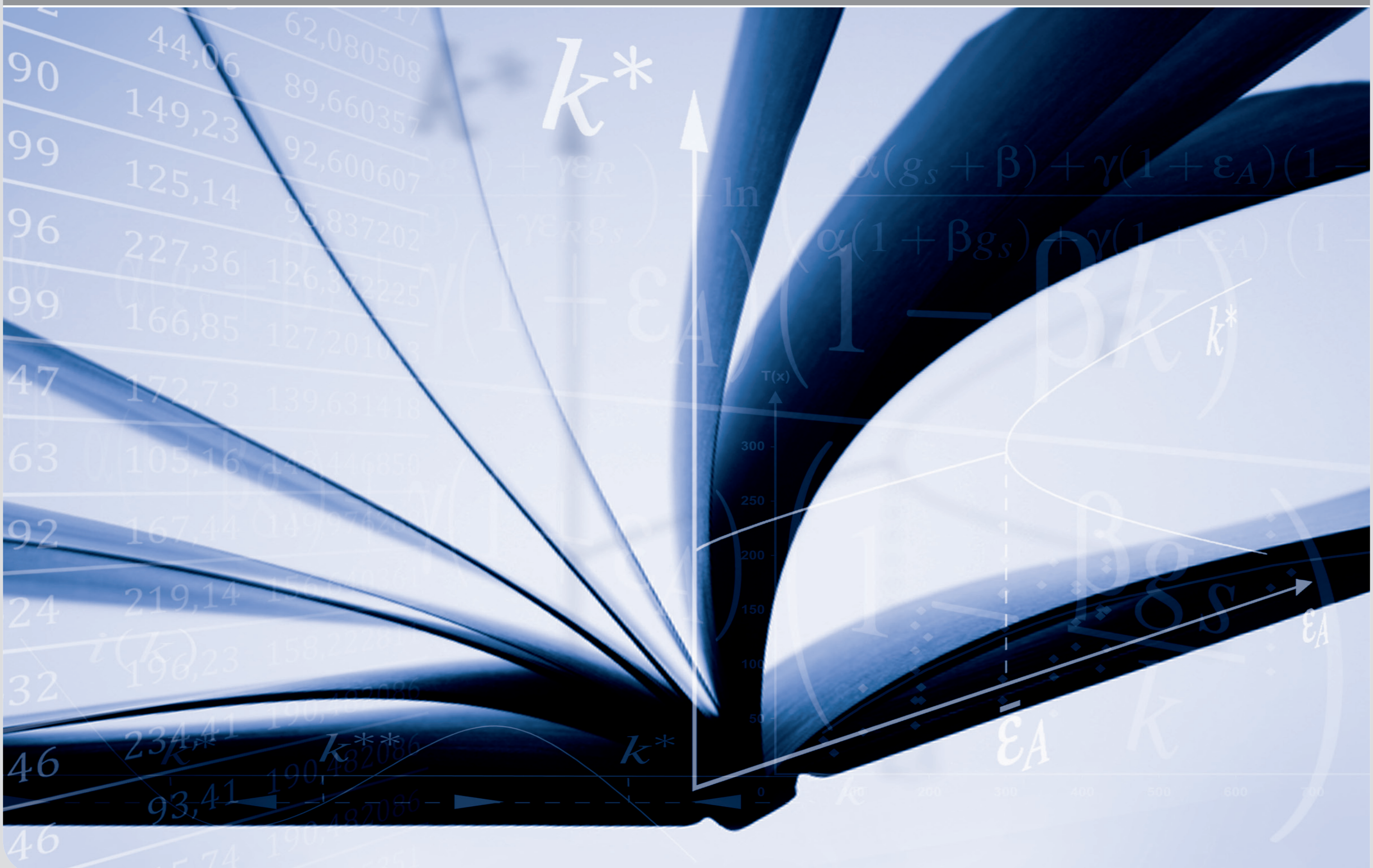
Karlsruher Institut für Technologie

Erhaltungsgesetze für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen

by Mher Safarian

No. 58 | JULY 2014

WORKING PAPER SERIES IN ECONOMICS



KIT – University of the State of Baden-Wuerttemberg and
National Laboratory of the Helmholtz Association

econpapers.wiwi.kit.edu

Impressum

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

Schlossbezirk 12
76131 Karlsruhe

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und
nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft

Working Paper Series in Economics
No. 58, July 2014

ISSN 2190-9806

econpapers.wiwi.kit.edu

Erhaltungsgesetze für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen

Mher Safarian*
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
Institut für Volkswirtschaftslehre (ECON)

5. Juni 2014

1 Einführung

Die Erhaltungsgesetze sind bedeutende Gesetzmäßigkeiten in der Warteschlangentheorie (oder Bedienungstheorie) [4], [5]. Sie stellen eine invariante Gleichung in der breiten Klasse der Abfertigungsdisziplinen dar. Die Abfertigungsdisziplinen sind die Regeln, welche die Reihenfolge von wartenden Aufträgen innerhalb der Warteschlange bestimmen.

Die Erhaltungsgesetze werden meist in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen formuliert unter Annahme, dass innerhalb solcher Klasse der akkumulierte Wert der unvollendeten Arbeit nicht von der zugrundegelegten Abfertigungsdisziplin abhängt [8]. Die Abfertigungsdisziplin heißt also konservativ, falls die Anforderung auf eine belegte Bedieneinheit trifft und in der ersten Position der Warteschlange wartet, bis sie zum Zeitpunkt t bedient wird.

In der Klasse von solcher Disziplinen gelten verschiedene Arten von Erhaltungsgesetze, wie z.B. die Erhaltungsgesetze der verbleibenden Aufenthaltszeit der Forderung oder Erhaltungsgesetze der Aufträge usw.. Es gibt auch die Erhaltungsgesetze, die verschiedene Charakteristiken verbinden. Dazu gehört auch das Littles Gesetz, welches einen Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Anzahl von Kunden in einem Wartesystem und der Verweildauer herleitet [6], [7]. Es sei hier noch bemerkt, dass das Littles Gesetz sowohl in der Klasse von nicht konservativen Disziplinen als auch für Netzwerke (wie z. B. die

*E-mail: mher.safarian@kit.edu, Schlossbezirk 12, 76131 Karlsruhe

Warteschlangen mehrere Schalter einer Bank oder Check-in-Schalter am Flughafen) aus Wartesystemen gilt.
In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung und Präzisierungen des Erhaltungsgesetzes von L. Kleinrock [5] für das Bedienungsmodell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Disziplin, wobei die Bedienungsunterbrechungen der Forderungen im Modell zugelassen werden.

2 Erhaltungsgesetz für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit den notwendigen Begriffsbildungen und anschließend befassen wir uns mit einer Verallgemeinerung des Erhaltungsgesetzes von L. Kleinrock für das Bedienungsmodell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Disziplinen unter Annahme, dass die Bedienungsunterbrechungen der Forderungen im Modell zugelassen sind.

§1 Littles Formeln und Regenerationsprozesse

Wir nehmen an, dass alle im folgenden betrachteten Prozesse auf einem festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert sind und betrachten die Funktion eines Bedienungsmodells auf dem Zeitintervall $[0;\infty]$. Die Forderungen werden nach der Reihenfolge ihres Eintreffens nummeriert, d.h. $1, 2, \ldots, r$. Die An- bzw. Abwesenheit der i-Forderung kann durch die Indikatorfunktion $\chi_i(t;\omega), \omega \in \Omega$

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \text{falls sich } i\text{-Forderung zum Zeitpunkt } t \text{ im Modell befindet} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

definiert werden, wobei $\chi_i(t;\omega)$ eine messbare Funktion von t $(t \geq 0)$ ist.
Der Zufallsprozess $\xi(t;\omega)$ $(t \geq 0)$ gibt die Anzahl der Forderungen zum Zeitpunkt t im Modell an. Der Zufallsprozess $v_i(\omega)(i \geq 1)$ entspricht der Aufenthaltszeit der i-Forderung im Modell (d.h. Wartezeit + Bedienungsdauer).

Wir nehmen weiterhin an, dass für alle $\omega \in \Omega$ die folgende Grenzwerte

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t;\omega)\mathrm{d}t, \\ a(\omega) &= \lim_{T\to\infty} N(T;\omega)|T, \\ v(\omega) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} v_n(\omega) \end{aligned} \tag{1}$$

existieren, wobei $N(t;\omega)$ die zufällige Anzahl der Forderungen darstellt, die während $[0;t]$ eingetroffen sind.

Theorem 1 (Littles-Formel)
Falls es ein $\omega \in \Omega$ gibt, sodass $a(\omega) < \infty$ und $v(\omega) < \infty$, dann gilt $\xi(\omega) < \infty$ und

$$\xi(\omega) = a(\omega) \cdot v(\omega).$$

Korollar 1
Falls der Grenzwert fast sicher existiert und außerdem $a(\omega) < \infty$ und $v(\omega) < \infty$ fast sicher gilt, dann folgt

$$\xi(\omega) = a(\omega) \cdot v(\omega) \quad f.s..$$

Die Existenz von solchen Grenzwerten ist üblich für Bedienungsprozesse. Dazu gehören zum Beispiel die Regenerationsprozesse.

Definition 1
Der Prozess $\xi(t;\omega)$ $\big(v_n(\omega)\big)$ heißt Regenerationsprozess, falls ein zufälliges Moment $S_r(\nu_r)$ existiert, so dass der Prozessverlauf eine identische Wahrscheinlichkeitskopie des genannten Prozesses darstellt, der im Zeitpunkt 0 beginnt.

Aus der Existenz des Momentes $S_r(\nu_r)$ folgt die Existenz einer ganzen Folge $\{S_n\}_{n\geq 1}$ $\big(\{\nu_n\}_{n\geq 1}\big)$ von Momenten, wobei $S_{n+1} - S_n(\nu_{n+1} - \nu_n)$ unabgängig und identisch verteilt sind. Mit anderen Worten, die Momente $\{S_n\}_{n\geq 1}$ $\big(\{\nu_n\}_{n\geq 1}\big)$ gestalten einen Erneuerungsprozess. Dabei wird $S_{n+1} - S_n(\nu_{n+1} - \nu_n)$ als Regenerationsperiode bezeichnet. Die Endlichkeit der Erwartungwerte von Regenereationsperioden sichert die Existenz der stationären Vereilungen für $\xi(t;\omega)$ und $v_n(\omega)$, wobei $t \to \infty$ und $n \to \infty$. Die Endlichkeit der Erwartungswerte der stationären Verteilungen zieht die Existenz von (1) für gegebenen Prozess nach sich.

Gegeben sei nun ein Regenerationsprozess $\xi(t;\omega)$, der eine abzählbare Menge von Zuständen $E_1, E_2, \ldots,$ hat.
Es sei $p_k(t)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit des E_k-Zustandes zum Zeitpunkt $t + s$ unter der Bedingung, so dass $S_r = S$ (wobei S_r ein Zufallsmoment ist).
Wir setzen $\mu = ES_r$ und nehmen an, dass $ES_r < +\infty$. Dann gilt [2]

Theorem 2 (Feller)
Angenommen $\lim_{t\to+\infty} p_k(t) = p_k$ existiert und $p_k \geq 0$ sowie $\sum p_k = 1$. Ist der Erwartungswert der Aufenthaltszeit des Prozesses $\xi(t;\omega)$ im Zustand E_k während einer Regenerationsperiode gleich μ_k, so gilt

$$p_k = \mu_k | \mu, \qquad \mu = \sum \mu_k.$$

Korollar 2
Aus der Existenz der stationären Verteilungen für $\xi(t;\omega)$ *und* $v(t;\omega)$ $(t \to \infty;\ n \to \infty)$ *und dem starken Gesetz der großen Zahlen für den Prozess* $N_k(t;\omega)$*, d.h.*

$$\frac{N(t;\omega)}{t} \to a \quad f.s. \quad t \to \infty,$$

folgt die Gültigkeit von Littles Formeln, d.h
1) Es gilt

$$L = aV, \tag{2}$$

wobei L *und* V *die endlichen Erwartungswerten der stationären Verteilungen der Prozesse* $\xi(t;\omega)$ *und* $v_n(\omega)$ *sind.*

2) Ist L_r *der Erwarungswert der stationären Verteilung der Forderungsanzahl (gegebene Typ an der Reihe), so gilt*

$$L_r = a\omega \implies L_r = L - \rho m, \tag{3}$$

wobei $V = \omega + \beta_r$, $\quad L = a\omega + \rho m$ *und* ω *der stationäre Erwartungswert der Wartezeit der Forderung ist.*

Wir benötigen ferner das Theorem von Kolmogorov-Prochorov[1]:

Theorem 3 (Kolmogorov-Prochorov)
Es sei $S_\nu = \xi_1 + \ldots + \xi_\nu$ *eine Summe einer zufälligen Anzahl von Zufallsgrößen. Die ganzzahlige nichtnegative Zufallsgröße* ν *sei von der Zukunft unabhängig. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p\ (\nu \geq k)\ E|\xi_k| < \infty,$$

so folgt

$$ES_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p\ (\nu \geq k)\ E\xi_k.$$

§2 Das Erhaltungsgesetz für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen

Betrachten wir das Bedienungsmodell, welches nach Kendallsche Notation durch $M_r|G_r|1|\infty$ bezeichnet wird.
In das einkanälige Bedienungssystem treffen die unabhängigen Poisson-Ströme 1-Forderungen, 2-Forderungen, ..., r-Forderungen mit dem entsprechenden Parametern $a_1, \ldots, a_r$ ein. Die

Bedienungsdauer der Forderungen sind in ihrer Gesamtheit unabhängig und sind insbesondere unabhängig vom Eintreffensprozess, darüber hinaus sind für i-Forderungen ($i = 1, \ldots, r$) die Verteilungsfunktionen durch $B_i(t), B_i(+0) = 0$ gegeben.
Wir bestimmen nun die ersten zwei Momente der angegebenen Verteilungen (das reicht völlig für unsere Ziele aus), d.h.

$$\beta_{ij} = \int_0^\infty t^i \mathrm{d}\beta_i(t) \ , \qquad (i = 1, \ldots, r \ ; \ j = 1, 2).$$

Wir setzen nun

$$\rho_i = a_i \beta_{i1} \ , \quad R = \sum_{i=1}^{r} \rho_i \ , \quad W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} a_i \beta_{i2}.$$

Dabei sind die Größe R die Auslastung des Modells oder die mittlere Zeit, die für Bedienung der Forderungen (die in der Zeiteinheit auftreten) verbraucht wird und die Größe W_0 die mittlere stationäre Vorbedienungszeit der Forderung, die am Gerät anliegt.
Die Ungleichheit $R < 1$ ist die Stationaritätsvoraussetzung für das beschriebene Modell. Ist $R < 1$, so existieren die stationären mittleren Erwartungszeiten $W_i \quad (i = 1, \ldots, r)$, d.h. das Zeitintervall von ihrem Eintrittsmoment in das Modell bis zum Moment ihres ersten Eintreffens am Gerät.
Bezeichnen wir durch U_i die stationäre mottler Aufenthaltszeit der i-Forderung im Modell, d.h. ein Zeitabschnitt, der mit dem Eintrittsmoment in das Modell beginnt und endet, wenn die i-Forderung das Modell verlässt.

In der Literatur [4], [5] ist das Erhaltungsgesetz von L. Kleinrock für $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Disziplin ohne Unterbrechungen wohl bekannt:

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k = \frac{R W_0}{r - R} \ , \tag{4}$$

wobei $R < 1$ und im Inneren jedes Eingangsstromes die Bedienungsdisziplin FIFO („first in - first out “) herrscht.
Wenn die Unterbrechungen zulässig sind, so kann man zwei Definitionen für die Wartezeiten geben, die im Modell, wo die Unterbrechungen nicht zulässig sind, zusammenfallen.
Es seien $W_k, (k = 1, \ldots, r)$ der stationäre Erwartungswert der Wartezeit der k-Forderung bis zum Moment ihres ersten Eintreffens im Gerät und $V_k, (k = 1, \ldots, r)$ der stationäre Erwartungswert der Summe der Wartezeiten der k-Forderungen aus U_k, wie sie sich in der Reihe befinden.

Desweiteren bezeichnen wir durch $H_k, (k = 1, \dots, r)$ den Erwartungswert des Zeitintervalls, das mit dem Eintrittsmoment der k-Forderung in das Gerät beginnt und endet, wenn sie das Modell verlässt.

Im Ergebnis erhalten wir, dass

$$U_k = W_k + H_k = V_k + \beta_{k1}, \qquad (k = 1, \dots, r).$$

Wir behaupten nun Folgendes.

Theorem 4
In der Klasse der konservativen Disziplin für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ gilt das folgende Erhaltungsgesetz

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k + \sum_{k=1}^{r} a_k \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} H_k = \frac{W_0}{1-R} \ , \tag{5}$$

wobei $R < 1$ und innerhalb jedes Stroms FIFO-Disziplin vorausgesetzt wird.

Beweis. Zunächst sei hier bemerkt, dass bei den obengenannten Disziplinen zu einem beliebigen Zeitpunkt im Modell aus jedem Strom nicht mehr als eine unterbrochene Forderung existiert.
Wir bezeichnen nun durch $N_k(t)$ die zufällige Anzahl der k-Forderungen im Modell zum Zeitpunkt t, die noch nicht bedient wurden und durch $T_k(t)$ die zufällige Anzahl der k-Forderungen zum Zeitpunkt t, die am Gerät anlagen, aber noch nicht voll bedient sind.
Die Größe $N_k(t) + T_k(t)$ ist dann eine zufällige Anzahl der k-Forderung im Modell zum Zeitpunkt t.

Es sei

$$L_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Bedienung zum Zeitpunkt t erfolgt.} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Prozesse $N_k(t)$, $T_k(t)$ und $L_k(t) \quad (k = 1, \dots, r)$ sind Regnerationsprozesse mit einer zählbaren Anzahl von Zuständen.
Die Regenerationsperiode stellt die Summe aus den Intervallen der freien Zustände des Geräts und der Ausführungsperiode dar.
Der Erwartungswert der Regenerationsperiode ist gleich

$$\frac{1}{\sigma} + \pi_{r1} = \frac{1}{\sigma} + \frac{R}{r-R} \quad \text{mit } R < 1,$$

wobei

$$\sigma = a_1, \ldots, a_r,$$

und π_{r1} der Erwarungswert der Ausführungsperiode im Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Disziplin ist.

Wendet man das Theorem von Feller für diese Prozesse an, so gilt, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 (weil $N_k(t) \geq 0$, $T_k(t) \geq 0$, $L_k(t) \geq 0$) die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\infty} N_k(t) = N_k; \quad \lim_{t\to\infty} T_k(t) = T_k; \quad \lim_{t\to\infty} L_k(t) = L_k \quad (k = 1, \ldots, r),$$

existieren, wobei

$$p\{L_k = 1\} = p_k > 0 \text{ ist.} \tag{6}$$

Aus der Ungleichung

$$p\{T_k(t) = 1\} \geq p\{L_k(t) = 1\}$$

folgt, dass

$$p\{T_k = 1\} \geq \rho_k > 0, \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{7}$$

Es seien x_{ik} die zufällige Bedienungsdauer der i-ten k-Forderung aus der Anzahl $N_k(t)$ und $J_k(t)$ die bedingte verbleibende Bedienungszeit der k-Forderung zum Zeitpunkt t unter der Bedingung, dass $T_k(t) = 1$.

Aus der Zeitachse abstrahieren wir die Intervalle weg, in denen keine k-Forderungen anwesend waren. Weiterhin betrachten wir die modi fizierte (verdichtete) Zeitachse. Jeder Zeitpunkt t auf der Zeitachse entspricht einem Moment bzw. Punkt $L_k(t) = u$ (wobei $L_k(t)$ ein Zufallsprozess ist) auf der modifizierten (verdichteten) Zeitachse. Auf der modifizierten (verdichteten) Zeitachse abstrahieren wir noch einmal die Intervalle weg, in denen keine k-Forderung eingetroffen (bzw. bedient) ist. Danach schaffen wir eine neue Modifizierung (Verdichtung) der modifizierten Zeitachse. Jeder Moment der modifizierten Zeitachse entspricht einem Punkt $\xi_k(u)$ auf der doppelt - modifizierten (verdichteten) Zeitachse.

Aus (6) und (7) folgt mit der Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{t\to+\infty} L_k(t) = +\infty; \qquad \lim_{t\to+\infty} \xi_k\big(L_k(t)\big) = +\infty. \tag{8}$$

Die Größe $J_k(t)$ stellt sich als die verbleibende Erneuerungszeit zum Zeitpunkt $\xi_k\big(L_k(t)\big)$ auf der doppelt-modifizierten Zeitachse des Erneuerungsprozesses $\big\{\xi_k^{(i)}\big\}$ dar, wobei $\xi_k^{(i)}$ die Verteilungsfunktion $B_k(t)$ ist.

Daraus folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{t \to +\infty} J_k(t) = \lim_{\xi_k\left(L_k(t)\right) \to \infty} J_k(t) = J_k,$$

wobei

$$EJ_k = \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{9}$$

Bezeichnen wir die durch $\omega(t)$ angesammelte und unausgeführte Arbeit zum Zeitpunkt t im Modell $M_r|G_r|1|\infty$. Diese Größe ist invariant in der Klasse der konservativen Disziplin. Der Erwartungswert $E(\omega)$ ihres Grenzwertes bei $t \to +\infty$ kann aus (4) abgeleitet werden (dabei muss man alle Forderungen nach der FIFO-Disziplin bedienen lassen), vorausgesetzt $E\omega = W_1 = \ldots = W_r$, dann ergibt sich

$$E\omega = W_0|(1 - R). \tag{10}$$

Für $\omega(t)$ gilt dann die folgende Gleichung

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{N_k(t)} x_{ik} + \begin{cases} J_k(t), & \text{falls } T_k(t) = 1 \\ 0, & \text{falls } T_k(t) = 0 \end{cases} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$E\omega(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(E \sum_{i=1}^{N_k(t)} x_{ik} + p\big\{T_k(t) = 1\big\} \cdot EJ_k(t) \right). \tag{11}$$

Da die Zufallsgröße $N_k(t)$ nicht von der Zukunft abhängt (d.h. sie wird vollständig durch den Prozessverlauf des Modells in dem Zeitabschnitt $[0; t]$ bestimmt) und die Zufallsgrößen $x_{ik} \quad (i \geq 1)$ unabghängige Zufallsgrößen sind, gilt für x_{ik} das Theorem von Kolmogorov-Prochorov.

Das bedeutet, für x_{ik} gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{N_k(t)} x_{ik} = EN_k(t) \cdot \beta_{k1}.$$

Andererseits ergibt sich aus (9), (10) und $p\big\{T_k(t) = 1\big\} = ET_k(t)$ analog (11) folgender Grenzwert für $t \to +\infty$:

$$\frac{W_0}{1 - R} = \sum_{k=1}^{r} \beta_{k1} EN_k + \sum_{k=1}^{r} \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} ET_k. \tag{12}$$

Nach den Littles-Formeln (Korollar 2) ist

$$EN_k = a_k W_k; \quad E(N_k + T_k) = a_k U_k = a_k W_k + a_k H_k. \tag{13}$$

Durch Einsetzen von (13) in (12) erhalten wir also (5) oder

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k + \sum_{k=1}^{r} a_k \frac{\beta_{k2}}{2\beta_{k1}} H_k = \frac{W_0}{1-R}.$$

Das Theorem ist damit bewiesen. □

Korollar 3

Falls H_k gleich β_{k1} ist, dann geht das Erhaltungsgesetz (5) in das Erhaltungsgesetz von L. Kleinrock (4) über. (d.h. die Unterbrechungen sind nicht zulässig).

Korollar 4

Sind die Bedienungsdauern

$$\beta_{k1} = \beta_{k2}/2\beta_{k1}$$

exponentiell verteilt, so folgt aus (5), dass

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k (W_k + H_k) = \sum_{k=1}^{r} \rho_k U_k - \frac{W_0}{1-R} \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{r} \rho_k v_k = \frac{RW_0}{1-R}. \tag{14}$$

Zur Illustration der Anwendung der Erhaltungsgesetze bei der Berechnung der Größen $W_k \quad (k = 1, \ldots, r)$ im Falle der konkreten Bedienungsdisziplin betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel.

Für die Disziplinen der Absolutenprioritäten des Modells $M_r|G_r|1|\infty$ gilt

$$W_k = \frac{p_{k2}}{(1-R_{k-1})(1-R_k)}\ , \quad H_k = \frac{\beta_{k1}}{1-R_{k-1}}\ ,$$

wobei $\rho_{k2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{r} a_i \beta_{i2}$.

Unser Ziel besteht darin, die Gültigkeit unseres Erhaltungsgesetzes nachzuweisen, d.h.

$$\frac{W_0}{1-R} = \sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k + \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k \beta_{k2}}{2} \cdot \frac{1}{1-R_{k-1}}\ . \tag{15}$$

Aus $\rho_k = (1-R_{k-1}) - (1-R_k)$ folgt

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k = \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_k \rho_{k2}}{(1-R_{k-1})(1-R_k)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_{k2}}{1-R_k} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_{k2}}{1-R_{k-1}} =$$
$$= \frac{W_0}{1-R} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_{k-12}}{1-R_{k-1}} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_{k2}}{1-R_{k-1}} = \frac{W_0}{1-R} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\rho_{k2} - \rho_{k-12}}{1-R_{k-1}}$$
$$\Longrightarrow (15).$$

3 Erhaltungsgesetze für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in einigen Unterklassen der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen

Die Klasse der konservativen Disziplinen ist ziemlich breit, um für sie quantitativ aussagekräftige Resultate zu erhalten. Daher ist es zweckmäßig, ihre Unterklassen in Betracht zu ziehen. In diesem Abschnitt werden die Erhaltungsgesetze für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in zwei wichtigen Unterklassen der Klasse der konservativen Disziplinen neu definiert.

§1 Disziplinen mit zeitlich kategorischen Absolutenprioritäten

Wir betrachten im folgenden das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ mit zeitlich kategorischen Absolutenprioritäten [3], [8].

Definition 2
Die Zeitachse ist unterteilt in Abschnitte mit der Länge $T > 0,$ wobei $[0;T], [T;2T], \ldots$ als Quanten bezeichnet werden. Die Forderungen, die auf verschiedenen Quanten eintreffen, werden nach der FIFO-Disziplin bedient. Diejenigen, die auf gleichen Quanten eintreffen, werden nach der Disziplin der Absolutenprioritäten bedient.
Die Disziplin der Absolutenprioritäten unterscheidet sich von der Disziplin der Relativenprioritäten dadurch, dass bei den der absoluten Priorität die i-Forderung $1 \le i < j \le r$ mit absoluter Priorität ausgeführt wird und die Bedienung der j-Forderung unterbrochen und nach Bedienung der i-Forderung fortgesetzt wird.

Lemma 1. *Es sei $R > 1$. Für die Disziplinen mit zeitlich-kategorischen Absolutenprioritäten im Modell $M_r|G_r|1|\infty$ gilt die Gleichung*

$$H_k = \beta_{k1} + \frac{R_{k-1}}{T}\int_0^T (T-u)P\{\pi_{k-1}(\beta_k) \ge u\}\mathrm{d}u, \tag{16}$$

wobei β_k die zufällige Bedienungsdauer der k-Forderung ist.

Beweis. Bezeichnen wir durch $h_k(\tau) \quad (k = 1, \ldots, r; 0 \le \tau \le T)$ die bedingte Aufenthaltszeit der k-Forderung im Gerät, wobei τ die Dauer bis zum ersten Eintreffenszeitpunkt ist. Wir setzen

$$H_k(\tau) = Eh_k(\tau)\ .$$

Wir haben für $h_k(\tau)$, dass

$$h_k(\tau) \stackrel{d}{=} \begin{cases} \pi_{k-1}(\beta_k), & \text{falls } \pi_{k-1}(\beta_k) < T-\tau \\ \beta_k + b_{k-1}(T-\tau), & \text{falls } \pi_{k-1}(\beta_k) \ge T-\tau\ , \end{cases} \tag{17}$$

wobei β_k die zufällige Bedienungsdauer der k-Forderung ist und $b_k(t)$ die Summe der Bedienungsdauer der $1,\ldots,k$ - Forderungen, die während t eintreffen, bezeichnet.

Es ist leicht zu sehen, dass

$$H_k(\tau) = \beta_{k1} + R_{k-1} \int_0^{T-\tau} P\{h_k(\tau) \geq u\} \mathrm{d}u. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung von (17) schließen wir

$$P\{h_k(\tau) \geq u\} = P\{\pi_{k-1}(\beta_k) \geq u\}, \quad u < T - \tau \ .$$

Daraus folgt, dass (18) anders geschrieben werden kann

$$H_k(\tau) = \beta_{k1} + R_{k-1} \int_0^{T-\tau} P\{\pi_{k-1}(\beta_k) \geq u\} \mathrm{d}u$$

und

$$H_k = \frac{1}{T} \int_0^T H_k(\tau) \mathrm{d}\tau = \beta_{k1} + \left(\frac{R_{k-1}}{T}\right) \cdot \int_0^T (T-u) \cdot P\{\pi_{k-1}(\beta_k) \geq u\} \mathrm{d}u \ . \tag{19}$$

Somit ist das Lemma bewiesen. □

Theorem 5

Unter den Bedingungen des Lemmas 1 gilt folgendes Erhaltungsgesetz

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k + \sum_{k=1}^{r} \frac{R_{k-1} a_k \beta_{k2}}{2\beta_{k1} T} \int_0^T (T-u) P\{\pi_{k-1}(\beta_k) \geq u\} \mathrm{d}u = \frac{RW_0}{r - R} \ . \tag{20}$$

Beweis. Es folgt direkt aus Theorem 4 und Lemma 1. □

§2 Lineare Parametrische Abfertigungsdisziplinen

Wir betrachten im Folgenden das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ mit parametrischen Disziplinen [7].

Definition 3

Die k-Forderung trifft ins Modell zum Zeitpunkt τ ein und bleibt darin bis zum Zeitpunkt t. Zum Zeitpunkt t $(t > \tau)$ erhält die k-Forderung die Priorität $q_k(t) = b_k(t - \tau)$, wobei

$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_r > 0$. Zu einem beliebigen Zeitpunkt befindet sich im Gerät die Forderung (von allen anwesenden Forderungen im Modell), die Höchste Priorität besitzt.
Also, die Bedienungsunterbrechungen sind zugelassen, und die parametrische Disziplin heißt linear parametrisch mit Bedienungsunterbrechungen.
Diese Definition wurde von L. Kleinrock [6], [7] eingeführt. Für den Fall, dass die Bedienungsdauern der Forderungen exponentiell verteilt sind, von ihm vollständig erforscht. Die Parametrische Disziplin plus das Modell gibt ein parametrisches Modell an.

Lemma 2. *Bei $R > 1$ für lineare parametrischen Disziplinen gilt die Gleichung*

$$H_k = \frac{\beta_{k1}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \rho_i \Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big)} \quad . \tag{21}$$

Als Parameter sind hier $b_1, \ldots, b_r$ zugrundegelegt.

Beweis. Bezeichnen wir durch $H_k(\alpha) \quad (k = 1, \ldots, r)$ die bedingte mittlere Aufenthaltszeit der k-Forderung im Gerät unter der Bedingung, dass im Moment ihres ersten Eintreffens am Gerät die k-Forderung die Priorität α erhält. Die entsprechende Situation ist im Bild abgebildet.

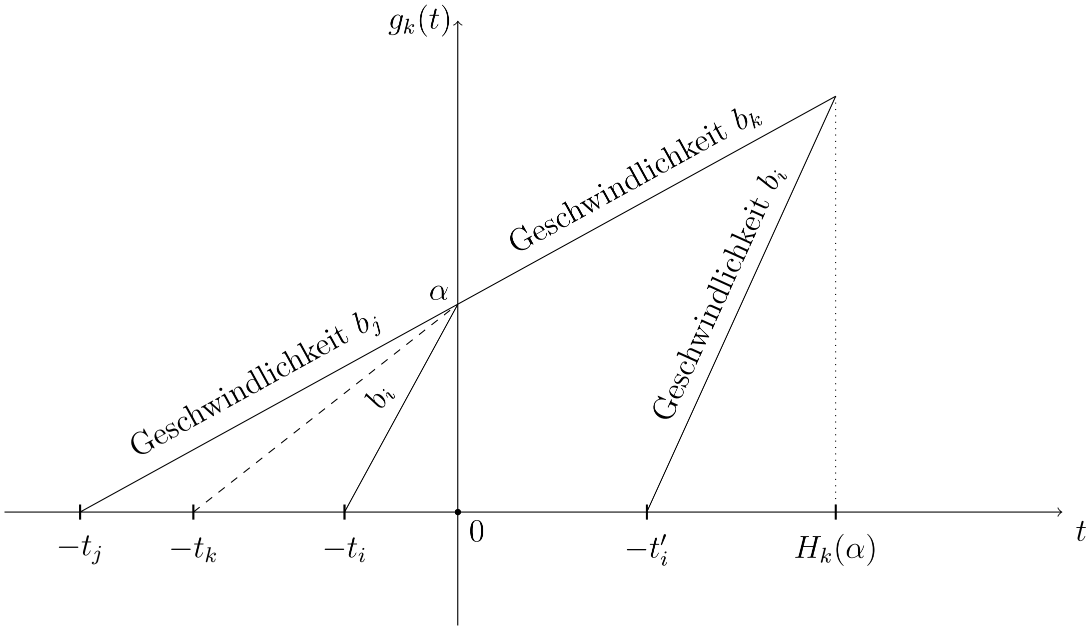


Figure 1

Der Moment des ersten Eintreffens der k-Forderung am Gerät wird hier auf den Zeitpunkt 0 gelegt.
Es sei $i < k$. Die Größen $(-t_i)$ und $t_i' \quad (i = 1, \ldots, k-1)$ können aus den Prioritätsgleichungen bestimmt werden, d.h.

$$b_i t_i = \alpha \qquad \text{und} \qquad b_i\big(H_k(\alpha) - t_i'\big) = \alpha + b_k H_k(\alpha)$$
$$\Longrightarrow\ t_i = \frac{\alpha}{b_i} \qquad \text{und} \qquad t_i' = -\frac{\alpha}{b_i} + \Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big) H_k(\alpha)$$
$$\Longrightarrow\ t_i + t_i' = \Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big) H_k(\alpha)\ . \tag{22}$$

Das Zeitintervall $(-t_k; 0)$ ist die Überbelastungspanne des Geräts, sonst wäre die gegebene k-Forderung am Gerät eingetroffen. Diese Zeitspanne besteht aus der Bedienungsdauer der j-Forderungen ($j = k+1, \dots, 1$), welche in das Modell bis zum Zeitpunkt $(-t_k)$ eingetroffen sind und i-Forderungen ($i = 1, \dots, k-1$), die bis zum Zeitpunkt $(-t_i)$ eingetroffen sind.
Die Bedienung aller j-Forderungen soll bis zum Zeitpunkt 0 beendet werden, weil diese bis zum Zeitpunkt 0 die allerhöchsten Prioritäten erzeugen als α. Die nach dem Moment $(-t_j)$ eintreffenden j-Forderungen haben zu einem beliebigen Zeitpunkt niedrigere Prioritäten als die gegebenen k-Forderungen, die nicht die Größe $H_k(\alpha)$ beeinflussen. Die Bedienung aller i-Forderungen ($i = 1, \dots, k-1$) endet zum Zeitpunkt 0.
Daraus folgt, dass auf $H_k(\alpha)$ nur die i-Forderungen ($i = 1, \dots, k-1$) einwirken, die während $(-t_i,\ t_i')$ im Modell eintreffen. Sie wurden alle vor der k-Forderung im Zeitintervall $(0; H_k(\alpha))$ bedient.
Die mittlere Anzahl solcher i-Forderungen (22) nach ist gleich

$$a_i\Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big) \cdot H_k(\alpha)\ ,$$

und die summierte mittlere Bedienungszeit ist gleich

$$\rho_i\Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big) \cdot H_k(\alpha)\ .$$

$H_k(\alpha)$ besteht aus den summierten Erwartungswerten und aus den mittleren Bedienungsdauern gegebener k-Forderungen.
Daraus ergibt sich, dass

$$H_k(\alpha) = \beta_{k1} + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i\Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big) H_k(\alpha)$$
$$\Longrightarrow\ H_k = H_k(\alpha) = \frac{\beta_{k1}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \rho_i\Big(1 - \frac{b_k}{b_i}\Big)}\ , \quad (k = 1, \dots, r)\ .$$

Mit anderen Worten, $H_k(\alpha)$ hängt nicht von α ab.
Somit ist das Theorem bewiesen. $\square$

Theorem 6

Unter den Bedingungen des Lemmas 2 gilt das folgende Erhaltungsgesetz

$$\sum_{k=1}^{r} \rho_k W_k = \frac{W_0}{1-R} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \frac{a_k \beta_{k2}}{1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \rho_i \left(1 - \frac{b_k}{b_i}\right)}. \tag{23}$$

Beweis. Es ergibt sich aus Theorem 4 und Lemma 2. □

Literatur

[1] Borovkov A.A., Probability Theory. Springer, 2013.

[2] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, 1-2 , Wiley, 1971.

[3] Gnedenko B.V., Danielyan E.A., Dimitrov B.N, Klimov G.P., Matveev V.F., Priority Queueing Systems. Moscow State University Press, Moscow, 1973.

[4] J. Gross, J.F. Shortle, J. M. Thompson, C.M. Harris, Fundamentals of Queueing Theory, Wiley, 2008.

[5] L. Kleinrock, Queueing Systems, Wiley Interscience, 1975., vol. I: Theory.

[6] L. Kleinrock and R. Gail, Queueing Systems: Problems and Solutions, John Wiley and Sons, 1996.

[7] L. Kleinrock, Communication Nets; Stochastic Message Flow and Delay, New York: McGraw-Hill Book Company, Dover Publications, 2007.

[8] Takagi H. Queueing Analysis. Volume 1: Vacation and Priority Systems. North-Hodland, Elsevier Science Publ., 1991.

Working Paper Series in Economics

recent issues

No. 58 *Mher Safarian:* Erhaltungsgesetze für das Modell $M_r|G_r|1|\infty$ in der Klasse der konservativen Abfertigungsdisziplinen, July 2014

No. 57 *Marten Hillebrand:* Existence of bubbly equilibria in overlapping generations models with stochastic production, June 2014

No. 56 *Mher Safarian:* Hedging options including transaction costs in incomplete markets, April 2014

No. 55 *Aidas Masiliunas, Friederike Mengel, J. Philipp Reiss:* Behavioral variation in Tullock contests, February 2014

No. 54 *Antje Schimke:* Aging workforce and firm growth in the context of „extreme" employment growth events, January 2014

No. 53 *Florian Kreuchauff and Nina Teichert:* Nanotechnology as general purpose technology, January 2014

No. 52 *Mher Safarian:* On portfolio risk estimation, December 2013

No. 51 *Klaus Nehring, Marcus Pivato, Clemens Puppe:* The Condorcet set: majority voting over interconnected propositions, December 2013

No. 50 *Klaus Nehring, Marcus Pivato, Clemens Puppe:* Unanimity overruled: majority voting and the burden of history, December 2013

No. 49 *Andranik S. Tangian:* Decision making in politics and economics: 5. 2013 election to German Bundestag and direct democracy, December 2013

No. 48 *Marten Hillebrand, Tomoo Kikuchi, Masaya Sakuragawa:* Bubbles and crowding-in of capital via a savings glut, November 2013

No. 47 *Dominik Rothenhäusler, Nikolaus Schweizer, Nora Szech:* Institutions, shared guilt, and moral transgression, October 2013