London, 1 edition, 1964. [7.2](#), [7.4](#), [7.4](#), [7.4](#)
- [35] S. Cowin. An incorrect inequality in micropolar elasticity theory. *Z. Angew. Math. Physik*, 21:494–497, 1970. [29](#), [A.6](#)
- [36] G.A. D’Addetta, E. Ramm, S. Diebels, and W. Ehlers. A particle center based homogenization strategy for granular assemblies. *Eng. Comput.*, 21:360–383, 2004. [1.1](#)
- [37] J.S. Dahler and L.E. Scriven. Theory of structured continua. I. General consideration of angular momentum and polarization. *Proc. Roy. Soc. London*, 275 A:504–527, 1963. [1.1](#)

- 
- [38] R. de Borst. Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum. *Engng. Comp.*, 8:317–332, 1991. [1.1](#)
- [39] R. de Borst. A generalization of  $J_2$ -flow theory for polar continua. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 103:347–362, 1992. [1.1](#)
- [40] S. Diebels. Micropolar mixture models on the basis of the theory of porous media. In W. Ehlers and J. Bluhm, editors, *Porous Media*, pages 121–145, Berlin, 2002. Springer. [1.1](#)
- [41] S. Diebels and H. Steeb. The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation. *Proc. R. Soc. London A*, 458:2869–2883, 2002. [1.1](#), [6.4.5](#), [6.4.5](#)
- [42] S. Diebels and H. Steeb. Stress and couple stress in foams. *Comp. Mat. Science*, 28:714–722, 2003. [1.1](#)
- [43] S. Diebels, H. Steeb, and W. Ehlers. Microscopic and macroscopic modelling of foams. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2:156–157, 2003. [1.1](#)
- [44] W. Diepholder, V. Mannl, and H. Lippmann. The Cosserat continuum, a model for grain rotations in metals? *Int. J. Plasticity*, 7:313–328, 1991. [1.1](#)
- [45] G. E. Dieter. *Mechanical Metallurgy*. Materials Science and Engineering. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1976. [7.2](#), [A.9](#), [1.11](#)
- [46] P. Dłuzewski. Finite deformations of polar media in angular coordinates. *Arch. Mech.*, 6:783–793, 1991. [1.1](#)
- [47] P. Duhem. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. *Ann. Ecole Norm. Sup., Ser. 3*, 10:187–23, 1893. [1.1](#)
- [48] J. Dyszlewicz. *Micropolar Theory of Elasticity.*, volume 15 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer, Heidelberg, 2004. [1.1](#)
- [49] W. Ehlers. Foundations of multiphase and porous materials. In W. Ehlers and J. Bluhm, editors, *Porous Media*, pages 3–86, Berlin, 2002. Springer. [1.1](#)
- [50] W. Ehlers, S. Diebels, and W. Volk. Deformation and compatibility for elasto-plastic micropolar materials with applications to geomechanical problems. In A. Bertram and F. Sidoroff, editors, *Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale: Physics, Experiments, Modelling and Applications.*, Journal Physique IV France 8, pages 127–134. EDP Sciences, France, 1998. [1.1](#)

- 
- [51] W. Ehlers, E. Ramm, S. Diebels, and G.A. D’Addetta. From particle ensembles to Cosserat continua: homogenization of contact forces towards stresses and couple stresses. *Int. J. Solids Struct.*, 40:6681–6702, 2003. 1.1
- [52] W. Ehlers and W. Volk. On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid materials. *Int. J. Solids Struct.*, 35:4597–4617, 1998. 1.1
- [53] B. Eidel. *Anisotropic Inelasticity - Modelling, Simulation, Validation*. Shaker Verlag, Aachen, 2005. 4.4
- [54] R.W. Ellis and C.W. Smith. A thin-plate analysis and experimental evaluation of couple stress effects. *Experimental Mechanics*, 7:372–380, 1967. 1.1
- [55] M. Epstein and M. de Leon. Homogeneity conditions for generalized Cosserat media. *J. Elasticity*, 43:189–201, 1996. 1.1
- [56] A. C. Eringen. *Microcontinuum Field Theories*. Springer, Heidelberg, 1999. 1.1, A.2
- [57] A.C. Eringen. Theory of micropolar plates. *Z. Angew. Math. Phys.*, 18:12–30, 1967. 1.1
- [58] A.C. Eringen. Theory of Micropolar Elasticity. In H. Liebowitz, editor, *Fracture. An advanced treatise.*, volume II, pages 621–729. Academic Press, New York, 1968. 1.1
- [59] A.C. Eringen. *Mathematics*, volume Band I of *Continuum Physics*. Academic Press, New York/London, 1971. 4, 4.2
- [60] A.C. Eringen. *Continuum Mechanics of Single-Substance Bodies*, volume II of *Continuum Physics*. Academic Press, New York/London, 1975. 4
- [61] A.C. Eringen. Nonlocal continuum mechanics and some applications. In A.O. Barut, editor, *Nonlinear Equations in Physics and Mathematics*, pages 271–318. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1978. 3.4
- [62] A.C. Eringen and G.A. Maugin. *Electrodynamics of Continua I - Foundations and Solid Media*. Springer. 5.5
- [63] A.C. Eringen and E.S. Suhubi. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids. *Int. J. Eng. Sci.*, 2:189–203, 1964. 1.1, 4.3

- 
- [64] V.I. Eroveyev. *Wave Processes in Solids with Microstructure*. World Scientific, London, 2003. 1.1
- [65] A. Fischle. The planar Cosserat model: minimization of the shear energy on  $\mathfrak{so}(2)$  and relations to geometric function theory. *Preprint 2537*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp07.html>, 11/2007. 9
- [66] N.A. Fleck, G.M. Müller, M.F. Ashby, and J.W. Hutchinson. Strain gradient plasticity: theory and experiment. *Acta Metall. Mater.*, 42(2):475–487, 1994. 7.2
- [67] S. Forest, G. Cailletaud, and R. Sievert. A Cosserat theory for elastoviscoplastic single crystals at finite deformation. *Arch. Mech.*, 49(4):705–736, 1997. 1.1
- [68] S. Forest and R. Sievert. Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 160:71–111, 2003. 1.1
- [69] D. D. Fox and J.C. Simo. A drill rotation formulation for geometrically exact shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 98:329–343, 1992. 1.1
- [70] D.D. Fox and J.C. Simo. A drill rotation formulation for geometrically exact shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 98:329–343, 1992. 1.1
- [71] K. Garikipati. Couple stresses in crystalline solids: origins from plastic slip gradients, dislocation core distortions, and three body interatomic potentials. *J. Mech. Phys. Solids*, 51(7):1189–1214, 2003. 1.1
- [72] R.D. Gauthier. Experimental investigations on micropolar media. In O. Brulin and R.K.T. Hsieh, editors, *Mechanics of Micropolar Media*, pages 395–463. CISM Lectures, World Scientific, Singapore, 1982. 1.1
- [73] R.D. Gauthier and W.E. Jahsman. A quest for micropolar constants. *ASME J. Appl. Mech.*, 42:369–374, 1975. 1.1
- [74] R.D. Gauthier and W.E. Jahsman. Bending of a curved bar of micropolar elastic material. *ASME J. Appl. Mech.*, 43:502–503, 1976. 1.1
- [75] H. Gleiter. Grundzüge der Deformationsprozesse in Metallen. *Colloid and Polymer Science*, 261:878–897, 1983. 7.2, 7.4, 7.7
- [76] F. Gottlieb, I. Münch, and W. Wagner. Theorie und Finite-Elemente Implementierung eines hybriden Spannungsansatzes für das Cosserat-Kontinuum. *Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 2003*. 2.6.2

- 
- [77] P. Grammenoudis. *Mikropolare Plastizität*. Ph.D-Thesis, Department of Mechanics. TU Darmstadt, <http://elib.tu-darmstadt.de/diss/000312>, 2003. 1.1
- [78] P. Grammenoudis and C. Tsakmakis. Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of Iljushin. *Cont. Mech. Thermodyn.*, 13:325–363, 2001. 1.1
- [79] P. Grammenoudis and C. Tsakmakis. Finite element implementation of large deformation micropolar plasticity exhibiting isotropic and kinematic hardening effects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:1691–1720, 2005. 1.1, 8.3
- [80] P. Grammenoudis and C. Tsakmakis. Predictions of microtorsional experiments by micropolar plasticity. *Proc. Roy. Soc. London A*, 461:189–205, 2005. 1.1
- [81] A.E. Green and P.M. Naghdi. Shells in the light of generalized Cosserat continua. In F.I. Niordson, editor, *Theory of Thin Shells.*, IUTAM Symposium Copenhagen 1967, pages 39–58. Springer, Heidelberg, 1969. 1.1
- [82] A.E. Green, P.M. Naghdi, and W.L. Wainwright. A general theory of a Cosserat surface. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20:287–308, 1965. 1.1
- [83] A.E. Green and R.S. Rivlin. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17:113–147, 1964. 1.1
- [84] G. Grioli. Elasticità asimmetrica. *Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV*, 50:389–417, 1960. 1.1
- [85] F. Gruttmann, E. Stein, and P. Wriggers. Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations. *Ing. Arch.*, 59:54–67, 1989. 1.1
- [86] F. Gruttmann, W. Wagner, and P. Wriggers. A nonlinear quadrilateral shell element with drilling degrees of freedom. *Arch. Appl. Mech.*, 62:474–486, 1992. 1.1
- [87] G. Gudehus and J. Tejchman. Some mechanisms of a granular mass in a silo-model tests and a numerical cosserat approach. In O. Brüller, V. Mannel, and J. Najar, editors, *Advances in Continuum Mechanics*, pages 178–194, Heidelberg, 1991. Springer. 1.1

- 
- [88] W. Günther. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschweigische Wiss. Gesell.*, 10:195–213, 1958. [1.1](#), [7.2](#)
- [89] E. Hellinger. Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.*, volume 4, pages 602–694. Teubner, Leipzig, 1914. [1.1](#)
- [90] D. Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*. Fundamental Theories of Physics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2 edition, 2003. [2.4](#), [2.4](#), [2.4](#)
- [91] K.H. Hofmann and S.A. Morris. *The structure of compact groups*. Studies in Mathematics. deGruyter, Berlin, 1998. [2.1](#)
- [92] D. A. Hughes, S.M.A. Khan, A. Godfrey, and H.M. Zbib. Internal structures of deformation induced planar dislocation boundaries. *Materials Science and Engineering*, 2000. [7.2](#)
- [93] T.J.R. Hughes and F. Brezzi. On drilling degrees of freedom. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 72:105–121, 1989. [1.1](#)
- [94] T.J.R. Hughes and J. Winget. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Num. Methods Engrg.*, 15:1862–1867, 1980. [1.1](#)
- [95] M.M. Iordache and K. Willam. Localized failure analysis in elastoplastic Cosserat continua. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 151:559–586, 1998. [1.1](#)
- [96] D. A. Jones and J. W. Mitchell. The etching of dislocations in crystals of silver halides. *Phil.Mag.*, 2:1047, 1957. [7.1](#)
- [97] M. Kamlah. Ferroelectric and ferroelastic piezoceramics - modeling of electromechanical hysteresis phenomena. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 13:219–268, 2001. [5.5](#)
- [98] S. Kessel. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. *Abhandl. Braunschweigische Wiss. Gesell.*, 16:1–22, 1964. [1.1](#)
- [99] S. Kessel. Die Spannungsfunktionen des Cosserat-Kontinuums. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 47:329–336, 1967. [4.8](#)
- [100] A.R. Khoei, A.R. Tabarraie, and A.A. Gharehbaghi.  $H$ -adaptive mesh refinement for shear band localization in elasto-plasticity Cosserat continuum. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 10:253–286, 2005. [1.1](#)

- [101] S. Klinkel. *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2000. [4](#)
- [102] S. Klinkel, F. Gruttmann, and Wagner W. A continuum based 3d-shell element for laminated structures. *Computers & Structures*, 71:43–62, 1999. [4](#)
- [103] W.T. Koiter. Couple stresses in the theory of elasticity I,II. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap*, B 67:17–44, 1964. [1.1](#)
- [104] L.P. and Springer,G.S. Kollár. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. [4.4](#)
- [105] K. Kondo. Geometry of elastic deformation and incompatibility. In K. Kondo, editor, *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, volume 1, Division C, pages 5–17 (361–373). Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai, 1955. [7.1](#)
- [106] K. Kondo. Non-Riemannien geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In K. Kondo, editor, *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, volume 1, Division D-I, pages 6–17 (458–469). Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai, 1955. [1.1](#)
- [107] A. Krawietz. *Materialtheorie*. Springer, Berlin, 1986. [4.2](#)
- [108] E. Kröner. Kontinuumstheorie der Versetzungen. *Zeitschrift für Physik*, 145:424–429, 1956. [7.1](#), [7.6](#), [7.6](#), [7.7](#), [7.6](#), [A.9](#), [A.9](#)
- [109] E. Kröner. Plastizität und Versetzungen. In A. Sommerfeld, E. Fues, and E. Kröner, editors, *Mechanik der deformierbaren Medien*, pages 310–376. Verlag Harri Deutsch, 1992. [7.2](#), [7.4](#), [68](#)
- [110] E. Kröner. Der fundamentale Zusammenhang zwischen Versetzungsdichte und Spannungsfunktion. *Z. Phys.*, 142:463–475, 1955. [1.1](#), [7.2](#), [65](#), [7.7](#), [7.7](#)
- [111] E. Kröner. *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.*, volume 5 of *Ergebnisse der Angewandten Mathematik*. Springer, Berlin, 1958. [7.4](#), [7.5](#)
- [112] E. Kröner. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 4:273–334, 1960. [1.1](#), [7.2](#), [A.9](#)

- 
- [113] E. Kröner. Dislocation: a new concept in the continuum theory of plasticity. *J. Math. Phys.*, 42:27–37, 1962. 1.1
- [114] E. Kröner. Kapitel 9: Plastizität und Versetzungen. In A. Sommerfeld, editor, *Mechanik der deformierbaren Medien, Vorlesungen über Theoretische Physik*, volume II, pages 310–376. 1963. 1.1
- [115] E. Kröner. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. *Int. J. Engng. Science*, 1:261–278, 1963. 7.2, 7.8
- [116] E. Kröner. *Mechanics of Generalized Continua*. Proceedings of the IUTAM-Symposium on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications in Freudenstadt, 1967. Springer, Heidelberg, 1968. 1.1, 7.2
- [117] D. Kuhlmann-Wilsdorf. Theory of plastic deformation: properties of low energy dislocation structures. *Materials Science and Engineering*, A113:1, 1989. 7.2, 7.4
- [118] D. Lachner, H. Lippmann, and L.S. Toth. On Cosserat plasticity and plastic spin for isotropic materials. *Archive Mech.*, 46:531–539, 1994. 1.1
- [119] R.S. Lakes. Experimental microelasticity of two porous solids. *Int. J. Solids Struct.*, 22:55–63, 1985. 1.1, A.2
- [120] R.S. Lakes. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua. In H.B. Mühlhaus, editor, *Continuum Models for Materials with Microstructure.*, pages 1–25. Wiley, 1995. 1.1
- [121] R.S. Lakes. On the torsional properties of single osteons. *J. Biomech.*, 25:1409–1410, 1995. 1.1
- [122] R.S. Lakes. Elastic freedom in cellular solids and composite materials. <http://www.silver.neep.wisc.edu/lakes>. In K. Golden, G. Grimmert, R. James, G. Milton, and IMA P. Sen, editors, *Mathematics of Multiscale Materials.*, volume 99, pages 129–153. Springer, 1998. 1.1
- [123] K.C. Le and H. Stumpf. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations. *Proc. Roy. Soc. London A*, 452:359–371, 1996. 1.1
- [124] E.H. Lee. Elastic-plastic deformation at finite strain. *J. Appl. Mech.*, 36:1–6, 1969. 7.1

- 
- [125] J.D. Lee and Y. Chen. Constitutive relations of micromorphic thermoplasticity. *Int. J. Engrg. Sci.*, 41:387–399, 2002. [1.1](#)
- [126] T. Lewinski. Physical correctness of Cosserat-type models of honeycomb grid plates. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 23(1):53–69, 1985. [1.1](#)
- [127] T. Lewinski. The state of extension of honeycomb grid structures. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 23(22):187–208, 1985. [1.1](#)
- [128] X. Li and H. Tang. A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modelling of strain localization. *Comput. Structures*, 83(1):1–10, 2005. [1.1](#)
- [129] T. Liebe, A. Menzel, and P. Steinmann. Theory and numerics of geometrically non-linear gradient plasticity. *Int. J. Engrg. Sci.*, 41:1603–1629, 2003. [7.1](#)
- [130] H. Lippmann. Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mech.*, 8:255–284, 1969. [1.1](#)
- [131] H. Lippmann. Cosserat plasticity and plastic spin. *Appl. Mech. Rev.*, 48:753–762, 1995. [1.1](#)
- [132] J.E. Marsden and J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983. [3](#), [3.1.2](#), [3.2](#), [3.2.3](#)
- [133] P.G. Martinsson and I. Babuska. Homogenization of materials with periodic truss or frame micro-structures. *Math. Mod. Meth. Appl. Scie.*, 17(5):805–832, 2007. [1.1](#)
- [134] G.A. Maugin. On the structure of the theory of polar elasticity. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, 356:1367–1395, 1998. [1.1](#)
- [135] A. Menzel, P. Betsch, E. Stein, and P. Steinmann. Konzepte der Numerik endlicher Rotationen. *Technische Mechanik*, 24:61–66, 2003. [2.2](#)
- [136] A. Menzel and P. Steinmann. On the continuum formulation of higher gradient plasticity for single and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids, Erratum 49, (2001), 1179-1180*, 48:1777–1796, 2000. [7.1](#)
- [137] W. Menzel. *Gemischt-hybride Elementformulierungen für komplexe Schalenstrukturen unter endlichen Rotationen*. PhD thesis, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum, 1996. [2.2](#)

- 
- [138] T. Merlini. A variational formulation for finite elasticity with independent rotation and Biot-axial field. *Computational Mechanics*, 19:153–168, 1997. [2.6](#)
- [139] R.D. Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 18:31–38, 1951. [1.1](#)
- [140] R.D. Mindlin. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 3(1):1–7, 1963. [1.1](#)
- [141] R.D. Mindlin. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:51–77, 1964. [1.1](#), [4.3](#)
- [142] R.D. Mindlin and H.F. Tiersten. Effects of couple stresses in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11:415–447, 1962. [1.1](#), [A.4.1](#)
- [143] H. Münsterdt and D. Hertel. Lsp bericht. Technical report, Institut für Werkstoffwissenschaften, Universität Erlangen-Nürnberg, 2004/2005. [6.3](#)
- [144] R.J. Mora and A.M. Waas. Evaluation of the micropolar elasticity constants for honeycombs. *Acta Mech.*, DOI 10.1007/s00707-007-0446-8, 2007. [1.1](#)
- [145] H.B. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular material. *Geotechnique*, 37:271–283, 1987. [1.1](#)
- [146] R. Muki and E. Sterberg. The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids. *Z. Angew. Math. Phys.*, 16:611–648, 1965. [1.1](#)
- [147] A. I. Murdoch. The motivation of continuum concepts and relations from discrete considerations. *The quarterly journal of mechanics and applied mathematics*, 36:163–187, 1983. [3](#), [3.3](#)
- [148] A. I. Murdoch. A corpuscular approach to continuum mechanics: Basic considerations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 88:291–321, 1985. [3](#), [3.3](#)
- [149] A. I. Murdoch. *Foundations of Continuum Modelling: a Microscopic Perspective with Applications*, volume 7 of *Advanced Materials and Structures*., Polish Academy of Sciences, Warsaw, 2003. [3](#), [3.2.3](#), [3.3](#), [3.3.2](#)
- [150] A. I. Murdoch. On the microscopic interpretation of stress and couple stress. *Journal of Elasticity*, 71:105–131, 2003. [3](#), [3.2.3](#), [3.3](#), [3.3.2](#), [3.3.3](#), [3.3.3](#), [3.3.3](#), [3.3.3](#)

- [151] F.R.N. Nabarro. *Theory of crystal dislocations*. Oxford University Press, Oxford, 1967. [7.2](#), [7.4](#), [7.7](#), [7.5](#), [7.14](#), [7.7](#), [76](#)
- [152] P.M. Naghdi. The theory of shells and plates. In *Handbuch der Physik, Mechanics of Solids.*, volume VI a/2. Springer, 1972. [1.1](#)
- [153] P. Neff. A geometrically exact Cosserat-plate including size effects, avoiding degeneracy in the thin plate limit. Modelling and mathematical analysis. *Preprint 2301*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/MathNet/Preprints/Listen/pp03.html>, 10/2003. [1.1](#)
- [154] P. Neff. Finite multiplicative plasticity for small elastic strains with linear balance equations and grain boundary relaxation. *Cont. Mech. Thermodynamics*, 15(2):161–195, 2003. [A.9](#)
- [155] P. Neff. Existence of minimizers for a geometrically exact Cosserat solid. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 4(1):548–549, 2004. [1.1](#), [32](#), [A.6](#)
- [156] P. Neff. A geometrically exact Cosserat-shell model including size effects, avoiding degeneracy in the thin shell limit. Part I: Formal dimensional reduction for elastic plates and existence of minimizers for positive Cosserat couple modulus. *Cont. Mech. Thermodynamics*, 16(6 (DOI 10.1007/s00161-004-0182-4)):577–628, 2004. [1.1](#)
- [157] P. Neff. *Geometrically exact Cosserat theory for bulk behaviour and thin structures. Modelling and mathematical analysis*. Signatur HS 7/0973. Habilitationsschrift, Universitäts- und Landesbibliothek, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2004. [1.1](#)
- [158] P. Neff. The  $\Gamma$ -limit of a finite strain Cosserat model for asymptotically thin domains and a consequence for the Cosserat couple modulus. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 5(1):629–630, 2005. [1.1](#)
- [159] P. Neff. The Cosserat couple modulus for continuous solids is zero viz the linearized Cauchy-stress tensor is symmetric. *Preprint 2409*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/MathNet/Preprints/Listen/pp04.html>, *Zeitschrift f. Angewandte Mathematik Mechanik (ZAMM)*, 86(DOI 10.1002/zamm.200510281):892–912, 2006. [1.1](#), [A.2](#), [A.2](#)
- [160] P. Neff. Existence of minimizers for a finite-strain micromorphic elastic solid. *Preprint 2318*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/MathNet/Preprints/Listen/pp04.html>, *Proc. Roy. Soc. Edinb. A*, 136:997–1012, 2006. [3.1.4](#), [4.3](#), [32](#), [A.6](#)

- 
- [161] P. Neff. A finite-strain elastic-plastic Cosserat theory for polycrystals with grain rotations. *Int. J. Eng. Sci.*, DOI 10.1016/j.ijengsci.2006.04.002, 44:574–594, 2006. 1.1, 7.1
- [162] P. Neff. The  $\Gamma$ -limit of a finite strain Cosserat model for asymptotically thin domains versus a formal dimensional reduction. In W. Pietraszkiewicz and C. Szymczak, editors, *Shell-Structures: Theory and Applications.*, pages 149–152. Taylor and Francis Group, London, 2006. 1.1
- [163] P. Neff. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure. Existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus. *Preprint 2357*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp03.html>, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.(M3AS)*, 17(3):363–392, 2007. 1.1
- [164] P. Neff. Finite multiplicative elastic-viscoplastic Cosserat micropolar theory for polycrystals with grain rotations. Modelling and mathematical analysis. *Preprint 2297*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp03.html>, appeared partly in *Int. J. Eng. Sci.*, 9/2003. 1.1, 4.3
- [165] P. Neff and K. Chelmiński. A geometrically exact Cosserat shell-model including size effects, avoiding degeneracy in the thin shell limit. Rigorous justification via  $\Gamma$ -convergence for the elastic plate. *Preprint 2365*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp04.html>, 10/2004. 1.1
- [166] P. Neff and K. Chelminski. A geometrically exact Cosserat shell-model including size effects, avoiding degeneracy in the thin shell limit. Rigorous justification via  $\Gamma$ -convergence for the elastic plate. *Preprint 2365*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp04.html>, submitted, 10/2004. 9
- [167] P. Neff and K. Chelmiński. Infinitesimal elastic-plastic Cosserat micropolar theory. Modelling and global existence in the rate independent case. *Preprint 2290*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp03.html>, *Proc. Roy. Soc. Edinb. A*, 135:1017–1039, 2005. 1.1
- [168] P. Neff and K. Chelmiński. Well-posedness of dynamic Cosserat plasticity. *Preprint 2412*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp05.html>, *Appl. Math. Optim.*, 56:19–35, 2007. 1.1

- [169] P. Neff, K. Chelmiński, and H.D. Alber. Notes on strain gradient plasticity. Finite strain covariant modelling and global existence in the infinitesimal rate-independent case. *Preprint 2503*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp07.html>, submitted to *Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (M3AS)*, 3/2007. [7.1](#)
- [170] P. Neff, K. Chelmiński, W. Müller, and C. Wieners. A numerical solution method for an infinitesimal elastic-plastic Cosserat model. *Preprint 2470*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp06.html>, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (M3AS)*, 17(8):1211–1239, 2007. [1.1](#)
- [171] P. Neff, A. Fischle, and I. Münch. Symmetric Cauchy-stresses do not imply symmetric Biot-strains in weak formulations of isotropic hyperelasticity with rotational degrees of freedom. *Preprint 2518*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp07.html>, *Acta Mechanica*, published online DOI 10.1007/s00707-007-0509-x, 2007. [2.6](#), [A.2](#)
- [172] P. Neff and S. Forest. A geometrically exact micromorphic model for elastic metallic foams accounting for affine microstructure. Modelling, existence of minimizers, identification of moduli and computational results. *Preprint 2373*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp04.html>, 12/2004. [1.1](#), [3.1.3](#), [3.1.4](#)
- [173] P. Neff and S. Forest. A geometrically exact micromorphic model for elastic metallic foams accounting for affine microstructure. Modelling, existence of minimizers, identification of moduli and computational results. *J. Elasticity*, 87:239–276, 2007. [1.1](#), [A.2](#)
- [174] P. Neff and I. Münch. Curl bounds Grad on  $SO(3)$ . *Preprint 2455*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp06.html>, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, published online, DOI: 10.1051/cocv:2007050, 2007. [3.1.2](#), [3.1.2](#), [3.1.3](#), [3.1.3](#), [4.6](#)
- [175] P. Neff and I. Münch. Simple glide for a nonlinear Cosserat model: Analytical and computational results with induced microstructure. *Preprint 2414*, <http://wwwbib.mathematik.tu-darmstadt.de/Math-Net/Preprints/Listen/pp04.html>, 9/2005. [6.4.3](#)
- [176] P. Neff and C. Wieners. Comparison of models for finite plasticity. A numerical study. *Comput. Visual. Sci.*, 6:23–35, 2003. [7.1](#)

- 
- [177] H. Neuber. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 2:48–69, 1966. [1.1](#)
- [178] W. Noll. *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, Heidelberg, 1974. [4](#)
- [179] W. Nowacki. *Theory of Asymmetric Elasticity*. (polish original 1971). Pergamon Press, Oxford, 1986. [1.1](#), [A.2](#)
- [180] A.S. Nowick and B.S. Berry. *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. Academic Press, New York, 1972. [7.4](#), [7.4](#), [7.4](#), [70](#), [7.4](#)
- [181] J.F. Nye. Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metall.*, 1:153–162, 1953. [7.2](#), [7.6](#), [7.7](#), [7.7](#)
- [182] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Halsted Press, New York, 1984. [3.1.2](#)
- [183] M. Ortiz and E.A. Repetto. Nonconvex energy minimization and dislocation structures in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 47:397–462, 1999. [7.2](#), [63](#)
- [184] M. Ortiz and L. Stainier. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 171:419–444, 1999. [A.1](#)
- [185] D. Peric, J. Yu, and D.R.J. Owen. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: applications to the numerical simulation of strain localization in classical and Cosserat continua. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37:1351–1379, 1994. [1.1](#)
- [186] W. Pietraszkiewicz. *Finite Rotations in Structural Mechanics*. Number 19 in Lectures Notes in Engineering. Springer, Berlin, 1985. [1.1](#)
- [187] W. Pietraszkiewicz and J. Badur. Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Engng. Science*, 9:1097–1115, 1983. [1.1](#), [2](#), [2.2](#), [2.2](#), [3.1.3](#)
- [188] E. Ramm, E. Rank, R. Rannacher, K. Schweizerhof, E. Stein, W. Wendland, G. Wittum, P. Wriggers, and W. Wunderlich. *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. Wiley, New-York, 2002. [8.3](#)
- [189] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 67:69–77, 1945. [1.1](#)

- [190] E. Riks. The application of newton's method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1060–1065, 1972. [43](#)
- [191] E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15:529–551, 1979. [43](#)
- [192] M. Ristinmaa and M. Vecchi. Use of couple-stress theory in elasto-plasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 136:205–224, 1996. [1.1](#)
- [193] E. G. Rudberg. *J. Inst. Metals*, 88, 1960. [7.2](#)
- [194] C. Sansour. A theory of the elastic-viscoplastic Cosserat continuum. *Arch. Mech.*, 50:577–597, 1998. [1.1](#)
- [195] C. Sansour. A unified concept of elastic-viscoplastic Cosserat and micro-morphic continua. In A. Bertram and F. Sidoroff, editors, *Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale: Physics, Experiments, Modelling and Applications.*, Journal Physique IV France 8, pages 341–348. EDP Sciences, France, 1998. [1.1](#)
- [196] C. Sansour. *Ein einheitliches Konzept verallgemeinerter Kontinua mit Mikrostruktur unter besonderer Berücksichtigung der finiten Viskoplastizität.* Habilitation-Thesis, Shaker-Verlag, Aachen, Germany, 1999. [1.1](#), [3.1.2](#)
- [197] C. Sansour and H. Bednarczyk. The Cosserat surface as a shell model, theory and finite element formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 120:1–32, 1995. [1.1](#)
- [198] C. Sansour and H. Bednarczyk. The cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 120:1–32, 1995. [4.8](#)
- [199] C. Sansour and J. Bocko. On hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain finite element formulations for a geometrically exact shell theory with drilling degrees of freedom. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 43:175–192, 1998. [1.1](#)
- [200] C. Sansour and H. Buefler. An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 34:73–115, 1992. [1.1](#), [2.2](#)
- [201] C. Sansour and W. Wagner. Multiplicative updating of the rotation tensor in the finite element analysis of rods and shells, a path independent approach. *Computational Mechanics*, 31:153–162, 2003. [1.1](#), [2.4](#), [2.4](#)

- [202] G.N. Savin and Y.N. Nemish. Investigation into stress concentration in the moment theory of elasticity (a survey). *Int. Appl. Mech.*, 4(12):1–15, 1968. [1.1](#)
- [203] A. Sawczuk. On the yielding of Cosserat continua. *Arch. Mech. Stosow.*, 19:471–480, 1967. [1.1](#)
- [204] H. Schaefer. Das Cosserat-Kontinuum. *Z. Angew. Math. Mech.*, 47:485–498, 1967. [4.8](#), [7.2](#)
- [205] H. Schaefer. Eine Feldtheorie der Versetzungen im Cosserat-kontinuum. *Z. Angew. Math. Phys.*, pages 891–899, 1969. [1.1](#)
- [206] T. Schanz. Böschungsbruchberechnung - berechnungsbeispiele. *Geotechnik*, 29:369–372, 2006. [8.5](#), [8.30](#), [8.5](#), [8.31](#), [8.32](#)
- [207] J. Schijve. Note on couple stresses. *J. Mech. Phys. Solids*, 14:113–120, 1966. [1.1](#)
- [208] R. Schmidt. Polar decomposition and finite rotation vector in first order finite elastic strain shell theory. In W. Pietraszkiewicz, editor, *Finite Rotations in Structural Mechanics*, number 19 in Lecture Notes in Engineering. Springer, Berlin, 1985. [1.1](#)
- [209] J. Schröder and P. Neff. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *Int. J. Solids Struct.*, 40(2):401–445, 2003. [4](#)
- [210] J. Schröder, P. Neff, and D. Balzani. A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 42(15):4352–4371, 2005. [4](#)
- [211] R. Sedláček, W. Blum, Kratochvíl J., and S. Forest. Subgrain formation during deformation: Physical origin and consequences. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 32A:1–9, 2001. [7.2](#)
- [212] J.G. Simmonds and D.A. Danielson. Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. *J. Appl. Mech. Trans. ASME.*, 39:1085–1090, 1972. [1.1](#)
- [213] J. A. Simmons, R. deWit, and R. Bullough. Discussion to the micromorphic approach from eringen. In J. A. Simmons, R. deWit, and R. Bullough, editors, *Fundamental Aspects of Dislocation Theory*, 317, pages 1049–1067, Washington, 1970. National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office. [7.2](#)

- 
- [214] J.C. Simo, D.D. Fox, and T.J.R. Hughes. Formulations of finite elasticity with independent rotations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 95:277–288, 1992. [1.1](#)
- [215] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 79:21–70, 1990. [2.2](#), [8.4](#)
- [216] J.C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58:79–116, 1986. [2.6.2](#)
- [217] A.J.M. Spencer. Anisotropic invariants and additional results for invariant and tensor representations. In J.P. Boehler, editor, *Application of Tensor Functions in Solid Mechanics*, CISM Courses and Lectures, pages 171–186, NY, 1987. Springer. [4](#), [4.4](#)
- [218] E. Stein and F.-J. Barthold. Elastizitätstheorie. In G. Mehlhorn, editor, *Der Ingenieurbau*. W. Ernst und Sohn, 1996. [4.3](#)
- [219] P. Steinmann. A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 31(8):1063–1084, 1994. [1.1](#)
- [220] P. Steinmann. Theorie endlicher mikropolarer Elasto-Plastizität. *Z. angew. Math. Mech.*, 74(4):T245–T247, 1994. [1.1](#)
- [221] P. Steinmann. Views on multiplicative elastoplasticity and the continuum theory of dislocations. *Int. J. Engrg. Sci.*, 34:1717–1735, 1996. [7.1](#)
- [222] P. Steinmann. A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua. *Acta Mech.*, 121:215–232, 1997. [1.1](#)
- [223] B. Svendsen. Continuum thermodynamic models for crystal plasticity including the effects of geometrically necessary dislocations. *J. Mech. Phys. Solids*, 50(25):1297–1329, 2002. [7.1](#)
- [224] B. Svendsen. On thermodynamic- and variational based formulations for inelastic continua with internal lengthscales. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48-51:5429–5452, 2004. [7.1](#)
- [225] J. Tejchman and G. Gudehus. Shearing of a narrow granular layer with polar quantities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 25:1–28, 2001. [1.1](#)

- 
- [226] R.A. Toupin. Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11:385–413, 1962. [1.1](#)
- [227] R.A. Toupin. Theory of elasticity with couple stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17:85–112, 1964. [1.1](#)
- [228] P. Trovalusci and R. Masiano. Non-linear micropolar and classical continua for anisotropic discontinuous materials. *Int. J. Solids Struct.*, 40:1281–1297, 2003. [1.1](#)
- [229] C. Truesdell. Die Entwicklung des Drallsatzes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 44:149–158, 1964. [1.1](#), [3.2.3](#), [3.2.3](#)
- [230] W. Voigt. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Kristalle. I. Ableitung der Grundgleichungen aus der Annahme mit Polarität begabter Moleküle. *Abh. königl. Gesell. Wiss. Göttingen (math. Klasse)*, 34(3), 1887. [1.1](#)
- [231] G. Vörös and I. Kovacs. Point defects as sources of micropolar effects in elastic continua. *Int. J. Engng. Sci.*, 20(2):379–387, 1982. [1.1](#)
- [232] W. Wagner. A finite element model for nonlinear shells of revolution with finite rotations. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 29:1455–1471, 1990. [2.6.2](#)
- [233] W. Wagner and F. Gruttmann. A simple finite rotation formulation for composite shell elements. *Engineering Computations*, 11:145–176, 1994. [2.6.2](#)
- [234] W. Wagner and F. Gruttmann. A robust nonlinear mixed hybrid quadrilateral shell element. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 64:635–666, 2005. [2.6.2](#), [8.4](#)
- [235] C. Wieners, M. Amman, S. Diebels, and W. Ehlers. Parallel 3-d simulations for porous media models in soil mechanics. *Comp. Mech.*, 29:75–87, 2002. [1.1](#), [3.4](#)
- [236] K. Wilmski and C. Wozniak. On geometry of continuous medium with micro-structure. *Archivum Mechaniki Stosowanej*, 5(19):715–723, 1967. [1.1](#)
- [237] K. Wisniewski. A shell theory with independent rotations for relaxed Biot stress and right strain. *Comp. Mech.*, 21(2):101–122, 1998. [1.1](#)
- [238] K. Wisniewski and E. Turska. Kinematics of finite rotation shells with in-plane twist parameter. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 190:1117–1135, 2000. [1.1](#)

- [239] P. Wriggers and F. Gruttmann. Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: Theory and finite element formulation. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 36:2049–2071, 1993. [1.1](#)
- [240] G. Yang, P. Shang, S. D. Sutton, I. P. Jones, J. S. Abell, and C. E. Gough. Competing pinning mechanisms in single crystals by magnetic and defect structural studies. *The American Physical Society*, 48:4054–4063, 1993. [7.1](#)
- [241] N. Zaafarani, D. Raabe, R.N. Singh, F. Roters, and S. Zaefferer. Three-dimensional investigation of the texture and microstructure below a nanoident in a Cu single crystal using 3D EBSD and crystal plasticity finite element simulations. *Acta Materialia*, 54:1863–1876, 2006. [9](#)



# Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)

## Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.

- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengeräten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.
- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Hanisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitationsschrift, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.

- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarman, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalentragwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.

- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.
- 11 (2006) : Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007) : Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.

# Lebenslauf

Name	Ingo Münch
Geburtsdatum	25.04.1975 in Balingen
1981-1994	Schulbildung Technisches Gymnasium Sigmaringen Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
1994-1995	Zivildienst
1995-2001	Studium des Bauingenieurwesens Universität Karlsruhe (TH) Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau Abschluss: Diplom
1996-1998	Wissenschaftliche Hilfskraft Institut für Mechanik Universität Karlsruhe (TH)
1997-2000	Wissenschaftliche Hilfskraft Institut für Baustatik Universität Karlsruhe (TH)
2001	Statiker und Konstrukteur im Ingenieurbüro für Tragwerksplanung Bitzer-Weber-Nolle, Albstadt
seit 2002	Wissenschaftlicher Assistent Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe
seit 1985	Kirchenmusikalische Ausbildung zum Organisten und Mitarbeit in der evangelischen Landeskirche Baden



**ISBN 978-3-935322-12-6**