

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ И СРЕДЫ

УДК 004.07

О ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ БЕСПРОВОДНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ОДНОРАНГОВЫХ СЕТЕЙ С МЕСТНЫМ ПЛАНИРОВАНИЕМ ЧАСТОТНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ КАНАЛОВ¹

Й. Эльснер,
научный сотрудник
Р. Танбурги,
научный сотрудник
Ф. Йондраль,
доктор техн. наук, профессор, директор института
Технологический институт г. Карлсруэ, Германия

Проведен анализ пропускной способности беспроводных многоканальных одноранговых сетей, ограниченных воздействием помех, с местным планированием частотного разделения каналов. Выведены верхняя и нижняя границы вероятностей прерывания связи и пропускной способности в данной модели системы. Выполнено сравнение с многоканальными сетями без местного планирования частотного разделения каналов.

Ключевые слова — многоканальные одноранговые сети, частотное разделение каналов, пропускная способность.

Введение

Исследования плотных, беспроводных сетей, ограниченных помехами, вызывают в последнее время повышенный научный интерес. С точки зрения теории информации, использовать широкую или даже бесконечную полосу пропускания для передачи данных по каналу имеет смысл только при отсутствии помех. Помехи, т. е. необходимость сосуществовать с другими передатчиками, являются основной причиной ограничения полосы пропускания системы. Все возможные технические проблемы также усложняют дизайн широкополосных беспроводных систем. Из-за таких требований, как необходимость большого динамического диапазона или низкой потребляемой мощности, пропускная полоса на физическом уровне гораздо уже, чем диапазон возможных центральных частот передатчика. Таким образом, возникает вопрос пропускной способности таких систем, а точнее, требуется ответ на вопросы, «как с точки

зрения теории информации выбрать ширину полосы пропускания и сколько передатчиков в сети могут одновременно работать?». В статье исследуются эти вопросы в модели Вебера [1].

Более ранними, связанными с данной проблемой, являются статьи [2–6], из которых большинство написано в соавторстве с Вебером. В работах [2, 3] сравниваются методы расширения спектра в одноранговых сетях — псевдослучайная перестройка рабочей частоты и расширение спектра методом прямой последовательности — под условием эквивалентной мощности. По результатам анализа, системы псевдослучайной перестройки рабочей частоты эффективнее, чем расширение спектра методом прямой последовательности в отношении пропускной способности. Авторы [1] в другой статье [4] рассматривают проблему разделения операционной пропускной полосы в целях максимизации спектральной эффективности на квадратный метр. Пропускная способность в сетях с компенсацией помех выведена в работе [5]. Мы же рассматриваем разделение операционной пропускной полосы таких сетей, которые могут местно планировать трансмиссии методом частотного разделения каналов, при этом анализ наш основывается на вышеуказанных результатах Вебера и др.

Translated from the original English version and revised and reprinted with permission, from the Proceedings of the International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems, Moscow 2010, © 2010 IEEE.

Модель системы

Беспроводная сеть состоит из узлов $\{X_i\}$, расположенных на плоскости согласно однородному пуассоновскому точечному процессу (ПТП) Π интенсивностью λ , где $X_i \in \mathbb{R}^2$ обозначает позиции передатчиков, которые вызывают помехи. Операционная полоса пропускания всей сети B разделена на M ортогональных каналов с системной

полосой пропускания $B_m = \frac{B}{M}$. Спектральная

плотность мощности окружающего шума — N_0 . Коэффициент затухания между двумя точками в плоскости на расстоянии d дан как $d^{-\alpha}$, $\alpha > 2$. Согласно теореме Сливняка [ср. 7, с. 121], статистика Π не меняется при добавлении измерительной пары приемника и передатчика в каждом канале. Каналы являются симметричными, поэтому достаточно рассмотреть одну измерительную пару: приемник, который находится в начале координат, и передатчик, расположенный на расстоянии r метров от него. Каждый передатчик, как измерительный, так и источники помех, работает с мощностью ρ , и, следовательно, спектральная плотность мощности в каждом канале

составляет $\frac{\rho}{B_m} = \frac{\rho M}{B}$.

Рабочая характеристика приемника зависит от помех в канале, порожденных узлами, работающими в том же канале. Так как ПТП однородный, рабочая характеристика приемника также отражает рабочую характеристику всей сети.

Мы предполагаем, что сетевой протокол способен ортогонализировать передачи всех соседних передатчиков вокруг приемника в радиусе ортогонализации r_o . Трансляции в одном и том же районе осуществляются в различных каналах. Таким образом вокруг приемника создается зона, свободная от источников помех.

Чем больше существует каналов, тем меньше влияние помех, так как это позволяет ортогонализировать большее количество соседних узлов. Тем самым сокращается влияние помех в канале, поскольку деятельность передатчиков делится на M каналов. С другой стороны, это приводит к сокращению спектра для связи в одном канале, следовательно, вероятность прерывания связи повышается. В следующих разделах мы определим оптимальное количество каналов.

Пропускная способность без местного планирования

Во-первых, выводится соотношение между шириной полосы пропускания системы, шириной

операционной полосы пропускания и пропускной способностью для сетей без местного планирования каналов, которые должны поддерживать минимальную скорость передачи R_m от одного узла к другому на максимальном расстоянии r . В этом случае существует оптимальное количество каналов, которое максимизирует пропускную способность независимо от интенсивности λ .

Отношение уровня сигнала к уровню шума и помех (SINR) у измерительного передатчика в одном канале m можно выразить как

$$\text{SINR} = \frac{\rho r^{-\alpha}}{N_0 B_m + \sum_{i \in \Pi_m} \rho |X_i|^{-\alpha}},$$

где Π_m обозначает ПТП с интенсивностью $\lambda_m = \frac{\lambda}{M}$, так как деятельность передатчиков делится на M каналов. В канале m вероятность прерывания связи q_m при скорости передачи R_m составляет

$$q_m(\lambda_m) = P\{B_m \log_2(1 + \text{SINR}) \leq R_m\} = \\ = P\left\{\underbrace{\text{SINR}}_{Y_m}^{-1} > \left(2^{\frac{R_m}{B_m}} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{\beta}\right\}.$$

С учетом симметричности двухмерный ПТП Π_m можно отобразить как одномерный ПТП с интенсивностью 1 [1, 8] следующим образом:

$$Y_m = \frac{N_0 B_m}{\rho r^{-\alpha}} + \left(\pi r^2 \lambda_m\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{i \in \Pi_1} T_i^{-\frac{\alpha}{2}}, \\ \underbrace{Z_\alpha}_{Z_\alpha}$$

где T_i — расстояние передатчика i , вызывающего помехи, от начала координат. Для q_m следует

$$q_m(\lambda_m, R_m) = \\ = P\left\{Z_\alpha > \left(\pi r^2 \lambda_m\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\left(2^{\frac{R_m}{B_m}} - 1\right)^{-1} - \frac{N_0 B_m}{\rho r^{-\alpha}}\right)\right\}.$$

Обозначим комплемент кумулятивной функции распределения Z_α как \bar{F}_{z_α} , тогда

$$q_m(\lambda_m) = \bar{F}_{z_\alpha}\left(\left(\pi r^2 \lambda_m\right)^{\frac{\alpha}{2}} \theta_m\right). \quad (1)$$

Оптимальная пропускная полоса каждого канала выводится путем минимизации вероятностей прерывания связи:

$$M_{\text{opt}} = \arg \min_M q_m(\lambda_m, R_m).$$

С учетом уравнения (1), $\lambda_m = \frac{\lambda}{M}$ и $B_m = \frac{B}{M}$ следует

$$\begin{aligned} M_{\text{opt}} &= \arg \min_M \left(\bar{F}_{z_\alpha} \left(\left(\pi r^2 \lambda_m \right)^{\frac{\alpha}{2}} \theta_m \right) \right) = \\ &= \arg \max_M \left(M^{\frac{\alpha}{2}} \left(\left(2^{\frac{R_m}{B_m}} - 1 \right)^{-1} - \frac{N_0 B}{\rho r^{-\alpha} M} \right) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Эту проблему оптимизации можно решить в замкнутой форме в случае сети, ограниченной

помехами: $\frac{E_b}{N_0} \rightarrow \infty$ [4]:

$$M_{\text{opt}} = \frac{B}{R_m} \underbrace{\log_2 \exp \left(\frac{\alpha}{2} + W \left(-\frac{\alpha}{2} \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right)}_{b_{\text{opt}}}, \quad (3)$$

где $W(\cdot)$ обозначает основную отрасль W -функции Ламберта. Согласно уравнению (3), оптимальное разделение пропускной полосы зависит от α , жемаемой скорости передачи информации R_m и ширины операционной полосы B . Оптимальное разделение соответствует порогу SINR β с величиной

$$\beta_{\text{opt}} = 2^{b_{\text{opt}}} - 1$$

и спектральной эффективностью b_{opt} .

Пропускная способность одного канала определяется как [1]

$$c_m(q_m) = \lambda_m (1 - q_m),$$

где функция $q_m^{-1}(\varepsilon) = \lambda_m$ — обратная функция вероятности прерывания связи; $q_m^{-1}(\varepsilon)$ дает пространственную интенсивность трансмиссии λ_m при вероятности прерывания связи $\varepsilon \in [0, 1]$, и эта интенсивность умножается на вероятность удачной трансмиссии.

Следовательно, пропускная способность — мера удачных трансмиссий в пространстве.

В многоканальных сетях общая пропускная способность дается как

$$c(\varepsilon) = \sum_{m=1}^M c_m(q_m).$$

Таким образом, из (1) и (3) следует пропускная способность

$$c(\varepsilon) = \frac{\bar{F}_{z_\alpha}^{-1}(\varepsilon)^{-\frac{2}{\alpha}}}{\pi r^2} (1 - \varepsilon) \beta_{\text{opt}}^{\frac{2}{\alpha}} \underbrace{\frac{B}{R_m} b_{\text{opt}}}_{M_{\text{opt}}}. \quad (4)$$

Пропускная способность растет прямо пропорционально ширине операционной пропускной полосы B . В многоканальных сетях отношение $\frac{R_m}{B}$ будет низким, а количество каналов, соответственно, высоким. Как правило, пропускную способность (4) невозможно выразить в замкнутой форме. Исключением является случай $\alpha = 4$, где пропускная способность с нотацией $Q(z) = Q\{Z \leq z\}$ и $Z \sim N(0, 1)$ равна [1]

$$c(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2/\pi} Q^{-1}((1+\varepsilon)/2)}{\pi r^2 \sqrt{\beta_{\text{opt}}}} (1 - \varepsilon) M_{\text{opt}}.$$

Этот случай будет использован в качестве сравнения.

Пропускная способность с местным планированием

Возможность ортогонализации.

Важный вопрос, которым нельзя не задаться, возможность ортогонализации N соседних узлов, если существуют $M = N + 1$ каналов. Аналогичная задача — раскраска вершин бесконечного случайного графа цветами в количестве M . Рабочая характеристика измерительного приемника точно отражает рабочую характеристику всех узлов, только если ортогонализация возможна во всех вершинах графа с высокой степенью вероятности. Согласно теореме Брукса [9], ортогонализация (раскраска) графа с множеством вершин $\{X_i\}$ и M каналами (цветами) возможна, если максимальное число соседних узлов $\max\{N_i\}$ (максимальная степень графа) меньше, чем M . Очевидно, что такое может быть только если число узлов конечно. Следовательно, ПТП обусловлен на K

узлов на площади $A \subset \mathbb{R}^2$, где $\frac{K}{A} = \lambda$. Если дан

ПТП с интенсивностью λ , то число соседних узлов N_i каждого узла X_i на расстоянии r_o независимо и одинаково распределено по закону Пуассона с $\lambda_n = \pi r_o^2 \lambda$. Достаточным для возможности ортогонализации с вероятностью большей, чем $1 - \varepsilon_o$, является условие, что максимум множества пуссоновских случайных величин, которое описывает число соседних узлов, не превышает число каналов (цветов):

$$P\{\max\{N_1, N_2, \dots, N_K\} \leq M-1\} > 1 - \varepsilon_o.$$

Пользуясь независимостью случайных величин, это условие можно выразить как

$$1 - \varepsilon_o(M) < \left(\sum_{i=0}^{M-1} \exp(-\lambda_n) \frac{\lambda_n^i}{i!} \right)^K = \phi(M, \lambda_n)^K, \quad (5)$$

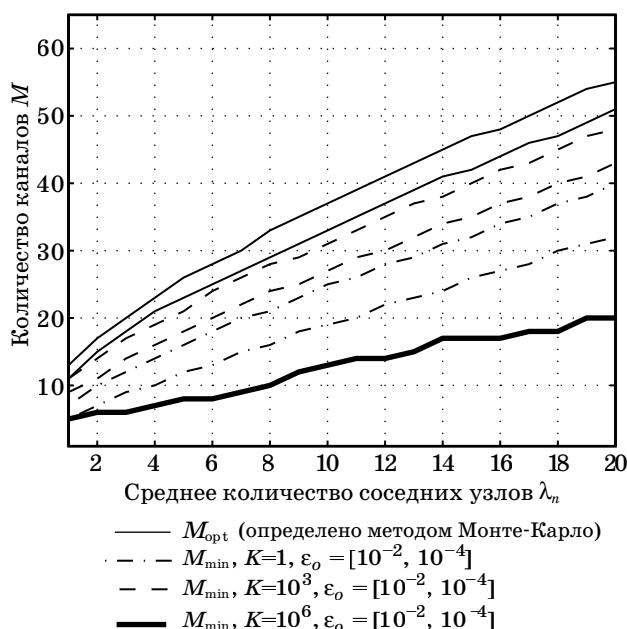
где $\phi(M, \lambda_n) = \frac{\Gamma(M, \lambda_n)}{\Gamma(M)}$ — регуляризованная гамма-функция. Если M растет, $\varepsilon_o(M)$ быстро сходит к 0. Верхней границей $\varepsilon_o(M)$ с нотацией

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{x^i}{i!} + R_M(x) \text{ является}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_o(M) &= 1 - \left(\sum_{i=0}^{M-1} \exp(-\lambda_n) \frac{\lambda_n^i}{i!} \right)^K = \\ &= 1 - (1 - \exp(-\lambda_n) R_M(\lambda_n))^K \leq \\ &\leq 1 - \left(1 - \exp(-\lambda_n) \frac{2\lambda_n^M}{M!} \right)^K \end{aligned}$$

для $M \geq 2\lambda_n - 2$ (так как $R_M(x) \leq \frac{2|x|^M}{M!}$, доказа-

тельство выполняется способом ограничения остаточных членов в сумме ряда).



■ Рис. 1. Число каналов, необходимое для ортогонализации в сети с K узлами с вероятностью ε_o , и число каналов, минимизирующее прерывание с местным планированием каналов: $R_m/B = 0,1$; $\lambda_n = 5$; $\alpha = 4$; $r = 10$

Если даны $A, \lambda, \varepsilon_o > 0$ и r_o , необходимое количество каналов M для ортогонализации в радиусе r_o следует из уравнения (5)

$$M \geq \phi^{-1} \left((1 - \varepsilon_o)^{\frac{1}{K}}, \lambda_n \right).$$

Необходимое количество каналов для разных K и $\varepsilon_o > 0$ показано на рис. 1 (каждая нижняя кривая соответствует $\varepsilon_o = 10^{-2}$, а верхняя — $\varepsilon_o = 10^{-4}$). Даже для больших K и маленьких ε_o необходимое количество каналов растет медленно. Это одно из свойств распределения максимума множества независимых пуассоновских случайных величин, рассмотренное Бриггсом [10].

Вероятность прерывания связи и пропускная способность.

Теперь допустим, что в сети используется M каналов, а сетевой протокол может координировать трансмиссии соседних узлов таким образом, что они по возможности становятся ортогональными. Вероятность возможной ортогонализации $1 - \varepsilon_o$ в сети с K узлами и M каналами описана в (5). Только в том случае, если эта вероятность высокая, возможность местной ортогонализации является представительной мерой рабочей характеристики всей сети. Эта вероятность равна тому, что в радиусе r_o от измерительного приемника имеется не больше чем $M - 1$ узлов:

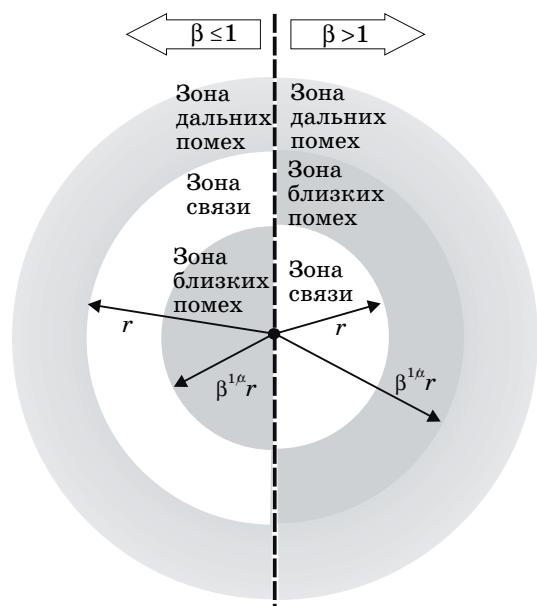
$$p_o = \sum_{i=0}^{M-1} \exp(-\lambda_n) \frac{\lambda_n^i}{i!}.$$

В последующем предполагается, что уровень управления доступом к среде (MAC) может устранять $M - 1$ близких передатчиков, вызывающих помехи, на расстоянии r способом местного частотного разделения каналов. Таким образом, $r_o = r$. Это предположение оправданно, так как если узлы могут связываться напрямую, они могут эффективно планировать трансмиссии.

Как и в случае без местного планирования, для такого интерференционного поля в замкнутой форме нет решений. Поэтому выводят верхнюю и нижнюю границы вероятностей прерывания связи.

Случай прерывания можно проанализировать, рассматривая зону связи, зону близких помех и зону дальних помех. Зоны связи и близких

помех — диски радиусом r и $r_s = \beta^\alpha r$. Зона дальних помех — район вне зоны близких помех. Передачи в зоне близких помех напрямую вызывают прерывание. Передачи в дальней зоне могут



■ Рис. 2. Зоны для $\beta \leq 1$ и $\beta > 1$

вызывать прерывание, если мощность помех превышает $\frac{1}{\beta}$.

Следует различать два случая (рис. 2). Если $\beta \leq 1$, зона связи равна или больше зоны близких помех; если $\beta > 1$, зона связи меньше, чем зона близких помех. Для обоих случаев выводят границы вероятности прерывания для данного M и соответствующую пропускную способность сети.

Низкая спектральная эффективность, $\beta \leq 1$,

$$\frac{R_m}{B} M \leq 1.$$

Из $2^{\frac{R_m}{B} M} - 1 = \beta \leq 1$ непосредственно следует

$$\frac{R_m}{B} M \leq 1. \text{ В этом случае зона связи больше, чем}$$

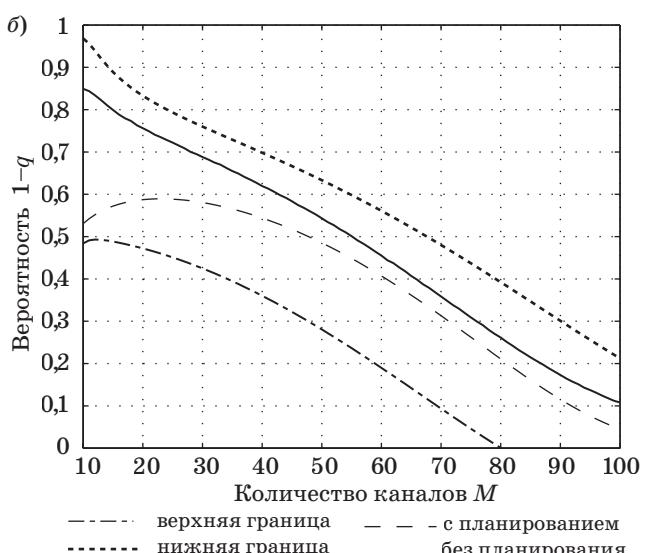
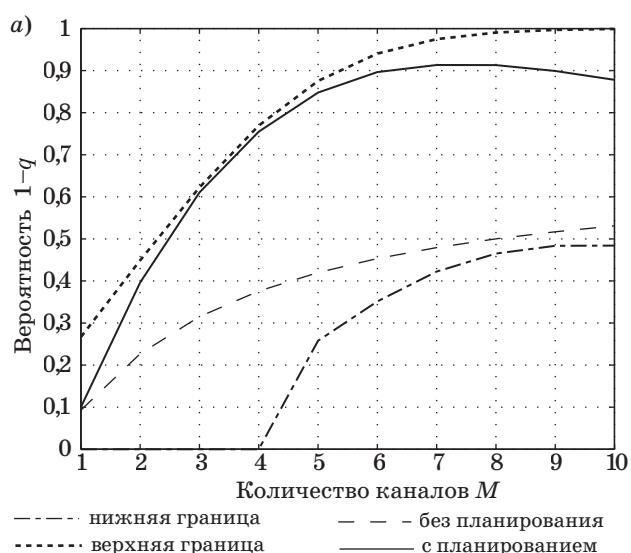
зона близких помех. Вероятность прерывания связи $q(\lambda)$ состоит из прерывания связи по двум причинам: невозможной ортогонализации вокруг измерительного приемника и помех дальних передатчиков. Эквивалентно вероятность удачной трансмиссии

$$1 - q(\lambda) = p_o(\lambda) P\{Y_r(\lambda) \leq \beta^{-1}\} + \\ + (1 - p_o(\lambda)) P\{F\} P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\}. \quad (6)$$

Здесь $Y_r(\lambda)$ — количество помех, созданное узлами на расстоянии r или больше. Если ортогонализация у измерительного приемника не удалась, то $P\{F\}$ является вероятностью случая F «нет неортогонализированного узла в зоне близких помех» и $P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\}$ является вероятностью случая «величина помех из дальней зоны помех не больше $\frac{1}{\beta}$ ».

Нижняя граница. Если опустить второе слагаемое в (6), нижняя граница вероятности удачной трансмиссии

$$1 - q(\lambda) > p_o(\lambda) P\{Y_r(\lambda) \leq \beta^{-1}\}. \quad (7)$$



■ Рис. 3. Вероятность удачной трансмиссии в случае $\beta \leq 1$ (а) и $\beta > 1$ (б): $R_m/B = 0,1$; $\lambda_n = 5$; $\alpha = 4$; $r = 10$

Член $P\{Y_r(\lambda) \leq \beta^{-1}\}$ можно дальше ограничить с помощью неравенства Маркова $cP\{X \geq c\} \leq E\{X\}$ с результатом

$$P\{Y_r(\lambda) \leq \beta^{-1}\} \geq 1 - \frac{\lambda}{M} \frac{2\pi r^2}{\alpha - 2} \beta.$$

Эта граница не является тесной для малых M . Для $M \rightarrow 1$ $p_o = 0$, и, следовательно, (6) заменяется на $P\{\text{нет узла в } r_s\} P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\}$.

Верхняя граница. Верхнюю границу вероятности удачной трансмиссии выводят, предполагая, что измерительный приемник всегда способен ортогонализировать соседние $M - 1$ узлов, и учитывая только зону близких помех. В этом случае трансмиссия удачна, если в зоне близких помех находятся не больше, чем $M - 1$ передатчиков. $P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\}$ можно ограничить следующим образом:

$$P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\} \leq \sum_{i=0}^{M-1} \exp(-\lambda_s) \frac{\lambda_s^i}{i!}, \quad (8)$$

где $\lambda_s = \lambda \pi \left(\frac{1}{\beta^\alpha r} \right)^2$. Границы пропускной способности следуют из численного обращения (7) и (8) для λ . Рис. 3, а показывает вероятность удачной трансмиссии, определенной методом Монте-Карло, границы (7) и (8), а также точный результат для сетей без местного планирования каналов.

Высокая спектральная эффективность, $\beta > 1$,

$$\frac{R_m}{B} M > 1.$$

В режиме высокой спектральной эффективности зона близких помех больше, чем зона связи. В этом случае причиной прерывания может быть неудачная ортогонализация, присутствие одного или большего количества узлов в кольце с радиусом $r_s = \beta^\alpha r$ и r , а также величина помех из

дальней зоны большая, чем $\frac{1}{\beta}$. Вероятность удачной трансмиссии

$$1 - q(\lambda) = p_o(\lambda) P\{\text{нет узла в кольце}\} P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\},$$

где $P\{\text{нет узла в кольце}\} = \exp\left(-\frac{\lambda}{M} \pi(r_s^2 - r^2)\right)$.

Нижняя граница. Нижнюю границу вероятности удачной трансмиссии выводят с помощью неравенства Маркова для $P\{Y_{r_s}(\lambda) \leq \beta^{-1}\}$:

$$1 - q(\lambda) \geq p_o(\lambda) \left(1 - \frac{\lambda}{M} \frac{2\pi r^2}{\alpha - 2} \beta^2 \right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{\lambda}{M} \pi(r_s^2 - r^2)\right). \quad (9)$$

Верхняя граница. Верхнюю границу вероятности удачной трансмиссии выводят с $p_o(\lambda) = 1$ и опусканием помех из дальней зоны помех:

$$1 - q(\lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda}{M} \pi(r_s^2 - r^2)\right). \quad (10)$$

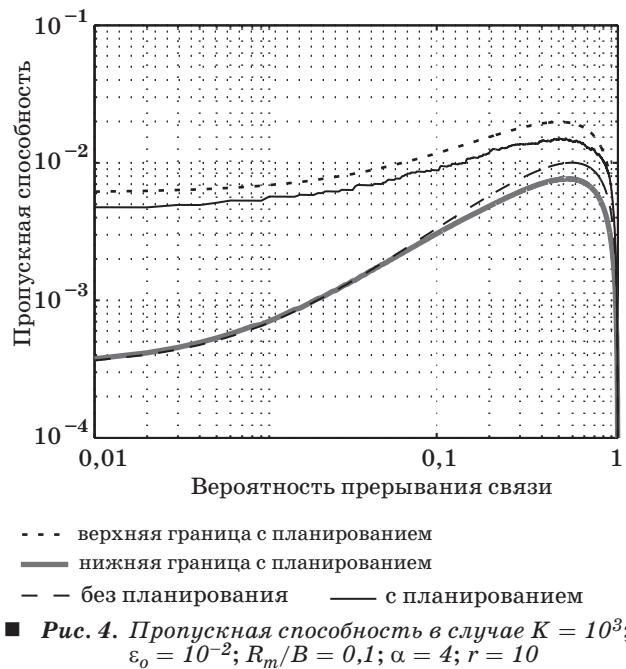
Вероятность удачной трансмиссии, определенной методом Монте-Карло, границы (9) и (10), а также точный результат для сетей без местного планирования каналов показаны на рис. 3, б.

Обсуждение результатов.

Для определенного маленьского количества соседних узлов λ_n местное планирование ведет к значительному увеличению вероятности удачной трансмиссии, особенно если спектральная эффективность связей низкая (см. рис. 3).

Близкие передатчики, которые вызывают преимущественную часть помех, ортогонализованы, и их не требуется избегать способом случайного выбора канала. В режиме высокой спектральной эффективности увеличение вероятности удачной трансмиссии быстро уменьшается, так как передатчики с доминирующими помехами находятся вне зоны связи.

Пропускная способность сетей с местным планированием и без местного планирования представлена на рис. 4. В случае «без местного планиро-



вания» количество каналов выбрано согласно (2). В случае «с местным планированием» оптимальное количество каналов M_{opt} всегда меньше, чем число каналов, необходимое для ортогонализации (см. рис. 1). Соответственно, минимальное количество каналов для возможной ортогонализации было выбрано для получения результатов, показанных на рис. 4. Высокая допустимая вероятность прерывания связи ведет к большому количеству каналов и отсюда к высокой спектральной эффективности. Важным фактом является то, что оптимальное количество каналов M_{opt} с местным планированием зависит от интенсивности λ , что не верно в отсутствие местного планирования. Общий коэффициент усиления пропускной способности в данном случае составил от 1,35 до 13, в зависимости от допустимой вероятности прерывания связи.

Заключение

Как видно из анализа, очень полезно использовать местное планирование каналов в одноранговых сетях. Местное планирование способом частотного разделения каналов ведет к значительному росту пропускной способности и является менее сложным, чем, например, компенсация помех каждого приемника. Эффективный MAC для многоканальных одноранговых сетей должен включать в себя динамическое планирование каналов и адаптирование спектральных эффективностей.

Интересное направление дальнейшего исследования — расширение результатов на каналы с федингом, например по результатам Вебера [1].

Литература

1. Weber S., Andrews J., Jindal N. An overview of the transmission capacity of wireless networks//IEEE Transactions on Communications. Dec. 2010. Vol. 58. N 12.
2. Weber S., Yang X., Andrews J., de Veciana G. Transmission capacity of wireless ad hoc networks with outage //IEEE Transactions on Information Theory. Dec. 2005. Vol. 51. N 12. P. 4091–4102.
3. Andrews J., Weber M., Haenggi M. Ad Hoc Networks: To Spread or Not to Spread?//EEE Communications Magazine. Dec. 2007. Vol. 45. N 12. P. 84–91.
4. Jindal N., Andrews J., Weber S. Bandwidth partitioning in decentralized wireless networks//IEEE Transactions on Wireless Communications. Dec. 2008. Vol. 7. N 12. P. 5408–5419.
5. Weber S., Andrews J., Yang X., de Veciana G. Transmission capacity of wireless ad hoc networks with

- successive interference cancellation//IEEE Transactions on Information Theory. Aug. 2007. Vol. 53. N 8. P. 2799–2814.
6. Hasan A., Andrews J. The guard zone in wireless ad hoc networks//IEEE Transactions on Wireless Communications. Mar. 2007. Vol. 6. N 3. P. 897–906.
7. Brooks R. On colouring the nodes of a network// Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society. Apr. 1941. Vol. 37. N 2. P. 194–197.
8. Stoyan D., Kendall W., Mecke J. Stochastic geometry and its applications. 2nd ed. Wiley, 1995.
9. Haenggi M. On distances in uniformly random networks//IEEE Transactions on Information Theory. Oct. 2005. Vol. 51. N 10. P. 3584–3586.
10. Briggs K., Song L., Prellberg T. A note on the distribution of the maximum of a set of poisson random variables: preprint. Mar. 2009. <http://arxiv.org/abs/0903.4373v2> (дата обращения: 26.03.2009).