

Spektralschätzung mit MUSIC und ESPRIT

Teamprojekt

**Stephan Ehrhard, Moritz Fischer, Manuel Fuhr,
Mortada Mouazzen, Marcus Müller, Marc Lorenzo Schulz**

Hauptreferent : Prof. Dr.rer.nat. Friedrich Jondral
Betreuer : Dipl.-Ing. Martin Braun, Jens Elsner M.Sc.

Beginn : 30.11.2010
Abgabe : 30.03.2011

Erklärung

Wir versichern hiermit, dass wir die vorliegende Arbeit selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt haben. Die verwendeten Literaturquellen sind im Literaturverzeichnis vollständig zitiert.

Karlsruhe, 30.03.2011

Stephan Ehrhard

Moritz Fischer

Manuel Fuhr

Mortada Mouazzen

Marcus Müller

Marc Lorenzo Schulz

This paper concerns the spectral estimators ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*, [RPK86]) and MUSIC (*MUltiple SIgnal Classification*, [Sch86]), analyzes them and compares them to each other.

As the methods used in this paper are of statistical nature, section 1.1 gives a brief introduction to the relevant mathematics. By describing the properties of estimators and introducing the Cramér-Rao-Bound, this chapter empowers the reader to interpret the simulation results given in chapter 3 according to their estimation problem.

The signal model both methods are derived from is specified in section 2.2. Building on this signal model and the mathematics explained in section 1.1, chapter 2 dedicates itself to the description of the estimation algorithms this paper pertains to, which are both subspace-based.

After MUSIC and ESPRIT have been thoroughly discussed in section 2.3 and 2.4 respectively, chapter 3 analyzes both methods especially with respect to the influence that the parameters of the particular algorithm and the signal to noise ratio have on the estimation result. To conduct these analyses both algorithms were implemented in MATLAB.

An integral part of the project has been to make ESPRIT and MUSIC available as part of the Spectral Estimation Toolbox [B⁺] for GNU Radio [GR]. Therefore, both methods have been implemented in C++ and transformed into signal processing blocks for GNU Radio and blocks for GNU Radio Companion. An insight into this part of the project is provided in chapter 4 .

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden Spektralschätzer ESPRIT und MUSIC vorgestellt, analysiert und verglichen.

Der Begriff des *Schätzers* lässt die Vermutung zu, dass es sich bei den eingesetzten Verfahren um statistische Methoden handelt, die zunächst unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet werden müssen (Abschnitt 1.1).

Die im Rahmen der Schätztheorie beschriebenen Eigenschaften erlauben eine Klassifikation und Bewertung von Verfahren sowie insbesondere den Vergleich untereinander und mit Grenzen, konkret der Cramér-Rao-Grenze (Abschnitt 1.1.3), und geben dem Leser ein Werkzeug an die Hand, um die Ergebnisse der Simulation für sein Schätzproblem zu interpretieren.

Das den betrachteten Verfahren zugrunde liegende parametrische Signalmodell (Abschnitt 2.2) wird beschrieben, um anhand dessen die Spektralschätzung mittels MUSIC (Multiple Signal Classification, [Sch86]) und ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, [RPK86]) zu erläutern. Hierbei handelt es sich um parametrische Unterraumschätzer, die von einem Korrelationssignalmodell ausgehen. Mit Hilfe von Eigenraumzerlegungen einer (geschätzten) Korrelationsmatrix werden Signal- und Rauschunterräume aufgebaut. Der Kern des Rauschraums (MUSIC) bzw. der Rotation zweier zeitlich versetzter Empfangssignale im Signalraum (ESPRIT) werden für die Schätzung vorhandener komplexer Sinusschwingungen herangezogen.

Auf die mathematischen Grundlagen folgt die algorithmische Beschreibung der beiden Verfahren (Abschnitte 2.3 bzgl. MUSIC bzw. 2.4 bzgl. ESPRIT) und in Kapitel 3 die vergleichende Analyse der beiden. Dazu gehört insbesondere die Betrachtung des Einflusses der Algorithmenparameter und des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses auf Genauigkeit und Rechenaufwand. Um die Analyse durchführen zu können, wurden beide Schätzer in MATLAB umgesetzt und entsprechende Simulationen durchgeführt.

Wesentliches Ziel des Teamprojekts war die Bereitstellung der Schätzer im Rahmen der Spectrum Estimation Toolbox [B⁺] für Software Defined Radio auf Basis von GNU Radio [GR]. ESPRIT und MUSIC wurden daher in C++ umgesetzt sowie als Blöcke für das GNU Radio Framework im Rahmen der Spectrum Estimation Toolbox veröffentlicht. Neben den Signalverarbeitungsblöcken wurden auch Blöcke für den GNU Radio Companion geschrieben, was es dem Nutzer erlaubt, einen Signalflussgraphen schnell schematisch zu

implementieren und hierbei die beiden Schätzer effizient einzusetzen. Die Implementierung der Algorithmen sowie die dabei aufgetretenen Herausforderungen sind in Kapitel 4 dokumentiert.

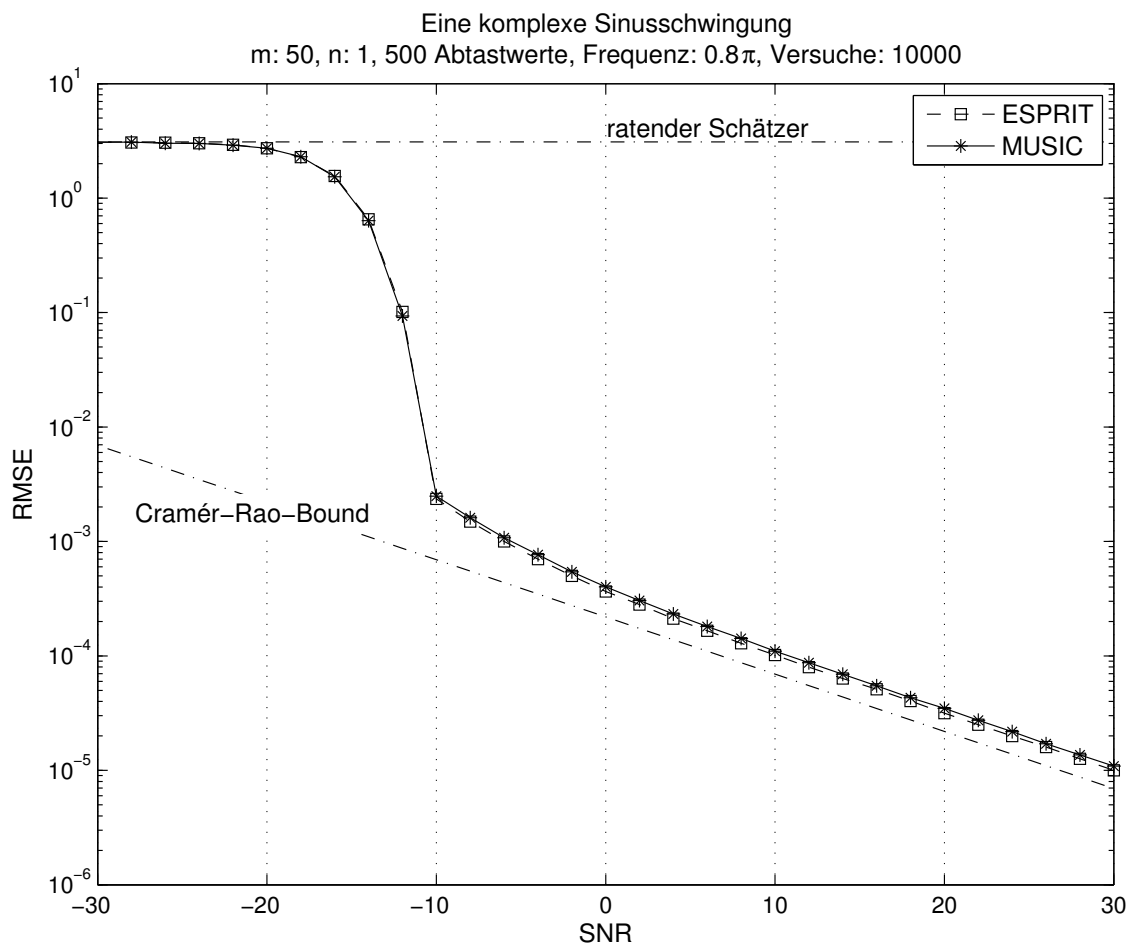


Abb. 0.1.: RMSE für ESPRIT und MUSIC über dem SNR

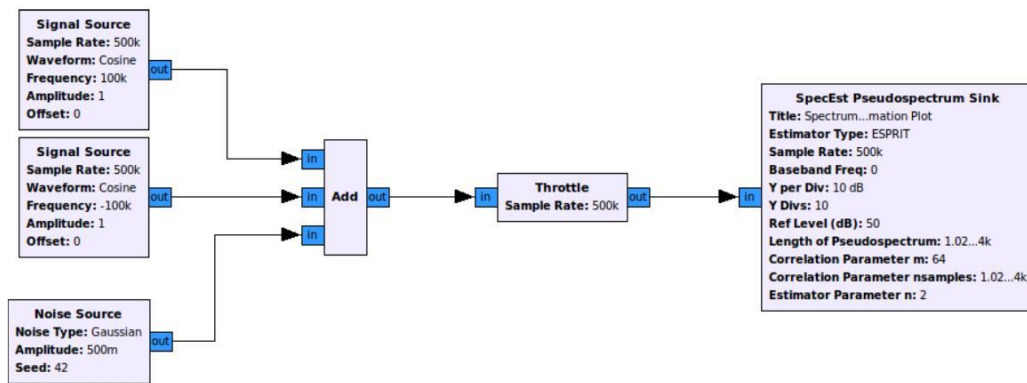


Abb. 0.2.: Signalflussgraph in GNU Radio Companion

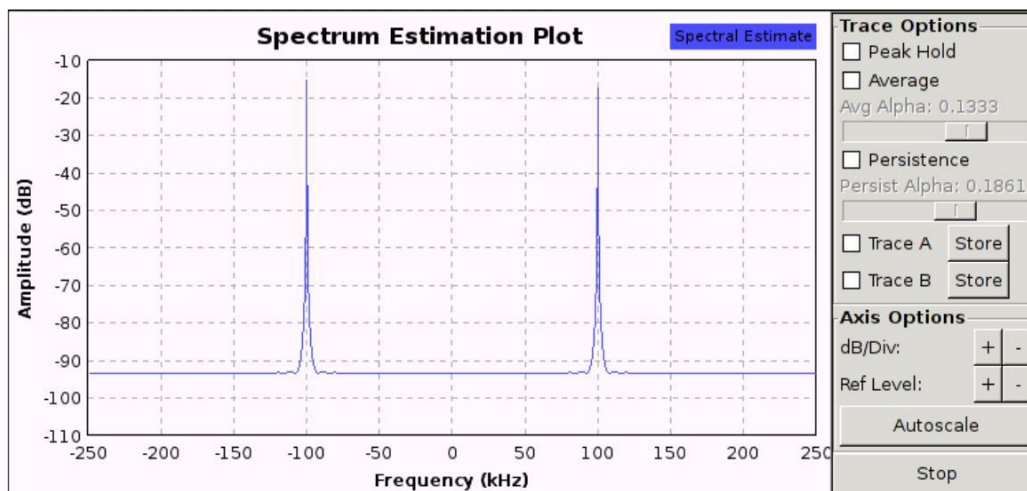


Abb. 0.3.: Spektraldarstellung mittels der selbstgeschriebenen GNU Radio Signalsenke

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	13
1.1. Schätztheorie	13
1.1.1. Schätzer	13
1.1.2. Eigenschaften von Schätzern	14
1.1.3. Cramér-Rao-Ungleichung	15
1.2. Spektralschätzung	17
2. Die Algorithmen MUSIC und ESPRIT	19
2.1. Das Signalmodell	19
2.2. Das Korrelationssignalmodell	19
2.2.1. Die Autokorrelation	20
2.2.2. Die Autokorrelationsmatrix R_{yy}	20
2.3. MUSIC	21
2.3.1. Eigenwertzerlegung der Korrelationsmatrix	21
2.3.2. Signal- und Rauschraum	22
2.3.3. Spectrum-MUSIC und Root-MUSIC	23
2.3.4. MUSIC – Algorithmus	23
2.4. ESPRIT	24
2.4.1. Die Rotationsmatrix	24
2.4.2. Signalraum	25
2.4.3. ESPRIT – Algorithmus	25
3. Analyse	27
3.1. ESPRIT und MUSIC im Vergleich	27
3.2. Einfluss der Parameter $\Delta\omega$, N und m auf das Schätzergebnis	28
3.2.1. Einfluss des Frequenzabstands $\Delta\omega$	28
3.2.2. Einfluss der Dimension der Korrelationsmatrix m	30
3.2.3. Einfluss der Anzahl der Abtastwerte N	32
4. Implementierung	33
4.1. Integration in GNU Radio	33
4.1.1. Die Spectral Estimation Toolbox	33
4.1.2. GNU Radio Companion	35
5. Fazit	37
5.1. Analyse der Verfahren	37

5.2. Erkenntnisse aus der Implementierung	37
5.3. Erweiterung der Spectral Estimation Toolbox	38
A. Beweise aus der Linearen Algebra	39
Literaturverzeichnis	41

1. Einführung

In vielen Bereichen der Nachrichtentechnik begegnet man dem Problem, das Spektrum in einem Frequenzbereich einschätzen zu müssen. Beispiele sind die Vermeidung durch andere Benutzer oder Verfahren belegter Bereiche (*Cognitive Radio*), oder das Finden von Signalen mit unbekannter Frequenz (z.B. *Software Radar*).

Diese Einschätzung läuft daraus hinaus, dass der Anwender erfahren will, wo im Spektrum tatsächlich Sendeleistung vorhanden ist, und wo sich nur Rauschen befindet.

Für die Spektralanalyse können parametrische Schätzverfahren eingesetzt werden, bei denen die Frequenzen als Parameter eines zugrunde liegenden Signalmodells bestimmt werden. Hierbei kann der Umweg einer Frequenzraumtransformation umgangen und die Frequenzen können direkt geschätzt werden.

In dieser Arbeit werden die beiden parametrischen Spektralschätzer ESPRIT und MUSIC vorgestellt, analysiert und anschließend in C++ implementiert sowie in die Spectral Estimation Toolbox für GNU Radio integriert.

GNU Radio ist eine Signalverarbeitungsumgebung für Software Radios. Durch die vielen zur Verfügung stehenden Blöcke sinkt der Entwicklungsaufwand deutlich. Um Projekten, die GNU Radio verwenden und erweitern, eine zentrale Bibliothek für Signalverarbeitungsblöcke zur Verfügung zu stellen, wurde das *Comprehensive GNU Radio Archive Network* (CGRAN) ins Leben gerufen. Im CGRAN gibt es mehrere Projekte des CEL, eines davon ist die Spectral Estimation Toolbox [B⁺].

1.1. Schätztheorie

Die folgenden Ausführungen lehnen sich, sofern nicht anders angegeben, an [Rin03, S. 434ff] an.

1.1.1. Schätzer

Unter einem *Schätzer* versteht man eine Funktion $\Psi : (X_1, \dots, X_N) \rightarrow \mathbb{P}$, die einer Stichprobe (X_1, \dots, X_N) von N Werten eine Schätzung für den Parametervektor Θ aus dem Raum der möglichen Parametrisierungen \mathbb{P} zuordnet:

$$\hat{\Theta}_N = \Psi(X_1, \dots, X_N) \quad (1.1.1)$$

Bei $\hat{\Theta}$ handelt es sich dabei um eine geschätzte Parametrisierung des, der Zufallsvariablen X zugrunde liegenden, Modells.

Zur Entwicklung und insbesondere zur Beurteilung von Schätzern verwendet man die Schätztheorie, ein Feld der mathematischen Statistik, die Maße für die Güte von Schätzern liefert.

Zur Beurteilung von Schätzern müssen verschiedene Eigenschaften betrachtet werden. Die folgenden Abschnitte beschränken sich auf solche Eigenschaften, die zur Analyse von Spektralschätzern notwendig sind.

1.1.2. Eigenschaften von Schätzern

Erwartungstreue und Bias

Als *erwartungstreu* bzw. *unbiased* bezeichnet man einen Schätzer $\hat{\Theta}$, für den gilt:

$$E[\hat{\Theta}_N] = \Theta \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad (1.1.2)$$

mit anderen Worten: Der Schätzer liefert im Durchschnitt den korrekten Parameterwert, ganz gleich, wie umfangreich seine Stichprobe ist.

$$B(\hat{\Theta}_N) := E[\hat{\Theta}_N] - \Theta \quad (1.1.3)$$

bezeichnet den sogenannten *Bias*, also die systematische Unter- bzw. Überschätzung des zu bestimmenden Parameters [Rin03, S. 435].

Ein weniger starkes Kriterium ist die *asymptotische Erwartungstreue*, die vorliegt, sofern gilt, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\Theta}_N] = \Theta, \quad (1.1.4)$$

also der Schätzer für große Stichproben erwartungstreu ist [SS01, S. 520f].

Effizienz und mittlerer quadratischer Fehler

Mit der *Effizienz* bezeichnet man bei Schätzern die Eigenschaft, Parameter möglichst *gut* zu schätzen. *Gut* bezeichnet hierbei einen möglichst minimalen Fehlerterm. Hierfür hat sich der mittlere quadratische Fehler (engl. *Mean Square Error, MSE*) durchgesetzt [Rin03, S. 36]:

$$\text{MSE}(\hat{\Theta}_N) := E[(\hat{\Theta}_N - \Theta)^2] \quad (1.1.5)$$

$$= E[(\hat{\Theta}_N - E[\hat{\Theta}_N])^2] + (E[\hat{\Theta}_N] - \Theta)^2 \quad (1.1.6)$$

$$= \text{Var}(\hat{\Theta}_N) + B^2(\hat{\Theta}_N) \quad (1.1.7)$$

Mit Gleichung (1.1.2) folgt, dass für einen erwartungstreuen Schätzer der MSE mit der Varianz des Schätzers übereinstimmt.

Aus pragmatischen Gründen (Vergleichbarkeit der Einheiten) verwendet man sehr häufig den Root Mean Square Error (*RMSE*), $\text{RMSE}(\hat{\Theta}) = \sqrt{\text{MSE}(\hat{\Theta})}$.

Absolut effizient oder *wirksamst* ist ein Schätzer $\hat{\Theta}$ dann, wenn $\text{Var}(\hat{\Theta})$ den kleinstmöglichen Wert annimmt [Rin03, S. 438]. Dieser ist bei erwartungstreuen Schätzern durch die Cramér-Rao-Grenze gegeben.

1.1.3. Cramér-Rao-Ungleichung

Die Cramér-Rao-Ungleichung gibt eine Schranke, die *Cramér-Rao-Grenze* (Cramér-Rao Bound, CRB), eine Kovarianzmatrix, welche die effizienteste erwartungstreu (s. Abschnitt 1.1.2) Schätzung der Parameter bei gegebener Stichprobengröße erreicht. Laut [SM97, S. 287] sind keine praxisrelevanten Schätzmethoden bekannt, die bei unbekannter Parametrisierung die CRB unterschreiten.

Für den Fall, dass nur ein Parameter geschätzt werden muss, lautet die Cramér-Rao-Ungleichung für einen Schätzer, der auf einer Stichprobe der Mächtigkeit N operiert [Eve02, S. 99] mit einer Likelihood-Funktion $\ell(\Theta)$:

$$\text{Var}(\hat{\Theta}) \geq \frac{1}{\text{E} \left\{ \frac{\partial^2 \ln \ell(\Theta)}{\partial \Theta^2} \right\}} \quad (1.1.8)$$

Ein parametrischer Schätzer, der die CRB für $N \gg 1$, wobei N hier für die Anzahl der Abtastwerte steht, erreicht, ist der Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer), sofern dieser existiert und erwartungstreu ist.

Der Maximum-Likelihood-Schätzer

Der ML-Schätzer basiert auf der Maximierung der *Likelihood*, im Folgenden mit ℓ bezeichnet. Die Likelihood $\ell(\Theta|\mathbf{X})$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter der bekannten Beobachtung $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ der Modellparameter oder -satz Θ bzw. $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ eintritt. Die Beobachtungen X_1, \dots, X_N werden als stochastisch unabhängig und identisch verteilt angenommen.

Es handelt sich dabei also um die Betrachtung der bedingten Dichte $f(\mathbf{X}|\Theta)$ für den Fall, dass nicht \mathbf{X} die Variable und Θ der Parameter ist, sondern umgekehrt die Plausibilität von Θ bei bekannter Stichprobe \mathbf{X} interessant ist [Rin03, S. 429].

$$\ell(\Theta|\mathbf{X}) := \prod_{i=1}^N f(X_i|\Theta) \quad (1.1.9)$$

Die *Log-Likelihood-Funktion* \mathcal{L} ist definiert als:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Theta|\mathbf{X}) &:= \ln [\ell(\Theta|\mathbf{X})] \\ &= \sum_{i=1}^N \ln [f(X_i|\Theta)]\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

Findet man durch Ableitung von ℓ nach Θ Maxima, so markieren diese die *plausibelste* Erklärung für die Beobachtung.

Da ℓ aber eine für die Ableitung ungünstige Produktform aufweist, verwendet man die Log-Likelihood-Funktion \mathcal{L} , die an den selben Stellen Extremwerte aufweist, da der Logarithmus eine monotone Operation ist.

Berechnung der CRB

Nach [SM97, S. 293f] ergibt sich die CRB-Matrix \mathbf{P}_{cr} für parametrische Schätzer mit einem Parametervektor $\hat{\Theta}_N$ nach Gleichung (1.1.1) und einem Empfangssignalvektor $\mathbf{y} = [y(1) \dots y(N)]^T$, durch Ableitung nach den Elementen von $\hat{\Theta}_N$, zu

$$\left[\mathbf{P}_{cr}^{-1} \right]_{kl} = \text{spur} \left(\mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{\Gamma}'_k \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{\Gamma}'_l \right) + 2 \text{Re} \left(\mu'_k{}^* \mathbf{\Gamma}^{-1} \mu'_l \right)\tag{1.1.11}$$

mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} = \text{E}[\mathbf{y}] &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \dots & e^{j\omega_n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_1} & \dots & e^{j(N-1)\omega_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{j\varphi_1} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{j\varphi_n} \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Gamma} = \text{E}[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^*] &= \sigma^2 \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Für erwartungstreue parametrische Frequenzschätzer, die auf einem Modell basieren, das normalverteiltes Rauschen voraussetzt, kann für großes N , d.h. $\frac{1}{N} < \min \Delta\omega$, $\Delta\omega$ bezeichnet den Frequenzabstand zwischen zwei Sinusschwingungen, die CRB nach [SM97, S. 147 und 294] auch über den folgenden, leichter zu berechnenden Zusammenhang approximiert werden¹:

$$\text{Cov}(\hat{\omega}) = \frac{6\sigma^2}{N^3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n^2} \end{pmatrix}\tag{1.1.12}$$

¹ Die Herleitung beruht auf der Betrachtung eines nichtlinearen Least-Squares-Schätzers und sprengt daher den Rahmen dieser Arbeit. Weiterführende Informationen finden sich in [SM97, S.146f].

1.2. Spektralschätzung

Die Aufgabe der Spektralschätzung ist das Schätzen eines Leistungsdichtespektrums (LDS) aus endlich vielen Abtastwerten eines empfangenen Signals $y(k)$. Mathematisch lässt sich $y(k)$ als zeitdiskreter stochastischer Prozess modellieren.

Nach [JW02, S. 153] ist ein stochastischer Prozess $X(t, \xi)$ „[...] eine mit dem Parameter t indizierte Familie von Zufallsvariablen“. Ist für einen solchen Prozess der Erwartungswert konstant und gilt für dessen Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1, \xi) X^*(t_2, \xi)]$, dass diese nicht von den absoluten Werten von t_1, t_2 abhängt, sondern nur von der Differenz $\tau = t_2 - t_1$, so heißt der Prozess (schwach) stationär (vgl. [JW02, S. 156]). Interpretiert man den Parameter t als Zeit und betrachtet ausschließlich Realisierungen des Prozesses zu diskreten Zeitpunkten k , ergibt sich dadurch ein Modell für das zeitdiskrete Zufallssignal $y(k)$.

Das geschätzte Spektrum soll so gut wie möglich dem tatsächlichen LDS $\Phi(\omega)$ des Signals $y(k)$ entsprechen.

Das LDS berechnet sich mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation (DFT) zu

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{xx}(k) e^{-j\omega k} \quad (1.2.1)$$

mit

$$r_{xx}(k) = E[x(m)x^*(m-k)] = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n r_{x_i x_l}(k). \quad (1.2.2)$$

Wird ein Spektrum gesucht lässt sich dies *nicht-parametrisch* anhand der DFT schätzen. Alternativ kann anhand der geschätzten Parameter eines Signalmodells ein Pseudo-Spektrum konstruiert werden. Ein Pseudo-Spektrum bezeichnet nach [KK09, S. 447] einen Schätzwert für ein Spektrum, wenn die Inverse des (Pseudo-)Spektrums nicht die Autokorrelationsfunktion ist. Bei MUSIC ist dies der Fall, da das Pseudo-Spektrum lediglich Informationen über die Frequenzen, nicht jedoch über die Amplituden enthält. Schätzer, die mit einem solchen Signalmodell arbeiten, werden *parametrisch* genannt.

Um mit einem solchen Schätzer Frequenzen bestimmen zu können, wird bei den in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren ein Modell verwendet, das Frequenzen als Parameter aufweist.

Die in Gleichung (1.1.1) mit \mathbf{X} bezeichnete, als Schätzgrundlage notwendige, Stichprobe umfasst in diesem Fall die, dem Schätzer zur Verfügung stehenden, Abtastwerte $\mathbf{y}(k)$:

$$\hat{\Theta}_N = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_n) = \Psi(\mathbf{y}(k)) \quad (1.2.3)$$

In den meisten Fällen sind Zufallssignale nicht stationär. Es ist daher notwendig, die Spektraleigenschaften in einem kurzen Zeitintervall, in dem die Forderung der Stationarität näherungsweise erfüllt ist, zuverlässig zu schätzen.

Als Folge dieser Kurzzeit-Spektralanalyse begegnet man Problemen wie nicht erwartungstreuer Schätzung bei stochastischen Prozessen und numerischer Ungenauigkeit in Folge einer geringen Datenbasis.

Zwei wichtige Beispiele für parametrische Schätzverfahren sind MUSIC und ESPRIT, die in dieser Arbeit behandelt werden. Beide basieren auf einer Eigenwertzerlegung des autokorrelierten Empfangssignals.

2. Die Algorithmen MUSIC und ESPRIT

Die zwei im Folgenden beschriebenen parametrischen Schätzer erlauben es, basierend auf einer Eigenvektorzerlegung, Signalanteile in den Rausch- bzw. den Signalraum zu projizieren.

2.1. Das Signalmodell

Das gesendete Signal $x(k)$ wird als Summe n überlagerter komplexer Sinusschwingungen betrachtet, das abgetastete Empfangssignal $y(k)$ wird zusätzlich von additivem weißen gaußschen Rauschen (Additive White Gaussian Noise, AWGN) $w(k)$ gestört:

$$y(k) = \sum_{i=1}^n x_i(k) + w(k) \quad (2.1.1)$$

$$x_i(k) = \alpha_i e^{j(\omega_i k + \varphi_i)} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.1.2)$$

Die verwendeten Modellparameter sind die Amplituden α_i , die Kreisfrequenzen ω_i sowie die Phasen φ_i der n Sinusschwingungen. Im Folgenden wird nur auf das Schätzen der Signalfrequenzen ω_i eingegangen. Die Kreisfrequenzen sind dabei normiert, also auf die Abtastfrequenz bezogen, angegeben: $\omega = 2\pi \frac{f}{f_A} = 2\pi f T_A$.

2.2. Das Korrelationssignalmodell

Unter der Voraussetzung, dass eine abzählbar endliche Anzahl von Sendesignalen empfangen wird, die sich in ihrer Frequenz nicht verändern, ergibt sich folgendes [Get71]:

Das abgetastete Empfangssignal $y(k)$ lässt sich aus einer Linearkombination von Sendesignalen x_1, x_2, \dots, x_n und AWGN erzeugen. Dies trifft auch für ein um ein Vielfaches der Abtastzeit T_A versetztes Empfangssignal $y(k-p)$, $p \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ zu.

$$\begin{aligned} y(k) &= a_{1,1}x_1(k) + a_{1,2}x_2(k) + \dots + a_{1,n}x_n(k) + w(k) \\ y(k-1) &= a_{2,1}x_1(k) + a_{2,2}x_2(k) + \dots + a_{2,n}x_n(k) + w(k-1) \\ &\vdots \\ y(k-(m-1)) &= a_{m,1}x_1(k) + a_{m,2}x_2(k) + \dots + a_{m,n}x_n(k) + w(k-(m-1)) \end{aligned}$$

oder: $\mathbf{y}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (2.2.1)$

Nimmt man für die Signale x_i das Signalmodell aus Gleichung (2.1.2), bestehend aus komplexen Sinusschwingungen der Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$, an, so sind die Koeffizienten $a_{l,p}$ nur vom Zeitversatz l und der Signalfrequenz ω_p abhängig [SM97, S. 145].

Für die Koeffizienten folgt daraus:

$$a_{l,p} = e^{-j\omega_p(l-1)} \quad (2.2.2)$$

Die n Spaltenvektoren \mathbf{a}_p von \mathbf{A} sind damit nur von ω_p abhängig.

$$\mathbf{a}_p = [a_{1,p} \quad a_{2,p} \quad \dots \quad a_{m,p}]^T = [1 \quad e^{-j\omega_p} \quad \dots \quad e^{-j\omega_p(m-1)}]^T = \mathbf{a}(\omega_p) \quad (2.2.3)$$

Die Matrix \mathbf{A} nimmt damit die folgende Form an:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\omega_1} & \dots & e^{-j\omega_n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-j(m-1)\omega_1} & \dots & e^{-j(m-1)\omega_n} \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

2.2.1. Die Autokorrelation

Die Autokorrelation r_{yy} des Empfangssignals y berechnet sich unter Beachtung von Gleichung (2.1.1)

$$\begin{aligned} r_{yy}(k) &= \mathbb{E}[y(m)y^*(m-k)] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n r_{x_i x_l}(k) + r_{ww}(k) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \delta(\omega - \omega_i) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

mit

$$r_{x_i x_l} = \mathbb{E}[x_i(p)x_l^*(p-k)] = \alpha_i^2 e^{j\omega_i k} \delta_{ik}. \quad (2.2.6)$$

2.2.2. Die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R}_{yy}

Die Autokorrelation des Empfangsvektors $\mathbf{y}(k)$ ergibt mit Hilfe der Gleichungen (2.2.1) und (2.2.5) zu

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbb{E}[\mathbf{y}(k) \mathbf{y}^*(k)] = \mathbf{A} \mathbb{E}[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^*(k)] \mathbf{A}^* + \mathbb{E}[\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^*(k)] \in \mathbb{C}^{m \times m}. \quad (2.2.7)$$

Die Autokorrelationsmatrix des Signalvektors $\mathbf{x}(k)$ ist eine Diagonalmatrix (siehe Gleichung (2.2.6)) mit den Quadraten der Signalamplituden:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^*(k)] = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^2 \end{pmatrix} =: \mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.2.8)$$

Die Autokorrelation des weißen Rauschens entspricht

$$\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}} = E[\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^*(k)] = \sigma^2 \mathbf{I}$$

mit Einheitsmatrix \mathbf{I} . Damit erhält man für $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^* + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2.2.9)$$

Hierbei wird noch einmal die additive Natur des Rauschens deutlich.

2.3. Multiple Signal Classification – MUSIC

Das von Ralph O. Schmidt 1979 vorgestellte Verfahren [Sch86] definiert eine Signal- und Rauschraumzerlegung auf Basis von Eigenwertzerlegungen. Es nutzt die Orthogonalität der berechneten Signal- und Rauschräume, um die Signalfrequenzen zu schätzen. Folgende Ausführungen lehnen sich an [SM97, S. 155ff] an.

2.3.1. Eigenwertzerlegung der Korrelationsmatrix

Aufgrund ihrer Definition ist die Autokorrelationsmatrix des Empfangssignals $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ hermitesch, somit gilt: $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}^*$. Des Weiteren hat die Matrix – zumindest für $\sigma^2 > 0$ – vollen Rang und ihre Eigenwerte sind bis auf einen konstanten Mehrbetrag von σ^2 mit jenen Eigenwerten $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ von $\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^*$ identisch.

Weil $\text{rank}(\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^*) = n$ gilt und $\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^*$ zusätzlich positiv semidefinit ist, besitzt auch $\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ nur Eigenwerte größer Null (vgl. Satz 2 im Anhang).

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \tilde{\lambda}_i + \sigma^2 \geq \sigma^2 & i \in 1, \dots, m \\ \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > \sigma^2 \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_{n+2} = \dots = \lambda_m = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Sortiert man die Eigenvektoren anhand der Größe ihrer Eigenwerte in absteigender Reihenfolge, so lässt sich die Eigenwertzerlegung der Autokorrelationsmatrix als

$$\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{y}} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^* \quad (2.3.2)$$

unter Verwendung von

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_n & \mathbf{g}_1 & \dots & \mathbf{g}_{m-n} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

und

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_n & & & & & \\ & & & \lambda_{n+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

darstellen. Dabei unterscheidet man Signal-Eigenvektoren \mathbf{s}_l zu Eigenwerten $\lambda_l > \sigma^2$ von Rausch-Eigenvektoren \mathbf{g}_p zu Eigenwerten $\lambda_{n+p} = \sigma^2$. Da bei hermiteschen Matrizen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind, bilden Signal- und Rausch-Eigenvektoren eine Basis zu Signal- bzw. Rauschraum (vgl. Satz 3 im Anhang). Diese beiden Räume sind damit auch orthogonal zueinander.

2.3.2. Signal- und Rauschraum

Anhand der Matrizen \mathbf{S} und \mathbf{G} , bestehend aus den Signal- bzw. Rauschraumvektoren, lassen sich die charakteristischen Eigenschaften von Signal- und Rauschraum zeigen.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \dots & \mathbf{g}_{m-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times (m-n)} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (2.3.5)$$

Eine Multiplikation dieser Matrizen an \mathbf{R}_{yy} von rechts führt nach Definition der Eigenvektoren und Gleichung (2.2.9) zu¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}\mathbf{G} &= \sigma^2\mathbf{G} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*\mathbf{G} + \sigma^2\mathbf{G} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy}\mathbf{S} &= \mathbf{S} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{\Lambda}} + \sigma^2\mathbf{I}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*\mathbf{S} + \sigma^2\mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

und daraus folgt

$$\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.3.8)$$

$$\mathbf{A} \left(\mathbf{P}\mathbf{A}^*\mathbf{S}\tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \right) = \mathbf{S} \quad (2.3.9)$$

¹Die Matrix $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n$ der Matrix $\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^*$

Die Matrix $\mathbf{P} \mathbf{A}^* \mathbf{S} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}$ ist mit $\text{rank}(\mathbf{P} \mathbf{A}^* \mathbf{S} \tilde{\mathbf{\Lambda}}^{-1}) = n$ regulär.

Aus Gleichung (2.3.8) erhält man, wegen $\text{rank}(\mathbf{A} \mathbf{P}) = n$, $\mathbf{A}^* \mathbf{G} = \mathbf{0}$ für jede gültige Matrix \mathbf{A} . Es folgt, dass jeder Spaltenvektor von \mathbf{A} orthogonal zu allen Rauschraumvektoren steht. Nach ihrer Definition in Gleichung (2.2.3) variieren sie nur mit der Frequenz.

$$\mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (2.3.10)$$

Somit lässt sich die Suche nach den Signalfrequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$ auf die Lösungen der Gleichung im Betragsquadrat

$$\mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{G} \mathbf{G}^* \mathbf{a}(\omega) = 0 \quad (2.3.11)$$

beschränken.

2.3.3. Spectrum-MUSIC und Root-MUSIC

Es gibt zwei Möglichkeiten eine Schätzung des Spektrums zu erhalten, wobei erstere die rechnerisch einfachere ist: Man zeichnet ein Pseudo-Spektrum, dem man die Funktion

$$f(\omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^*(\omega) \mathbf{G} \mathbf{G}^* \mathbf{a}(\omega)} \quad (2.3.12)$$

zu Grunde legt. Der Graph weist für alle $\omega = \omega_i$ Polstellen auf, da Rauschraum und Signalraum orthogonal aufeinander stehen.

Die zweite Möglichkeit ist das rein rechnerische Bestimmen der Nullstellen [Bar83]. Dazu substituiert man in $\mathbf{a}(\omega)$ aus Gleichung (2.2.3) mit $z = e^{j\omega}$ und erhält:

$$\mathbf{a}^*(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} & \dots & z^{-(m-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T(z^{-1}) \quad (2.3.13)$$

Damit ergibt sich für den Ausdruck $\mathbf{a}^*(z) \mathbf{G} \mathbf{G}^* \mathbf{a}(z)$ ein Polynom $(2m - 2)$ -ten Grades, dessen Nullstellen die gesuchten Lösungen sind. Aufgrund der Form des Polynoms finden sich Nullstellenpaare die zueinander reziprok sind – mit z ist auch $\frac{1}{z}$ Lösung des Polynoms. Um die richtigen Ergebnisse zu erhalten greift man nur auf die Lösungen innerhalb des Einheitskreises zurück und sucht hiervon die n größten heraus.

2.3.4. MUSIC – Algorithmus

Der Algorithmus lässt sich mit folgenden Punkten beschreiben:

1. Schätzung der Korrelationsmatrix $\hat{\mathbf{R}}_{yy}$ aus dem abgetasteten Empfangssignal $y(k)$.
2. Eigenwertzerlegung $\hat{\mathbf{R}}_{yy} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Lambda}} \hat{\mathbf{U}}^*$ berechnen und $\hat{\mathbf{U}}$ anhand der sortierten n größten Eigenwerte in $\hat{\mathbf{S}}$ und $\hat{\mathbf{G}}$ zerlegen.

3. Wahl des Auswertungsverfahrens:

- *Spectrum-MUSIC*: Die Funktion $f(\omega) = \left[\mathbf{a}^*(\omega) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(\omega) \right]^{-1}$ für verschiedene ω aus $[-\pi, \pi]$ auswerten und z.B. zeichnen.
- *Root-MUSIC*: Die Nullstellen von $\mathbf{a}^*(z) \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{G}}^* \mathbf{a}(z)$ lösen und jene n Stück wählen die im Einheitskreis und diesem am nächsten liegen. Dabei wird $z = e^{j\omega}$ gewählt und es gilt somit $\hat{\omega}_i = \arg(\hat{z}_i)$.

2.4. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques – ESPRIT

ESPRIT wurde 1986 von Richard Roy und Thomas Kailath vorgestellt [RPK86]. Der Algorithmus nutzt die, auf dem Korrelationssignalmodell basierende, Signal- und Rauschraumzerlegung, wie sie für MUSIC eingeführt wurde (s. Abschnitt 2.3.1), um erwartungstreue Schätzungen der Signalfrequenzen zu liefern.

Während MUSIC aber auf dem Rauschraum arbeitet, benutzt ESPRIT die Eigenwerte der Rotationsmatrix zweier zeitverschobener Empfangssignale. Diese Eigenwerte werden mittels einer Ähnlichkeitstransformierten dieser Matrix berechnet, welche aus dem Signalraum geschätzt wird. Folgende Ausführungen lehnen sich an [SM97, S. 163ff] an.

2.4.1. Die Rotationsmatrix

Hat man nicht nur ein zeitdiskretes Signal $\mathbf{y}(k)$ bestehend aus dem Sendesignal $\mathbf{x}(k)$ und weißem gaußschen Rauschen $\mathbf{w}(k)$, sondern auch ein um Vielfache der Abtastzeit versetztes Signal, so ergibt sich mit Gleichung (2.2.1) folgende Beziehungen:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k+1) \quad (2.4.2)$$

wobei \mathbf{D} folgende Gestalt hat:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^{j\omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{j\omega_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (2.4.3)$$

Es lässt sich folgende Beziehung zu \mathbf{A} herstellen:

Die Matrix \mathbf{D} wird von den letzten $(m-1)$ Zeilen von \mathbf{A} auf deren ersten $(m-1)$ Zeilen

abgebildet. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} A \in \mathbb{C}^{(m-1) \times n} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix} A \in \mathbb{C}^{(m-1) \times n} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$A_1 = A_2 D \quad (2.4.5)$$

Will man die Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$ schätzen, so lässt sich dies über die Eigenwerte von D tun.

2.4.2. Signalraum

Nach einer Eigenwertzerlegung der Korrelationsmatrix R_{yy} lassen sich nach Abschnitt 2.3.1 die Signal- und Rausraumvektoren angeben. Die Matrix S der Signalraumvektoren erfüllt dabei folgende Gleichung (vgl. (2.3.9)):

$$A \left(P A^* S \tilde{\Lambda}^{-1} \right) = S \quad (2.4.6)$$

Damit existiert eine reguläre Matrix C mit $S = A C$.

Führt man eine zu A_1, A_2 analoge Zerlegung für S ein und definiert S_1 und S_2 mit:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} S \in \mathbb{C}^{(m-1) \times n} \quad (2.4.7)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix} S \in \mathbb{C}^{(m-1) \times n} \quad (2.4.8)$$

so gilt $S_k = A_k C$, $k \in \{1, 2\}$ und mit folgenden Umformungen

$$S_1 = A_1 C = A_2 D C = S_2 C^{-1} D C \quad (2.4.9)$$

erhält man eine zu D ähnliche Matrix, berechenbar aus der Matrix S .

Als Ähnlichkeitstransformierte hat $\Phi := C^{-1} D C$ dieselben Eigenwerte wie D . Es ergibt sich das Least-Squares-Problem $S_1 = S_2 \Phi$, dessen Lösung mit $\Phi = (S_2^* S_2)^{-1} S_2^* S_1$ angegeben werden kann.

Die gesuchten Frequenzen sind dann der Winkel der Eigenwerte χ_1, \dots, χ_n von Φ in der komplexen Ebene:

$$\omega_i = \arg(\chi_i) \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.4.10)$$

2.4.3. ESPRIT – Algorithmus

Der Algorithmus lässt sich mit folgenden Punkten beschreiben:

1. Schätzung der Korrelationsmatrix \hat{R}_{yy} aus dem abgetasteten Empfangssignal $y(k)$.
2. Eigenwertzerlegung $\hat{R}_{yy} = \hat{U} \hat{\Lambda} \hat{U}^*$ berechnen und \hat{U} anhand der sortierten n größten Eigenwerte in \hat{S} und \hat{G} zerlegen.

3. Die Matrix $\hat{\Phi}$ schätzen: $\hat{\Phi} = (\hat{S}_2^* \hat{S}_2)^{-1} \hat{S}_2^* \hat{S}_1$
4. Die Eigenwerte $\hat{\chi}_i$ von $\hat{\Phi}$ berechnen und mit $\hat{\omega}_i = \arg(\hat{\chi}_i)$ die Frequenzschätzungen erhalten.
- (5.) *Optional:* Um ein Pseudo-Spektrum zu erstellen, die Funktion

$$f(\omega) = \left[\left| \prod_{k=1}^n e^{j\omega} - |\hat{\chi}_k| e^{j\hat{\omega}_k} \right|^2 \right]^{-1}$$

an verschiedenen Stellen ω im Intervall $[-\pi, \pi]$ auswerten und zeichnen [KK09, S. 455].

3. Analyse

Nach Abschnitt 2.3.3 gibt es zwei Möglichkeiten, mit Hilfe des MUSIC-Algorithmus eine Schätzung des Spektrums zu erhalten: Spectrum-MUSIC und Root-MUSIC. Spectrum-MUSIC berechnet ein echtes Pseudo-Spektrum wohingegen ESPRIT gemäß Abschnitt 2.4.3 diskrete Frequenzen als Ergebnis der Schätzung liefert. Bei dem mit ESPRIT gezeichneten Pseudo-Spektrum handelt es sich lediglich um eine Interpolation zwischen den geschätzten Frequenzen. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurden deshalb sämtliche in diesem Kapitel beschriebenen Simulationen und darauf aufbauenden Analysen mit Root-MUSIC durchgeführt. Wenn im Folgenden von MUSIC die Rede ist, so meint dies daher grundsätzlich Root-MUSIC.

Um eine einfache Reproduzierbarkeit der Simulationsergebnisse zu erreichen, wurden feste Signalfrequenzen und -phasen gewählt. Alle komplexen Schwingungen weisen identische Amplituden auf. Das SNR bezieht sich jeweils auf die Gesamtsignalleistung.

Das verwendete Fehlermaß ist der RMSE (vgl. Abschnitt 1.1.2). Für die Berechnung des RMSE bei mehreren Frequenzen werden paarweise die Differenzen gebildet und die Beträge arithmetisch gemittelt:

$$\text{RMSE}(\hat{\Omega}) = \text{RMSE} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\omega_k - \hat{\omega}_k| \right)$$

mit $\hat{\Omega} = (\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_n)$. Die Berechnung der CRB erfolgt nach Gleichung (1.1.12).

3.1. ESPRIT und MUSIC im Vergleich

In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist jeweils die Wurzel des mittleren quadratischen Schätzfehlers (RMSE, s. Abschnitt 1.1.2) für ESPRIT und MUSIC über der Anzahl der Abtastwerte N und über dem Signal-zu-Rausch-Verhältnis (SNR) dargestellt. Beide Abbildungen enthalten außerdem die Cramér-Rao-Grenze (CRB, s. Abschnitt 1.1.3) als theoretische untere Schranke des RMSE. Beide Abbildungen zeigen, dass ESPRIT etwas bessere statistische Eigenschaften aufweist als MUSIC. Weiterhin wird deutlich, dass die Abhängigkeit beider Algorithmen von den betrachteten Parametern identisch ist.

In Abbildung 3.2 sieht man das Verhalten für ein geringes SNR: Der Schätzer rät in zunehmendem Maße und der RMSE nähert sich deshalb dem einer gleichverteilten Schätzung

an. Der RMSE eines ratenden „Schätzers“ für eine zu schätzende Frequenz von $\omega = 0.8\pi$ entspricht:

$$\text{RMSE}(\hat{\omega}) = \sqrt{\text{Var}(\hat{\omega}) + \text{B}^2(\hat{\omega})} = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{12} + (0.8\pi)^2} \approx 3.099 \quad (3.1.1)$$

Aus Abbildung 3.3 ist ersichtlich, dass der Berechnungsaufwand für große m für ESPRIT deutlich geringer ist als für MUSIC. Dieses Ergebnis stimmt mit dem überein, zu dem auch [RPK86] und [SS91] kommen.

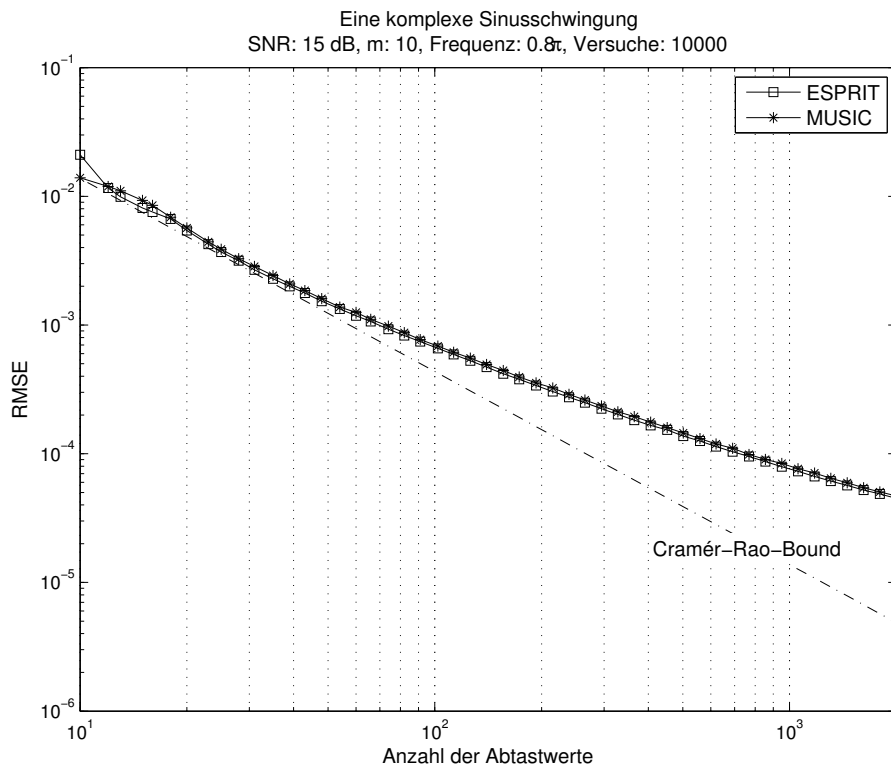


Abb. 3.1.: RMSE für ESPRIT und MUSIC über der Anzahl der Abtastwerte N

3.2. Einfluss der Parameter $\Delta\omega$, N und m auf das Schätzergebnis

Da das Verhalten von ESPRIT und MUSIC, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt wurde, weitgehend identisch ist, beziehen sich die folgenden Analysen ausschließlich auf ESPRIT. Sämtliche qualitativen Aussagen treffen jedoch gleichermaßen auch auf MUSIC zu.

3.2.1. Einfluss des Frequenzabstands $\Delta\omega$

Aus Abbildung 3.4 geht hervor, dass für einen geringeren Abstand zwischen den zu schätzenden Frequenzen $\Delta\omega$ der RMSE größer wird. Die Frequenzauflösung lässt sich durch

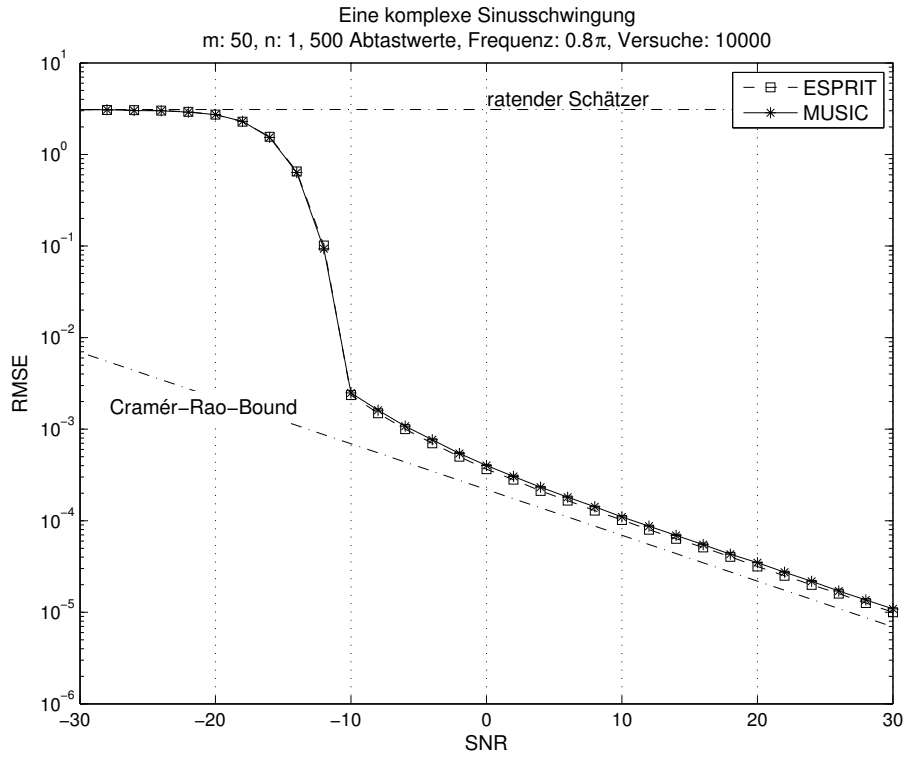


Abb. 3.2.: RMSE für ESPRIT und MUSIC über dem SNR

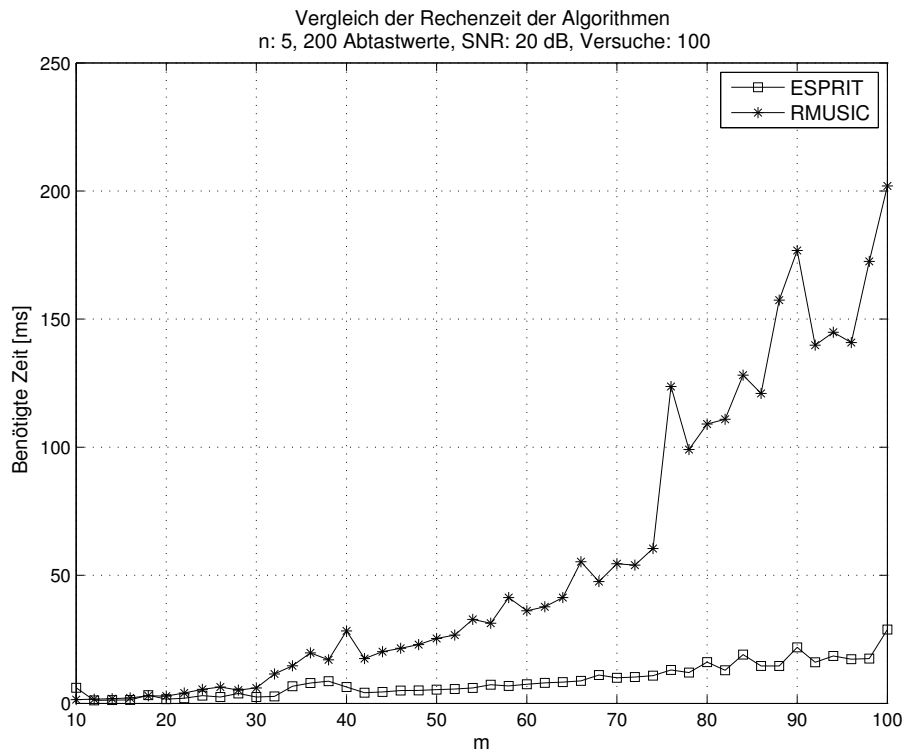


Abb. 3.3.: Rechenzeit von ESPRIT und MUSIC über m

ein größeres m verbessern dies ist jedoch nach Abschnitt 3.1 mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden. Zudem zeigt Abbildung 3.4 auch, dass der RMSE sich schnell der CRB nähert. Das bedeutet, dass der mögliche Gewinn durch Steigerung von m schnell abnimmt.

Die Anzahl der zur Schätzung herangezogenen Abtastwerte N hat hingegen keinen Einfluss auf den maximal auflösbaren Abstand zwischen den Frequenzen $\Delta\omega$, wie aus Abbildung 3.5 ersichtlich ist.

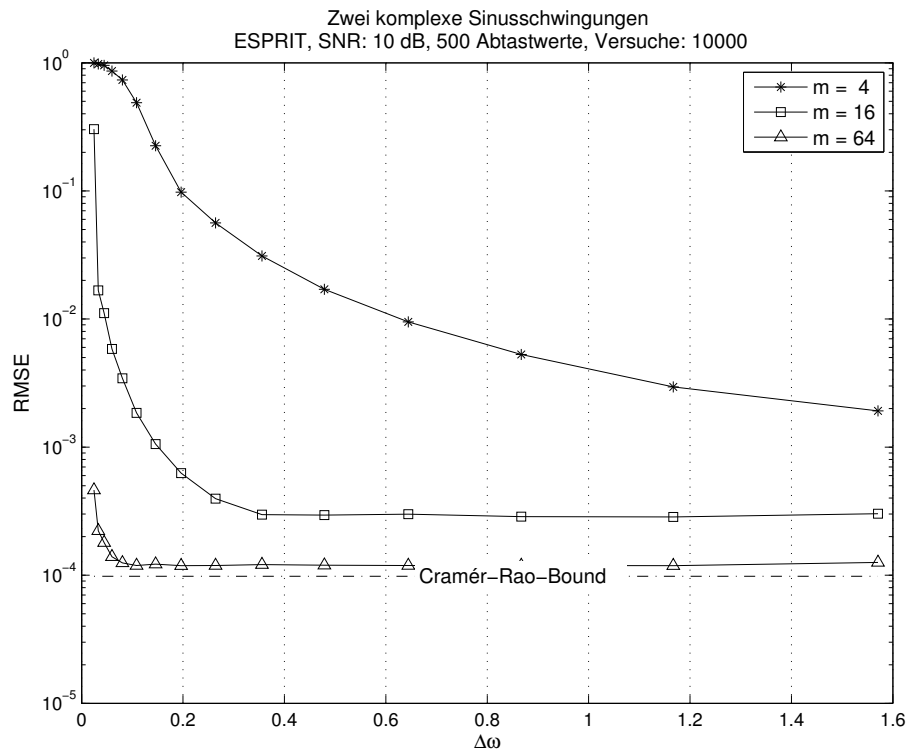


Abb. 3.4.: Abhängigkeit der Frequenzauflösung von m

3.2.2. Einfluss der Dimension der Korrelationsmatrix m

Durch ein größeres m lässt sich die Wurzel des mittleren quadratischen Schätzfehlers minimieren, wie Abbildung 3.6 belegt. Aus der Abbildung geht jedoch auch hervor, dass der RMSE für ca. $m = 30$ einen konstanten Wert erreicht. Das bedeutet, dass für eine Anzahl zu schätzender Frequenzen $n \geq 30$ der Parameter $m = n + 1$ gewählt werden kann, ohne dass sich dies negativ auf den zu erwartenden Schätzfehler auswirkt.

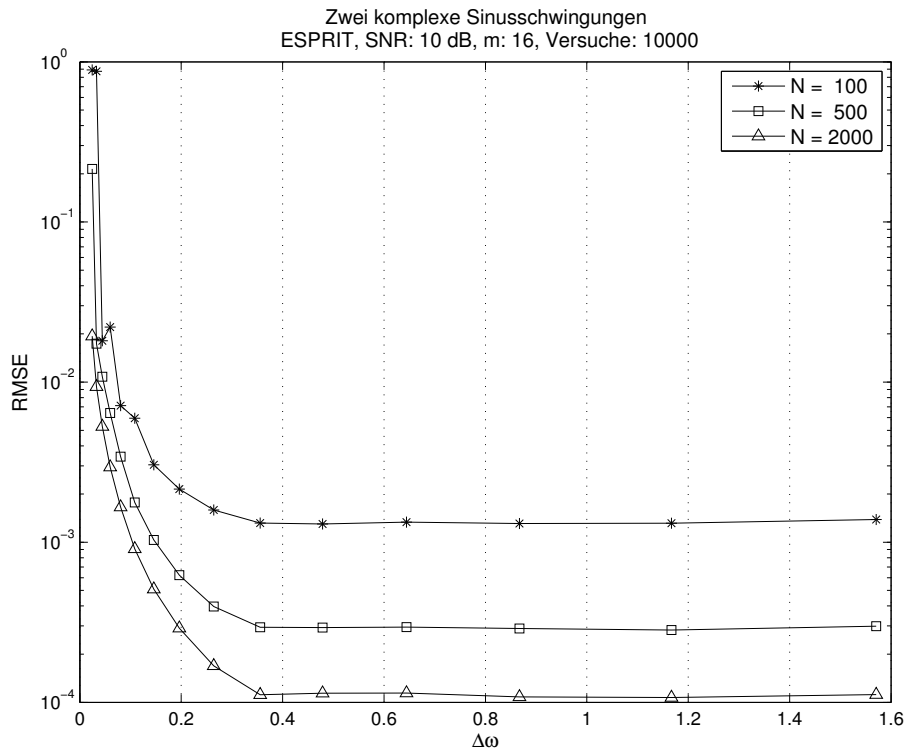


Abb. 3.5.: Abhängigkeit der Frequenzauflösung von der Anzahl der Abtastwerte N

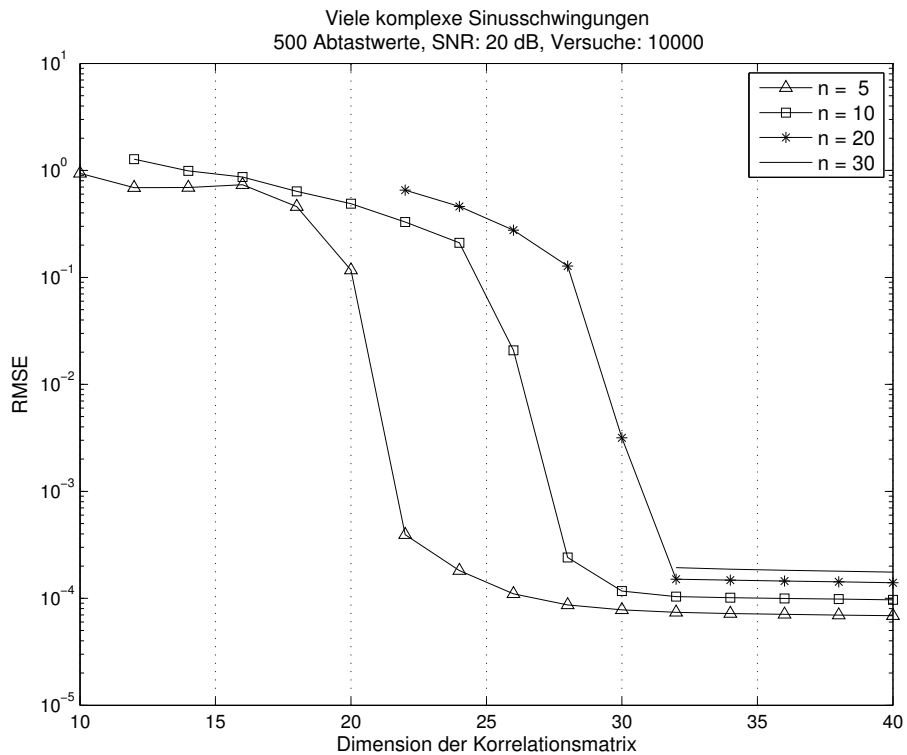


Abb. 3.6.: RMSE für ESPRIT über der Dimension der Korrelationsmatrix m

3.2.3. Einfluss der Anzahl der Abtastwerte N

Wie für einen erwartungstreuen Schätzer gefordert, geht der mittlere quadratische Schätzfehler für $N \rightarrow \infty$ gegen Null. Dies ist auch aus den Abbildungen 3.1 und 3.5 ersichtlich.

Abbildung 3.1 zeigt jedoch auch, dass der RMSE nur für kleine N im Bereich der CRB verläuft. Für größere N fällt der RMSE deutlich langsamer als die CRB. Abschnitt 3.2.2 hat gezeigt, dass sich diese Entwicklung durch die Wahl von m beeinflussen lässt. Auf Grund der eintretenden Sättigung ist dieser Einfluss allerdings begrenzt. Das heißt auch für große m wird die CRB bei großen N nicht erreicht.

4. Implementierung

Zu Beginn der Implementierung wurde zu Vergleichszwecken eine Referenzimplementierung in MATLAB erstellt. Diese diente als Basis für Analysen und konnte später zum Vergleich mit der C++-Implementierung herangezogen werden. Um die Algorithmen in C++ zu implementieren wurde nach einer geeigneten Softwarebibliothek gesucht, die den Umgang mit Matrizen ermöglicht und leistungsfähige mathematische Methoden (z.B. zur Eigenwertzerlegung) bereitstellt. Evaluiert wurden die GNU Scientific Library [GSL], da diese bereits von GNU Radio benötigt wird, und Armadillo [ARM], eine templatebasierte C++-Bibliothek, welche LAPACK [LAP] verwendet.

Dabei wurde festgestellt, dass die GSL nicht alle benötigten mathematischen Operationen bereitstellt und daher ungeeignet zur Implementierung der Algorithmen ist. Die Wahl fiel deshalb auf Armadillo. Nach der vollständigen Implementierung wurden Laufzeitanalysen der Algorithmen durchgeführt, um die Geschwindigkeit und Qualität der Implementierungen zu bewerten. Hierbei zeigte sich, dass bei Verwendung von Armadillo für die Schätzung der Korrelationsmatrizen für $m < 64$ eine mit der Dimension der Matrix stark steigende Laufzeit auftritt. Aus einer Analyse des Quellcodes von Armadillo ergab sich, dass für Matrizen dieser Größe nicht auf LAPACK zurückgegriffen wird, sondern eine eigene Implementierung für die Matrizenmultiplikation zum Einsatz kommt. Da Matrizen dieser Größe für die praktische Anwendung jedoch besonders von Bedeutung sind, wurde versucht dieses Geschwindigkeitsproblem zu umgehen. Daher wurde eine Implementierung in Fortran90 erstellt, welche LAPACK direkt verwendet. Anschließende Laufzeitanalysen bestätigten, dass der Engpass dadurch beseitigt wurde.

4.1. Integration in GNU Radio

4.1.1. Die Spectral Estimation Toolbox

Die Spectral Estimation Toolbox [B⁺] ist eine Sammlung von GNU Radio Blöcken, die verschiedene Spektralschätzalgorithmen implementieren, um für alle Anwendungsfälle einen geeigneten Spektralschätzer zur Verfügung zu stellen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Algorithmen MUSIC und ESPRIT dieser Sammlung hinzugefügt. Beide Algorithmen ermöglichen es sowohl diskrete Frequenzwerte als auch ein Pseudo-Spektrum zu erhalten.

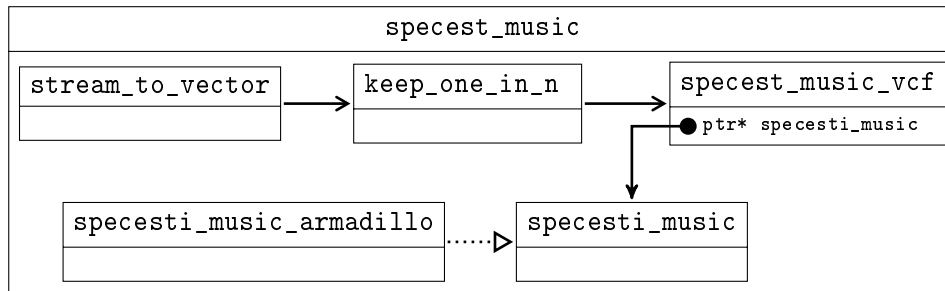


Abb. 4.1.: Hierarchischer GNU Radio Block zu MUSIC

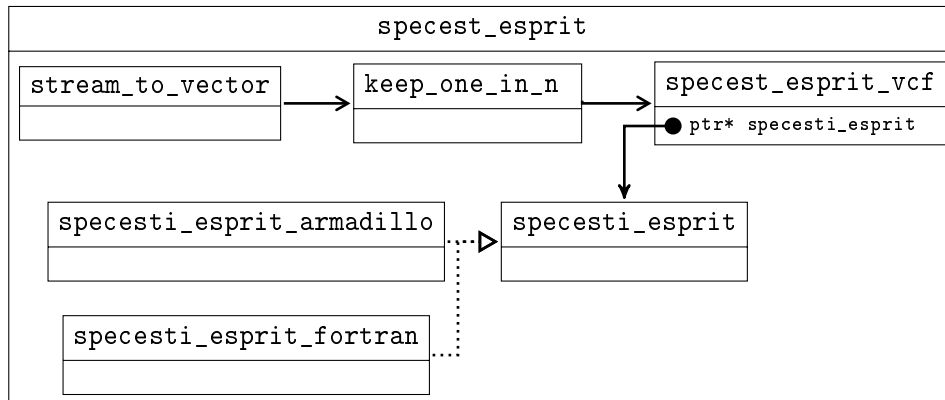


Abb. 4.2.: Hierarchischer GNU Radio Block zu ESPRIT

Die Spectral Estimation Toolbox wurde um mehrere Blöcke zur Spektralschätzung erweitert. Im folgenden werden jedoch nur die für den Endbenutzer interessanten Blöcke beschrieben.

specest_music_vcf und specest_esprit_vcf

Die Blöcke erlauben die Schätzung von Frequenzen nach dem MUSIC- beziehungsweise ESPRIT-Verfahren. Sie sind parametrisierbar mit den Parametern:

- Anzahl der Sinusschwingungen im Modell (n)
- Dimension der Korrelationsmatrix (m)
- Anzahl der zu verwendenden Abtastwerte zur Schätzung der Korrelationsmatrix ($nsamples$)

Als Eingangswerte erwarten die Blöcke komplexe Werte in Vektoren der Länge $nsamples$. Am Ausgang erhält man die geschätzten Frequenzen normiert auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ in Vektoren der Länge n . Die hierbei verwendete Kernimplementierung der Algorithmen ist im Block austauschbar und erlaubt so einen direkten Vergleich der Implementierungen in GNU Radio.

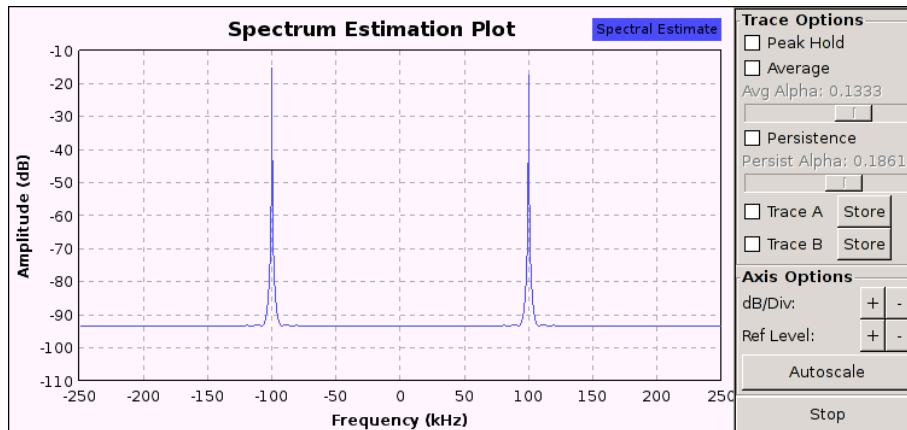


Abb. 4.3.: GNU Radio Spectrumsink mit MUSIC

specest_spectrum_sink

Der Block, dargestellt in Abbildung 4.3, erlaubt die graphische Ausgabe der Pseudo-Spektren nach dem MUSIC- beziehungsweise dem ESPRIT-Verfahren. Um den Block auch bei großen Abtastraten nutzen zu können, wurden die Blöcke `specest_music_vcf` und `specest_esprit_vcf`, wie in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt, erweitert. Dies ermöglicht einen konfigurierbaren Dezimationsfaktor.

Er lässt sich wie `specest_music_vcf` bzw. `specest_esprit_vcf` parametrisieren und bietet dem Benutzer eine Alternative zur `fft_sink`.

4.1.2. GNU Radio Companion

Um dem Benutzer den Einsatz der implementierten Frequenzschätzverfahren möglichst einfach zu ermöglichen, wurden zu den oben beschriebenen GNU Radio Blöcken Beschreibungen für den GNU Radio Companion (GRC) erstellt, der in Abbildung 4.4 dargestellt ist. Mit diesem können Signalflussgraphen grafisch erstellt werden, um Signalverarbeitungssysteme schnell und flexibel umzusetzen.

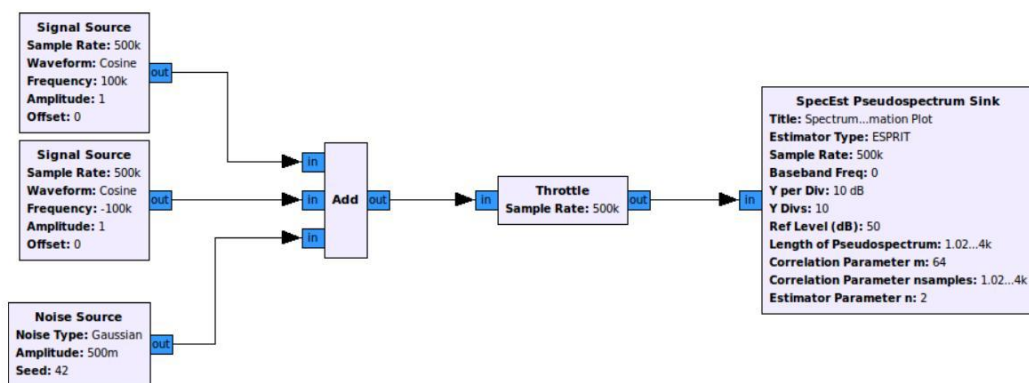


Abb. 4.4.: Signalfussgraph in GNU Radio Companion

5. Fazit

5.1. Analyse der Verfahren

Spektralschätzer sind leistungsfähige Werkzeuge zur Beurteilung der Bandnutzung. Überraschend bei der Einarbeitung war die Tatsache, dass sowohl MUSIC als auch ESPRIT algorithmisch aus relativ wenigen Schritten bestehen, und dennoch brauchbare Schätzungen liefern.

In der Analyse der Algorithmen zeigte sich, dass theoretische Grenzen mit nur beschränkten Messdatenfolgen und Korrelationsmatrizen nicht zu erreichen sind. Es lassen sich jedoch schon bei überschaubaren Komplexitäten asymptotische Genauigkeiten erzielen. Dies zeigt, dass die Verfahren für den tatsächlichen Einsatz mit Messsignalen geeignet sind, da sie auch bei begrenzter Rechenzeit für viele Anwendungsfälle gute Ergebnisse liefern.

Es ist festzustellen, dass sich die Genauigkeit von Root-MUSIC und ESPRIT bei gleicher, passender Parametrisierung kaum unterscheidet, wobei ESPRIT stets etwas bessere Ergebnisse liefert. Unter passender Parametrisierung versteht sich hierbei zunächst eine geeignete Wahl von m , der Dimension der Korrelationsmatrix. Optimale Ergebnisse erhält man mit zutreffend gesetzter Anzahl vorhandener Sinusschwingungen n . Dieser Parameter lässt sich auch durch den Vergleich mehrerer Schätzungen in Zeitabfolge bestimmen. Root-MUSIC ist jedoch durch die hier notwendige Berechnung von Polynomwurzeln numerisch aufwendiger und daher für die Echtzeit-Frequenzschätzung weniger geeignet. Insgesamt ist daher ESPRIT für die Schätzung diskreter Frequenzen Root-MUSIC vorzuziehen.

Zur Erstellung von Pseudo-Spektren eignen sich hingegen sowohl das in [KK09] vorgestellte und von uns implementierte Spectrum-ESPRIT (Abschnitt 2.4) als auch das in [Sch86] beschriebene und von uns ebenfalls umgesetzte Spectrum-MUSIC (Abschnitt 2.3).

5.2. Erkenntnisse aus der Implementierung

Für die Implementierung wurden verschiedene Programmbibliotheken für lineare Algebra evaluiert und eigene Verfahren umgesetzt. Erstaunlich hierbei waren die teilweise erheblichen Geschwindigkeitsunterschiede zwischen verschiedenen, durchaus in der Praxis eingesetzten Bibliotheken.

Während anfängliche Implementierungen schnell lauffähig waren, wurde insbesondere bei der Verwendung von Funktionen über Framework- und Sprachgrenzen hinweg deutlich, dass die Interoperabilität auf Compiler-, GNU Radio- und Wrapperebene nicht durchgängig ausgereift ist.

5.3. Erweiterung der Spectral Estimation Toolbox

Die Implementierungen wurden in die GNU Radio Spectral Estimation Toolbox [B⁺] als Blöcke integriert, so dass sie dem Nutzer für eigene Entwicklungen und Untersuchungen im Rahmen eines Software Defined Radios zur Verfügung stehen.

Diese Blöcke wurden für GNU Radio Companion, einem graphischen Flussgraph-Editor für GNU Radio, beschrieben, so dass sie einfach und flexibel verwendbar sind.

A. Beweise aus der Linearen Algebra

Folgende Beweise dienen dem schnellen Nachschlagen und lassen sich in [HL10] oder [BHW08] in vollem Umfang nachlesen.

Satz 1. Zu jedem Eigenwert $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ einer quadratischen Matrix M mit

$$M = A + \alpha I \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

existiert ein Eigenwert $\tilde{\lambda}_i$ aus der Eigenwertzerlegung von A :

$$A X = X \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

mit:

$$\lambda_k = \tilde{\lambda}_i + \alpha \quad k, i \in \{1, \dots, n\}$$

Beweis. Sei λ_k ein Eigenwert von M , so erfüllt er mit einem entsprechenden Eigenvektor \mathbf{x}_k

$$(M - \lambda_k I) \mathbf{x}_k = 0$$

Setzt man nun die Beziehung zu A ein, so folgt

$$(A - (\lambda_k - \alpha) I) \mathbf{x}_k = 0.$$

Somit ist $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k - \alpha$ Eigenwert von A . □

Satz 2. Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix H sind reell.

Beweis. Sei $H = H^*$ eine hermitesche Matrix. Sei $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ein Eigenvektor von H mit Eigenwert λ :

$$H \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Da auch $\mathbf{x}^* \mathbf{x} \neq 0$ gilt, folgt aus:

$$\lambda(\mathbf{x}^* \mathbf{x}) = \mathbf{x}^*(\lambda \mathbf{x}) = \mathbf{x}^* H \mathbf{x} = (H^* \mathbf{x})^* \mathbf{x} = (H \mathbf{x})^* \mathbf{x} = (\lambda \mathbf{x})^* \mathbf{x} = \lambda^* (\mathbf{x}^* \mathbf{x})$$

das $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Satz 3. Die Eigenvektoren einer hermiteschen Matrix \mathbf{H} zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis. Sei $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$ eine hermitesche Matrix. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ Eigenvektoren von \mathbf{H} zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_x \neq \lambda_y$:

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \lambda_x \mathbf{x}$$

$$\mathbf{H} \mathbf{y} = \lambda_y \mathbf{y}$$

Da die Eigenwerte reell (Satz 2) und verschieden sind folgt aus

$$\lambda_y (\mathbf{x}^* \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* (\lambda_y \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* \mathbf{H} \mathbf{y} = (\mathbf{H}^* \mathbf{x})^* \mathbf{y} = (\mathbf{H} \mathbf{x})^* \mathbf{y} = (\lambda_x \mathbf{x})^* \mathbf{y} = \lambda_x^* (\mathbf{x}^* \mathbf{y})$$

das $\mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit der Orthogonalität von \mathbf{x} und \mathbf{y} . □

Satz 4 (Ähnliche Matrizen). Eine Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt zu einer Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ähnlich, wenn eine reguläre Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert mit:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C}.$$

\mathbf{C} heißt dann Ähnlichkeitstranformation.

Es folgt dann, dass \mathbf{D} und \mathbf{Q} die gleichen Eigenwerte haben.

Beweis. Eine Matrix \mathbf{Q} sei ähnlich zu \mathbf{D} , es existiert eine Ähnlichkeitstranformation \mathbf{C} . Für jeden Eigenwert λ und passenden Eigenvektor \mathbf{x} von \mathbf{Q} gilt:

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{x} \iff \lambda \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

Also ist jeder Eigenwert von \mathbf{Q} auch Eigenwert von \mathbf{D} und umgekehrt – \mathbf{D} ist ähnlich zu \mathbf{Q} mit Transformation \mathbf{C}^{-1} . □

Literaturverzeichnis

- [ARM] *Armadillo*. <http://arma.sourceforge.net/>.
- [B⁺] BRAUN, MARTIN et al.: *GNU Radio spectrum estimation toolbox Homepage*. <https://www.cgran.org/wiki/SpecEst>.
- [Bar83] BARABELL, A.: *Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms*. In: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '83.*, Band 8, April 1983.
- [BHW08] BURG, KLEMENS, HERBERT HAF und FRIEDRICH WILLE: *Höhere Mathematik für Ingenieure: Band II: Lineare Algebra*. B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 6. überarbeitete Auflage, 2008.
- [Eve02] EVERITT, BRIAN: *The Cambridge Dictionary of Statistics*. Cambridge University Press, Cambridge, Zweite Auflage, 2002.
- [Get71] GETHING, P.J.D.: *Analysis of multicomponent wavefields*. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 118(10):1333–1338, Oktober 1971.
- [GR] *GNU Radio Project Homepage*. <http://gnuradio.org/>.
- [GSL] *GNU Scientific Library*. <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [HL10] HENZE, NORBERT und GÜNTER LAST: *Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Band 2: Analysis im \mathbb{R}^n , Lineare Algebra, Hilberträume, Fourieranalyse, Differentialgleichungen, Stochastik der Reihe Studium*. Vieweg, Braunschweig, 2. überarbeitete Auflage, 2010.
- [JW02] JONDRALE, FRIEDRICH und ANNE WIESLER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*. Lehrbuch. Teubner, Stuttgart [u.a.], 2., durchges. und aktualisierte Auflage, 2002.
- [KK09] KAMMEYER, KARL-DIRK und KRISTIAN KROSCHER: *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse*. Studium. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 7., erw. u. korr. Auflage, 2009.
- [LAP] *LAPACK – Linear Algebra PACKage*. <http://www.netlib.org/lapack/>.
- [Rin03] RINNE, HORST: *Taschenbuch der Statistik*. Verlag Harri Deutsch, dritte, vollst. überarb. und erw. Auflage, 2003.

- [RPK86] ROY, R., A. PAULRAJ und T. KAILATH: *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques - ESPRIT*. In: *Military Communications Conference - Communications-Computers: Teamed for the 90's*, 1986. MILCOM 1986. IEEE, Band 3, Seiten 41.6.1 – 41.6.5, Oktober 1986.
- [Sch86] SCHMIDT, R.: *Multiple emitter location and signal parameter estimation*. *Antennas and Propagation*, IEEE Transactions on, 34(3):276 – 280, März 1986.
- [SM97] STOICA, PETRE G. und RANDOLPH L. MOSES: *Introduction to spectral analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [SS91] STOICA, P. und T. SODERSTROM: *Statistical analysis of MUSIC and subspace rotation estimates of sinusoidal frequencies*. *Signal Processing*, IEEE Transactions on, 39(8):1836 –1847, August 1991.
- [SS01] SCHLITTGEN, RAINER und BERND STREITBERG: *Zeitreihenanalyse*. Lehr- und Handbücher der Statistik. Oldenbourg, München, 9., unwesentlich veränd. Auflage, 2001.