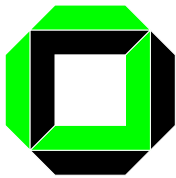


Semi-diskrete inverse Probleme: Die Approximative Inverse

Andreas Rieder



UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
und Mathematische Modellbildung
und
Institut für Praktische Mathematik



mit **Thomas Schuster**, z.Z. Tufts University, Boston

Motivation: Diskretisierung durch Projektionsverfahren

$A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X, Y reelle Hilberträume, $\mathcal{R}(A)$ nicht abgeschl. in Y
z.B. $A \in \mathcal{K}(X, Y)$ nicht degeneriert

inverses Problem: $Af = g$ mit $g \in \mathcal{D}(A^+) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$

$P_l \in \mathcal{L}(X)$ und $Q_l \in \mathcal{L}(Y)$ Orthogonalprojekt. auf endlichdim. Unterräume

projiziertes Problem: $A_l f_l = Q_l g$ mit $A_l = Q_l A P_l$ und $f_l \in \mathcal{R}(P_l)$

Schwierigkeiten:

- Unterräume nicht problemangepaßt
- Korrekte Berechnung von $Q_l g$ verlangt komplette Kenntnis von g
Aber: g meist aus Messungen nur diskret bekannt

Modellierung mit Meßprozeß

Baue Meßprozeß in das mathematische Modell ein!

$\Psi_n : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ Beobachtungsoperator (linear, stetig)

Bsp.: $\psi_i \in Y$ Sensitivitätsprofil des i -ten Detektors

$$\Psi_n g := (\langle g, \psi_1 \rangle_Y, \dots, \langle g, \psi_n \rangle_Y)^t$$

semi-diskretes Problem (SDP): $A_n f_n = g_n$ (Keine Diskretisierung!)

mit $A_n = \Psi_n A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$, $g_n = \Psi_n g$, $f_n \in X$

SDP ist unterbestimmt, $f_n^+ = A_n^+ g_n \in \mathcal{N}(A_n)^\perp$, A_n^+ ist stetig!

Modellierung mit Meßprozeß

Baue Meßprozeß in das mathematische Modell ein!

$\Psi_n : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ Beobachtungsoperator (linear, stetig)

Bsp.: $\psi_i \in Y$ Sensitivitätsprofil des i -ten Detektors

$$\Psi_n g := (\langle g, \psi_1 \rangle_Y, \dots, \langle g, \psi_n \rangle_Y)^t$$

semi-diskretes Problem (SDP): $A_n f_n = g_n$ (Keine Diskretisierung!)

mit $A_n = \Psi_n A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$, $g_n = \Psi_n g$, $f_n \in X$

SDP ist unterbestimmt, $f_n^+ = A_n^+ g_n \in \mathcal{N}(A_n)^\perp$, A_n^+ ist stetig!

JEDOCH: A_n^+ schlecht konditioniert

Instabilität von A^+ vererbt sich

Stabilisierung durch Mittelung

Rekonstruiere Momente von f_n^+ :

$$\langle f_n^+, e_i \rangle_X, \quad i = 1, \dots, d$$

mit geeigneten $e_i \in X$

Definition: $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$ **Mollifier**, falls es $\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$ gibt, so daß

$$E_d w = \sum_{i=1}^d \langle w, e_i \rangle_X b_i$$

erfüllt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \|E_d w - w\|_X = 0 \quad \text{für jedes } w \in X$$

Stabilisierung durch Mittelung

Rekonstruiere Momente von f_n^+ :

$$\langle f_n^+, e_i \rangle_X, \quad i = 1, \dots, d$$

mit geeigneten $e_i \in X$

Definition: $\{e_i\}_{1 \leq i \leq d}$ **Mollifier**, falls es $\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$ gibt, so daß

$$E_d w = \sum_{i=1}^d \langle w, e_i \rangle_X b_i$$

erfüllt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \|E_d w - w\|_X = 0 \quad \text{für jedes } w \in X$$

Wie erhalten wir $\langle f_n^+, e_i \rangle_X$?

Rekonstruktionskerne und Approximative Inverse

Approximiere e_i in $\mathcal{R}(A_n^*)$ durch $v_i^n \in \mathbb{R}^n$: $\|A_n^* v_i^n - e_i\|_X \rightarrow \min!$

$$\underbrace{A_n A_n^*}_{n \times n \text{ Matrix}} v_i^n = A_n e_i$$

(e_i, v_i^n) Mollifier/Rekonstruktionskern-Paar

Lemma: Falls $g \in \mathcal{R}(A)$ oder $v_i^n \in \mathcal{N}(A_n^*)^\perp$, dann $\langle f_n^+, e_i \rangle_X = \langle g_n, v_i^n \rangle_{\mathbb{R}^n}$

Definition: Approximative Inverse $\tilde{A}_{n,d} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ von A_n ist

$$\tilde{A}_{n,d} w := \sum_{i=1}^d \langle w, v_i^n \rangle_{\mathbb{R}^n} b_i$$

Es gilt: $\tilde{A}_{n,d} g_n = E_d f_n^+ \xrightarrow{d \rightarrow \infty} f_n^+$

Verallgemeinerung der AI: Motivation

Auflösen der Normalgleichung für v_i^n sollte vermieden werden:

- $A_n A_n^*$ dicht besetzt, schlecht konditioniert, hohe Dimension
- Änderung von n oder $d \implies$ komplette Neuberechnung von v_i^n
- Invarianzen von A und A^* übertragen sich nicht auf A_n und A_n^*
- $A_n : \mathcal{D}(A_n) \subset X \rightarrow Y$ unbeschränkt und A_n^* existiert nicht, d.h. AI nicht definiert

Das letzte Szenario tritt ein, wenn

Ψ_n nicht beschränkt auf Y definiert werden kann

Bsp.: Radon-Transformation $\mathbf{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$, $Z = [-1, 1] \times [0, \pi]$

$\mathbf{R} : H_0^\alpha(\Omega) \rightarrow H^{\alpha+1/2}(Z)$, $\alpha \geq 0$, $\Psi_n : H^\kappa(Z) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\kappa > 1$, Punktauswert.

$\mathbf{R}_n = \Psi_n \mathbf{R} : \mathcal{D}(\mathbf{R}_n) \subset L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}_n) = H_0^\alpha(\Omega)$, $\alpha > 1/2$, **unbeschränkt**

Verallgemeinerung der AI: Konstruktion

Voraus.: $\mathcal{X} \hookrightarrow X$ und $\mathcal{Y} \hookrightarrow Y$ stetig, injektiv und dicht

$$A \in \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{und} \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Neu-Definition von $\Psi_n : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch Funktionale $\{\psi_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n} \subset \mathcal{Y}'$:

$$(\Psi_n u)_k := \langle \psi_{n,k}, u \rangle_{\mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}}, \quad k = 1, \dots, n$$

$A_n = \Psi_n A : \mathcal{D}(A_n) \subset X \rightarrow Y$, $\mathcal{D}(A_n) = \mathcal{X}$, beschränkt oder unbeschränkt

Wie erhalten wir Rekonstruktionskerne?

$$\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \mathcal{N}(A)^\perp \implies \forall \delta_i > 0 \exists v_i \in \mathcal{Y}:$$

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp} e_i - A^* v_i\|_X \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, d$$

Neu-Definition der AI

Mit $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset Y$ definiere Approximationsoperator $\Pi_n : \mathcal{Y} \rightarrow Y$ durch

$$\Pi_n u := \sum_{k=1}^n (\Psi_n u)_k \varphi_k = \sum_{k=1}^n \langle \psi_{n,k}, u \rangle_{\mathcal{Y}' \times \mathcal{Y}} \varphi_k.$$

Es gebe NF $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|u - \Pi_n u\|_Y \leq \rho_n \|u\|_{\mathcal{Y}} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{Y} \text{ und } n \rightarrow \infty$$

Außerdem

$$\|\Pi_n\|_{\mathcal{Y} \rightarrow Y} \leq C_{\Pi} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Neu-Definition: Approximative Inverse $\tilde{A}_{n,d} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ von A_n ist

$$\tilde{A}_{n,d} w := \sum_{i=1}^d \langle w, G_n \Psi_n v_i \rangle_{\mathbb{R}^n} b_i$$

mit G_n Gramsche Matrix bzgl. $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n}$.

Konvergenz der AI

Satz: Voraus. an A , E_d , Ψ_n und Π_n wie oben. Zusätzlich:

$\{b_i\}_{1 \leq i \leq d} \subset X$ und $\{\varphi_k\}_{1 \leq k \leq n} \subset Y$ Riesz-Systeme

Falls $g_n = \Psi_n g$ für $g \in \mathcal{R}(A)$ und $f^+ = A^+ g \in \mathcal{X}$, dann

$$\|\tilde{A}_{n,d} g_n - f^+\|_X \leq \|(I - E_d) f^+\|_X + C_{AI} \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d (\rho_n^2 \|v_i\|_Y^2 + \delta_i^2) \right)^{1/2} \|f^+\|_X$$

Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n^2}{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \|v_i\|_Y^2 = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} \sum_{i=1}^{d_n} \delta_i^2 = 0,$$

dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{A}_{n,d_n} g_n - f^+\|_X = 0$$

Regularisierungseigenschaft der AI

Meßrauschen wird durch eine Störung des Beobachtungsoperators modelliert:

$$(\Psi_n^\varepsilon w)_i = (\Psi_n w)_i + \varepsilon_i \|w\|_{\mathcal{Y}}, \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

Satz: Voraus. wie im Satz zuvor und Konvergenz für $\varepsilon = 0$ liege vor.

Falls $n = n_\varepsilon$ mit $\varepsilon/\rho_{n_\varepsilon} = O(1)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$, dann

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|\tilde{A}_{n_\varepsilon, d_{n_\varepsilon}} w - f\|_X \mid w = \Psi_{n_\varepsilon}^\varepsilon A f, \Psi_{n_\varepsilon}^\varepsilon \text{ wie oben} \} = 0$$

für alle $f \in \mathcal{X} \cap \mathcal{N}(A)^\perp$.

Ausnutzen von Invarianzen

Lemma: Seien $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(X)$ und $S \in \mathcal{L}(Y)$ verknüpft durch

$$TA^* = A^*S.$$

Zusätzlich habe S ein dichtes Bild und T sei das Vielfache einer Isometrie. Falls

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp}e - A^*v\|_X \leq \delta,$$

dann

$$\|P_{\mathcal{N}(A)^\perp}Te - A^*Sv\|_X \leq \|T\| \delta.$$

Im Detail ausgeführt: 2D-Tomographie und 3D-Vektortomographie

Literatur

1. *Approximate inverse in action with an application to 2D-computerized tomography*
SIAM J. Numer. Anal., 37(6), 1909-1929, 2000
Co-Autor: Th. Schuster
2. *Approximate inverse in action II: convergence and stability*
Math. Comput., 72, 1399-1415, 2003
Co-Autor: Th. Schuster
3. *Approximate inverse in action III: Doppler tomography*
IWRMM-Preprint 02/15, 2002
Co-Autor: Th. Schuster