

Bestimmung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner Raumlage

Michael Lösler,
Martin Nitschke

Dreidimensionale Koordinaten von diskreten Punkten eines zu untersuchenden Objektes können mit verschiedenen geodätischen Messsystemen erfasst werden. Um jedoch eine qualitative Aussage bezüglich der Größe, Form oder Lage dieses Objektes treffen zu können, werden Algorithmen zur Schätzung von Approximationsformen benötigt. Das Ableiten von Formmaßen mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate bildet die Grundlage bei der Qualitätsüberwachung und -analyse z.B. im Anlagen- und Maschinenbau. Am Beispiel der Ellipsenausgleichung werden in diesem Beitrag zunächst Bestimmungsverfahren in der Ebene beschrieben, die anschließend auf den allgemeinen räumlichen Fall übertragen werden und in einem einfach zu implementierenden funktionalen Modell zur Parameterschätzung münden.

Einleitung

Mithilfe von Laserscannern oder den Methoden der Photogrammetrie lassen sich innerhalb kürzester Zeit vollständige Objekte erfassen. Koordinatenmessmaschinen oder Lasertracker sind darüber hinaus prädestiniert, Objektteile hochgenau zu vermessen. Unabhängig von der eingesetzten Messtechnik wird im Allgemeinen die gewonnene Punktwolke weiterverarbeitet und stellt noch kein Endergebnis dar. In diesem Zusammenhang spielt die Formanalyse eine große Rolle. Hierbei wird versucht, entweder die gesamte Punktwolke oder Teile von dieser durch bestimmte Regelgeometrien zu beschreiben, wie z.B. Kugel, Ebene, Kegel oder Zylinder. Mit den gewonnenen Formparametern können bspw. Rückschlüsse auf die Fertigungsqualität (Geradheit, Ebenföchigkeit, Rundheit usw.) des Objektes gezogen werden (GRÖNE und SCHWARZ, 1995). Neben den schon genannten räumlichen Formen sind auch klassische 2D-Formen wie bspw. Geraden, Kreise oder Ellipsen in den 3D-Raum zu überführen. So lässt sich bei rotativen Bewegungen mithilfe von 3D-Kreisen die Drehachse geometrisch bestimmen und letztlich durch eine räumliche Regressionsgerade beschreiben, was bspw. bei der Referenzpunktbestimmung von Radioteleskopen Anwendung findet (z.B. LÖSLER und ESCHELBACH, 2009). Aber auch abseits der klassischen

Formanalyse in der Messtechnik spielen ebene Formen im Raum eine wichtige Rolle z.B. bei der Bestimmung von Orientierungsparametern für scannende Messsysteme mithilfe eines Dreharms (HENNES und RICHTER, 2008) oder bei der Beschreibung von Satellitenbahnen durch im Raum liegende Ellipsen – 1. Keplergesetz (z.B. BAUER, 2002).

In diesem Beitrag wird ein anschauliches Modell zur Schätzung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner räumlicher Lage beschrieben. Hierzu werden zunächst zwei Standardverfahren zur Ellipsenausgleichung in der Ebene aufgezeigt, die sich mithilfe einer Drehung auch auf den räumlichen Fall übertragen lassen und dort zweistufig gelöst werden können. Da es sich bei dieser zweistufigen Lösung nicht um eine orthogonale Regression handelt, wird im Anschluss ein einfach zu implementierendes funktionales Modell zur Schätzung der Form- und Lageparameter einer allgemeinen Regressionsellipse abgeleitet.

Ansätze zur Ellipsenausgleichung in der Ebene

Die allgemeine Ellipsengleichung in der Ebene lautet (z.B. NITSCHKE, 2005)

$$\left(\frac{(x_i - x_0) \cos \alpha + (y_i - y_0) \sin \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{-(x_i - x_0) \sin \alpha + (y_i - y_0) \cos \alpha}{b}\right)^2 - 1 = 0 \quad (1a)$$

bzw. in Matrizenform als Parameterdarstellung

$$\begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \cos t_i \\ b \sin t_i \end{bmatrix}, \text{ mit } 0 \leq t_i \leq 2\pi. \quad (1b)$$

Dabei ist α der Drehwinkel, um den die Ellipse gegenüber der Normallage geneigt ist, a bzw. b bezeichnen die große bzw. die kleine Halbachse, $P_0 = [x_0 \ y_0]^T$ den Ellipsenmittelpunkt und $P_i = [x_i \ y_i]^T$ einen beliebigen Ellipsenpunkt. Mit der linearen Exzentrizität e

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2)$$

und des Drehwinkels α lassen sich die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 durch polares Anhängen an den Ellipsenmittelpunkt P_0 bestimmen (Abbildung 1).

Zur Bestimmung der fünf Ellipsenparameter schlägt (BENNING, 2010) eine Ausgleichung im Gauß-Helmert-Modell vor, bei der Gleichung (1a) zum einen partiell

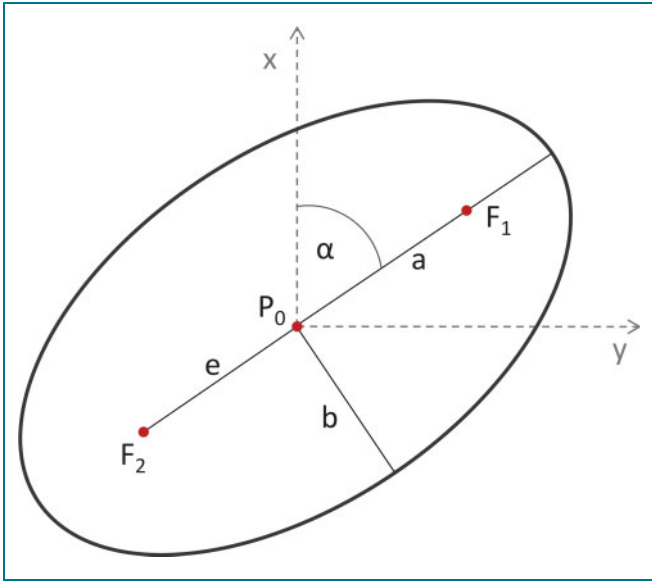


Abb. 1: Ellipse in allgemeiner Lage in der Ebene

nach den fünf unbekanntem Parametern abgeleitet wird und diese in der Jacobi-Matrix A zusammengefasst werden und zum anderen die Designmatrix B mit den partiellen Ableitungen nach den Beobachtungen aufgestellt wird. Die Linearisierung erfolgt hierbei zunächst an den Beobachtungen L_0 und den Näherungswerten der Unbekannten X_0 . Das zu lösende Gleichungssystem ergibt sich in Blockmatrixschreibweise zu:

$$\begin{bmatrix} BQ_{LL}B^T & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -w \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

wobei Q_{LL} die Kofaktormatrix der Beobachtungen und w der Widerspruchsvektor ist. Der Vektor X enthält die Unbekannten und k die Lagrangeschen Korrelaten. Das nicht-lineare Gleichungssystem wird iterativ gelöst und der Differenzfortschritt \hat{x} in jedem Durchlauf an den Näherungswerten X_0 und die Verbesserungen \hat{v} an den Beobachtungen L_0 der letzten Iteration angebracht (GHILANI und WOLF, 2006).

$$X = X_0 + \hat{x} \quad (4a)$$

$$L = L_0 + \hat{v} \quad (4b)$$

Die erste Näherung X_0 kann dabei z.B. aus einer Grafik oder direkt aus der Punktwolke abgeleitet werden. Die Ellipse gehört zu den Kurven zweiter Ordnung (Kegelschnitte) und hat damit eine Gleichung der Form

$$a_1x^2 + a_2y^2 + \sqrt{2}a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 = 0. \quad (5)$$

Die Bestimmung der Koeffizienten von Gleichung (5) kann wiederum im Gauß-Helmert-Modell nach (3) erfolgen, welches um eine geeignete Bedingungsgleichung zu erweitern ist (JÄGER et al., 2005). Die unbekanntem Formparameter der Ellipse sind anschließend aus den Koeffizienten a_i abzuleiten. Mit diesem Ansatz lassen sich prinzipiell alle Kurven 2. Ordnung ohne Vorgabe von Näherungswerten bestimmen. Hierzu zählen neben der Ellipse: die Hyperbel und die Parabel. Eine Beschrei-

bung und Herleitung dieses Ansatzes ist ausführlich in (DRIXLER, 1993) zu finden.

Grundsätzlich ist dieser Ansatz dann sinnvoll, wenn auch der Typ des Kegelschnitts (Ellipse, Parabel, Hyperbel) aus der Punktwolke mitbestimmt werden soll. Ist jedoch bekannt, dass die gegebenen Punkte beispielsweise auf einer Ellipse liegen, kann bei ungleichmäßig verteilten Punkten (etwa alle in der Nähe eines Scheitels) der Ansatz (5) trotzdem eine Hyperbel liefern. Ferner wird es numerisch schwierig sein, eine Parabel zu detektieren. Weiterhin können weder Form- noch Lageparameter direkt in (5) abgelesen werden; hierzu ist eine Hauptachsentransformation erforderlich; vgl. zum Beispiel den Abschnitt über Kegelschnitte in (GRAMLICH, 2004). Eine Tabelle zur direkten Typbestimmung eines Kegelschnittes aus den Koeffizienten befindet sich etwa in (GOTTWALD et al., 1995). Weitere nicht-iterative Lösungsverfahren zur Parameterbestimmung mit (5) mittels Eigenwertzerlegung liefern u.a. (FITZGIBBON et al., 1999) und (HALÍŘ, 2000). Ein Vergleich der Ergebnisse zwischen der geometrischen Schätzung mit (1) und der sogenannten algebraischen Bestimmung mithilfe von (5) wird ausführlich in (GANDER et al., 1994) diskutiert.

Schrittweise Bestimmung der 3D-Regressionsellipse

Zur Beschreibung einer im Raum liegenden Ellipse ist Gleichung (1b) lediglich um zwei Drehungen zu erweitern, etwa um die y -Achse um einen Winkel β und um die x -Achse um γ :

$$\begin{bmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ z_i - z_0 \end{bmatrix} = R_x(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \begin{bmatrix} a \cos t_i \\ b \sin t_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mit } 0 \leq t_i \leq 2\pi. \quad (6)$$

Das Lösen von Gleichung (6) kann zweistufig erfolgen. Zunächst wird die Ebene (7) bestimmt, die durch die Ellipsenpunkte P_i bestmöglich beschrieben wird:

$$n_0^T P_i = d, \quad (7)$$

worin n_0 der normierte Einheitsvektor und d der Abstand der Ebene vom Ursprung ist.

Anschließend ist diese Ebene mit den Punkten so zu drehen, dass sie parallel zur XY -Ebene liegt und damit $z_i = z_0 = d$ gilt. In dieser Lage können die Parameter der Ellipse mit den auf diese Ebene projizierten Punkten unter Nutzung eines der o.g. Verfahren berechnet werden. Die Drehung der Punkte kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. Besonders anschaulich gestaltet sie sich hier mithilfe einer Einheitsquaternion q .

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 = \cos \frac{\varepsilon}{2} + u \sin \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{mit } i^2 + j^2 + k^2 = ijk = -1 \quad (8)$$

Dabei sind ε der Drehwinkel und $u = iu_1 + ju_2 + ku_3$ die Quaternion, die dem die Drehachse definierenden Einheitsvektor $[u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ entspricht. Eine didaktisch gute

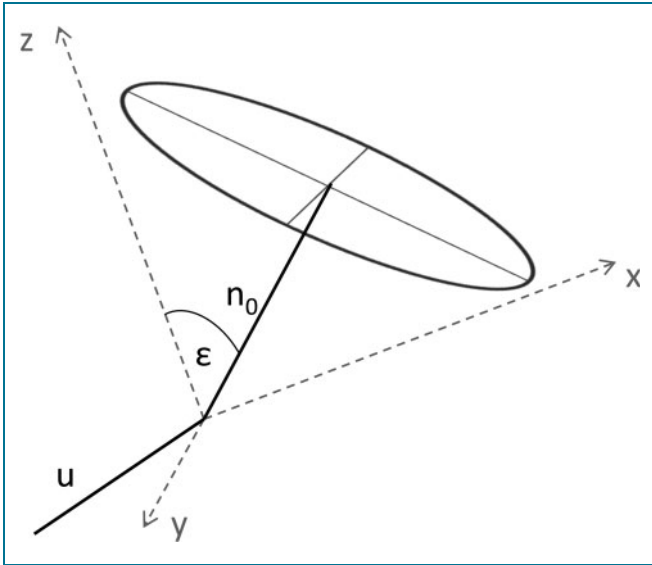


Abb. 2: Rotationsachse und -winkel aus räumlicher Lage der Ellipse

Einführung in die Quaternionen-Algebra liefert bspw. (KUIPERS, 2002).

Soll eine Rotation mithilfe q von dargestellt werden, so ist zunächst der Punkt P in eine Quaternion p zu überführen, indem der Skalarteil p_0 Null gesetzt wird und $p = ip_1 + jp_2 + kp_3$ die Koordinaten des Punktes P enthält. Anschließend erfolgt die Drehung von p durch

$$p_e = qpq^{-1}. \quad (9)$$

Eine Umformung von q in eine äquivalente und ggf. gebräuchlichere Rotationsmatrix R ist in (NITSCHKE und KNICKMEYER, 2000) zu finden:

$$R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q})I + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - q_0^2[\mathbf{q} \times], \quad (10a)$$

worin $[\mathbf{q} \times]$ die schiefsymmetrische Matrix

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (10b)$$

ist.

Die Rotationsachse u , um die die Ellipsenpunkte gedreht werden müssen, damit sie parallel zur XY-Ebene liegen, muss senkrecht auf der Z-Achse und dem Normalenvektor n_0 der Ebene stehen. Sie lässt sich über das Kreuzprodukt bestimmen (vgl. Abbildung 2).

$$u = [n_{0y} \ -n_{0x} \ 0]^T \quad (11)$$

Der noch fehlende Drehwinkel ε in (8) ist der Winkel, den die Z-Achse mit n_0 einschließt:

$$\cos \varepsilon = n_{0z}. \quad (12)$$

Durch die Drehung der Ellipse in eine zur XY-Ebene parallele Lage reduziert sich das eigentliche 3D-Problem in ein zweidimensionales, sodass die Minimierung nicht an der eigentlichen Zielfunktion (6) erfolgt, sondern an (1) bzw. (5) mithilfe der Projektion der Punkte in der Ebene. Die so ermittelten Koordinatenparameter der Ellipse sind anschließend noch in die Ausgangslage durch

Umkehrung von (9) zu überführen. Eine ähnliche zwei-stufige Lösungsstrategie schlagen (JIANG und CHENG, 2005) auch zur Schätzung von 3D-Kreisen vor.

Direkte Schätzung der Parameter einer 3D-Ellipse

Geometrisch anschaulicher gelingt die Parameterschätzung der Regressionsellipse über die Abstandssumme eines Punktes P_i zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 der Ellipse, die dem doppelten Betrag der großen Halbachse a entsprechen muss.

$$l_1 + l_2 = 2a, \quad (13)$$

wobei l_1 bzw. l_2 der Abstand $P_i F_1$ bzw. $P_i F_2$ ist.

Für die Schätzung der Regressionsellipse ist Gleichung (13) mit der Ebenengleichung (7) zu kombinieren. Damit die Lösung eindeutig wird, sind drei Nebenbedingungen hinzuzufügen. Neben dem Normalenvektor der Ebene, der auf die Länge 1 zu normieren ist, müssen die beiden Brennpunkte der Ellipse in der Regressions-ebene liegen.

$$n_{0x}^2 + n_{0y}^2 + n_{0z}^2 = 1 \quad (14a)$$

$$n_{0x}x_{F_1} + n_{0y}y_{F_1} + n_{0z}z_{F_1} = d \quad (14b)$$

$$n_{0x}x_{F_2} + n_{0y}y_{F_2} + n_{0z}z_{F_2} = d \quad (14c)$$

Insgesamt besitzt das aufzustellende Gleichungssystem somit elf unbekannte Parameter, die sich in zwei Gruppen unterteilen $X = [X_{\text{Ellipse}} \ X_{\text{Ebene}}]^T$, mit:

$$X_{\text{Ellipse}} = [x_{F_1} \ y_{F_1} \ z_{F_1} \ x_{F_2} \ y_{F_2} \ z_{F_2} \ a]^T \quad (15a)$$

und

$$X_{\text{Ebene}} = [n_{0x} \ n_{0y} \ n_{0z} \ d]^T. \quad (15b)$$

Die kleine Halbachse b lässt sich mit (2) bestimmen, wobei $2e$ dem Abstand zwischen beiden Brennpunkten entspricht. Der Mittelpunkt der Ellipse ergibt sich aus:

$$P_0 = 0.5(F_1 + F_2). \quad (16)$$

Eine Schätzung aller Parameter in einem Modell kann in einem Gauß-Helmert-Modell mit Unbekannten in den Restriktionen erfolgen. Hierzu ist (3) zum einen um die drei notwendigen Bedingungsgleichungen (14a, b, c) und zum anderen um die Gleichungen (2) und (16), die zur Bestimmung der Zusatzparameter benötigt werden, zu erweitern.

$$\begin{bmatrix} BQ_{LL}B^T & A & 0 \\ A^T & 0 & K^T \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \hat{x} \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ 0 \\ -r \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dabei ist die Konditionsmatrix durch K gegeben und die Widersprüche dieser Bedingungen im Vektor r zusammengefasst. Der Unbekanntenvektor X vergrößert sich noch einmal um die vier Zusatzparameter des Mittelpunktes $P_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$ und der kleinen Halbachse b .

Die räumliche Orientierung der Ellipse wird nun nicht mehr explizit durch drei Drehwinkel beschrieben, sondern ist einerseits durch den Normalenvektor der Ebene und

andererseits durch die Lage der Brennpunkte parametrisiert. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass das Ausgleichsproblem nicht in zwei Teilprobleme zerlegt wird und somit die Minimierung an der eigentlichen Zielfunktion stattfindet. Ist eine (vollbesetzte) Kovarianzmatrix Q_{LL} für die Ellipsenpunkte z.B. aus einer vorangegangenen Ausgleichung vorhanden, kann diese direkt in (17) berücksichtigt werden. Liegen für die zu schätzenden Ellipsenparameter keine Näherungswerte vor, bietet sich zunächst eine zweistufige Auswertung an, die bei Bedarf mit einem robusten Optimierungsalgorithmus wie bspw. dem von LEVENBERG (1944) und MARQUARDT (1963) entwickelten Levenberg-Marquardt-Algorithmus kombiniert werden kann. Gleichung (13) gilt darüber hinaus für beliebige Ellipsen, sodass selbstverständlich auch eine Parameterbestimmung in der Ebene mit dieser erfolgen kann. Neben den Formmaßen der Regressionsellipse liegen nach der Ausgleichung auch vollständige Kovarianzinformationen dieser Parameter vor, die zum einen die Güte der bestimmten Größen aufzeigen und zur Qualitätsbeurteilung heranzuziehen sind und zum anderen beim Ableiten weiterer Größen im Unsicherheitsbudget zwingend Berücksichtigung finden sollten (HENNES und HEISTER, 2007).

Nachteilig ist, dass der Algorithmus versagt, wenn beide Halbachsen der Ellipse gleich groß sind und die Form einen Kreis beschreibt, da in diesem Fall ein Rangdefekt auftritt. Die beiden Brennpunkte fallen hierbei mit dem Ellipsenmittelpunkt zusammen.

$$P_0 = F_1 = F_2 \quad (18)$$

Gleichung (17) kann somit nicht durch Bilden der regulären Inversen gelöst werden, sodass entweder über die Pseudoinverse eine optimale Lösung mit kleinster Norm zu bestimmen ist oder besser ein einfacheres (passenderes) funktionales Modell gewählt werden sollte.

Beispiele und Quellcode

Mit Gleichung (6) können beliebige Punkte auf einer Ellipse berechnet werden, wenn entsprechende Formparameter vorgegeben sind. Die Parameter einer fiktiv gewählten Soll-Form sind in Tabelle 1 gegeben.

Tab. 1: Parameter der Soll-Ellipse

Parameter	x_0	y_0	z_0	a	b	γ	β	α
Wert	10 m	25 m	5 m	7 m	3 m	50°	120°	70°

Der Normalenvektor n_0 der Ebene ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} n_{0_x} \\ n_{0_y} \\ n_{0_z} \end{bmatrix} = R_x(\gamma)R_y(\beta)R_z(\alpha) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660 \\ 0.3830 \\ -0.3214 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

sodass sich mittels von (7) ein Abstand von $d = 16.6288m$ ergibt.

Die Verteilung der Ellipsenpunkte kann über den Parameterwinkel t in (6) gesteuert werden. Als Datengrundlage sollen zunächst 20 Punkte dienen, die gleichverteilt auf der Ellipse liegen. Da von diesem Idealfall in der Praxis nicht immer auszugehen ist, wird im zweiten Beispiel die Lage der 20 Punkte mit $-\frac{1}{6}\pi \leq t_i \leq \frac{1}{3}\pi$ derart eingeschränkt, dass diese sich lediglich an einem Scheitel der Ellipse konzentrieren. Als letztes Beispiel soll der Sonderfall Kreis dienen, in dem $a = b = 7$ gesetzt wird. Für die Rückbestimmung der Formparameter werden die ermittelten Punkte darüber hinaus noch mit einem normalverteilten Rauschen in allen drei Komponenten von $\sigma = 5mm$ überlagert. In Tabelle 2 sind die ermittelten Ergebnisse der Simulationen zu finden, die in Abbildung 3 dargestellt sind.

Tab. 2: Formmaße der geschätzten Ellipsen

Parameter	Gleichverteilung	Scheitelpunkt	Kreis
x_0	10.001	9.985	9.999
y_0	25.002	25.054	25.000
z_0	5.003	5.063	5.001
a	6.999	6.923	7.003
b	3.000	2.980	6.999
n_{0_x}	0.866	0.866	0.866
n_{0_y}	0.383	0.382	0.383
n_{0_z}	-0.322	-0.323	-0.322
d	16.624	16.577	16.619

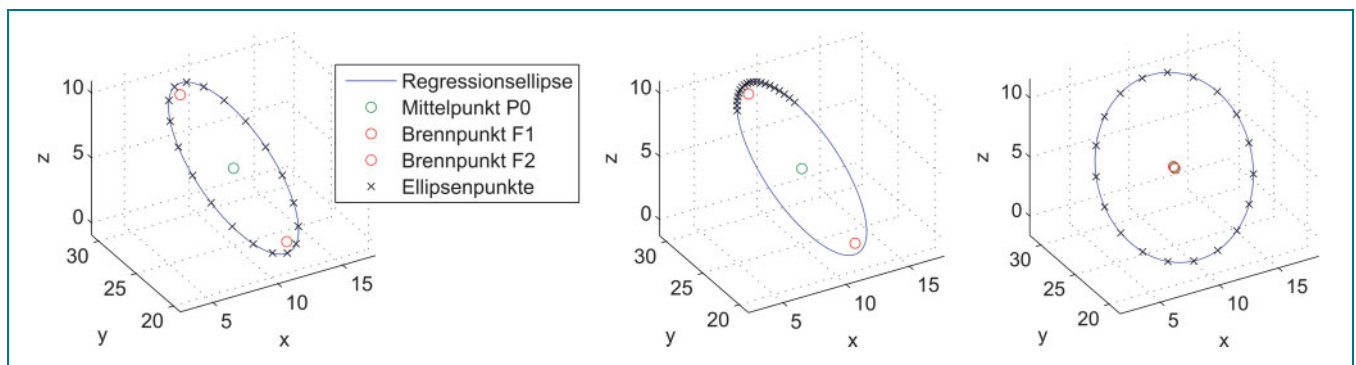


Abb. 3: Ellipsenpunkte und geschätzte Regressionsform

Die geschätzten Ellipsenparameter bei einer gleichverteilten Anordnung der Punkte im ersten Beispiel passen erwartungsgemäß gut zu den vorgegebenen Formmaßen. Auch die Schätzung der Kreisform gelingt ohne Probleme mit ähnlicher Qualität. Die einseitige Punktkonzentration an einem Scheitel der Ellipse verschlechtert die Parameterbestimmung sichtlich, sodass grundsätzlich bei der Erfassung von Objekten eine gleichmäßige Verteilung zu empfehlen ist. Werden die unverrauschten Ellipsenpunkte jeweils ins Modell eingeführt, so werden bei allen drei Beispielen die Soll-Parameter zurückbestimmt, wobei für den Kreis aufgrund des o.g. Rangdefektes die Lösung nur über die Pseudoinverse gelingt. Programmcode in MATLAB, der sich leicht in andere Programmierumgebungen übertragen lässt, steht unter <http://diegeodaeten.de/ellipsenausgleichung/> zur Verfügung. Dort ist auch der Quelltext zu den o.g. Beispielen zu finden.

Resümee

Die klassische Aufgabe der Formanalyse besteht darin, die Beschreibung von Punktwolken in einer mathematisch einfach zu interpretierenden Form vorzunehmen. Die hierbei zu wählende Approximationsform soll die Punkte bestmöglich repräsentieren. Die Messtechnik trägt somit maßgeblich zur Qualitätssicherung bei, indem sie Formmaße von Objekten bestimmt. So ist es erst nach der Formanalyse möglich, bestimmte Eigenschaften bzw. Merkmale eines Objektes wie z.B. Geradheit, Rundheit oder Ebenheit mathematisch zu beschreiben, zu prüfen und letztlich zu kontrollieren.

Für die Regressionsellipse wurden in diesem Artikel gängige Verfahren zu Parameterschätzung in der Ebene aufgelistet und eine mögliche Übertragung auf den räumlichen Fall diskutiert, welche zweistufig zu lösen ist. Abschließend wurde ein leicht zu implementierendes mathematisches Modell zur direkten Ableitung der Parameter einer räumlichen Regressionsellipse aufgezeigt. Anhand von typischen Beispielen wurde die generelle Eignung des Algorithmus pragmatisch belegt.

Literatur

- [1] BAUER, M.: Vermessung und Ortung mit Satelliten: GPS und andere satellitengestützte Navigationssysteme. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2002
- [2] BENNING, W.: Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2010
- [3] DRIXLER, E.: Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. München, Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft-Nr. 409, 1993
- [4] FITZGIBBON, A. W.; PILU, M.; FISHER, R. B.: Direct least-squares fitting of ellipses. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol 21(5), S. 476–480, 1999
- [5] GANDER, W.; GOLUB, G. H.; STREBEL, R.: Least-squares fitting of circles and ellipses. BIT Numerical Mathematics, Vol 34(4), S. 558–578, 1994

- [6] GHILANI, C. D.; WOLF, P. R.: Adjustment Computations: Spatial Data Analysis. Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006
- [7] GOTTWALD, S.; KÄSTNER, H.; RUDOLPH, H. (Hrsg.): Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1995
- [8] GRAMLICH, G.: Anwendungen der Linearen Algebra mit Matlab. Hanser Fachbuchverlag, Leipzig, 2004
- [9] GRÖNE, A.; SCHWARZ, W.: Gestaltparameter. In: Schwarz, W. (Hrsg.): Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau, Schriftenreihe des DVW, Vol 13, Wittwer Verlag, Stuttgart, 1995
- [10] HALÍŘ, R.; FLUSSER, J.: Numerically stable direct least squares fitting of ellipses. Technical Report, Department of Software Engineering, Charles University, Czech Republic, 2000
- [11] HENNES, M.; HEISTER, H.: Neuere Aspekte zur Definition und zum Gebrauch von Genauigkeitsmaßen in der Ingenieurgeodäsie. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), Vol 11–12, S. 375–383, 2007
- [12] HENNES, M.; RICHTER, E.: A-TOM – eine neuartige instrumentelle Lösung für die hochpräzise und echtzeitnahe 6DOF-Bestimmung. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), Vol 8–9, S. 301–310, 2008
- [13] JÄGER, R.; MÜLLER, T.; SALER, H., SCHWÄBLE, R.: Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2005
- [14] JIANG, X.; CHENG, D.: Fitting of 3D Circles and Ellipses Using a Parameter Decomposition Approach. 5th International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling (3DIM'05), S. 103–109, 2005
- [15] KUIPERS, J. B.: Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality. Princeton University Press, 2002
- [16] LEVENBERG, K.: A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares. Quarterly of Applied Mathematics, Vol 2, S. 164–168, 1944
- [17] LÖSLER, M.; ESCHELBACH, C.: Evolution and obtained expertise in reference point determination at the GIK. In: BOURDA, G., CHARLOT, P., COLLIUOD, A. (Hrsg.): Proceedings of the 19th EVGA – European VLBI for Geodesy and Astrometry, Bordeaux, 23.–24. März 2009, Frankreich, S. 116–121, 2009
- [18] MARQUARDT, D. W.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol 11, S. 431–441, 1963
- [19] NITSCHKE, M.: Geometrie – Anwendungsbezogene Grundlagen und Beispiele. Hanser Fachbuchverlag, Leipzig, 2005
- [20] NITSCHKE, M.; KNICKMEYER, E. H.: Rotation Parameters – A Survey of Techniques. J. Surv. Eng., S. 83–105, 2000

Anschriften der Verfasser:

MICHAEL LÖSLER, loesler@gik.uka.de, Karlsruher Institut für Technologie, Geodätisches Institut, Englerstraße 7, 76131 Karlsruhe

Dr. MARTIN NITSCHKE, nitschke@hs-nb.de, Hochschule Neubrandenburg, Fachbereich Landschaftsarchitektur, Geoinformatik, Geodäsie und Bauingenieurwesen, Brodaer Straße 2, 17033 Neubrandenburg