

# **Analyse und Entwurf von Beobachtern mit unbekanntem Signalen und Parametern**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
genehmigte

**Dissertation**

von

DIPL.-ING. JAN PHILIP IRLE

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 2016  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. G. Bretthauer  
Korreferent: Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. L. Gröll  
Prof. Dr.-Ing. P. Gratzfeld



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung –  
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz  
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

*Soli Deo Gloria*



# Vorwort

## *Vice versa*

*Ein Hase sitzt auf einer Wiese,  
des Glaubens, niemand sähe diese.*

*Doch im Besitze eines Zeißes,  
betrachtet voll gehaltenen Fleißes  
vom vis-a-vis gelegnen Berg  
ein Mensch den kleinen Löffelzweg.*

*Ihn aber blickt hinwiederum  
ein Gott von fern an, mild und stumm.*

*Christian Morgenstern*

Der Beobachter hat – wie in dem Gedicht von Christian Morgenstern beschrieben – die Aufgabe, Informationen zu sammeln, ohne selbst am Geschehen teilzunehmen. Die Motivation zum Entwurf des regelungstechnischen Beobachters liegt in der Zustandsrekonstruktion eines Systems basierend auf den Ein- und Ausgangssignalen, die ohne Beeinflussung des Systems erfolgt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse und dem Entwurf von Beobachtern bei unbekanntem Parametern und bei unbekanntem Eingängen. Sie entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Angewandte Informatik und Automatisierungstechnik (AIA) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Lutz Gröll für die intensive Betreuung, all die produktiven Diskussionen, kritischen Durchsichten, endlosen Stunden mit Papier und Bleistift, sein umfangreiches Fachwissen und so manchen wertvollen Literaturtipp.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Georg Bretthauer danke ich für die Betreuung dieser Arbeit und die angenehme Arbeitsatmosphäre am Institut, die stets viel Freiraum für die Verwirklichung eigener Ideen gelassen hat.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Gratzfeld bedanke ich mich für die Übernahme des Korreferats.

Große Dankbarkeit empfinde ich gegenüber meinen Eltern für ihre unermüdliche Unterstützung des Dissertationsvorhabens und gegenüber meiner Frau für die Ermutigung während der sich ständig verlängernden Zielgeraden dieser Arbeit.

Tübingen, im August 2016

Jan Philip Irlé

# Symbolverzeichnis

## Notationsvereinbarungen

Kleinbuchstabe, kursiv: $a$	Vektoren
Großbuchstabe, kursiv: $A$	Matrizen
$\hat{a}$	rekonstruierte Größen
$\tilde{a}$	Fehlergrößen
$\bar{a}$	Transformierte Größen
$x_d(t)$	Solltrajektorie
$\mathcal{N}(A)$	Nullraum der Matrix $A$
$\mathcal{R}(A)$	Bildraum der Matrix $A$
$\mathcal{X}$	Zustandsmannigfaltigkeit
$0^+$	rechtsseitiger Grenzwert von 0
$\mathcal{R}_x$	Ruhelagenmannigfaltigkeit bzgl. $x$

## Operatoren und Funktionen

$y'$	Ableitung nach Bogenlänge
$L_f h(x, u)$	LIE-Ableitung
$P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$	Projektor einer schiefen Projektion in den Raum $\mathcal{L}$ entlang des Raums $\mathcal{M}$
$P_{\mathcal{M}}$	Projektor in den Raum $\mathcal{M}$
$\text{sgn}(\cdot)$	Vorzeichen: $-1$ für $x < 0$ , $0$ für $x = 0$ , $1$ für $x > 0$
$1(t)$	Sprungfunktion
$\nabla(f)$	Gradient der Funktion $f$
$\otimes$	KRONECKER-Produkt

## Matrizen und Vektoren

$\det(A)$	Determinante der Matrix $A$
$A^+$	MOORE-PENROSE-Inverse von $A$
$\text{adj}(A)$	Adjungierte der Matrix $A$
$\text{diag}(a)$	Diagonalmatrix mit Vektorelementen von $a$
Jordan	JORDAN-Matrix
$\text{Spek}(A)$	Spektrum der Matrix $A$
$\text{Rang}(A)$	Rang der Matrix $A$
$\text{dim}(A)$	Dimension der Matrix $A$
$\text{vec}(A)$	Vektorisierung der Matrix $A$
$\mathcal{O}$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathcal{C}$	Steuerbarkeitsmatrix
$1_n$	1-Vektor der Dimension $n$
$0_p$	0-Vektor der Dimension $p$
$e_i$	$i$ -te kanonische Basisvektor
$E_n$	Matrix mit $\begin{bmatrix} 0_{n-1}^T & 0 \\ I_{n-1} & 0_{n-1} \end{bmatrix}$
$I_n$	Einheitsmatrix
$A \succ B$	äquivalent: $A - B$ positiv definit
$A \succeq B$	äquivalent: $A - B$ positiv semidefinit (LÖWNER-Halbordnung)
$\lambda_{\min}(A)$	Kleinster Eigenwert der Matrix $A$ bei reellen Eigenwerten



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Einordnung der Arbeit . . . . .	1
1.2 Entwicklungsstand . . . . .	3
1.3 Ziele und Aufgaben . . . . .	7
<b>2 Einführung in die Beobachtertheorie</b>	<b>11</b>
2.1 Einleitende Beispiele . . . . .	12
2.2 Diskussion bestehender Beobachterdefinitionen . . . . .	15
2.3 Voraussetzungen für den Beobachterentwurf . . . . .	21
2.3.1 Grundlegende Konzepte für LTI-Systeme . . . . .	22
2.3.2 Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Systemen . . . . .	24
2.3.3 Artverwandte Konzepte . . . . .	28
2.4 Abgrenzung zu artverwandten Konzepten . . . . .	32
2.4.1 Beobachter mit unbekanntem Signalen . . . . .	33
2.4.2 Filter . . . . .	39
2.4.3 Beobachter für unbekannte Parameter: Adaptiver Beobachter und Verbundbeobachter . . . . .	40

2.5	Klassifikation . . . . .	42
2.5.1	Klassifikation nach Dimension . . . . .	43
2.5.2	Klassifikation nach Korrekturterm . . . . .	44
2.5.3	Klassifikation nach Einstellbarkeit . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Entwurfsverfahren</b>	<b>49</b>
3.1	Vollständige Beobachter für lineare Systeme . . . . .	50
3.1.1	LUENBERGER-Beobachter für LTI-Systeme . . . . .	51
3.1.2	LUENBERGER-Beobachter für LTV-Systeme . . . . .	55
3.1.3	KALMAN-BUCY-Beobachter . . . . .	58
3.1.4	Beobachter mit endlicher Einstellzeit . . . . .	62
3.2	Reduzierter Beobachter für lineare Systeme . . . . .	67
3.2.1	Entwurfsverfahren nach BURMEISTER . . . . .	68
3.2.2	Entwurfsverfahren nach CUMMING . . . . .	71
3.2.3	Abbildungsbeobachter ohne vollständige Zustandsrekonstruktion . . . . .	74
3.3	Beobachterentwurf mit Linearisierungstechniken . . . . .	79
3.3.1	Diskussion des Einzugsbereichs des Arbeitspunktbeobachters . . . . .	83
3.3.2	Pseudolinearisierungs-Tracker . . . . .	86
3.3.3	Optimierungsbasierter Beobachter . . . . .	89
3.3.4	Vergleich der Beobachter für das Ball-Balken-System . . .	91
<b>4</b>	<b>Beobachter mit unbekanntem Signalen</b>	<b>103</b>
4.1	Beobachter bei unbekanntem Signalen . . . . .	104
4.1.1	Systemumformulierung bei unbekanntem Signal in der Ausgangsgleichung . . . . .	105
4.1.2	Systemumformulierung bei unbekanntem Signal in der Systemdifferentialgleichung . . . . .	106
4.1.3	Anwendung von Beobachtern bei unbekanntem Signal . .	111
4.2	Beobachter für unbekannte Signale . . . . .	115
4.3	Beobachter für Ableitungen . . . . .	120

---

4.4	Zugänge zur adaptiven Störunterdrückungsregelung . . . . .	127
4.4.1	Modellfreie Regelung . . . . .	128
4.4.2	Aktive Störunterdrückungsregelung . . . . .	130
4.4.3	Nichtlinearitätskompensierender Zustandsregler . . . . .	132
4.4.4	Anwendungen . . . . .	133
4.4.5	Vergleichende Betrachtung der Verfahren . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Beobachter mit unbekanntem Parametern</b>	<b>141</b>
5.1	Identifikationsverfahren . . . . .	143
5.1.1	Übersicht über Algebraisierungsmethoden zur Bildung von Signalableitungen . . . . .	144
5.1.2	Übersicht über Identifikationsverfahren . . . . .	148
5.1.3	Diskussion der Gleichungsfehlerbildung und Vergleich der Verfahren . . . . .	152
5.1.4	Erweiterung der Identifikationsverfahren um Berücksichtigung unbekannter Anfangswerte . . . . .	157
5.1.5	Hinweise zur Wahl der Designparameter für die Identifikation . . . . .	159
5.2	Adaptive Beobachter . . . . .	163
5.2.1	Adaptiver Beobachter mit LUENBERGER-Beobachteransatz	165
5.2.2	Modifizierter Adaptiver Beobachter nach KREISSELMEI- ER . . . . .	167
5.2.3	Neuformulierung des Adaptiven Beobachters mit parallelen Filtern . . . . .	174
5.2.4	Bewertung der normalformbasierten adaptiven Beobach- terzugänge . . . . .	180
5.3	Verbundbeobachter . . . . .	182
5.3.1	Parameterbeobachter als Spezialfall . . . . .	185
5.3.2	Verbundbeobachter nach FRIEDLAND . . . . .	187
5.4	Vergleichendes Beispiel . . . . .	188
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>195</b>

**Anhang** 205

**Literaturverzeichnis** 207

# Tabellenverzeichnis

1.1	Übersicht über Rekonstruktionsverfahren bei unterschiedlichen Rahmenbedingungen . . . . .	2
2.1	Übersicht der gängigen Beobachtbarkeitskriterien . . . . .	22
2.2	Übersicht ausgewählter artverwandter Konzepte . . . . .	31
2.3	Einteilung verschiedener Rekonstruktionsverfahren . . . . .	32
2.4	Klassifikation der Beobachter nach Zustandsanzahl . . . . .	43
2.5	Übersicht über Korrekturterme . . . . .	45
3.1	Übersicht über TAYLOR-basierte Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme . . . . .	80
3.2	Übersicht über transformationsbasierte Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme . . . . .	81
4.1	Übersicht der Verfahren zur adaptiven Störunterdrückung . . . . .	128
5.1	Übersicht über Filter zur Ersatzsignalbildung . . . . .	147
5.2	Übersicht Adaptionsverfahren . . . . .	151
5.3	Übersicht über die Beeinflussung von Startwerten bei Least-Squares-Verfahren . . . . .	160



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Gradientenplot und Phasenportrait von Beispiel 2.4 . . . . .	17
2.2	Einschwingverhalten von Beobachter und System (Beispiel 2.5) . . . . .	19
2.3	Blockdiagramm der System- und Beobachterkonfiguration . . . . .	20
2.4	Mögliche Stellen, an denen unbekannte Signale beim zu beobachtenden System auftreten können . . . . .	34
2.5	Unterschiede zwischen $\lambda$ - und Trichter-Tracker beim Verlauf des „Beobachterfehlers“ . . . . .	35
2.6	Problemstellung sowie Fehlerverhalten im Vergleich . . . . .	38
2.7	Unterschiede zwischen adaptivem Beobachter und Verbundbeobachter . . . . .	41
3.1	Struktur des LUENBERGER-Beobachters (nach [97]) . . . . .	52
3.2	Querdynamik einer Rakete . . . . .	56
3.3	Beobachter mit endlicher Einstellzeit (nach [77]) . . . . .	63
3.4	Vergleich eines Beobachters mit endlicher Einstellzeit mit einem LUENBERGER-Beobachter . . . . .	66
3.5	Einschwingen des Abbildungsbeobachters . . . . .	78
3.6	Einteilung von Beobachtern für nichtlineare Systeme . . . . .	79
3.7	Aufbau des Ball-Balken-Systems (nach [173]) . . . . .	92
3.8	Ball-Balken-System mit Anfangswerten von $\hat{x}_0 = [1, 0, 0.3, 0]^T$ . . . . .	100
3.9	Ball-Balken-System mit Anfangswerten von $\hat{x}_0 = [1, 0.1, 0.8, 0.1]^T$ . . . . .	101
3.10	Einschwingverhalten des Reglers . . . . .	101
4.1	Mögliche Stellen, bei denen unbekannte Signale auf das zu beobachtende System wirken . . . . .	104
4.2	Simulationsergebnisse des Feder-Masse-Systems . . . . .	114
4.3	Prinzip der Störgrößenaufschaltung (nach [205]) . . . . .	116

4.4	Robustheit eines Störgrößenbeobachters mit bewusst falschem Signalmodell . . . . .	119
4.5	Simulationsergebnisse für Ableitungsbeobachter . . . . .	125
4.6	Genauigkeitsvergleich verschiedener Modelle . . . . .	126
4.7	Übersicht Active-Disturbance-Rejection-Control (ADRC)-Konzept [133] . . . . .	131
4.8	ADRC-Konzept mit Divergenzen . . . . .	134
4.9	ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit $z_1$ und $u_1$ . . . . .	135
4.10	ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit $z_2$ und $u_1$ . . . . .	135
4.11	ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit $z_1$ und $u_2$ . . . . .	135
4.12	ADRC-Konzept mit falschen Parametern in der Vorsteuerung . . . . .	136
5.1	Struktur des Zustandsvariablenfilters (z. B. [167]) . . . . .	145
5.2	Struktur des POISSON-Filters [280] . . . . .	146
5.3	Struktur des parallelen Filters nach NARENDRA und LÜDERS [207] . . . . .	147
5.4	Identifikationsansätze mit (5.13) und mit $u_1$ . . . . .	154
5.5	Identifikationsansätze mit (5.13) und mit $u_2$ . . . . .	155
5.6	Identifikationsansätze mit (5.16) und mit $u_1$ . . . . .	156
5.7	Identifikationsansätze mit (5.16) und mit $u_2$ . . . . .	156
5.8	Vergleich des Parameterfehlers mit und ohne Berücksichtigung der Anfangswerte . . . . .	159
5.9	Vergleich der Simulationsergebnisse mit Identifikationsansatz aus Beispiel 5.2 für unterschiedlich gewählte Startwerte von $P_0^{-1}$ . . . . .	161
5.10	Identifikationsergebnisse bei den Beobachteransätzen nach KUDVA und KREISSELMEIER . . . . .	173
5.11	Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach KUDVA . . . . .	174
5.12	Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach KREISSELMEIER . . . . .	174
5.13	Identifikationsergebnisse beim Beobachteransatz nach NARENDRA und LÜDERS . . . . .	181
5.14	Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach NARENDRA und LÜDERS . . . . .	182
5.15	Simulationsergebnisse für adaptive Beobachter und Verbundbeobachter . . . . .	193



# 1 Einleitung

## 1.1 Einordnung der Arbeit

In der Regelungstechnik werden technische Systeme bevorzugt durch Differentialgleichungsmodelle beschrieben. Das Ziel dabei ist es, einen Regler derart zu entwerfen, dass sich das System dauerhaft in einem sicheren (stabilen) Bereich bewegt. Voraussetzung für den Entwurf und den Betrieb ist, dass die für den Reglerbetrieb erforderlichen Zustands- und Störgrößen messbar sind. Doch in der Praxis ist diese Voraussetzung nicht immer erfüllt.

Die Identifikation von nicht messbaren (internen) Informationen aus messbaren (externen) Quellen wird in der Regelungstechnik immer dann notwendig, wenn zum Zwecke der Überwachung oder zur Regelung Informationen über Störungen oder Kenngrößen nicht direkt bekannt sind. So ist es einerseits technisch nicht immer möglich, alle Größen eines Systems zu messen, andererseits auch wirtschaftlich nicht immer zu rechtfertigen, Messgrößen direkt zu bestimmen.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass Systemklasse und Dimension der Problemstellung bekannt sind. Mathematisch wird im Folgenden bei einem linearen zeitinvarianten (Linear Time Invariant, LTI) System von folgender Beschreibung ausgegangen

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.1a)$$

$$y = Cx + Du, \quad (1.1b)$$

wobei  $\mathcal{X}$  die Mannigfaltigkeit ist, in der die  $x$  liegen. Ist das System nichtlinear und zeitvariant, wird folgende Beschreibung verwendet

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t > t_0 \geq 0 \quad (1.2a)$$

$$y = h(x, u, t), \quad (1.2b)$$

wobei  $x(t)$  eine differenzierbare Funktion ist, deren Ableitung die Gleichung  $f(x, u, t)$  überall in  $t$  auf einem gegebenen Intervall  $[0, T]$  erfüllt. Zudem sei  $x(t)$  eindeutig und wird Zustandssignal oder kurz Zustand genannt. Die Eindeutigkeit von  $x(t)$  wird durch die LIPSCHITZ-Stetigkeit von  $f$  gesichert, weshalb fortan  $f$  immer LIPSCHITZ-stetig sein möge (Satz von PICARD-LINDELÖF [144, S. 67]). Das Eingangssignal  $u(t)$  sei ein Vektor mit  $m$  Komponenten stückweise stetiger

	keine Störung	Störung
<b>Modellstruktur exakt</b>	inverse Probleme <ul style="list-style-type: none"> <li>• Beobachter</li> <li>• adaptiver Beobachter</li> </ul>	Regressionsprobleme <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kalman-Filter</li> <li>• Notch-Filter</li> </ul>
<b>Modellstruktur genähert</b>	Approximationsprobleme <ul style="list-style-type: none"> <li>• robuster Beobachter</li> <li>• Tracker</li> </ul>	Approgressionsprobleme <sup>1</sup> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Black-Box-Filter</li> </ul>

**Tabelle 1.1:** Übersicht über Rekonstruktionsverfahren bei unterschiedlichen Rahmenbedingungen

Funktionen. Das Ausgangssignal  $y(t)$  sei ein Vektor mit  $p$  Komponenten, das über eine LIPSCHITZ-stetige Abbildung  $h$  von Zustands- und Eingangssignalen entsteht.

Identifikation im Zusammenhang mit dem Systembegriff bedeutet, dass Zustände und/oder Parameter rekonstruiert werden. Als Parameter werden dabei Größen bezeichnet, die bei LTI-Systemen Elemente der  $A$ ,  $B$ ,  $C$  oder  $D$  Matrizen sind und bei nichtlinearen Systemen in  $f(\cdot)$  und  $h(\cdot)$  vorkommen. Während Zustände neben der Abhängigkeit von ihren Anfangswerten durch Ein- und Ausgangssignale charakterisiert werden, sind Parameter in der Regel von diesen unabhängig.

Neben der Rekonstruktion unbekannter Parameter beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit der Rekonstruktion von Störungen, die auf das System wirken, sowie von Eingängen und Signalen, deren Größe nicht bekannt ist.

Unterschiedliche Rahmenbedingungen, unter denen die Identifikation stattfindet, führen zu einer Vielzahl von Zugängen. Zu diesen Rahmenbedingungen zählt neben der Frage, ob mit dem Modell die Wirklichkeit exakt wiedergegeben wird oder nicht, auch die Frage, ob der Ausgang mit Störungen überlagert ist oder nicht. Tabelle 1.1 zeigt die unterschiedlichen Zugänge für die verschiedenen Problemstellungen.

Die vorliegende Arbeit behandelt inverse Probleme, geht also von einem exakten Modell und dem Nichtvorhandensein von Störungen aus. Außerdem wird sich auf Beobachter als Teil der inversen Probleme beschränkt. Grund dafür ist im Wesentlichen, dass hierbei die Identifikation ohne Bildung von Ableitungen erfolgt. Das Ableiten von Signalen erweist sich in der Praxis, insbesondere bei verrauschten Signalen, als herausforderungsvoll und bedarf daher einer anderen Herangehensweise.

<sup>1</sup>Der Begriff der Approgression ist der Fachbegriff für Problemstellungen, die sowohl Regressions- als auch Approximationsprobleme umfassen [16].

Da dank immer höherer Rechenleistung heutzutage Systeme quasikontinuierlich implementiert werden können, wird auf die Analyse und den Entwurf zeitdiskreter Zugänge verzichtet. Ferner werden nur Ansätze verwendet, deren Ordnung niedriger oder gleich der des Systems ist, und deren Korrekturterm linear ist. Bieten die Beobachter mit einer höheren Ordnung als das System Vorteile, wird an der entsprechenden Stelle darauf verwiesen.

Außerdem wird auf die Beobachter mit bewegendem Horizont verzichtet, die aus dem Gebiet der modellprädikativen Regelung kommen. Hier entsteht der Beobachterentwurf nicht auf Basis des Ausgangsfehlers zwischen System und Beobachter, sondern auf Basis einer Kostenfunktion, die einen quadratischen prädizierten Ausgangsfehler über einen festgelegten Zeitraum in der Zukunft minimiert.

In den üblichen Entwurfsmethoden von Beobachtern wird davon ausgegangen, dass das System beobachtbar ist, also aus dem Ausgang alle notwendigen Informationen über die Zustandsgröße gewonnen werden können, und dass die Eingangsgrößen ebenso wie die Parameter bekannt sind. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Fällen, in denen diese Annahmen verletzt sind. Methodisch wird sich auf die Entwurfsverfahren begrenzt, die mit linearen oder linearisierten Methoden arbeiten.

## 1.2 Entwicklungsstand

Der Beobachterentwurf LUNENBERGERS aus dem Jahr 1964, der durch den Entwurf eines Zustandsreglers motiviert war und für die Zustandsrekonstruktion eines Systems aufgrund unbekannter Zustände und Anfangswerte hergeleitet wurde, markierte den Anfang der Beobachtertheorie. Seitdem hat der Beobachter als Konzept für ein breites Spektrum von Systemklassen und in unterschiedlichsten Anwendungen Beachtung gefunden. Bereits frühzeitig wurde das Beobachterkonzept abstrahiert. War der erste Beobachter noch eine exakte Nachbildung des zu beobachtenden Systems, so schrieb LUNENBERGER bereits 1971 in einem Übersichtsaufsatz: „Almost any system is an observer.“ In neueren Veröffentlichungen wird ein Beobachter dahin gehend verallgemeinert, dass nur noch die Abbildungen zweier Trajektorien von zwei Systemen asymptotisch gegeneinander streben müssen [105]. Trotz alledem hat sich – auch fast 50 Jahre nach der ersten Veröffentlichung über den Beobachter – bisher keine allgemein anerkannte Definition durchgesetzt [136, 353], auch wenn über die Forderung der asymptotischen Zustandskonvergenz Einigkeit besteht.

Erste Ansätze, deren Ordnung niedriger als die des zu beobachtenden Systems ist und die als reduzierte Beobachter bezeichnet werden, wurden Ende der 1960er

Jahre entwickelt [58, 118]. Sie haben insbesondere bei den Abbildungsbeobachtern praktische Anwendung gefunden, sind aber ansonsten die Ausnahme geblieben. Die meisten Beobachter haben – abgesehen von den Beobachtern mit einer höheren Dimension als das zu beobachtende System, die im nächsten Abschnitt behandelt werden – also eine im Vergleich zum System identische Dimension.

Die Zugänge über Beobachter mit höherer Ordnung werden Einbettungs- oder immersionsbasierte Beobachter genannt. Im Wesentlichen gibt es hierbei drei verschiedene Verfahren: 1. Immersion auf zustandsaffine Systeme. Hier wird zwischen Verfahren ohne [83, 94] und mit Ausgangsaufschaltung unterschieden [129]. 2. Die Immersion in lineare Systeme mit Ausgangsaufschaltung hat insbesondere Interesse bei den Normalformbeobachtern gefunden, entsprechende Arbeiten werden in diesem Zusammenhang erwähnt. 3. Bei den Immersionsverfahren in eine bestimmte nichtlineare Struktur ist insbesondere die Dreiecksstruktur von [27] zu erwähnen. Eine Übersicht über bestehende Arbeiten ist zudem in [315] oder [316] zu finden.

Für Beobachter für zeitvariante Systeme wurden die Ansätze für zeitinvariante Systeme weiterentwickelt. Ihre Entwurfsmethode ermöglicht durch zeitvariante Wahl der Verstärkungsmatrix, die Problemstellung auf eine zeitinvariante zurückzuführen. Dies geschieht in der Regel auf Basis der Beobachternormalform (BNF), da sich hier die Pole leicht vorgeben lassen. Die Schwierigkeit liegt in der zeitvarianten Transformation des Systems auf BNF bzw. in der Rücktransformation der Verstärkungsmatrix in Originalkoordinaten nach Entwurf in der BNF. Zur Anwendung kommen hier häufig duale Ansätze, die für die Polvorgabe bei Zustandsreglern für zeitvariante Systeme entwickelt wurden. Für SISO-Problemstellungen sei auf [96] verwiesen, für MIMO auf [319].

Bei Beobachtern für nichtlineare Systeme, die mit Linearisierungstechniken arbeiten, wird ähnlich vorgegangen. Ziel bei den Linearisierungen um einen (Arbeitspunktbeobachter) oder mehrere Arbeitspunkte (Beobachter mit erweiterter Linearisierung) oder um eine Trajektorie (Erweiterter LUENBERGER-Beobachter [341]) ist es immer, die Fehlerdifferenzialgleichung zwischen System- und Beobachterausgang so zu gestalten, dass das konstante exponentielle Abklingen des Fehlers gesichert ist. Zudem stellt sich auch die Frage, um welche Zustände linearisiert wird. Während der Erweiterte LUENBERGER-Beobachter dies um die geschätzten Größen tut, wird beim flachheitsbasierten Folgebeobachter [276] um die Originalkoordinaten linearisiert.

Mit Hilfe differenzialgeometrischer Methoden existieren seit Anfang der 1980er Jahre mit dem Normalformbeobachter [31, 188] echte nichtlineare Entwürfe, die mittels Transformation die nichtlineare in eine lineare Problemstellung plus Aus- und/oder Eingangsaufschaltung transformieren und die ebenfalls wieder ein linea-

res Verhalten des Beobachterfehlers ermöglichen, wenn auch in einem anderen Koordinatensystem. Auf MIMO Systeme wurde das Konzept in [189, 332] übertragen. Die Schwierigkeit hierbei liegt in der Wahl einer geeigneten Transformation. Zahlreiche Veröffentlichungen [15, 116, 124, 130, 331] haben sich mit dem Thema auseinandergesetzt. Einen anderen Weg haben [13, 177] gewählt, indem sie auch Funktionen höherer Ordnung erlaubt haben, sodass mit der so genannten Immersion die Klasse der Funktionen, für die ein Normalformbeobachter entworfen werden kann, erweitert wurde. Die Weiterentwicklung der Beobachter höherer Ordnung stellen die dynamischen Beobachter [14] dar, weil hier nicht nur zusätzliche Dimensionen, sondern auch zusätzliche Dynamiken hinzugenommen werden. Sie haben die Klasse der normalformbeobachterfähigen Systeme nochmals erweitert und darüber hinaus eine ganz eigene, neue Gattung geschaffen.

Darüber hinaus existieren zwei weitere Ansätze für Beobachterentwürfe für nicht-lineare Systeme. Die linear dominanten Ansätze lassen die Nichtlinearität bestehen und stellen durch mitunter hohe Verstärkung des linearen Teils ein Abklingen des Fehlers zwischen Beobachter und System sicher. Der erste Beobachter dieser Kategorie ist der bereits 1973 entwickelte THAU-Beobachter [314]. Zentral ist hierbei die LIPSCHITZ-Stetigkeit der Nichtlinearität. Deren LIPSCHITZ-Konstante wird für eine Abschätzung bei dem Stabilitätsbeweis über LYAPUNOV benötigt, und sie hat direkten Einfluss auf die Wahl der Verstärkungsmatrix. Auch hierzu gibt es eine Fülle von Arbeiten [261, 262, 340], die sich mit dem Thema befassen haben. Auf den gleichen Grundlagen beruhen auch die seit den 1990er Jahren populären Beobachter mit hohen Verstärkungen (im Englischen High-Gain-Beobachter) [111]. Eine weitere Möglichkeit im Umgang mit nichtlinearen Systemen stellen die Sliding-Mode-Beobachter, die Mitte der 1980er Jahre aufkamen [292, 293] und deren Grundlagen bereits 1960 [81] gelegt wurden. Wie die Sliding-Mode-Regelungszugänge zeigen auch die entsprechenden Beobachterzugänge gute Eigenschaften gegenüber Störungen und kommen hierbei zum Einsatz. Ein Übersichtsaufsatz ist in [68] zu finden und populäre Entwurfsverfahren sind [64, 333]. Während Backstepping beim Reglerentwurf nichtlinearer Systeme Popularität genießt, sind die Backstepping-Beobachter Randerscheinungen geblieben. Für mehr Informationen sei auf [182, 198] verwiesen.

Aus der Theorie der Optimalsteuerung ist mit dem KALMAN-BUCY-Beobachter das deterministische Pendant des KALMAN-Filters hergeleitet worden. Strukturell gibt es keine Unterschiede, aber die Konvergenzbeweise basieren aufgrund des Unterschieds zwischen stochastischen und deterministischen Systemen auf mathematisch gesehen komplett verschiedenen Konvergenzzugängen.

Der Erweiterte KALMAN-BUCY-Beobachter linearisiert nichtlineare Systeme um die aktuelle Trajektorie. Er stellt das Gegenstück zum Erweiterten LUENBERGER-Beobachter und zudem die deterministische Entsprechung zum Erweiterten KAL-

MAN-Filter dar. Entwurfsmethoden mit Konvergenzbeweisen sind aber die Ausnahme geblieben. Weitere Informationen sind in [266] zu finden.

Wirken Störungen auf das System, gibt es unterschiedliche Ansätze hiermit umzugehen. Die Störgrößenaufschaltung stellt hierfür eine klassische Methode dar [97, 205]. Ist die Störgröße nicht direkt messbar, wird sie mittels Störgrößenbeobachter rekonstruiert und anschließend derart über den Eingang berücksichtigt, dass die Störung auf den Ausgang keinerlei Auswirkung mehr hat.

Störgrößenbeobachter einer etwas anderen Art kommen bei der modellfreien Regelung [85, 90] zum Einsatz. Hier existiert kein Modell der Strecke. Stattdessen wird sämtliches dynamisches Verhalten der Strecke als Störung aufgefasst, mithilfe eines Beobachters identifiziert und anschließend ein einfacher Regler entworfen. Vergleichbare Ansätze sind die aktive Störunterdrückungsregelung [110, 132] oder der nichtlinearitätskompensierende Zustandsregler [239].

„Unbekannte Eingänge“ ist ein weiterer zentraler Begriff im Zusammenhang mit Beobachtern. Zum einen stellen sie eine weitere Größe dar, die mit Hilfe von Beobachtern bestimmt und anschließend beim Entwurf berücksichtigt wird. In diesem Fall wird sie als Störgröße behandelt und mit Hilfe eines Störgrößenbeobachters beobachtet. Zum anderen bieten die Beobachter bei unbekanntem Eingängen ein Verfahren, anhand dessen die Rekonstruktion anderer Größen in Gegenwart von unbekanntem Eingängen gesichert werden kann, ohne die Größe näher bestimmen zu müssen. Die Idee wurde in [18] und [125] vorgestellt und in zahlreichen weiteren Arbeiten vertieft und erweitert. Bei nichtlinearen Problemstellungen kommen Sliding-Mode-Beobachter zum Einsatz [71–73].

Bei unbekanntem Parametern und zeitgleicher Zustandsrekonstruktion wird von adaptiven Beobachtern gesprochen. Die erste Publikation erschien 1973 [46]. In der Regel wird bei den Ansätzen eine Normalform verwendet, die die nichtlinearen multiplikativen Kopplungen zwischen Parametern und Zuständen verhindert und so lineare Zugänge ermöglicht. Entwurfsverfahren für spezielle Klassen nichtlinearer Systeme wurden Ende der 1980er in [20] und Anfang der 1990er in [216] vorgestellt.

Konvergenz in endlicher anstatt asymptotischer Zeit fordern die Beobachter mit endlicher Einstellzeit. Ausführungen hierzu sind in [77, 223–225] zu finden. Bei zeitdiskreten Problemstellungen wird auch von Dead-Beat-Beobachtern gesprochen.

Bei den Beobachtern mit bewegendem Horizont basiert die Zustandsrekonstruktion nicht mehr auf dem Ausgangsfehler zwischen Modell und Strecke, sondern auf dem Minimieren einer Kostenfunktion, die den Ausgangsfehler über eine feste Zeitspanne – einen Horizont – prädiziert. Wenn nachgewiesen wird, dass der

prädierte Fehler asymptotisch gegen Null strebt, ist ein weiterer Nachweis der Zustandskonvergenz nicht mehr notwendig. Erste Arbeiten stammen aus dem Jahr 1992 [227, 228]. Eine Übersicht ist in [6] zu finden.

Anwendungen, die über die klassische Aufgabe der Rekonstruktion von Größen hinausgehen, existieren z. B. in [174], in der der Beobachter nicht für die Rekonstruktion einer Größe verwendet wird, sondern dazu dient, dass das aggregierte System aus ursprünglichem System und Beobachter zu einem passiven System wird, für das das Repertoire der passivitätsgestützten Reglerentwürfe genutzt werden kann. In [313] ermöglicht der Beobachter eine Semistabilisierung des Gesamtsystems.

### 1.3 Ziele und Aufgaben

Beim Beobachterentwurf wird im Allgemeinen vorausgesetzt, dass ein System vollständig beobachtbar ist, dass alle Ein- und Ausgangssignale des Systems messbar sind und dass die Parameter bekannt sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, Potenziale aufzuzeigen, die die Einsatzmöglichkeiten von Beobachtern in der Praxis unter schwächeren Annahmen erheblich erweitern, und die Möglichkeit des Beobachterentwurfs zu untersuchen, wenn die genannten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind. Dies ist dann der Fall, wenn ein System nicht beobachtbar ist, wenn auf das System nicht messbare Signale in Form von unbekanntem Eingängen oder Störungen wirken und/oder wenn Parameter unbekannt sind.

Dazu werden methodisch die folgenden wissenschaftlichen Teilziele verfolgt:

1. Die Vielzahl an Literatur wird aggregiert und ein Überblick darüber gegeben. Eine Vereinheitlichung von Schreibweisen und Begriffen wird erarbeitet. Die gängigen Ansätze werden systematisiert und kategorisiert, einschließlich den nur in der Spezialliteratur bekannten, sich aber als vorteilhaft erweisenden Verfahren.
2. Die Wesensunterschiede unterschiedlicher und mitunter konkurrierender Definitionen und Sätze werden gegenübergestellt und anhand von Beispielen und Gegenbeispielen verdeutlicht.
3. Die bestehenden Verfahren und Algorithmen werden erweitert, umformuliert und modifiziert mit dem Ziel, ihre Leistungsfähigkeit zu steigern oder

sie durch Umformulierung mathematisch neu zu interpretieren. Dabei werden Unstimmigkeiten in der Literatur verbessert und Lücken in der Theorie herausgestellt.

4. Die bekannten und mitunter modifizierten Entwurfsverfahren werden anhand von eigens entwickelten Beispielen und Simulationsergebnissen verglichen. Zusätzlich wird auf wichtige Aussagen aus der Literatur sowie auf Besonderheiten, Grenzen und Schwierigkeiten bei der Implementierung hingewiesen.

Um die genannten Ziele zu erreichen, wurde für die Arbeit die nachfolgende Gliederung gewählt.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen der Beobachtertheorie. Es werden die Unterschiede zwischen existierenden Beobachterdefinitionen diskutiert und anhand von selbst konstruierten Gegenbeispielen wird aufgezeigt, welche Grundforderungen vorteilbehaftet sind sowie anschließend eine eigene Definition entworfen, die dieser Arbeit zugrunde liegt. Ferner erklärt es die Voraussetzungen, die für einen Beobachterentwurf notwendig sind. Es grenzt das Beobachterkonzept von stochastischen und approximativ determinierten Zugängen ab und erklärt Unterschiede gegenüber Filtern und Trackern. Bei den Trackern wird erstmalig das Stabilitätskonzept des Trichter-Trackings auf Tracker übertragen. Darüber hinaus setzt es sich mit der Struktur des Identitätsbeobachters auseinander und zeigt Kriterien, anhand derer Beobachterverfahren klassifiziert werden können. Bei den nichteinstellbaren Beobachtern wird der Begriff des semi-trivialen Beobachters zur besseren Abgrenzung zum trivialen Beobachter eingeführt.

Kapitel 3 widmet sich den Entwurfsverfahren. Die klassischen Zugänge des LUNENBERGER-Beobachters für linear zeitinvariante und -variante Systeme werden so betrachtet, dass lediglich Detektierbarkeit und nicht Beobachtbarkeit vorausgesetzt werden. Das deterministische Pendant des KALMAN-Filters, der KALMAN-Beobachter, wird über die LYAPUNOV-Theorie hergeleitet.

Die Beobachter reduzierter Ordnung werden genutzt, um einen Abbildungsbeobachter für Systeme zu entwerfen, bei denen nur eine Abbildung der Zustände, nicht aber das ganze System detektierbar ist.

In einem weiteren Abschnitt werden gängige Entwurfsverfahren für nichtlineare Systeme vorgestellt, die auf unterschiedlichen Linearisierungen beruhen und die später für die Verbundbeobachter in Kapitel 5 benötigt werden. Auf die weniger bekannten Pseudolinearisierungs-Tracker und optimierungsbasierten Beobachter wird intensiver eingegangen.

Kapitel 4 geht auf Beobachter bei unbekanntem Signalen näher ein. Während sich der Fall, dass nicht alle Ausgangssignale vollständig messbar sind, in einfacher



Weise durch Reduktion der Ausgangsgleichung auf die Standardsituation zurückführen lässt, bereiten nicht messbare Eingänge, die auf die Systemdifferenzial- und/oder Ausgangsgleichung wirken, erhebliche Schwierigkeiten. Die Herangehensweise der als Unknown Input Observer (UIO) bezeichneten Entwurfsverfahren wird diskutiert.

Eine neuartige Herleitung mittels schiefer Projektionen liefert eine kompakte Umformulierung für die UIOs und ermöglicht dadurch den Einsatz der üblichen Beobachterentwurfsverfahren.

Auf die Störgrößenbeobachter, die alternativ zu den UIOs eingesetzt werden können, wird näher eingegangen und die Unterschiede in der Arbeitsweise werden herausgearbeitet. Beispielfhaft wird gezeigt, dass die Störgrößenbeobachter auch gegenüber modellfremden Signalen ein akzeptables Verhalten aufweisen.

Ferner wird auf die beobachterbasierte Ableitungsbildung eingegangen, die die Grundlage für die verschiedenen Verfahren bildet, die ganze Strecken als unbekanntem Eingang auffassen. Diese Verfahren werden vorgestellt und erstmalig miteinander verglichen.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem Beobachterentwurf bei unbekanntem Parametern und erreicht mit der Schaffung des Begriffs der Verbundbeobachter eine Unterteilung der Verfahren. Während bei adaptiven Beobachtern keine Rückwirkung der Zustandsrekonstruktion auf die Parameteridentifikation stattfindet, beeinflussen sich Zustandsrekonstruktion und Parameteridentifikation bei den Verbundbeobachtern ständig.

Die Herangehensweise der Identifikationsverfahren, die bei den adaptiven Beobachtern zum Einsatz kommen, wird vorgestellt. Die gängigen Ansätze werden um die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte der Differenzialgleichung erweitert und miteinander verglichen. Hinweise zur Wahl der Designparameter werden gegeben. Die gewonnenen Erkenntnisse werden bei den adaptiven Beobachtern genutzt und die gängigen Verfahren für LTI-Systeme um die Berücksichtigung der Anfangswerte erweitert. Ferner wird auf den Entwurf adaptiver Beobachter für Systeme eingegangen, die nicht in Normalform vorliegen.

Bei den Verbundbeobachtern wird das prinzipielle Vorgehen für einen Entwurf erläutert und ein alternativer Weg über einen LYAPUNOV-Zugang aufgezeigt. Anhand eines Beispiels werden die Verbundbeobachter mit den adaptiven Beobachtern verglichen.



## 2 Einführung in die Beobachtertheorie

In Kapitel zwei werden die theoretischen Grundlagen für die weiterführenden Kapitel gelegt.

In Abschnitt 2.1 wird anhand einiger entwickelter Beispiele die Abstraktion des Beobachterkonzepts beschrieben. Dabei muss das dynamische System eines Beobachters mit den dynamischen Eigenschaften des Systems übereinstimmen, das beobachtet wird.

In Abschnitt 2.2 werden verschiedene Beobachterdefinitionen diskutiert und aufgrund der in eigens konstruierten Gegenbeispielen ersichtlichen und diskutierten Vor- und Nachteile schließlich eine Beobachterdefinition aufgestellt, die dieser Arbeit zugrunde liegt.

Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit strukturellen Voraussetzungen, die für den Beobachterentwurf notwendig sind. Es erklärt die verschiedenen Beobachtbarkeitskonzepte, weist auf Unterschiede beim Entwurf von Beobachtern für lineare und nichtlineare Systeme hin und zeigt artverwandte Konzepte der Beobachtbarkeit auf.

Abschnitt 2.4 grenzt den Beobachter von artverwandten Konzepten ab. Hierbei werden die Unterschiede zu Filter und Tracker anhand verschiedener Konvergenzbegriffe herausgearbeitet und das Konvergenzkonzept des Trichter-Trackings erstmals auf das Tracker-Konzept angewendet. Ferner wird auf Beobachter bei unbekanntem Störungen und Parametern eingegangen.

Abschnitt 2.5 zeigt auf, welche Klassifikationen in der Literatur üblich sind. Hier wird auf die Entwürfe mit und ohne Korrekturterm eingegangen und bei den Ansätzen ohne Korrekturterm werden die semi-trivialen Beobachter eingeführt, um die Verfahren ohne Korrekturterm besser systematisieren zu können. Zudem wird diskutiert, wieso diese Entwurfsverfahren in der Praxis kaum zum Einsatz kommen. Außerdem wird eine Klassifikation vorgeschlagen, die auf der Dimension der Systeme basiert und darüber hinaus etwaige Besonderheiten berücksichtigt.

## 2.1 Einleitende Beispiele

Der Überblick über die letzten 50 Jahre Entwicklung der Beobachtertheorie in Abschnitt 1.2 hat aufgezeigt, welche große Resonanz die Beobachter erhalten haben und wie vielschichtig heute ihre Einsatzgebiete sind. Die Abstraktion des Konzepts führt dazu, dass Beobachter mit dem System strukturell vorerst nichts gemeinsam haben müssen. Zudem weisen die Beobachter eine Dynamik auf, die sich in aller Regel von der des Systems unterscheidet. Schließlich hat der Beobachterentwurf das Ziel, die Rekonstruktion der Zustände schneller als die eigentliche Bewegung der Zustandsgrößen erfolgen zu lassen. Bevor im nächsten Abschnitt eine Definition abgeleitet wird, sollen einige dabei zu beachtende Aspekte an Beispielen erläutert werden.

Die ersten beiden hier konstruierten Beispiele zeigen, dass selbst die Dimension von System und Beobachter nicht übereinstimmen muss. Dabei handelt es sich bei dem ersten Beispiel um ein reines Zahlenbeispiel und beim zweiten Beispiel um die Abstraktion des ersten Beispiels, mit dem sich beliebig dimensionale Beobachter für ein System entwerfen lassen.

### Beispiel 2.1. Beobachter zweiter Ordnung für ein eindimensionales System

Werden die Zustände eines Systems erster Ordnung mit

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = -3x + u, \quad x(0) = x_0 \\ y = x$$

mit einem Beobachter zweiter Ordnung

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 72 \\ -11 \end{bmatrix} y, \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \xi$$

rekonstruiert, lautet die Fehlerdifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \dot{\xi} - (-3x + u) \quad \text{mit } \xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \hat{x} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 72 \\ -11 \end{bmatrix} x \right) - (-3x + u) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tilde{x} \\ &= -11 \frac{7}{13} \tilde{x}. \end{aligned}$$

Bei Wahl von  $\xi_0 = [2 \ 3]^T x_0$  ist der Beobachterfehler für alle Zeiten identisch Null.  $\square$

Im Folgenden werden die Erkenntnisse aus Beispiel 2.1 für den Beobachterentwurf von  $n$ -dimensionalen LTI-Systemen mit einer Dimension  $q > n$  verallgemeinert.

### Satz 2.1. Einbettungsbeobachter für LTI-Systeme

Die Zustände eines Systems  $n$ -ter Ordnung

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0, & A &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & B &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y &= Cx + Du, & & & C &\in \mathbb{R}^{p \times n}, & D &\in \mathbb{R}^{p \times m} \end{aligned}$$

können mit einem Beobachter  $q$ -ter Ordnung mit  $q > n$

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} &= F\xi + Gu + Hy, & \xi(0) &= \xi_0, & F &\in \mathbb{R}^{q \times q}, & G &\in \mathbb{R}^{q \times m}, \\ \hat{x} &= S\xi, & & & H &\in \mathbb{R}^{q \times p}, & S &\in \mathbb{R}^{n \times q} \end{aligned}$$

rekonstruiert werden, wenn mit  $\xi = S^+ \hat{x}$  und  $SS^+ = I_n$  folgende Bedingungen

$$G - HD - S^+B = 0_{q \times m} \quad \text{und} \quad (2.1a)$$

$$FS^+ + HC - S^+A = 0_{q \times n}. \quad (2.1b)$$

gelten, wobei ein HURWITZ-stabiles  $F$  mit  $\text{Spek}F \cap \text{Spek}A = \emptyset$  und  $H$  als steuerbares Paar  $(F, H)$  zu wählen sind, sodass  $S^+$  aus (2.1b) und  $G$  anschließend aus (2.1a) in Analogie zu Abschnitt 3.2.1 folgt.  $\square$

*Beweis:* Mit der stabilen Fehlerdynamik

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= \dot{\xi} - S^+ \dot{x} \\ &= F\xi + Gu + H(Cx + Du) - S^+(Ax + Bu) \\ &= F(\xi - S^+x) + \underbrace{(G + HD - S^+B)}_{\text{Bed. 2.1a}} u + \underbrace{(FS^+ + HC - S^+A)}_{\text{Bed. 2.1b}} x \\ &= F\tilde{\xi} \end{aligned}$$

wird bei Wahl von  $\xi_0 = S^+ x_0$  der Fehler zwischen System und Beobachter immer identisch Null.  $\blacksquare$

Für lineare Systeme ist es nicht sinnvoll, mehr Beobachterzustände als Zustände im System selbst anzusetzen, weil aus mehreren Zuständen keine weiteren Informationen gewonnen werden können. Zudem ist der Beobachterentwurf nur gültig,

wenn die Anfangszustände im richtigen Verhältnis zueinander stehen. Dennoch erweist sich das Verständnis des linearen Einbettungsbeobachters für das Durchdringen der Theorie der relativ komplizierten nichtlinearen Einbettungsbeobachter als nützlich. Am Beispiel in [177] für den Normalformbeobachter [31] kann gezeigt werden, dass – anders als im Linearen – Beobachter mit mehr Zustandsvariablen, als das System besitzt, notwendig sind, um die Zustandsrekonstruktion zu gewährleisten. Oder anders formuliert: Durch das Zulassen einer höheren Zustandsdimension im Beobachter gelingt der Beobachterentwurf für eine größere Klasse von Systemen.

Um nunmehr zu zeigen, dass nicht einmal strukturelle Eigenschaften wie Linearität zwischen System und Beobachter übereinstimmen müssen, wird in Beispiel 2.2 ein nichtlinearer Beobachter für ein lineares System entworfen. Auch hier ist offensichtlich, dass diese Vorgehensweise keinerlei praktische Bedeutung hat. Allein die Tatsache, dass es *möglich* ist, motiviert einen Großteil der nichtlinearen Entwurfstechniken, die intensiv von nichtlinearen Transformationen Gebrauch machen, um das Beobachterproblem für nichtlineare Systeme zu lösen.

### Beispiel 2.2. Nichtlinearer Beobachter für lineares System

Der Zustand des Systems

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = -2x, \quad x(0) = x_0 \\ y = x$$

kann mit Hilfe des nichtlinearen Beobachters

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = -\xi^3, \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{x} = \begin{cases} \xi_0 e^{-\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi_0^2}\right)} & \text{für } \xi_0 \neq 0 \\ 0 & \text{für } \xi_0 = 0 \end{cases}$$

rekonstruiert werden. Mit der Lösung  $\xi(t) = (2t + \xi_0^{-2})^{-\frac{1}{2}}$  von  $\dot{\xi} = -\xi^3$  ergibt sich

$$\hat{x}(t) = e^{-\left(\frac{1}{\xi^{2(t)}} - \frac{1}{\xi_0^2}\right)} \xi_0 = e^{-2t} \xi_0.$$

Mit Wahl von  $\xi_0 = x_0$  ist der Beobachterfehler für alle Zeiten identisch Null. Über die global asymptotische Fehlerstabilität

$$\hat{x}(t) - x(t) = e^{-2t} \xi_0 - e^{-2t} x_0 = e^{-2t} (\xi_0 - x_0)$$

ist auch die Konvergenz gesichert. □

Zu guter Letzt sei noch auf die trivialen Beobachter in Abschnitt 2.5.3 verwiesen. Hier sind Beobachter und System dynamisch voneinander komplett unabhängig und der Systemausgang hat keinerlei Einfluss auf den Beobachter.

Die einleitenden Beispiele zeigen die möglichen Unterschiede zwischen Beobachtersystem und dem zu beobachtenden System. Im nächsten Abschnitt werden die verschiedenen Beobachterdefinitionen diskutiert und anhand von Gegenbeispielen aufgezeigt, welche Definition vorteilhaft ist.

## 2.2 Diskussion bestehender Beobachterdefinitionen und ihrer Zusammenhänge

Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, hat sich in der Literatur bisher keine einheitliche Definition für einen Beobachter durchgesetzt. Bevor auf die Definition näher eingegangen wird, die der Arbeit zugrunde liegt, werden die zentralen in der Literatur existierenden Forderungen anhand von selbst entwickelten Beispielen diskutiert. Im Wesentlichen gibt es drei verschiedene Forderungen, die an den Beobachterfehler gestellt werden:

1. Konvergenz [106, Def. 5.2]
2. Konvergenz und Konsistenz [269, 283, 342]
3. Konvergenz und global asymptotische Stabilität [299]

Dabei beschreibt die Konvergenz des Beobachterfehlers, dass der Fehler zwischen dem Beobachtersystem und dem zu beobachtenden System für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Die Konsistenz ist gegeben, wenn aus der Übereinstimmung System- und Beobachterzustände zum Zeitpunkt  $t_0$  die Übereinstimmung für alle  $t > t_0$  folgt<sup>1</sup>.

Für die global asymptotische Stabilität sei auf [127] verwiesen.

Das erste Beispiel zeigt einen konvergenten Beobachter, der nicht konsistent ist.

### Beispiel 2.3. Konvergenter, aber nicht konsistenter „Beobachter“

Für den Zustandsvektor des Systems

$$\Sigma_{\text{sys}} : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5x_1 + u \\ -\sin t \end{bmatrix}, & x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \\ y = x_1 \\ z = [1 \ e^{-t}] x \end{cases}$$

<sup>1</sup>Die Konsistenzbedingung wird auch Simulationsbedingung genannt [342]. Mehr dazu s. Def. 2.1 auf S. 18.

wird der Abbildungsbeobachter erster Ordnung

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}}_1 = -5\hat{x}_1 + u, \quad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10} \\ \hat{z} = \hat{x}_1$$

entworfen. Zwar zeigt die Fehlergleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{z}(t) - z(t)) \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( e^{-5t} \tilde{x}_{10} + e^{-t} (\cos t - 1 + x_{20}) \right) \\ = 0$$

ein konvergentes Verhalten und mit Wahl von  $\hat{x}_{10} = x_{10}$  ist auch der Fehler zum Zeitpunkt  $t = 0$  s gleich Null, jedoch kann der Einfluss  $e^{-t}(\cos t - 1)$  von  $x_2$  für keine Wahl des Anfangswerts  $\hat{x}_{10}$  kompensiert werden.  $\square$

Die Forderung nach Konsistenz grenzt den Beobachter vom sogenannten Tracker ab, indem exakte Modellierung verlangt wird. Der Unterschied zwischen der Forderung nach Konsistenz und Fehlerstabilität wird in den folgenden beiden Beispielen aufgegriffen, um die Notwendigkeit der Fehlerstabilität zu untermauern. Hierfür wird das auf einem homoklinen Orbit<sup>2</sup> beruhende berühmte Beispiel von VINOGRAD [322] für ein attraktives, aber zugleich instabiles System<sup>3</sup> für einen Beobachteransatz modifiziert.

Im ersten Beispiel wird für ein autonomes System die Dynamik des VINOGRAD-Beispiels verwendet und ein trivialer Beobachter entworfen.

#### Beispiel 2.4. Konsistenter und konvergenter trivialer „Beobachter“ mit instabiler Fehlerdynamik

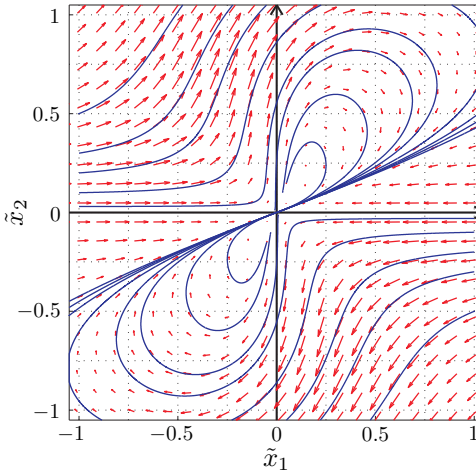
System und Beobachter werden wie folgt gewählt

$$\dot{x} = \begin{cases} \begin{matrix} 0_{2 \times 1} \\ \frac{1}{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)(1 + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^2)} \begin{bmatrix} \hat{x}_1^2(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) + \hat{x}_2^5 \\ \hat{x}_2^2(\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1) \end{bmatrix} \end{matrix} & \text{wenn } x_1 = x_2 = 0 \\ \text{sonst} & \end{cases} \\ \dot{\hat{x}} = \begin{cases} \begin{matrix} 0_{2 \times 1} \\ \frac{1}{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)(1 + (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2)^2)} \begin{bmatrix} \hat{x}_1^2(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) + \hat{x}_2^5 \\ \hat{x}_2^2(\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1) \end{bmatrix} \end{matrix} & \text{wenn } \hat{x}_1 = \hat{x}_2 = 0 \\ \text{sonst} & \end{cases}$$

<sup>2</sup>Ein homokliner Orbit entsteht, wenn eine Ruhelage auf dem Schnitt einer instabilen und einer stabilen Mannigfaltigkeit liegt.

<sup>3</sup>In der Definition der asymptotischen Stabilität wird sowohl Attraktivität als auch Stabilität i. S. v. LYAPUNOV verlangt. Das Pendant der Attraktivität ist die Forderung nach Konvergenz für den Beobachterfehler.





**Bild 2.1:** Gradientenplot und Phasenportrait von Beispiel 2.4

mit  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  und  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Bei  $x(0)^T = [0, 0]^T$  lautet nach [282] die Fehlerdifferenzialgleichung

$$\dot{\hat{x}} = f(x + \hat{x}) - f(x) = \frac{1}{(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)(1 + (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)^2)} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + \tilde{x}_2^5 \\ \tilde{x}_2^2(\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_1) \end{bmatrix}.$$

Die Instabilität der Gleichungen ist am besten in Bild 2.1 ersichtlich, das den Gradientenverlauf und das Phasenportrait zeigt. Sobald  $\tilde{x}_1$  im Wertebereich  $[0, 1]$  die  $\tilde{x}_2$ -Achse in positive Richtung bzw. im Wertebereich  $[-1, 0]$  die  $\tilde{x}_2$ -Achse in negative Richtung überschreitet, wird das System instabil.  $\square$

Ferner zeigt das Beispiel, dass die Forderung nach Stabilität nicht die Forderung nach Konsistenz einschließt. Denn obwohl der Beobachter konvergent und konsistent ist, weist er ein instabiles Verhalten auf.

Beim zweiten Beispiel wird die Korrekturdynamik so entworfen, dass das System den Ansprüchen der Konvergenz und Konsistenz genügt, aber dennoch ein instabiles Fehlerverhalten möglich ist. Die Instabilität wird erreicht, indem die Korrekturdynamik aus der Addition einer Konstanten mit der um zwei Eingänge erweiterten Dynamik des VINOGRAD-Beispiels erweitert wird.

### Beispiel 2.5. Konsistenter und konvergenter „Beobachter“ mit Korrekturterm und instabiler Fehlerdynamik

Für den Zustandsvektor  $x$  des Systems

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$y = x$$

wird der Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + (\omega - 1.099\tilde{x})(\hat{x} - y),$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)(1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2)} \begin{bmatrix} \omega_1^2(\omega_2 - \omega_1) + \omega_2^5 \\ \omega_2^2(\omega_2 - 2\omega_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

mit  $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix}$  und  $\omega(0) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$  entworfen. In Bild 2.2 ist das instabile Verhalten des Beobachters zu sehen. In den Bildern 2.2b und 2.2d ist der Fehlerverlauf von  $x_1$  und  $x_2$  zu sehen. Hier ist ersichtlich, dass der Fehler eigentlich bei  $t = 6$  s schon eingeschwungen ist, aber ab  $t = 6$  s insbesondere bei  $x_2$  wieder massiv ansteigt, bevor er ab  $t = 17$  s wieder eingeschwungen ist. In den Bildern 2.2e und 2.2f sind darüber hinaus die Verläufe der Korrekturwerte von  $x_1$  und  $x_2$  zu sehen, die auch das typische Verhalten für das VINOGRAD-Beispiel aufweisen.  $\square$

Solch ein Beispiel mit einer derartigen Korrekturdynamik ist für die regelungstechnische Praxis nicht relevant, da es keinerlei Vorteile gegenüber den üblichen Korrekturtermen mit entsprechender Verstärkung bietet. Es zeigt aber, dass eine instabile Fehlerdynamik auch bei nichtautonomen und -trivialen Beobachteransätzen möglich ist.

Die bisherigen Überlegungen münden schließlich in die folgende Beobachterdefinition, die dieser Arbeit zugrunde liegt:

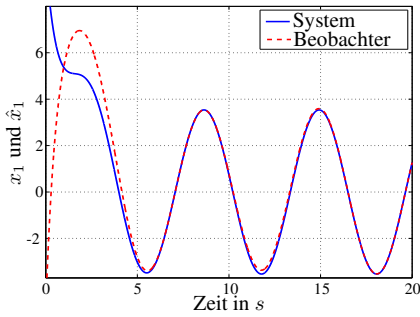
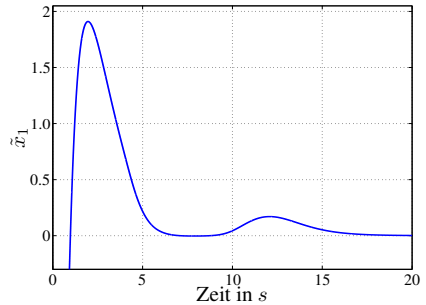
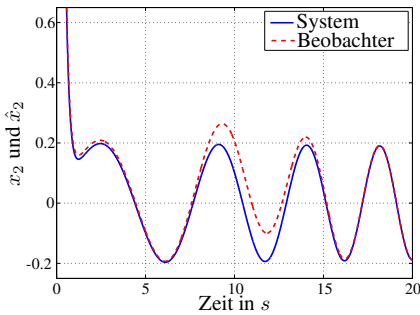
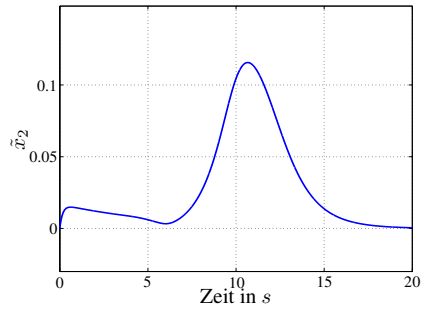
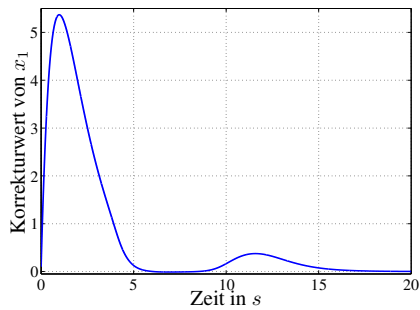
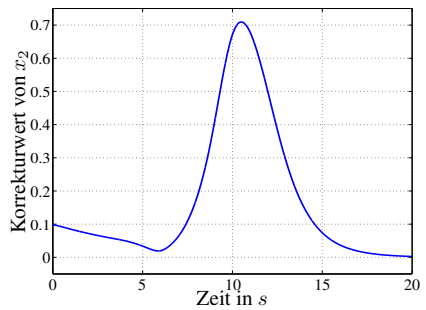
#### Definition 2.1. Beobachter

Für ein kausales dynamisches System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t > t_0 \geq 0 \quad (2.3a)$$

$$y = h(x, u, t) \quad (\text{Messgleichung}) \quad (2.3b)$$

$$z = \phi(x, u, y, t) \quad (\text{Zustandsabbildung}) \quad (2.3c)$$

(a) Verlauf von  $x_1$  bzw.  $\hat{x}_1$ (b) Verlauf des Fehlers  $\tilde{x}_1$ (c) Verlauf von  $x_2$  bzw.  $\hat{x}_2$ (d) Verlauf des Fehlers  $\tilde{x}_2$ (e) Verlauf des Korrekturwerts von  $x_1$ (f) Verlauf des Korrekturwerts von  $x_2$ **Bild 2.2:** Einschwingverhalten von Beobachter und System (Beispiel 2.5)

mit bekannter Struktur und bekannten Parametern, aber unbekanntem Zustandsvektor heißt das kausale System

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = f_{\text{obs}}(\xi, u, y, t), \quad \xi(\hat{t}_0) = \xi_0 \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^{n_{\text{obs}}}, \quad t > \hat{t}_0 \geq 0 \quad (2.4a)$$

$$\hat{z} = \phi_{\text{obs}}(\xi, u, y, t) \quad (2.4b)$$

Beobachter, wenn es aus den Ein- und Ausgangssignalen  $u(t)$ ,  $y(t)$  von  $\Sigma$  das zu beobachtende Signal  $\hat{z}(t)$  mit folgenden Eigenschaften rekonstruiert:

### 1. Konvergenz

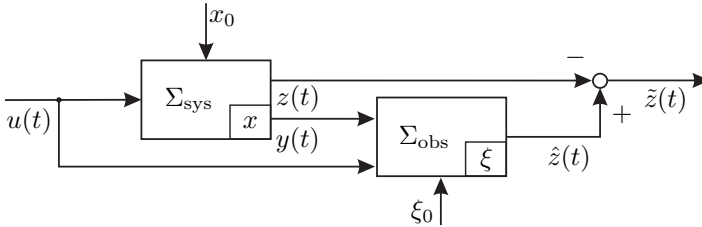
$$\forall x_0 \in \mathcal{X}, \forall t_0 \geq 0; \forall \xi_0 \in \Xi, \forall \hat{t}_0 \geq 0 : \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}(t; \xi_0, \hat{t}_0) = z(t)$$

### 2. gleichmäßige Fehlerstabilität

$\forall t_0 \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , sodass  $\forall u \in \mathcal{U}, \forall x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\text{obs}}}$  gilt:

$$\|\hat{z}(\hat{t}_0) - z(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\hat{z}(t; \xi_0, \hat{t}_0) - z(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq \max(t_0, \hat{t}_0).$$

□



**Bild 2.3:** Blockdiagramm der System- und Beobachterkonfiguration

Bild 2.3 zeigt die in dieser Arbeit verwendete System- und Beobachterkonfiguration in Signalfussdarstellung. Dabei werden mit  $x$  die System- und mit  $\xi$  die Beobachterzustände bezeichnet. Hier wird – im Unterschied zu vielen anderen Veröffentlichungen – mit der Messabbildung  $\hat{z}$  gearbeitet und gefordert, dass der Messabbildungsfehler  $\tilde{z}$  konvergent und gleichmäßig fehlerstabil ist.

Von der Forderung nach Fehlerstabilität und Konvergenz abgesehen, weist die hier verwendete Definition im Vergleich zu anderen Definitionen noch folgende weitere Besonderheiten bzw. Verschärfungen auf:

- Kausalität als Voraussetzung im Beobachterkonzept garantiert, dass keine zukünftigen Signale für die Rekonstruktion benötigt werden [353].
- Der Beobachter wird vom Zustands- auf den Zustandsabbildungsbeobachter verallgemeinert [105].
- Die Definition enthält implizit die Forderung, dass das System  $\Sigma$  kein System mit endlicher Fluchtzeit<sup>4</sup> ist. Für Systeme mit endlicher Fluchtzeit ist die Forderung nach asymptotischer Konvergenz hinfällig. Ein Beispiel eines solchen Systems ist  $\dot{x} = -x^2$  mit der entarteten Lösung  $x(t) = \frac{1}{t+1/x_0}$  für negative Werte  $x_0$ .

In der folgenden Anmerkung wird gezeigt, dass Konsistenz Bestandteil der Forderung nach Fehlerstabilität ist.

### Anmerkung 2.1. Fehlerstabilität sichert Konsistenz

Da der Beobachterfehler gleichförmig global asymptotisch stabil ist, existiert eine Klasse- $\mathcal{KL}$ -Funktion<sup>5</sup>  $\beta(x_0, t - t_0)$ , sodass gilt

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \beta(\tilde{x}_0, t - t_0).$$

Wegen  $\beta(0_n, t - t_0) = 0$  folgt damit unmittelbar die Konsistenz.  $\square$

## 2.3 Voraussetzungen für den Beobachterentwurf

Während im vorigen Abschnitt die Frage behandelt wird, was einen Beobachter überhaupt ausmacht, geht es hier um die Frage, für welche Systeme die Zustände eindeutig aus Ein- und Ausgangssignalen rekonstruiert werden können, was also die strukturellen Anforderungen an ein System sind. Zunächst werden Kriterien für LTI-Systeme vorgestellt, anhand derer die Möglichkeit des Beobachterentwurfs überprüft werden kann. Ferner wird herausgearbeitet, dass es sich bei der Beobachtbarkeit nur um eine hinreichende, nicht aber notwendige Bedingung für den Beobachterentwurf handelt. Des Weiteren wird auf zusätzliche Schwierigkeiten beim Entwurf von Beobachtern für nichtlineare Systeme und Unterschiede

<sup>4</sup>Ein System mit endlicher Fluchtzeit ist ein System, dessen Lösungen in endlicher Zeit unendlich sind. Sie haben damit eine aggressivere Instabilität als instabile LTI-Systeme, deren Lösungen in unendlicher Zeit unendlich werden.

<sup>5</sup>Bei einer Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion handelt es sich um eine stetige, streng monoton wachsende Funktion  $f_1(x)$  mit  $x \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $f_1(0) = 0$ . Sie gehört ferner zu der Klasse  $\mathcal{K}_\infty$ , wenn sie koerziv ist, d. h. es gilt  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Eine Funktion  $f_2(x, t)$  gehört zu den Funktionen der Klasse  $\mathcal{KL}$ , wenn sie bzgl. des ersten Arguments zu den Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktionen gehört und wenn sie bzgl. des zweiten Arguments monoton fallend ist und ferner gilt:  $f_2(x, t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

zwischen linearen und nichtlinearen Systemen hingewiesen. Abschließend werden artverwandten Konzepte zur Beobachtbarkeit vorgestellt.

### 2.3.1 Grundlegende Konzepte für LTI-Systeme

KALMAN beschäftigte sich in [179] erstmals mit der Frage, wann aus Ein- und Ausgangssignalen eines Systems die Zustände rekonstruiert werden können, und führte damit das Konzept der Beobachtbarkeit ein. Das Kriterium überprüft anhand des Rangs, ob aus dem Ausgang und seinen  $(n - 1)$  rechtsseitigen Ableitungen Informationen über sämtliche Zustände gewonnen werden können. Das ist nur der Fall, wenn die dabei auftretende Matrix vollen Rang besitzt. In Tabelle 2.1 sind neben dem KALMAN-Beobachtbarkeitskriterium andere gängige Kriterien aufgeführt.

Kriterium	Bedingung	Quelle
KALMAN	$\text{Rang} \left[ C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T \right]^T = n$	[179]
HAUTUS	$\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{bzw.}$ $\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i(A)I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad i = 1, \dots, n$	[141]
GRAM'sche Beobachtbarkeitsmatrix	$\forall t > 0 : A \text{ HURWITZ} + \text{Rang } G_0(t) = n$ mit $G_0(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$ für $t_\infty$ : Lösung der LYAPUNOV-Gl. $A^T G_\infty + G_\infty A = -C^T C$	[212]
PBH-Eigenvektortest <sup>6</sup>	$\nexists p \neq 0_n : Ap = \lambda p$ und $p \in \mathcal{N}(C)$ oder in Worten: Es existiert kein Eigenvektor von $A$ , der senkrecht auf den Zeilen von $C$ steht.	[178, 278]
Polkürzbarkeit	keine Pol-Nullstellen-Kürzung möglich bei $G(s) = C(sI - A)^{-1} = C \frac{(sI - A)_{\text{adj}}}{\det(sI - A)}$	[245, S. 624]

**Tabelle 2.1:** Übersicht der gängigen Beobachtbarkeitskriterien

Das KALMAN-Beobachtbarkeitskriterium kommt ohne Bestimmung der Eigenwerte aus. Aus der entsprechenden Matrix lässt sich ferner auf den Unbeobacht-

<sup>6</sup>Der Begriff des PBH-Eigenvektortests wurde in [178] eingeführt und den Arbeiten von POPOV [257], BELEVICH [23, S.413] und HAUTUS [141] zugeordnet. Für Diskussionen über weitere Veröffentlichungen, denen das Kriterium zugeschrieben wird, sei auf [178, S. 135] verwiesen.

barkeitsraum schließen. Aus dem Rangtest nach HAUTUS lässt sich bestimmen, welche Eigenmode nicht beobachtbar ist. Die GRAM'sche Beobachtbarkeitsmatrix setzt eine HURWITZ-stabile Dynamikmatrix  $A$  voraus, und es bedarf der Lösung eines Integrals. Der PHB-Eigenvektortest überprüft, ob kein rechtsseitiger Eigenvektor bzw. keine Eigenvektorspalte von  $A$  orthogonal zu  $C$  ist. Liegt ein Eigenvektor von  $A$  im Nullraum von  $C$ , so sind seine Auswirkungen am Ausgang nicht sichtbar und das System ist folglich nicht beobachtbar. Bei Überprüfung der Polkürzbarkeit muss eine numerisch nicht immer einfache Nullstellensuche durchgeführt werden.

Die Beobachtbarkeit ist eine hinreichende, aber nicht notwendige Voraussetzung für die Existenz eines linearen Beobachters für ein lineares System. Als notwendige Voraussetzung gilt die Detektierbarkeit<sup>7</sup>. Dabei ist ein LTI-System genau dann detektierbar, wenn alle nichtbeobachtbaren Moden<sup>8</sup> asymptotisch stabil sind. Zur Überprüfung der Detektierbarkeit kann z. B. ein modifiziertes HAUTUS-Kriterium herangezogen werden, indem der Test bzgl. aller  $\lambda_i(A)$  auf jene mit  $\Re\lambda_i(A) \geq 0$  beschränkt wird. Einen Beobachterentwurf eines detektierbaren, aber nichtbeobachtbaren Systems zeigt folgendes Beispiel.

### Beispiel 2.6. Beobachter für ein detektierbares, aber nichtbeobachtbares System

Die Beobachtbarkeit des Systems

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}_A x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0$$

$$y = [0 \ 1] x$$

ist nach dem KALMAN-Kriterium

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$$

nicht gegeben. Mit Hilfe der KALMAN-Zerlegung kann das System in den beobachtbaren und nichtbeobachtbaren Teil unterteilt werden (siehe Anhang). Nach Satz 3.1 auf S. 51 kann dann der Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} ([0 \ 1] \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

entworfen werden, bei dem der Eigenvorgang des nichtbeobachtbaren Zustands aufgrund des Eigenwerts in der negativen komplexen Halbebene abklingt.  $\square$

<sup>7</sup>Der englische Begriff detectability wird in der deutschsprachigen Literatur vereinzelt auch mit Entdeckbarkeit übersetzt (z. B. [26]).

<sup>8</sup>Moden sind Elementarlösungen von  $\dot{x} = Ax$ , z. B.  $e^{\lambda_i t} v_i$  bei  $\lambda_i, v_i$  Eigenpaaren von  $A$  im Fall einer diagonalisierbaren Matrix.

### 2.3.2 Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Systemen

Bei linearen Systemen kann die Beobachtbarkeit aufgrund der Trennung in Eigenvorgänge und erzwungene Vorgänge anhand der Beschreibungen in Tabelle 2.2 mit wenig Aufwand überprüft werden. Die Trennung gelingt für nichtlineare Systeme nicht in gleichem Ausmaß. Hier werden vier Themen behandelt, die beim Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme berücksichtigt werden müssen. Diese werden an vier Beispielen verdeutlicht, von denen die ersten beiden selbst entwickelt und die anderen beiden aus der Literatur aufgegriffen werden.

#### 1. Abhängigkeit der Beobachtbarkeit vom Eingang

Während bei LTI-Systemen der Eingang keinen Einfluss auf die Beobachtbarkeit nimmt, trifft das auf nichtlineare Systeme nicht zu. Im Speziellen wird von Null-Eingangs-Beobachtbarkeit gesprochen, wenn das System (1.2) für  $u \equiv 0_m$  beobachtbar ist.

#### Beispiel 2.7. Beobachtbarkeit abhängig vom Eingang

Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix} x, & x(0) &= x_0 \\ y &= [1 \ 1] x \end{aligned}$$

ist beobachtbar, wenn der Eingang nicht das singuläre Signal  $u \equiv 1$  ist.  $\square$

Die Abhängigkeit vom Eingang geht soweit, dass Autoren die Anforderungen an ein System hinsichtlich der Beobachtbarkeit nach strukturellen Anforderungen an das System selbst (nämlich die Beobachtbarkeit) und nach Anforderungen an das Eingangssignal unterscheiden. Letztere werden in [29] auch analytische Anforderungen genannt. Dort wird auch gezeigt, dass durch folgende Bedingung an das Eingangssignal die Beobachtbarkeit garantiert ist

$$\begin{aligned} \exists t_0, T : \forall t \geq t_0, \forall x_t \neq x'_t : \\ \int_t^{t+T} \left\| h(\chi_u(\tau, x_t)) - h(\chi_u(\tau, x'_t)) \right\|_2^2 d\tau > \gamma (\|x_t - x'_t\|_2) \end{aligned}$$

mit  $\chi_u(\cdot)$  als Lösung der Differenzialgleichung (1.2a) und  $\gamma$  als Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion.



Diese Bedingung an das Eingangssignal weist Parallelen zur Parameteridentifikation auf, bei der mit fortwährender Anregung (Persistent Excitation) das Eingangssignal so viel Anregung liefern muss, um eine sichere Identifikation zu garantieren.

2. Beobachtbarkeit ist nur temporär gegeben.

An folgendem Beispiel wird gezeigt, dass Beobachtbarkeit bei nichtlinearen Systemen u. U. nur temporär gilt.

**Beispiel 2.8. Verlust der Beobachtbarkeit**

Sobald bei dem System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0$$

$$y = \begin{bmatrix} \max(x_2, 0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit  $u(t) = 1$  der Wert von  $x_2$  negativ wird, geht die Beobachtbarkeit durch Verwendung des  $\max$ -Operators von Ausgangswert und dem Wert Null für alle negativen Ausgangswerte verloren und ist solange nicht gegeben, bis der Wert wieder positiv wird.  $\square$

3. Beim Reglerentwurf gilt das Separationsprinzip nicht.

Bei linearen Systemen erlaubt das Separationsprinzip, dass die Pole von Regler und Beobachter unabhängig voneinander vorgegeben werden können (Beweis z. B. in [212, S. 342]). Dies muss bei nichtlinearen Systemen nicht der Fall sein, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 2.9. Separationsprinzip ist bei nichtlinearen Systemen ungültig [9, 186]**

Für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + (u - x_2)x_1^2 \\ -x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \quad (2.5a)$$

$$y = x_1 \quad (2.5b)$$

stellt  $u = x_2$  eine stabilisierende Rückführung dar. Ferner werde ein reduzierter trivialer Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = -\xi + y^2, \quad \xi(0) = \xi_0$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}$$

herangezogen. Durch das Rückführgesetz mit den beobachteten Zuständen  $u = \hat{x}_2$  entsteht das instabile Regelkreissystem

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^2 \tilde{x}_2 \quad \text{mit } \tilde{x}_2 = \tilde{x}_{20} e^{-t} 1(t) \quad (\text{Beobachterfehlergl.}) \quad (2.6a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2. \quad (2.6b)$$

Um die Instabilität zu erkennen, braucht nur die BERNOULLI-Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - \tilde{x}_2 x_1^2 = -x_1 - x_1^2 \tilde{x}_{20} e^{-t} 1(t) \\ \frac{\dot{x}_1}{x_1^2} &= -\frac{1}{x_1} - \tilde{x}_{20} e^{-t} 1(t) \end{aligned}$$

gelöst zu werden. Per Transformation  $z = -\frac{1}{x_1}$  und LAPLACE-Transformation

$$sZ(s) - z_0 = Z(s) - \tilde{x}_{20} \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow Z(s) = \frac{z_0}{s-1} - \frac{\tilde{x}_{20}}{2(s-1)} + \frac{\tilde{x}_{20}}{2(s+1)}$$

folgt nach Rücktransformation

$$z = z_0 e^t 1(t) - \frac{1}{2} \tilde{x}_{20} (e^t - e^{-t}) 1(t) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\frac{1}{x_{10}} e^t + \frac{1}{2} \tilde{x}_{20} (e^t - e^{-t})}.$$

Wird der Nenner gleich Null gesetzt, kann für zulässige Werte die endliche Fluchtzeit

$$t_{\text{FZ}} = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{x_{10} \tilde{x}_{20}} \right)$$

berechnet werden, die Instabilität zur Folge hat. Wird hingegen anstelle von  $u = \hat{x}_2$  der Eingang als

$$\begin{aligned} u &= w \\ \dot{w} &= -w + y^2 - 2y^5 = -w + x_1^2 - 2x_1^5 \end{aligned}$$

gewählt, so kann über die LYAPUNOV-Funktion

$$V = x_1^4 + x_2^2 + (w - x_2)^2$$

und deren Ableitung

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -4x_1^3\dot{x}_1 - 2x_2\dot{x}_2 + 2(w - x_2)(\dot{w} - \dot{x}_2) \\
 &= -4x_1^3(-x_1 + (w - x_2)x_1^2) - 2x_2(-x_2 + x_1^2) \\
 &\quad + 2(w - x_2)(-w + x_1^2 - 2x_1^5 + x_2 - x_1^2) \\
 &= -4x_1^4 - 4x_1^5(w - x_2) + 2x_2^2 - 2x_1^2x_2 \\
 &\quad + 2(w - x_2)(-2x_1^5 - (w - x_2)) \\
 &= -3x_1^4 - x_2^2 - (x_1^2 - x_2)^2 - 2(w - x_2)^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

globale asymptotische Stabilität erreicht werden.  $\square$

#### 4. Nichtexistenz eines Identitätsbeobachters.

Anders als bei LTI-Systemen impliziert die Beobachtbarkeit nicht die Existenz eines Identitätsbeobachters, wie das folgende Beispiel zeigt.

#### **Beispiel 2.10. Nichtexistenz eines Identitätsbeobachters [330, 331]**

Das System

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x}_1 &= x_1, & x_1(0) &= x_{10} \\
 \dot{x}_2 &= x_2, & x_2(0) &= x_{20} \\
 y &= x_1^3 + x_2^5
 \end{aligned}$$

ist beobachtbar, da aus dem Ausgangssignal und dessen Ableitung die Zustände

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5y - \dot{y})} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt[5]{\frac{1}{2}(\dot{y} - 3y)}$$

rekonstruierbar sind. Allerdings existiert kein Identitätsbeobachter  $\hat{x} = f_{\text{obs}}(\hat{x}, y)$ , weil eine nichtdetektierbare Mode existiert [330, Lemma 1]. Gleichwohl existiert ein allgemeiner Beobachter [331]

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + 9(y - \xi_1), & \xi_1(0) &= \xi_{10} \\
 \dot{\xi}_2 &= -15\xi_1 + 8\xi_2 + 58(y - \xi_1), & \xi_2(0) &= \xi_{20} \\
 \hat{x}_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5\xi_1 - \xi_2)} \\
 \hat{x}_2 &= \sqrt[5]{\frac{1}{2}(\xi_2 - 3\xi_1)},
 \end{aligned}$$

der andere Koordinaten nutzt und dessen Verstärkungsfaktoren  $[9, 58]^T$  so gewählt sind, dass das Fehlerverhalten dem charakteristischen Polynom  $s^2 + s + 1$  entspricht.  $\square$

Die vorangegangenen Beispiele haben die Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Systemen verdeutlicht. Im Folgenden wird das Beobachtbarkeitskonzept in den Zusammenhang mit anderen, artverwandten Konzepten gestellt und Unterschiede aufgezeigt.

### 2.3.3 Artverwandte Konzepte

Tabelle 2.2 zeigt eine Übersicht über weitere, artverwandte Konzepte. Sie hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit und soll als Merkhilfe dienen. Deshalb wird bewusst auf die mathematische Notation verzichtet. Vielmehr soll das Wesen der Konzepte zum Ausdruck gebracht werden, weil die Unterschiede in der mathematischen Schreibweise in der Regel nicht so schnell ersichtlich sind. Die Kriterien für die Beobachtbarkeit und deren artverwandte Konzepte sind i. d. R. an eine bestimmte Systemklasse gebunden und müssen daher an diese angepasst werden. Das hat eine sehr große Anzahl von Kriterien zur Folge, die nur schwer zu überblicken sind, auch wenn der ursprüngliche Grundgedanke klar zu erkennen ist.

Im ersten Block wird auf die Beobachtbarkeit und Detektierbarkeit eingegangen, deren Unterschiede bereits in Abschnitt 2.3.1 verdeutlicht werden. Darüber hinaus wird noch das Konzept der Rekonstruierbarkeit hinzugefügt, dessen Unterschied zur Beobachtbarkeit erst bei zeitdiskreten Systemen existiert. Da in dieser Arbeit zeitkontinuierliche Systeme behandelt werden, werden beide Begriffe synonym verwendet. Außerdem wird noch auf die linearisierte Beobachtbarkeit eingegangen. Hier soll verdeutlicht werden, dass in Einzelfällen die Beobachtbarkeit bei Verwendung der Linearisierungstechniken für Beobachterentwürfe von nichtlinearen Systemen verloren gehen kann.

Der zweite Block geht auf die Problematik ein, dass die Beobachtbarkeit vom Eingangssignal abhängt, auf die in Abschnitt 2.3.2 in Beispiel 2.7 hingewiesen wird. Je nach Problemstellung existieren verschiedene Bedingungen, die dann mit abgeschwächten Bedingungen noch einige Eigenschaften garantieren können. Trotzdem ist die gleichmäßige Beobachtbarkeit die wünschenswerte Eigenschaft, die die Beobachtbarkeit unabhängig vom Eingangssignal garantiert.

Der dritte Block geht auf weitergehende Konzepte ein. Wirkt eine Störgröße auf ein System, garantiert die Störgrößenbeobachtbarkeit, dass sie rekonstruiert werden und letztendlich herausgerechnet werden kann. Die Begriffe der Beobachtbarkeit von Parametern, die Eingangsgrößenbeobachtbarkeit und die Trackbarkeit schaffen die Brücke zum nächsten Abschnitt. Sind sie erfüllt, können die entsprechenden Entwurfsverfahren angewendet werden.

Darüber hinaus existieren viele weitere Konzepte. Bei zeitdiskreten oder Deskriptorsystemen existieren Konzepte, die bei LTI-Systemen nicht existieren (z. B. sind

zeitdiskrete Systeme in der Regel nicht mehr in beliebig kurzer Zeit beobachtbar, sondern erst nach  $n$  Schritten [10]; bei Deskriptorsystemen existieren ferner Begriffe wie die Impulsbeobachtbarkeit<sup>9</sup> [57, 204, 336]). Für Übertragungen der Konzepte auf stochastische und robuste Systeme sei auf [11, 52, 59] bzw. [230] verwiesen.

Beobachtbarkeitskriterien machen eine binäre Aussage darüber, ob Systeme beobachtbar sind oder nicht, und sagen damit nichts über die Qualität der Beobachtbarkeit aus. An diesem Punkt setzen die Beobachtbarkeitsmaße an. Frühe Anfänge hierzu gab es bereits 1963 in [180]. Erweitert wurden sie später in [243]. In [5] werden verschiedene Ansätze diskutiert, wobei besonders auf die Invarianz der Beobachtbarkeitsmaße gegenüber Ähnlichkeitstransformationen aufmerksam gemacht wird.

Da die Abbildungsbeobachtbarkeit im weiteren Verlauf benötigt wird, wird hier näher auf sie eingegangen.

### Anmerkung 2.2. Abbildungsbeobachtbarkeit

Bei Abbildungsbeobachtbarkeit geht es um die Rekonstruktion einer Linearkombination der Zustände, einer Funktion der Zustände oder allgemeiner einer Abbildung der Zustände. Einen klassischen Spezialfall der Abbildungsbeobachtbarkeit stellt die Rekonstruktion einer einzelnen Zustandskomponente in Systemen dar, die selbst nicht vollständig beobachtbar ist. Ein anderer praktischer Fall ist die Beobachtbarkeit der Summe zweier Zustandskomponenten, die gegeben sein kann, obwohl die Einzelkomponenten nichtbeobachtbar sind.

Im Englischen wird die Abbildungsbeobachtbarkeit als „functional observability“ bezeichnet. Da der Begriff „Funktional“ im Deutschen aber anderweitig belegt ist, wird hier auf den Begriff der Abbildungsbeobachtbarkeit zurückgegriffen. Verwendet wird der Begriff des Abbildungsbeobachters bereits in [210], allerdings eingeschränkt als Linearkombination von Zuständen.

Der Unterschied zwischen klassischer und Abbildungsbeobachtbarkeit wird am

System  $\Sigma_{\text{sys}} = \left( \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [0 \ 1 \ 1], [0] \right)$  sichtbar, das nichtbeobachtbar ist, während die Linearkombination  $Lx = [0, 1, 2]x$  beobachtbar ist.

□

---

<sup>9</sup>Durch die algebraische Zwangsbedingung können infolge unterschiedlicher Anfangswerte, die der Zwangsbedingung nicht genügen, Impulse auftreten. Ist das Deskriptorsystem trotz der Impulse beobachtbar, heißt es impulsbeobachtbar.

Konzept	Beschreibung	Quelle, Bsp.
<b>Grundlegende Unterschiede</b>		
Beobachtbarkeit	Der aktuelle Zustand ist aus der Zukunft eindeutig bestimmbar.	
Rekonstruierbarkeit	Der aktuelle Zustand ist aus der Vergangenheit eindeutig bestimmbar. Rekonstruierbarkeit unterscheidet sich von der Beobachtbarkeit nur bei zeitdiskreten Systemen.	
Detektierbarkeit	Trajektorien von zwei Systemen streben bei gleichen Ein- und Ausgangssignalen asymptotisch gegeneinander; auch Input/Output-to-State-Stability (IOSS) <sup>10</sup> genannt.	[191]
Linearisierte Beobachtbarkeit (Detektierbarkeit) in $x_s$	Die Systemlinearisierung in $x_s$ ist beobachtbar (detektierbar).	
<b>Abhängigkeit vom Eingangssignal</b>		
Unterscheidbarkeit	Es existiert wenigstens ein Eingangssignal, sodass die $y$ -Trajektorien zu zwei Zuständen nicht identisch sind. Pendant: Nichtunterscheidbarkeit.	[143]
Schwache Beobachtbarkeit	Es existiert eine Umgebung $U$ um jedes $x$ , sodass es keinen nichtunterscheidbaren Zustand von $x$ in der Umgebung $U$ gibt.	[143]
Lokale schwache Beobachtbarkeit	Es existiert eine Umgebung $U$ für jedes $x$ , sodass für jede Umgebung $V$ von $x$ , die in $U$ enthalten ist, kein nichtunterscheidbarer Zustand von $x$ in $V$ bei Betrachtung von Zeitintervallen existiert, in denen die Trajektorien in $V$ verbleiben.	[143]
Gleichmäßige Beobachtbarkeit	Die Beobachtbarkeit ist unabhängig vom gewählten Eingangssignal. <sup>11</sup>	[29, 37, 128]
<b>Weitergehende Konzepte</b>		
Abbildungsbeobachtbarkeit	Nicht die Zustände selbst, sondern eine Abbildung davon ist zu rekonstruieren.	

Störgrößenbeobachtbarkeit	Auf das System wirkt eine nicht messbare Störgröße, die rekonstruiert werden kann. <sup>12</sup>	[212, 328]
Eingangsrößenbeobachtbarkeit	Ein unbekannter und nicht messbarer Eingang wirkt auf das System. Die Eingangsrößenbeobachtbarkeit garantiert die richtige Zustandsrekonstruktion.	[151, 268]
Partielle Beobachtbarkeit	Nur ein Teil der Systemzustände ist beobachtbar (und von Interesse). <sup>13</sup>	[39]
Strukturelle Beobachtbarkeit	Übertragung der Beobachtbarkeit auf Strukturmatrizen	[212, S. 119]
Beobachtbarkeit von Parametern = Strukturelle Identifizierbarkeit	Es existieren Eingangssignale, die die Parameteridentifikation garantieren.	[24, 301]
Trackbarkeit	Analogon zur Beobachtbarkeit für den Tracker: Statt klassischer Konvergenz wird $\lambda$ - oder Trichterkonvergenz gefordert.	[157, 159]

**Tabelle 2.2:** Übersicht ausgewählter artverwandter Konzepte

So wie es Unterschiede bei dem Beobachtbarkeitskonzept gibt, so existieren auch artverwandte Konzepte zu Beobachtern. Im folgenden Abschnitt wird der Beobachter in einen größeren Zusammenhang mit anderen Zugängen gestellt und Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden aufgezeigt.

<sup>9</sup>Das IOSS-Konzept ähnelt dem bekannten Input-To-State-Stability(ISS)-Konzept.

<sup>10</sup>Der Begriff der gleichmäßigen Beobachtbarkeit wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. In [96] wird z. B. bei dem Pendant, der gleichmäßigen Steuerbarkeit, gefordert, dass das System von einem Zustand in einen beliebig anderen in beliebig schneller Zeit überführt werden kann.

<sup>11</sup>Analog zum Störgrößenbeobachter wird in [2] noch der Begriff des Führungsgrößenbeobachters eingeführt, was auch das Konzept der Führungsgrößenbeobachtbarkeit zur Folge hat. Gemeint ist die Rekonstruktion von internen Zuständen aus dem Führungsgrößenmodell, die nicht direkt am Ausgang gemessen werden können.

<sup>12</sup>Vereinzelt wird für die nichtbeobachtbaren Zustände Stabilität gefordert [8], allerdings ist die partielle Beobachtbarkeit dann nicht von der Detektierbarkeit zu unterscheiden.

Ansatz Größe	determiniert (exakt)	determiniert (approximativ)	stochastisch
<b>Zustand</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• (Zustands-) Beobachter → Konvergenz i. S. der Analysis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tracker → <math>\lambda</math>-Konvergenz</li> <li>• robuster Beobachter</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• KALMAN-BUCY-Filter → Konvergenz i. S. der Stochastik</li> </ul>
<b>Parameter</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parameterbeobachter</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Parameter-Tracker</li> <li>• Parameterbeobachter mit diskretisiertem Parameterraum</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifizierer (Schätzer)</li> <li>• adaptives Notch-Filter</li> </ul>
<b>Zustand u. Parameter</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verbundbeobachter</li> <li>• adaptiver Beobachter</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Partikel-Filter</li> </ul>
<b>sonstiges Signal</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Beobachter mit zusätzlichem Signalmodell</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Beobachter mit unbekanntem Eingang</li> <li>• Störsignalbeobachter</li> </ul>	

**Tabelle 2.3:** Einteilung verschiedener Rekonstruktionsverfahren

## 2.4 Abgrenzung des Beobachterkonzepts zu artverwandten Konzepten

In den vergangenen Jahrzehnten wurden für unterschiedliche Anwendungen eine ganze Reihe von Rekonstruktionsverfahren entwickelt. In Tabelle 2.3 sind sie nach der zu rekonstruierenden Größe und den verwendeten Ansätzen eingeteilt. Je nach Ansatz sind verschiedene Konvergenzbetrachtungen erforderlich. Leere Felder bedeuten, dass für diese Problemstellung kein Entwurfsverfahren bekannt ist.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf determinierten Zugänge. In den folgenden drei Abschnitten wird das Beobachterkonzept vom Tracker- und Filterkonzept abgegrenzt und gleichzeitig auf die wichtigsten Beobachterdefinitionen für das vierte und fünfte Kapitel eingegangen.

Hierfür behandelt der erste Abschnitt die Beobachter mit unbekanntem Signalen. Dabei wird beim Tracker die unmodellerte und/oder unbekannte Dynamik als unbekanntes Signal angenommen und der Bezug zum robusten Beobachter hergestellt. Beim Störgrößenbeobachter, bei dem die Dynamik des unbekanntem Signals bekannt ist, wird das unbekanntes Signal rekonstruiert und anschließend im System



wieder subtrahiert, sodass das unbekannte Signal keinen Einfluss auf das System hat. Der Beobachter mit Projektionsverfahren transformiert die Systembeschreibung in den Nullraum des unbekanntes Signals, sodass es keinen Einfluss mehr auf die Rekonstruktion nehmen kann und damit für das System „unsichtbar“ wird. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Abgrenzung zu den Filtern, wobei im Wesentlichen das KALMAN-BUCY-Filter behandelt wird.

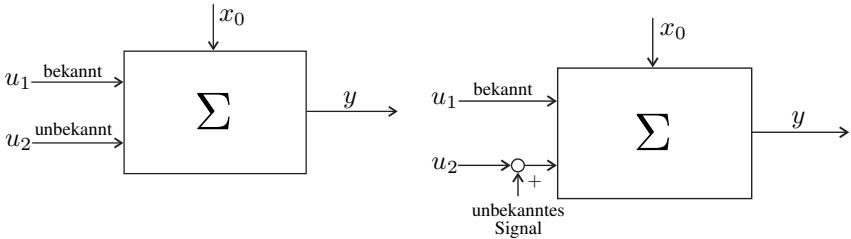
Im dritten Abschnitt wird auf die beobachterbasierte Parameterrekonstruktion und die kombinierte Zustands- und Parameterrekonstruktion eingegangen. Hier werden der adaptive Beobachter und Verbundbeobachter definiert und Unterschiede aufgezeigt.

Auf die folgenden Konzepte aus der Tabelle wird nicht näher eingegangen. Auf den Parameterbeobachter mit diskretisiertem Parameterraum [160], der in der Praxis unter speziellen Bedingungen Vorteile bietet, auf den Identifizierer, der nicht zustandsbasiert ist, sondern die Parameter auf Basis des Ein-Ausgangsverhaltens mittels Gleichungsfehlermethoden identifiziert, auf das adaptive Notch-Filter, das z. B. zur Parameterschätzung von Sinusschwingungen [199,200,255,264] verwendet wird und auf den Partikel-Filter, der nicht explizit für Parameter und Zustände entwickelt worden ist. Gleichzeitig ist er aber das einzige stochastische Konzept, für das entsprechende Entwurfsverfahren bekannt sind [54,304].

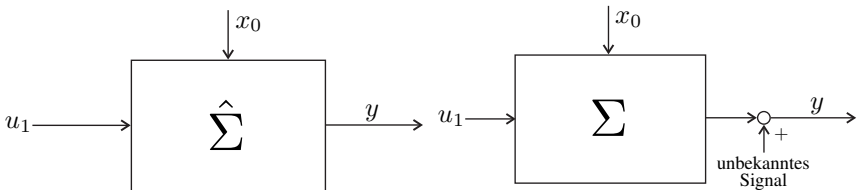
### 2.4.1 Beobachter mit unbekanntes Signalen

Bei den unbekanntes Signalen kann es sich um Störungen oder nichtmessbare Signale handeln. Sie sind Alltag in der regelungstechnischen Praxis, sodass es vielfältige Wege gibt, mit ihnen umzugehen. Sie hängen davon ab, welcher Natur das unbekanntes Signal ist, an welcher Stelle es am System angreift und wie viel über es bekannt ist. Im Folgenden wird angenommen, dass die unbekanntes Signale nicht stochastischer Natur sind. Deshalb kann mit deterministischen Konvergenzmethoden gearbeitet werden. Bei den hier vorgestellten Typen handelt es sich jeweils um einen Beobachterentwurf mit unbekanntes Signalen, der mit approximierten Modellen und störungsfreien Messungen arbeitet.

In Bild 2.4a greift das unbekanntes Signal direkt auf das System, während bei Bild 2.4b der Fall gezeigt wird, bei dem das unbekanntes Signal additiv auf den bekannten Eingang  $u_2$  wirkt. In Bild 2.4c sind entweder Parameter nicht oder nur unzureichend bekannt oder es wird mit einer nicht exakten und nur teilweise bekannten Systemstruktur gearbeitet. Bild 2.4d veranschaulicht den Fall, bei dem das unbekanntes Signal auf den Ausgang wirkt.



(a) Das System hat bekannte und unbekannte Eingänge (b) Das System hat bekannte Eingänge, die teilweise mit unbekanntem Signalen überlagert sind



(c) Genähertes Systemmodell („unbekanntes Signal“ in Struktur und/oder Parametern) (d) Unbekanntes Signal wirkt auf den Ausgang

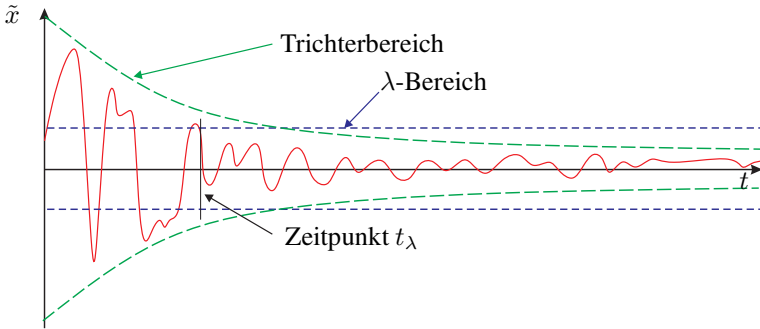
**Bild 2.4:** Mögliche Stellen, an denen unbekannte Signale beim zu beobachtenden System auftreten können

### 2.4.1.1 Unbekanntes Signal infolge unmodellierter Dynamiken: Tracker

Der Begriff „Tracker“<sup>14</sup> geht auf Stabilitätskonzepte für Folgereger (auch Tracking-Regler) zurück, in denen der Fehler zwischen Ausgangs- und Referenzsignal im eingeschwungenen Zustand einen vorgegebenen Wert nie überschreiten darf (so genanntes  $\lambda$ -Tracking, siehe [156]).

Die explizite Verwendung des Wortes Tracker und damit die Adaption der Tracking-Regler in die Beobachter ist erstmalig in [154] verwendet worden. Allgemein beschreibt es ein deterministisches System, das im Gegensatz zu einem Beobachter jedoch nicht mit einem exakten, sondern mit einem approximierten Modell der Strecke arbeitet. Konkreter und anwendbar wird der Tracker bei Anwendung der  $\lambda$ -Konvergenzbedingung, d. h. der Fehler strebt nicht asymptotisch gegen Null, sondern bleibt ab einer bestimmten Zeit  $t_\lambda$  innerhalb einer  $\lambda$ -Umgebung. Darüber hinaus gibt es noch ein zweites Konvergenzkonzept. Statt der festen  $\lambda$ -

<sup>14</sup>Andere Autoren nennen den Tracker vereinzelt auch approximativen Beobachter, siehe z. B. [291]. Der Begriff des approximativen Beobachters ist aber zweideutig, weil er üblicherweise im Zusammenhang mit Approximationen beim Beobachterfehler verwendet wird (z. B. Linearisierung), siehe [250].



**Bild 2.5:** Unterschiede zwischen  $\lambda$ - und Trichter-Tracker beim Verlauf des „Beobachterfehlers“

Grenze wird beim Trichter-Tracking<sup>15</sup> [159] von einem trichterförmigen Verlauf ausgegangen und hier erstmalig auf das Konzept des Trackers erweitert. Aufgrund der Eigenvorgänge wird am Anfang eine größere Abweichung erlaubt, die dann gleich einem Trichter im Laufe der Zeit geringer wird. Bild 2.5 veranschaulicht den prinzipiellen Unterschied der mathematischen Definition zwischen dem  $\lambda$ - und Trichter-Tracker-Konzept.

### Definition 2.2. $\lambda$ -Tracker/Trichter-Tracker

Ein Tracker ist ein kausales System  $\Sigma_{\text{tr}}$ , das für ein deterministisches dynamisches System  $\Sigma_{\text{sys}}$  mit genäherter Struktur und/oder genähernten Parametern aus dessen Ein- und Ausgangssignalen  $u(t)$ ,  $y(t)$  einen Ausgang  $\hat{z}(t) = \phi_{\text{tr}}(\xi, u, y, t)$  rekonstruiert. Es wird von

- einem  $\lambda$ -Tracker gesprochen, wenn gilt

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall t_\lambda \geq 0, \exists \xi_0 \in \mathbb{R}^{n_{\text{tr}}}, \exists \lambda > 0 : \\ |\hat{z}(t) - z(t)| \leq \lambda, \quad t \geq t_\lambda$$

- einem Trichter-Tracker gesprochen, wenn gilt

$$\forall x_0 \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \forall t_\lambda \geq 0, \exists \xi_0 \in \mathbb{R}^{n_{\text{tr}}} : \\ |\phi_{\text{tr}}(\xi, t) - z(t)| \leq F_\varphi \quad t \geq t_\lambda,$$

<sup>15</sup>Im Englischen wird von funnel tracking gesprochen.

wobei  $\varphi(s) > 0$  eine Funktion ist. Ihr reziproker Wert bestimmt den Radius des Trichters, und es gilt für den Fehler  $e$

$$F_\varphi : \varphi(t) \|e\|_2 < 1.$$

□

In folgender Anmerkung wird der Bezug zum robusten Beobachter hergestellt.

### Anmerkung 2.3. Robuste Beobachter

Abweichend von Definition 2.2 ist auch das Konzept des parameterrobusten Beobachters bekannt. In [51] wird ein parameterrobuster Beobachter für eine exakte Struktur bei unbekanntem Parametern mit Hilfe von Input-to-State-Stability-Techniken definiert. Dabei ist zu beachten, dass die Verwendung des Beobachterbegriffs wegen des Wegfalls der Konvergenzforderung nicht mit der Beobachterdefinition 2.1 verträglich ist. □

Am folgenden selbst entwickelten Beispiel wird deutlich, was passiert, wenn Dynamiken unmodelliert bleiben und statt einem Beobachter ein Tracker entwickelt wird.

### Beispiel 2.11. Vergleich eines Trackers mit einem Beobachteransatz [121,165]

Für das Projektionsproblem aus Bild 2.6a wird ein Tracker- mit einem Beobachteransatz verglichen. Hierbei wird der Punkt  $P_{\text{ref}}$  auf die Kurve projiziert. Der Punkt  $P_C$  beschreibt dabei den Punkt auf der Kurve, der senkrecht zu  $P_{\text{ref}}$  steht. Es wird ferner angenommen, dass es sich bei dem Punkt um ein sich bewegendes Fahrzeug handelt, dass einigen physikalischen Bedingungen entsprechen muss. Die Variable  $\sigma$  beschreibt dabei den Kurvenparameter von  $c(\sigma)$ . Der Abstand  $d$  beschreibt die senkrechte Distanz zur Kurve, der Winkel  $\theta$  den Winkel zwischen Fahrzeugausrichtung  $\psi$  und Tangentenvektor der Kurve  $\psi_c$  und  $v$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs. Außerdem werden folgende Variablen verwendet

$$r_c = [x_c(\sigma), y_c(\sigma)]^T \quad \text{Projektionspunkt}$$

$$t_c = \frac{dr_c}{d\sigma} / \left\| \frac{dr_c}{d\sigma} \right\| = \begin{bmatrix} \cos \psi_c \\ \sin \psi_c \end{bmatrix} \quad \text{Tangentenvektor}$$

$$n_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} t_c \quad \text{Normalenvektor}$$

$$\psi_c = \arctan_2(y'_c, x'_c) \quad \text{Pfadwinkel}$$

$$\kappa_c = \frac{x'_c y''_c - x''_c y'_c}{(x'^2_c + y'^2_c)^{3/2}} = \frac{\det \left( \frac{dr_c}{d\sigma}, \frac{d^2 r_c}{d\sigma^2} \right)}{\left\| \frac{dr_c}{d\sigma} \right\|^3} \quad \text{Krümmung}$$

wobei  $x'_c, y'_c$  und  $x''_c, y''_c$  die jeweiligen Ableitung bzgl.  $\sigma$  der  $x$ - und  $y$ -Koordinate bezeichnen. Die Dynamik der genannten Variablen wird gemäß [236] beschrieben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{d} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{\left\| \frac{dr_c}{d\sigma} \right\| (1-d\kappa_c(\sigma))} \\ \sin \theta \\ -\frac{\kappa_c(\sigma) \cos \theta}{1-d\kappa_c(\sigma)} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_c + dn_c \\ \theta + \psi_c \end{bmatrix}.$$

Nach etlichen Schritten folgt für den Kurvenparameter schließlich die Beobachtergleichung

$$\dot{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{t}_c^T \begin{bmatrix} \cos \psi_c \\ \sin \psi_c \end{bmatrix} v + \gamma \hat{t}_c^T (r - \hat{r}_c)}{(1 - \hat{n}_c^T (r - \hat{r}_c) \hat{\kappa}_c) \left\| \frac{dr_c}{d\sigma} \right\|_2}. \quad (2.7)$$

Der Beobachterentwurf kann auf den Kurvenparameter reduziert werden, weil die Größen  $d$  und  $\theta$  hinterher aus dem Kurvenparameter abgeleitet werden können. Die Idee des Trackers beruht auf einem empirischen Entwurf auf Basis eines kontinuierlichen Gradientenabstiegsverfahrens, der durch

$$\dot{\hat{p}} = -\gamma \nabla J(\hat{p}) \quad (2.8)$$

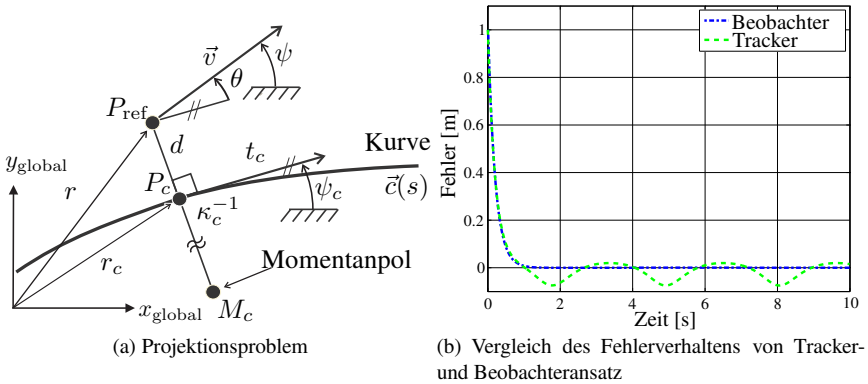
gegeben ist. Dabei steht  $J$  für die Kostenfunktion des unbekanntes Vektors  $p$ ,  $\gamma$  für den sogenannten Dämpfungsfaktor und  $\nabla J(p)$  für den Gradienten von  $J$  bzgl.  $p$ .  $\hat{p}$  selbst ist eine Näherung von  $p$  mit der Eigenschaft, dass jede Ruhelage von (2.8) ein stationärer Punkt von  $J$  ist. Für die Kostenfunktion  $J(s) = \frac{1}{2} \|r - r_c(s)\|^2$  ergibt sich dann

$$\nabla J(s) = (r - r_c(s))^T \left( -\frac{dr_c}{ds} \right) = -t_c^T (r - r_c(s)).$$

Um die Bewegung des Punktes  $P_{\text{ref}}$  zu berücksichtigen, wird das Gradientenabstiegsverfahren um einen Vorsteuerungsterm  $v$  erweitert. Dies führt zu einer einfachen dynamischen Beschreibung des Projektionspunktparameters

$$\dot{\hat{s}} = v + \gamma \hat{t}_c^T (r - \hat{r}_c).$$

Die Vereinfachungen des Trackers werden beim Vergleich des Fehlerverhaltens in Bild 2.6b deutlich. Während bei den beiden exakten Beobachteransätzen die Fehler exponentiell gegen Null abklingen, kommt es beim Tracker nach dem Einschwingen zu einer dauerhaften Schwingung um den Nullpunkt.  $\square$



**Bild 2.6:** Problemstellung sowie Fehlerverhalten im Vergleich

### 2.4.1.2 Dynamik des unbekanntensignals ist bekannt: Störgrößenbeobachter

Im vorherigen Abschnitt wird gezeigt, wie der Beobachterentwurf bei bestimmten Störungen aussieht. Hierbei ist insbesondere von Interesse, wie Zustandskonvergenz in unterschiedlichen Konvergenzbetrachtungen trotz dieser Störungen garantiert werden kann. Beim Störgrößen- und Signalbeobachter wird der Beobachter explizit für unbekannte Größen verwendet. Ist die Dynamik der Störung oder des Signals bekannt, ist der Entwurf eines Störgrößen- bzw. Signalbeobachters für die unbekannte Größe möglich. Anwendung finden derartige Beobachter beispielsweise bei der Störgrößenaufschaltung. Die beobachtete Störgröße wird beim Reglerentwurf direkt berücksichtigt und deren Einfluss auf die Strecke kompensiert. Wenn die Dynamik nicht genau bekannt ist, aber trotzdem ein Konvergenzkonzept greift, ist die Bezeichnung des Störgrößen- bzw. Signal-Trackers sicherlich passender. Der Übersichtlichkeit halber wird sich hier aber auf den Beobachteransatz beschränkt.

#### Definition 2.3. Störgrößenbeobachter

Ein Störgrößenbeobachter ist ein Beobachter mit mindestens einer unbekanntens Störung, deren Dynamik exakt bekannt ist, die auf die Beobachterdynamik wirkt und die zusätzlich zu Zuständen rekonstruiert wird.  $\square$

Die gleichen Methoden können auch für Signale verwendet werden, die nicht explizit als Störgrößen aufgefasst und die mit Hilfe eines Beobachters bzw. -trackers rekonstruiert werden. Dann wird von einem Signalbeobachter bzw. -tracker gesprochen.

### 2.4.1.3 Einsatz von Projektionsverfahren: Beobachter bei unbekanntem Signalen

In der Literatur sind für den Beobachterentwurf bei unbekanntem Signalen, die Einfluss auf das zu beobachtende System haben, zwei unterschiedliche Lösungen bekannt.

Die erste bestimmt den Wert des Signals und berücksichtigt es dann beim Beobachterentwurf, sodass dessen Einfluss auf die Systemdynamik neutralisiert wird. Existiert kein Signalmodell, ist ein Tracker-Ansatz möglich, der eine angenäherte Rekonstruktion zur Folge hat. Für eine solche Art der Berücksichtigung unbekannter Signale wird der Begriff des Störgrößenbeobachters bzw. -trackers aus dem vorherigen Abschnitt verwendet. In die gleiche Richtung gehen auch die auf Sliding-Mode-Methoden basierenden Beobachter für Zustände und unbekanntem Eingänge in [71–74], die oft Anwendung im Bereich der Fehlererkennung und -isolierung finden.

Beim zweiten Zugang werden die Koordinaten des Beobachters derart gewählt, dass die unbekanntem Signale keinerlei Einfluss auf die Beobachterdynamik haben und so die Zustandsrekonstruktion nicht beeinflussen. In der Regel kommen hier Projektionsverfahren zum Einsatz, die die Koordinaten des Beobachters so wählen, dass die Störung keinen Einfluss hat, was durch Projektion der Koordinaten in den Nullraum der Störung erreicht wird. In der Literatur sind diese Beobachter als Beobachter bei unbekanntem Eingängen<sup>16</sup> bekannt. Die folgende Definition nimmt nicht explizit Bezug auf den Einsatz von Projektionsverfahren, sondern beschränkt sich auf Entwurfsverfahren, die ohne genauere Bestimmung des Fehlers auskommen, ohne gleichzeitig approximativ hinsichtlich der Zustandskonvergenz zu sein.

#### Definition 2.4. Beobachter mit unbekanntem Signalen

Ein Beobachter mit unbekanntem Signalen ist ein Beobachter mit mindestens einem unbekanntem Eingang, der eine Zustandsrekonstruktion ohne Bestimmung der unbekanntem Eingänge gewährleistet. □

## 2.4.2 Filter

Im Gegensatz zum deterministischen Beobachterkonzept beruhen Filter auf einem stochastischen Konzept. Dabei sind die Filter in aller Regel deterministische Systeme, auf die zufällige Störsignale einwirken, deren Einfluss es zu reduzieren gilt.

---

<sup>16</sup>Im Englischen ist von Unknown Input Observer (UIO) die Rede. Im Deutschen wird bewusst der Zusatz „bei“ anstelle von „für“ verwendet, damit nicht irrtümlich angenommen wird, dass die Eingänge selbst rekonstruiert werden.

Von der Systemstruktur her betrachtet, unterscheiden sich Beobachter und Filter gemeinhin nicht. Die Unterschiede liegen in der Herleitung (andere Zielfunktionen, bedingt durch zusätzlich zu betrachtende Störsignale) sowie in der Notwendigkeit, andere Konvergenzkonzepte zu verwenden<sup>17</sup>.

Werden die Störsignale als Realisierungen von Zufallsprozessen aufgefasst, so ist auch das betrachtete Zustandssignal eine Realisierung eines Zufallsprozesses. Deshalb ist die Konvergenzuntersuchung für das rekonstruierte Signal nicht im Sinne der Analysis, sondern im Sinne von Zufallsvariablen auszuführen. Dieser Gedankengang wird gelegentlich übersehen.

Speziell für das KALMAN-BUCY-Filter [181] kann die Linearitätseigenschaft in der Konvergenzbetrachtung ausgenutzt werden. Nach dem Zerlegungsgesetz stellt sich der Gesamtverlauf als Summe von Eigenvorgang und erzwungenem Vorgang dar. Die Anfangswerte von System und Filter sind beide deterministischer Natur, da beide Teil eines deterministischen Systems sind. Das Eingangssignal ist ebenfalls deterministisch. Über den KALMAN-BUCY-Beobachter kann Konvergenz im Sinne der Analysis für beliebige Anfangswertkonstellationen nachgewiesen werden. Ferner kann über die Eigenschaften des KALMAN-BUCY-Filters (BLUE-Schätzer<sup>18</sup>) bei identischen Anfangswerten resp. im eingeschwungenen Verhalten die Erwartungstreue des Zustandssignals gezeigt werden, d. h.  $E\{\hat{X}(t) - X(t)\} = 0_n$ <sup>19</sup>. Die Aggregation beider Aussagen liefert die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\hat{X}(t; \hat{x}_0) - X(t; x_0)\} = 0_n.$$

Das KALMAN-BUCY-Filter konvergiert also im Sinne des Erwartungswerts. Eine Verschärfung im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel scheidet, da die Kovarianzmatrix der Zufallsvariablen „Beobachterfehler“ asymptotisch nicht verschwindet.

### 2.4.3 Beobachter für unbekannte Parameter: Adaptiver Beobachter und Verbundbeobachter

Bei Tracker und robustem Beobachter sind Ungenauigkeiten bei den Parametern zwar im Entwurf berücksichtigt, ihr genauer Wert ist jedoch nicht von Interesse. Beim adaptiven Beobachter oder Verbundbeobachter hingegen sind sie Teil des Entwurfs und ihr Wert ist i. d. R. von Interesse. Ein Parameter zeichnet sich im

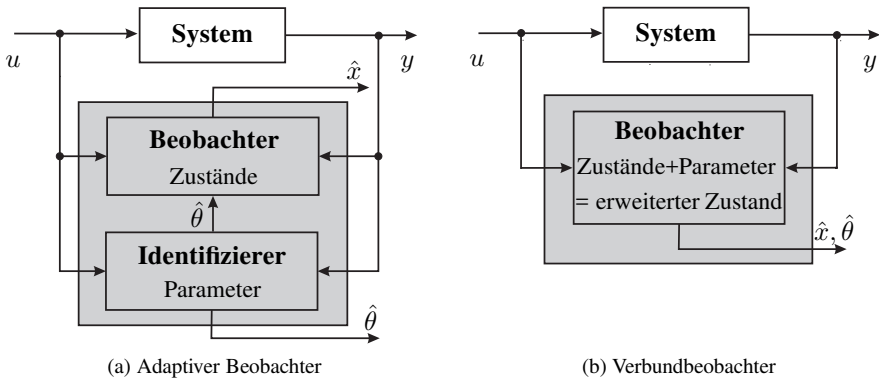
---

<sup>17</sup>In der Stochastik wird zwischen vier Konvergenzbegriffen unterschieden [33]: fast sichere Konvergenz, Konvergenz im  $p$ -ten Mittel, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung.

<sup>18</sup>BLUE steht für Best Linear Unbiased Estimator.

<sup>19</sup>Bei  $\hat{X}(t)$  und  $X(t)$  handelt es sich um Zufallsvariablen.





**Bild 2.7:** Unterschiede zwischen adaptivem Beobachter und Verbundbeobachter

Vergleich zu Zuständen dadurch aus, dass er unabhängig von Eingangsgrößen, Zuständen und Anfangswerten ist, nicht aber zwingend von der Zeit. Oft existieren weitere Annahmen oder Beschränkungen über die Parameter. Da diese Beobachter neben den Zuständen die Parameter adaptieren bzw. rekonstruieren, ist in der Literatur von adaptiven Beobachtern die Rede.

Aufgrund unterschiedlicher Verfahren, die zur Parameterrekonstruktion zum Einsatz kommen, wird hier zwischen adaptiven Beobachtern und Verbundbeobachtern unterschieden und mit folgenden Definitionen gearbeitet.

### Definition 2.5. Adaptiver Beobachter

Ein adaptiver Beobachter ist ein Beobachter mit mindestens einem unbekanntem Parameter und einer unbekanntem Zustandsvariablen. Die Parameterbestimmung erfolgt per Ein- und Ausgangsidentifikation und die Zustandsrekonstruktion geschieht darauf aufbauend mit Hilfe des Gewissheitsprinzips<sup>20</sup>. Adaptive Beobachter werden in parameterkonvergente und -nichtkonvergente Beobachter unterteilt.

□

### Definition 2.6. Verbundbeobachter

Ein Verbundbeobachter ist ein Beobachter mit mindestens einem unbekanntem Parameter und einer unbekanntem Zustandsvariablen. Parameter und Zustände werden als gemeinsamer erweiterter Zustand betrachtet und im Verbund rekonstruiert.

□

<sup>20</sup>Parameter werden als richtig/fehlerfrei angenommen. Im Englischen wird vom certainty equivalence principle gesprochen.

Bild 2.7 verdeutlicht den Unterschied zwischen beiden Konzepten und zeigt, wie unterschiedliche Namen gewählt wurden.

Der Begriff des adaptiven Beobachters wird hier detaillierter verwendet als bisher in der Literatur üblich. In den ersten Veröffentlichungen [46, 187, 206] und später in denen für nichtlineare Problemstellungen [20, 215] wurde unter einem adaptiven Beobachter ein Beobachter verstanden, der Konvergenz zugleich in dem Parameter wie auch im Zustand sicherstellt. Dieser Ansatz wird hier als parameterkonvergenter adaptiver Beobachter bezeichnet. Die Klasse der adaptiven Beobachter wird aber noch erweitert. Da wie bei adaptiven Reglern die Parameterkonvergenz nicht immer erforderlich und lediglich die Konvergenz der Ausgangssignale von Bedeutung ist, wird in diesem Fall von parameternichtkonvergenten adaptiven Beobachtern gesprochen. Die Konvergenz wird auf Ausgangssignale beschränkt und nicht auf die Zustände erweitert, weil Zustandskonvergenz zumindest bei linearen Systemen Parameterkonvergenz impliziert.

In diesem Abschnitt wurde der Beobachter als determiniertes exaktes Konzept vom Tracker als determiniert approximativen Ansatz und Filter mit stochastischem Konvergenzkonzept abgegrenzt und ferner auf die Verwendung des Beobachters bei unbekanntem Signalen und unbekanntem Parametern näher eingegangen. Bevor Kapitel 3 auf die wichtigsten Entwurfsverfahren eingeht, werden in Abschnitt 2.5 verschiedene Klassifikationsmöglichkeiten vorgestellt.

## 2.5 Klassifikation

In der Literatur werden Beobachter nach sehr unterschiedlichen Gesichtspunkten klassifiziert. Typische Kategorien, nach denen Beobachter eingeteilt werden, sind folgende:

- Art des Korrekturterms
- Gültigkeit der Systemklasse
- Eigenschaften von  $f_{\text{obs}}$  und  $\phi_{\text{obs}}$ : glatt, stetig und unstetig (Sliding-Mode)
- Gültigkeit für Anfangszustände: lokal oder global
- Gültigkeit: abhängig oder unabhängig vom Eingangssignal [28]
- Entwurfsmethode: Koordinatentransformation, LYAPUNOV-ähnliche Methoden
- erfinderbezogen: LUENBERGER, KALMAN, THAU usw.
- Signale: Zustand, Parameter, Eingang, Störgröße
- Anzahl der Zustände im Verhältnis zur Systemdimension
- einstellbar / nicht einstellbar

Ein Beobachter kann dabei in mehrere Kategorien fallen. In den folgenden Abschnitten wird sich auf die strukturellen Klassifizierungen beschränkt. Dabei wird

Bezeichnung	Anzahl der Zustände	Besonderheit
Reduzierter Beobachter	$n_{\text{obs}} < n_{\text{sys}}$	
Minimaler Beobachter	$n_{\text{obs}} = n_{\text{sys}} - p_{\text{sys}}$	
Abbildungsbeobachter <sup>21</sup>	$n_{\text{obs}} < n_{\text{sys}}$	Beobachter für Abbildungen von Zuständen
Vollständiger Beobachter	$n_{\text{obs}} = n_{\text{sys}}$	
Identitätsbeobachter	$n_{\text{obs}} = n_{\text{sys}}$	Beobachter mit $\xi(t) = \hat{x}(t)$
Trivialer Beobachter	$n_{\text{obs}} \leq n_{\text{sys}}$	Beobachter mit $\xi_i(t) = \hat{x}_i(t)$ keine Einstellmöglichkeit
Einbettungsbeobachter <sup>22</sup>	$n_{\text{obs}} > n_{\text{sys}}$	
Dynamischer Beobachter	$n_{\text{obs}} = n_{\text{sys}} + n_{\text{ext}}$	Beobachter mit um $n_{\text{ext}}$ Zustände erweiterter Dynamik

**Tabelle 2.4:** Klassifikation der Beobachter nach Zustandsanzahl

in Abschnitt 2.5.1 auf die Dimension des Beobachters im Vergleich zu der Dimension des zu beobachtenden Systems eingegangen. Danach wird sich auf Systeme beschränkt, bei denen die Dimension jeweils identisch ist, und in Abschnitt 2.5.2 wird auf verschiedene Korrekturtermarten bei den sogenannten Identitätsbeobachtern eingegangen. Abschnitt 2.5.3 widmet sich den nichteinstellbaren Beobachtern, die über keinen Korrekturterm verfügen und ebenfalls zu den Identitätsbeobachtern zählen.

### 2.5.1 Klassifikation nach Dimension

Als Klassifikation von Beobachtern wird in dieser Arbeit die Dimension des Beobachters im Verhältnis zu der Dimension des Zustandsraums des Systems gewählt. Existieren darüber hinaus noch weitere Besonderheiten, sind diese entsprechend herausgearbeitet. Tabelle 2.4 zeigt die Übersicht. Entwürfe für bestimmte Systemklassen liegen zumeist als Identitätsbeobachter vor.

<sup>21</sup>Abbildungsbeobachter stehen im Englischen häufig im Zusammenhang mit dem Begriff functional observer. Für weitere Ausführungen sei auf Abschnitt 3.2.3 verwiesen.

<sup>22</sup>In der Literatur wird auch häufig der Begriff der immersionsbasierten Beobachter verwendet.

**Definition 2.7. Identitätsbeobachter**

Ein Identitätsbeobachter ist ein Beobachter nach Def. 2.1, der die gleiche Dimension und gleiche Zustandsvariablen wie das zu beobachtende System aufweist, d. h.  $\hat{x} = \hat{\xi}$ .  $\square$

Besonders ist vor allem die Gleichheit der Trajektorie von Beobachter und System. Unterschieden werden Identitätsbeobachter nach den Ansätzen mit bzw. ohne Korrekturterme. Letztere werden nichteinstellbare Beobachter genannt. Hierauf wird in den nächsten beiden Abschnitten näher eingegangen.

**2.5.2 Klassifikation nach Korrekturterm**

Vom Sonderfall des nichteinstellbaren Beobachters abgesehen, führt die Konsistenzbedingung in die Aufspaltung des Beobachters in einen Simulationsterm und einen Korrekturterm, d. h.

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, t, u) + k(\hat{x}, y, t, u),$$

wobei  $f(\cdot)$  mit Simulationsterm und  $k(\cdot)$  mit Korrekturterm bezeichnet werden. Stimmen bei  $t_0$  also die Anfangszustände von System und Beobachter überein ( $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ ), so muss  $x(t) = \hat{x}(t)$  für alle  $t > t_0$  gelten. Daraus resultiert die Exaktheit des Simulationsterms (d. h. es darf keine unmodellierten Dynamiken geben) und das Verschwinden des Korrekturterms für alle  $t > t_0$ .

Die eigentliche Entwurfsaufgabe liegt vor allem darin, den Korrekturterm geeignet auszulegen. Häufig setzt dieser sich aus der Multiplikation von Verstärkungsfaktor und Beobachterfehler zusammen, weshalb der Korrekturterm auch Beobachterverstärkung genannt wird. Die Tabelle 2.5 zeigt eine Übersicht über die bei Beobachtern zur Anwendung kommenden Korrekturterme.

Die linearen Korrekturterme gehören zum LTI-System, die linear zeitvarianten zu einem linearen zeitvarianten System. Der fehleraffine Korrekturterm gehört zum Erweiterten LUENBERGER-Beobachter, der mit Ein- und Ausgangsaufschaltung und einer Beobachternormalform für nichtlineare Systeme arbeitet.

Die Variante mit transformiertem Ausgang gehört zum Normalformbeobachter, bei dem der Beobachterentwurf des nichtlinearen Systems in transformierten linearen Koordinaten stattfindet und anschließend der Korrekturterm zurücktransformiert wird.

Der Korrekturterm mit Mehrfachkorrektur entstammt einem Entwurf mit mehreren Sensoren und ermöglicht so, dass mehrere Informationsquellen in die Rekonstruktion mit einfließen können. Gleichzeitig kann wiederum ein falscher Sensorwert

Korrekturterm	Charakterisierung	Quelle, Beispiel
$k(\hat{y} - y)$	linear	[211]
$k(t)(\hat{y} - y)$	linear zeitvariant	[96]
$k(\hat{x})(\hat{y} - y)$	fehleraffin	[36]
$g(u, y) + k(\hat{y} - y)$	mit E/A-Aufschaltung	[31]
$k_1(\hat{y} - y) + k_2 \int (\hat{y} - y) dt$	PI-Beobachter	[22, 44, 329]
$k_{-1}\dot{e} + k_0e + k_1 \int e dt$ $+ k_2 \iint e dt^2 + \dots$ mit $e = \hat{y} - y$	PMID-Beobachter <sup>23</sup>	[109, 185]
$k_{-r}e^{(r)} + \dots + k_{-1}\dot{e} + k_0e$ mit $e = \hat{y} - y$	PMD-Beobachter	[290]
$\sum_i k_i(\hat{y} - y_i)$	mit Mehrfachkorrektur	[160]
$k(\gamma(\hat{y}) - \gamma(y))$	mit transformiertem Ausgang	[31, 335]

**Tabelle 2.5:** Übersicht über Korrekturterme

die komplette Rekonstruktion verfälschen, wenn keine entsprechenden Abhilfemaßnahmen existieren.

Der PMD-Beobachter kommt beim optimierungsbasierten Beobachter zum Einsatz, auf den in Abschnitt 3.3.3 näher eingegangen wird. Der PI-Beobachter wird als vorteilhaft gegenüber unmodellierten Dynamiken und unbekanntem Eingängen beschrieben. Der PMID-Beobachter kommt bei Systemen mit unbekanntem Eingängen zum Einsatz. Teilweise sind die Systeme auf Deskriptorsysteme beschränkt.

### Definition des Fehlers

Ob der Fehler als Differenz zwischen Ist- und Sollwert oder umgekehrt definiert wird, ist in den einzelnen Fachdisziplinen nicht einheitlich geregelt. Hier wird der Fehler wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 \text{Fehler} &= \text{Messwert} - \text{wahrer Wert} \\
 &= \text{Istwert} - \text{Sollwert} \\
 &= \text{Schätzwert} - \text{wahrer Wert.}
 \end{aligned}$$

Diese Definition ist nach Ansicht des Autors intuitiv. Ist der Istwert zu niedrig, so entsteht ein negativer Fehler, der durch einen positiven Wert ausgeglichen werden

<sup>23</sup>Das M steht für multiple, d. h., dass mehrere Integratoren verwendet werden können.

muss, bzw. bei positivem Fehler entsprechend ein negativer Wert. Die Definition ist konform mit [168, S. 179], [299, S. 316] und der DIN 1319 (Norm der Messtechnik), steht aber z. B. entgegen der Definition des Regelfehlers gemäß der DIN 19226 und deren Nachfolger DIN IEC 60050-351.

In der Stochastik wird allgemein der Fehler mit  $\varepsilon = y - \hat{y} = \text{Messwert} - \text{prädizierter Wert}$  definiert. Zunächst mag das als Widerspruch zur obigen Definition erscheinen. Jedoch hebt sich dieser Widerspruch auf, wenn das zu Grunde liegende Modell  $y = \varrho(x) + \varepsilon_i$  betrachtet und hierbei  $y$  als Messwert und  $\varrho(x)$  als eigentlich wahrer Wert angesehen wird.

Bei Gleichungsfehlerzugängen ist es üblich, den Fehler  $\varepsilon$  als Differenz zwischen Aus- und Eingangssignalseite zu definieren.

### 2.5.3 Klassifikation nach Einstellbarkeit

In diesem Abschnitt wird zwischen nichteinstellbaren, trivialen und semi-trivialen Beobachtern unterschieden. Der Oberbegriff für triviale und semi-triviale Beobachter ist der nichteinstellbare Beobachter.

#### Definition 2.8. Nichteinstellbarer Beobachter

Ein Beobachter heißt nichteinstellbarer Beobachter, wenn er über keine Parameter zur Beeinflussung der Dynamik verfügt.  $\square$

In welchen Koordinaten ein solcher Beobachter arbeitet, bleibt zunächst offen. Liegt aber der Fall vor, dass System- und Beobachterkoordinaten identisch sind, wird vom trivialen Beobachter gesprochen.

#### Definition 2.9. Trivialer Beobachter

Ein Beobachter heißt trivialer Beobachter, wenn er eine Kopie des global gleichmäßig asymptotisch stabilen Systems ist, die lediglich andere Anfangswerte aufweist.  $\square$

Eine Konsequenz der Definition ist, dass die Systemausgangsgröße nicht auf die Beobachterdynamik wirkt. Beide Systeme sind entkoppelt und laufen parallel zueinander. Die Konsistenzbedingung ist infolge der Kopie bei gleichen Anfangswerten trivialerweise gegeben, während die Stabilitätsforderung schon einschränkend durch die Definition gegeben ist. Der Unterschied zwischen nichteinstellbarem und trivialem Beobachter wird am folgenden Beispiel nochmals verdeutlicht.

**Beispiel 2.12. Nichteinstellbarer, aber semi-trivialer Beobachter**

Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (2.9a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \quad (2.9b)$$

kann nach äquivalenter Umformung  $\dot{\hat{x}}_2 = x_1 - 2x_2 = x_1 - 2x_2 - x_2 + x_2 = -3x_2 + y$  mit Hilfe von

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}}_2 = -3\hat{x}_2 + y, \quad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20} \quad (2.10a)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y - \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.10b)$$

beobachtet werden. □

Der Begriff des semi-trivialen Beobachters wird eingeführt, um die trivialen Beobachter, die eine exakte Kopie des Systems sind und nur mit den Eingangssignalen gespeist werden, von denen zu unterscheiden, die mit Hilfe der Ausgangssignale Multiplikationen zwischen Zuständen vermeiden. Beispiel 2.9 von S. 25 zeigt einen solchen semi-trivialen Beobachter.

**Definition 2.10. Semi-trivialer Beobachter**

Ein Beobachter heißt semi-trivialer Beobachter, wenn er ein trivialer Beobachter für ein zum gegebenen System äquivalentes System ist. □

Die Detektierbarkeit als notwendige Bedingung für den Beobachterentwurf hat ihren Hintergrund in der Existenz von trivialen Beobachtern. Über sie wird erreicht, dass die Eigenvorgänge der nichtbeobachtbaren Zustände des Systems asymptotisch abklingen und somit die Konvergenz von System- und Beobachterzuständen garantiert wird. Der Ursprung des trivialen Beobachters entstammt [40]. In der Praxis, in der oft die geforderte Fehlerfreiheit von Messungen und Modellen großzügiger ausgelegt wird, hat der Beobachter aber neben der zu fordernden Stabilität vor allem den Nachteil, dass sämtliche Störungen beim Ausgangssignal ausgeschlossen werden müssen, weil sonst eine Gleichheit zwischen Beobachter- und Systemzuständen nicht mehr möglich ist. Die daraus resultierende Einschränkung hat zur Folge, dass bei Entwurfsverfahren auf nichteinstellbare Beobachter i. Allg. verzichtet wird.

Der entsprechende Gegenpart zu einem trivialen Beobachter wird bei [29] einstellbarer Beobachter genannt. Bei einstellbaren Beobachtern ist für den Entwurf die Beobachtbarkeit nicht hinreichendes, sondern notwendiges Kriterium.

**Anmerkung 2.4. Spezieller Ansatz bei adaptivem Beobachterzugang [187]**

Der in Abschnitt 5.2.2 vorgestellte adaptive Beobachter weicht ganz von den oben vorgestellten Formen ab. Bei der Zustandsrekonstruktion wird keinerlei Differenzialgleichung benötigt. Stattdessen werden lediglich tiefpassgefilterte Signale aufaddiert, die für die Parameteradaptation vonnöten sind.  $\square$

Abschließend werden im Folgenden die zentralen Bestandteile des zweiten Kapitels zusammengefasst, das sich mit der Einführung in die Beobachtertheorie beschäftigt. Nach den einleitenden Beispielen in Abschnitt 2.1, in denen gezeigt wird, dass das Beobachtersystem mit dem zu beobachtenden System wenig gemeinsam haben muss, wird in Abschnitt 2.2. zunächst auf die existierenden Beobachterdefinitionen eingegangen. Anhand selbst konstruierter Beispiele wird gezeigt, dass die Forderung nach Konvergenz und Fehlerstabilität als sinnvollste erscheint, und daraus dann eine eigene Beobachterdefinition abgeleitet, die dieser Arbeit zugrunde liegt.

Abschnitt 2.3 beschäftigt sich mit den strukturellen Forderungen, die für einen Beobachterentwurf notwendig sind, und gibt eine Übersicht über Kriterien, anhand derer die Beobachtbarkeit überprüft werden kann. Ferner wird auf die Unterschiede zwischen linearen und nichtlinearen Systemen hingewiesen und es werden artverwandte Konzepte der Beobachtbarkeit vorgestellt.

Abschnitt 2.4 grenzt den Beobachter von dem Tracker als determiniert approximativem Zugang und dem Filter als stochastischem Zugang ab. Beim Tracker wird erstmalig das Trichter-Tracking-Verfahren im Zusammenhang mit Beobachtern vorgestellt. Ferner werden an einem selbstkonstruierten Beispiel die Unterschiede zwischen Tracker und Beobachter herausgearbeitet. Des Weiteren wird auf die unterschiedlichen Herangehensweisen bei Beobachtern mit unbekanntem Signalen eingegangen. Bei der kombinierten Zustands- und Parameterrekonstruktion wird mit dem Begriff des Verbundbeobachters der alternative Zugang zu den adaptiven Beobachtern eingeführt. Beim Verbundbeobachter wird der Parameter als weiterer unbekannter Zustand eingeführt, während beim adaptiven Beobachter mit Parameteridentifikationsmethoden gearbeitet wird.

Abschnitt 2.5 stellt drei in dieser Arbeit erstellte Klassifikationen vor, anhand derer verschiedene Beobachter kategorisiert werden können. Beobachter können dabei in mehrere Kategorien fallen.

Im nächsten Kapitel wird auf die Entwurfsverfahren eingegangen. Die in Abschnitt 2.3 vorgestellte Abbildungsbeobachtbarkeit wird bei den reduzierten Beobachtern wieder aufgegriffen. Hier werden Beobachter für Systeme entworfen, bei denen nicht das gesamte System, sondern nur Teile oder Abbildungen von Zuständen rekonstruiert werden können. Ferner werden Entwurfsverfahren für nichtlineare Systeme vorgestellt, die später in Kapitel 5 Grundlage für den Entwurf von Verbundbeobachtern sind.



# 3 Entwurfsverfahren

Nach der Einführung in die Beobachtertheorie im letzten Kapitel, dessen wesentlicher Inhalt auch die Analyse von Systemen war, geht es im dritten Kapitel um den Entwurf von Beobachtern. Dabei beschränkt sich diese Arbeit auf einstellbare Beobachter, da nichteinstellbare Beobachter wegen der in Abschnitt 2.5.3 genannten Nachteile in der praktischen Anwendung nur selten zum Einsatz kommen. Bei der Beschreibung der Verfahren wird besonderer Wert auf eine Vereinheitlichung der Darstellung gelegt, sodass die Hauptbestandteile und Unterschiede der jeweiligen Ideen besser und einfacher zu verstehen sind.

In Abschnitt 3.1 werden der klassische LUENBERGER-Beobachterentwurf für zeitinvariante Systeme und seine Erweiterung auf zeitvariante Systeme vorgestellt. Hervorzuheben ist hierbei die Beweisvoraussetzung, die statt der Beobachtbarkeit nur die Detektierbarkeit fordert und somit die zulässige Systemklasse erweitert. Weiterhin wird in diesem Abschnitt der KALMAN-BUCY-Beobachter für lineare zeitvariante Systeme mittels LYAPUNOV-Theorie hergeleitet. Gegenüber der Herleitung des KALMAN-BUCY-Beobachters über Grenzbetrachtungen am KALMAN-Filter, für dessen Herleitung der komplizierte Apparat der stochastischen Prozesse (Definition von Ableitung stochastischer Signale und diverse Konvergenzbegriffe) benötigt wird, ist der hier verwendete Apparat der LYAPUNOV-Theorie dem Ingenieur deutlich vertrauter. Ferner wird auf die Beobachter mit endlicher Einstellzeit eingegangen. Beispielhaft werden Vor- und Nachteile aufgezeigt und diskutiert.

Abschnitt 3.2 widmet sich dann reduzierten Beobachtern für lineare Systeme, wobei die Ansätze von CUMMING und BURMEISTER gegenübergestellt werden. Die in der Literatur wenig bekannte Darstellung nach BURMEISTER wird hier aufgenommen, da die Idee, den Beobachter unter einer Nebenbedingung zu entwerfen, später in Abschnitt 4 bei den Beobachtern bei unbekanntem Eingängen wieder in anderer Form vorkommt. Bemerkenswert an der Idee von CUMMING ist die Herleitung über einen physikalisch nicht existierenden Eingang. Die hier vorliegende Arbeit vereinheitlicht beide Ideen in der Darstellung und erweitert die Systemklasse um Systeme mit Durchgriff. Die Abbildungsbeobachter stellen einen Sonderfall der reduzierten Beobachter dar und werden in Abschnitt 3.2.3 behandelt. Sie ermöglichen den Entwurf für Systeme, die nichtdetektierbar, sondern nur abbildungsbeobachtbar sind. Damit lassen sich nur noch die beobachtbaren Zustände bzw. eine beobachtbare Abbildung der Zustände rekonstruieren.

In Abschnitt 3.3 wird auf Beobachterverfahren eingegangen, die auf diversen Linearisierungen nichtlinearer Systeme beruhen. In zwei detailreichen Tabellen werden gängige Verfahren für den Beobachterentwurf nichtlinearer Systeme vorgestellt, wesentliche Unterschiede herausgearbeitet und systematisiert. Hierbei wird sich auf Verfahren beschränkt, die auf Abbruch einer TAYLOR-Reihe oder Transformationsverfahren beruhen. Auf Zugänge über LYAPUNOV-Methoden, Sliding-Mode oder Minimierungsverfahren wird nicht eingegangen.

Nach einer Übersicht und Gliederung existierender Verfahren wird in Abschnitt 3.3.1 der Konvergenzeinzugsbereich für den Arbeitspunktbeobachter anhand diverser selbst entwickelter Beispiele diskutiert. Zudem werden Schwierigkeiten bei Aussagen über die Konvergenz des Arbeitspunktbeobachters verdeutlicht.

Der Abschnitt 3.3.2 widmet sich dem Pseudolinearisierungs-Tracker. Das relativ einfach zu entwerfende Verfahren hat in der Literatur bisher wenig Aufmerksamkeit erhalten, zeigt aber konkurrenzfähige Resultate. Wesentliche Ergebnisse sind die herausgearbeitete Entwurfsanleitung und die an einem Beispiel verdeutlichte Behauptung, dass es sich bei dem Pseudolinearisierungs-Tracker um einen Tracker- und nicht um einen Beobachterentwurf handelt.

Der Abschnitt 3.3.3 stellt den optimierungsbasierten Beobachter vor. Dieses Verfahren beruht auf der Minimierung einer Kostenfunktion und verwendet mit dem Gradientenabstiegsverfahren eine Methode, die auch bei der Parameterrekonstruktion im fünften Kapitel zum Einsatz kommt.

In Abschnitt 3.3.4 werden die gängigen Beobachterentwurfsverfahren anhand eines Ball-Balken-Systems verglichen. Hierzu wird eine existierende Arbeit von [173] um einige Verfahren erweitert und die Leistungsfähigkeit verschiedener Verfahren diskutiert. Ebenso wird auf die hier auftretenden Grenzen des Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachterentwurfs eingegangen.

## 3.1 Vollständige Beobachter für lineare Systeme

Die vollständigen Beobachter verfügen über die gleiche Anzahl an Zuständen wie das zu beobachtende System. Der LUENBERGER-Beobachter für LTI-Systeme ist dabei das Standardverfahren. Die Besonderheit hier ist, dass lediglich Detektierbarkeit anstelle der Beobachtbarkeit vorausgesetzt wird. In Abschnitt 3.1.2 wird das Verfahren auf zeitvariante Systeme erweitert. Durch zeitvariante Polvorgabe wird erreicht, dass der Beobachterfehler wie beim Beobachter für LTI-Systeme exponentiell abklingt. Abschnitt 3.1.3 stellt den KALMAN-BUCY-Beobachter vor, der für LTI und linear zeitinvariante (LTV) Systeme anwendbar ist. Ursprünglich hat er seinen Hintergrund in der Optimalsteuerung. Hier wird ein Stabilitätsbe-

weis über LYAPUNOV-Methoden geführt. Abschnitt 3.1.4 stellt Beobachterentwürfe vor, bei denen der Beobachterfehler nach wählbarer Zeit eingeschwungen ist.

### 3.1.1 LUENBERGER-Beobachter für LTI-Systeme

Der LUENBERGER-Beobachter geht auf die Veröffentlichungen [211] (SISO-Systeme) und [209] (MIMO-Systeme) zurück. Seine Struktur ist in Bild 3.1 gezeigt. Beim LUENBERGER-Beobachter handelt es sich somit um einen Identitätsbeobachter, der eine additive lineare Fehlerkorrektur über den Ausgangsfehler vornimmt. Deshalb wird der Beobachter oft in der Darstellung

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - K(\hat{y} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad (3.1a)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (3.1b)$$

beschrieben. Diese Darstellung ist zwar kompakt und macht die Unterteilung des Beobachters in Simulator- und Korrekturterm deutlich, weicht aber von der eingeführten Beobachterdarstellung aus der Definition 2.1 ab und ist zudem so auch nicht in Matlab direkt programmierbar. Die Programmierung in Matlab erfordert gewissermaßen zunächst die Berechnung von  $\hat{y}$  und anschließend die Berechnung der rechten Seite der Differenzialgleichung mit dem zuvor berechneten  $\hat{y}$ . Somit ist aus programmiertechnischer Sicht eine Beobachter-Darstellung gemäß

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \hat{y} = C\hat{x} + Du \quad (3.2a)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - K(\hat{y} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (3.2b)$$

zutreffender. Da die umgekehrte Reihenfolge von der gewöhnlichen systemtheoretischen Darstellung abweicht, wird  $\hat{y}$  in den folgenden Darstellungen vollständig substituiert. Das wiederum führt zwar zu längeren Formeln, hat aber den Vorteil, dass die Darstellung mit der Definition 2.1 verträglich ist, und dass in der Dynamikgleichung des Beobachters nur die rekonstruierten Zustände sowie die bekannten Ein- und Ausgangssignale auftreten.

#### Satz 3.1. LUENBERGER-Beobachter für LTI-Systeme [209, 211]

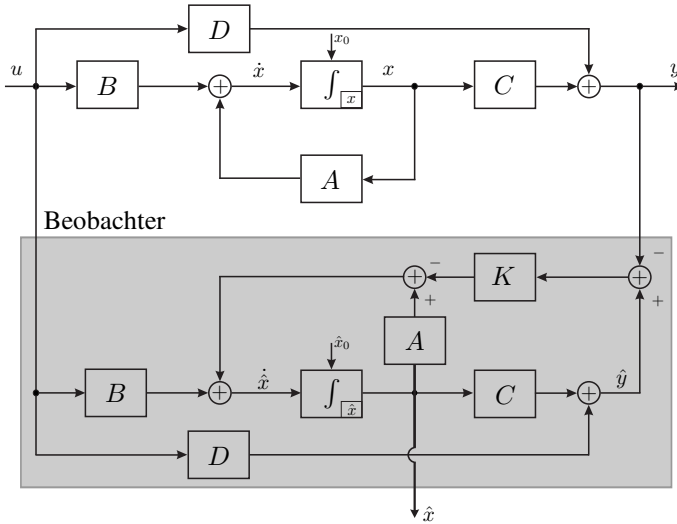
Für jedes detektierbare System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.3a)$$

$$y = Cx + Du, \quad (3.3b)$$

mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  kann ein Identitätsbeobachter vom Typ LUENBERGER-Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + (B - KD)u + Ky, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times p} \quad (3.4)$$



**Bild 3.1:** Struktur des LUENBERGER-Beobachters (nach [97])

mit exponentiell abklingendem Fehler  $\tilde{x}(t) = e^{(A-KC)t} \tilde{x}_0$  entworfen werden.  $\square$

Die Originalarbeit [211] setzt Beobachtbarkeit anstatt von Detektierbarkeit voraus. Deshalb wird hier der Beweis gezeigt, der lediglich Detektierbarkeit voraussetzt.

*Beweis:*

1. Jedes LTI-System besitzt eine spezielle KALMAN-Zerlegung in beobachtbare und nichtbeobachtbare Linearkombinationen der Zustände  $Tx = \begin{bmatrix} \bar{x}_b \\ \bar{x}_{nb} \end{bmatrix}$  mit regulärem  $T$

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_b \\ \dot{\bar{x}}_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0_{n_b \times (n-n_b)} \\ \bar{A}_{12} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b \\ \bar{x}_{nb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_{b0} \\ \bar{x}_{nb0} \end{bmatrix} = Tx_0$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & 0_{p \times (n-n_b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_b \\ \bar{x}_{nb} \end{bmatrix} + Du,$$

wobei  $n_b$  den Rang der Beobachtbarkeitsmatrix angibt [212, S. 99] (aus der allgemeinen KALMAN-Zerlegung mittels Permutation abgeleitet [278]).

2. Das Paar  $(\bar{C}_1, \bar{A}_{11})$  ist dabei vollständig beobachtbar. Für solche Paare  $(\bar{C}_1, \bar{A}_{11})$  ist bekannt [118, 210], dass die Eigenwerte von  $\bar{A}_{11} - \bar{K}_s \bar{C}_1$

beliebig gewählt werden können. Demnach existieren stets Matrizen  $\bar{K}_s \in \mathbb{R}^{n_b \times p}$ , sodass  $\bar{A}_{11} - \bar{K}_s \bar{C}_1$  HURWITZ-stabil mit einstellbaren Eigenwerten ist.

3. Es ist

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{\text{obs}} : \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_b \\ \dot{\hat{x}}_{\text{nb}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0_{n_b \times (n-n_b)} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_b \\ \hat{x}_{\text{nb}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ &\quad - \begin{bmatrix} \bar{K}_s \\ 0_{(n-n_b) \times p} \end{bmatrix} (\hat{y} - y), \quad \begin{bmatrix} \hat{x}_{b,0} \\ \hat{x}_{\text{nb},0} \end{bmatrix} = T \hat{x}_0 \\ \hat{y} &= [\bar{C}_1 \quad 0_{p \times (n-n_b)}] \begin{bmatrix} \hat{x}_b \\ \hat{x}_{\text{nb}} \end{bmatrix} + Du, \end{aligned}$$

ein Beobachter für  $\bar{\Sigma}$  mit der Fehlerdynamik

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - \bar{K}_s \bar{C}_1 & 0_{n_b \times (n-n_b)} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \tilde{x} = \bar{A}_{\text{obs}} \tilde{x}.$$

Da  $\bar{A}_{11} - \bar{K}_s \bar{C}_1$  HURWITZ-stabil ist und  $\bar{A}_{22}$  wegen der vorausgesetzten Detektierbarkeit ebenfalls, folgt die HURWITZ-Stabilität der Blockdreiecksmatrix der Fehlerdynamik.

4. Die Transformation  $\hat{x} = T^{-1} \hat{\hat{x}}$  führt auf das für den Beobachter  $\Sigma_{\text{obs}}$  aus (3.4) benötigte  $K = T^{-1} \begin{bmatrix} \bar{K}_s \\ 0 \end{bmatrix}$ . Die Fehlerdynamik wird demnach durch die Matrix  $A_{\text{obs}} = T^{-1} \bar{A}_{\text{obs}} T$  bestimmt. Da die Ähnlichkeitstransformation die HURWITZ-Stabilität beibehält, klingen die Anfangsfehler exponentiell ab.

■

In der folgenden Anmerkung wird auf die Bestimmung der Verstärkungsmatrix eingegangen.

### Anmerkung 3.1. Bestimmung der Verstärkungsmatrix $K$

Zur Berechnung der Beobacherverstärkung bietet sich die ACKERMANN-Formel [1] an, wobei im Vergleich zur Polvorgabe beim Zustandsreglerentwurf anstelle der Matrizen  $A$  und  $B$  die Matrizen  $A^T$  und  $C^T$  bei vollständig beobachtbaren Systemen zu wählen sind.

Für MIMO-Probleme sei auf [208, S.113ff.] und [35, Anhang B] verwiesen. Neben der ACKERMANN-Formel existieren zur Polvorgabe alternativ noch die BASS-GURA- [19] und die MAYNE-MURDOCH-Formel [219]. Eine Übersicht zu weiteren Entwurfstechniken für LTI-Beobachter findet sich in [254].  $\square$

Ein interessanter Fall ergibt sich, wenn die Eigenwerte von System und Beobachter gleich sind. Dieser Fall impliziert einen trivialen Beobachter und nimmt damit alle Freiheitsgrade bzgl. der Einstellbarkeit (siehe Satz 3.2). Wird die Forderung dahingehend abgeschwächt, dass nur einzelne Eigenwerte von System und Beobachter gleich sind, gehen ebenfalls Freiheitsgrade verloren, die bestimmte Entwurfsverfahren unmöglich machen können. Deshalb wird die Disjunktheit der Eigenwerte beim Entwurf von reduzierten Beobachtern nach BURMEISTER zusätzlich gefordert (dort algebraisch motiviert wegen der eindeutigen Lösbarkeit der SYLVESTER-Gleichung, siehe Abschnitt 3.2.1).

### Satz 3.2. Gleiche Eigenwerte von System und Beobachter führen auf trivialen Beobachter

Für das vollständig beobachtbare System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \\ y = c^T x$$

ist jeder LUENBERGER-Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} - k(c^T \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

mit der Forderung, dass Beobachter- und Systemeigenwerte gleich sind, ein trivialer Beobachter, d. h.  $k = 0_n$ .  $\square$

*Beweis:* Da  $k = 0_n$  offensichtlich die Forderung an das Spektrum erfüllt und  $k = 0_n$  den trivialen Beobachter kennzeichnet, bleibt zu zeigen, dass kein anderes  $k$  die Forderung erfüllen kann. Aus der Eigenwertforderung folgt, dass die charakteristischen Polynome

$$\det(sI_n - A) = \det(sI_n - A + kc^T) \\ = \det(sI_n - A) + c^T(sI_n - A)_{\text{adj}}k \quad \text{nach [279]}$$

gleich sind. Die Division durch  $\det(sI_n - A)$  reduziert den Nachweis auf

$$c^T \frac{(sI_n - A)_{\text{adj}}}{\det(sI_n - A)} k = c^T (sI_n - A)^{-1} k \equiv 0.$$

Der Term stellt eine Übertragungsfunktion dar. Diese kann, da alle Zustände wegen der vollständigen Beobachtbarkeit sichtbar sind, nur dann verschwinden, wenn der Steuervektor  $k$  auf keinen Zustand wirkt, wenn also  $k = 0_n$  gilt. ■

In der folgenden Anmerkung wird an einem selbst entwickelten Beispiel verdeutlicht, was passiert, wenn auf die Annahme der vollständigen Beobachtbarkeit verzichtet wird. In diesem Fall kann  $k \neq 0_n$  werden.

**Anmerkung 3.2. Zur Voraussetzung der vollständigen Beobachtbarkeit**

Die Annahme der vollständigen Beobachtbarkeit ist essentiell, wie das Beispiel

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ([1 \quad -1] \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

mit  $\text{Spek } A = \text{Spek}(A - kc^T) = \{-1, -3\}$  zeigt. Die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\text{Rang } \mathcal{O}(A, c) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

zeigt die nicht gegebene Beobachtbarkeit. □

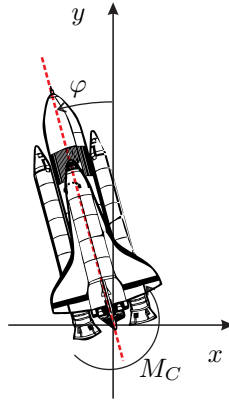
### 3.1.2 LUENBERGER-Beobachter für LTV-Systeme

Für linear zeitvariante Systeme wird der LUENBERGER-Beobachteransatz entsprechend modifiziert. Dabei ist  $K(t)$  so zu wählen, dass eine zeitinvariante Fehlerdynamik entsteht. Das gelingt jedoch nur, wenn das System für alle  $t > t_0$  vollständig beobachtbar ist. Der detektierbare aber nichtbeobachtbare Fall kann ebenfalls analog zum zeitinvarianten Entwurf behandelt werden, allerdings ist dann die Forderung nach einer zeitinvarianten HURWITZ-stabilen Fehlerdynamik nicht mehr erfüllbar. Diese lässt sich nur für den beobachtbaren Teilraum erzwingen. Der nichtbeobachtbare Teilraum behält die Stabilitätseigenschaften des zeitvarianten Systems. Um den Umfang der Darstellung des zeitvarianten LUENBERGER-Beobachters in Grenzen zu halten, aber dennoch die wesentlichen Unterschiede zum zeitinvarianten Entwurf zu verdeutlichen, beschränkt sich die Arbeit hier auf den vollständig beobachtbaren Fall.

**Satz 3.3. LUENBERGER-Beobachter für LTV-MIMO-Systeme**

Für jedes zu allen Zeiten  $t > t_0$  beobachtbare linear zeitvariante System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, & x(t_0) &= x_0, & t > t_0 \geq 0 \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \quad (3.5a)$$



**Bild 3.2:** Querdynamik einer Rakete

kann ein Identitätsbeobachter vom LUENBERGER-Typ

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = (A(t) - K(t)C(t))\hat{x} + (B(t) - K(t)D(t))u + K(t)C(t)y, \\ \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (3.6)$$

mit gleichmäßig exponentiell abklingender Fehlerdynamik  $\dot{\hat{x}} = (A(t) - K(t)C(t))\hat{x}$  mit  $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$  entworfen werden.  $\square$

Die zentrale Idee bei den Beobachtern für LTV-Systeme liegt darin, die Verstärkungsmatrix  $K(t)$  derart zu wählen, dass der Beobachterfehler wie im zeitinvarianten Fall exponentiell abklingt. Hierzu muss das System auf die Beobachternormalform transformiert werden. Für den an die ACKERMANN-Formel anlehenden Beweis für SISO-Systeme sei auf [96] verwiesen, für MIMO auf [319]. Alternative Zugänge zum ACKERMANN-Ansatz, die die Ansätze der Beobachter für LTI-Systeme verallgemeinern, finden sich in [53, 102, 320].

An folgendem selbstkonstruierten Beispiel soll das prinzipielle Vorgehen des Beobachterentwurfs für die Querdynamik einer Rakete aufgezeigt werden. Dabei wird deutlich, dass die Verstärkungsmatrix  $K(t)$  erst über eine Transformation des Systems auf Beobachternormalform berechnet werden kann.

### Beispiel 3.1. Entwurf eines Beobachters für die Querdynamik einer Rakete

Aus Bild 3.2 ergibt sich für die Querdynamik folgende Differenzialgleichung

$$J\ddot{\varphi}(t) + \mu(t)\dot{\varphi}(t) + m(t)g(t)\sin\varphi(t) = M_C(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (3.7)$$



Mit der für kleine Winkel gültigen Linearisierung  $\sin \varphi \approx \varphi$  und

$$\begin{aligned} x_1 &:= \varphi(t) & a_0(t) &:= \frac{m(t)g(t)}{J} \\ x_2 &:= \dot{\varphi}(t) & a_1(t) &:= \frac{\mu(t)}{J} \\ u &:= M_C(t) & b &:= \frac{1}{J} \end{aligned}$$

ergibt sich die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (3.8a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.8b)$$

Für die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix gilt

$$\mathcal{O} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Daraus ergibt sich die LYAPUNOV-Transformationsmatrix<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} T(t) &= \mathcal{C}^{-1} \left( A(t), \mathcal{O}^{-1} \left( c^T(t), A(t) \right) c(t) \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1(t) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1(t) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit  $\mathcal{C}$  als zeitvarianter Steuerbarkeitsmatrix. Der Verstärkungsvektor lautet schließlich

$$\begin{aligned} k(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{0,\text{des}} - a_0(t) \\ \bar{a}_{1,\text{des}} - a_1(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{a}_{1,\text{des}} - a_1(t) \\ \bar{a}_{0,\text{des}} - a_0(t) - a_1(t)\bar{a}_{1,\text{des}} + a_1^2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

□

Der LUENBERGER-Beobachter basiert darauf, das Abklingen des Beobachterfehlers per Polvorgabe zu gestalten. Im folgenden Abschnitt wird mit dem KALMAN-BUCY-Beobachter ein Verfahren vorgestellt, das seinen Ursprung in der Optimalsteuerung hat und dessen Stabilität über einen LYAPUNOV-Zugang gesichert ist.

<sup>1</sup>Nach [278] heißt  $T(t)$  eine LYAPUNOV-Transformationsmatrix, wenn sie auf  $[t_0, \infty)$  stetig differenzierbar und beschränkt ist und eine positive Konstante  $m$  existiert, sodass  $|\det T(t)| \geq m$  gilt (äquivalent:  $T^{-1}(t)$  beschränkt).

### 3.1.3 KALMAN-BUCY-Beobachter

Das KALMAN-Filter bzw. das KALMAN-BUCY-Filter als sein zeitkontinuierliches Pendant werden von Ingenieuren auf vielfältige Weise eingesetzt. Deren Herleitung wird allerdings nicht immer vollständig behandelt. Vielfach betrifft das aus Sicht des Autors Aspekte wie die Definition der Ableitung stochastischer Signale, die Definition von Grenzwerten in der Stochastik, die Ergodizität stochastischer Prozesse oder die exakte Behandlung distributiver Funktionen und die vollständige Darstellung der Optimierung mittels Variationsrechnung. Zudem wird sich oft auch auf zeitinvariante Systeme und den auf unendliche Beobachtungszeit ausgelegten Entwurf beschränkt, was auf die algebraische RICCATI-Gleichung anstelle der RICCATI-Differenzialgleichung führt. Um weiterhin den Herleitungsaufwand des KALMAN-BUCY-Filters gering zu halten, werden zusätzlich Regularitätsannahmen an die Kovarianzmatrizen und Unabhängigkeitsannahmen<sup>2</sup> an die Rauschprozesse getroffen. Letztlich wirken in der Praxis mangels Kenntnis der Kovarianzmatrizen oder aufgrund einer deterministischen Problemstellung die Optimal-eigenschaften des KALMAN-BUCY-Filters nur eingeschränkt. Stattdessen werden die Kovarianzmatrizen mitunter als „empirische Einstellparameter“ zweckentfremdet.

Die genannten Effekte, kombiniert mit den komplizierten Herleitungen, rechtfertigen eine separate Behandlung des KALMAN-BUCY-Beobachters, der – vom Grundgedanken her betrachtet – die gleiche Struktur aufweist wie das KALMAN-Filter, jedoch einer andersartigen Herleitung entstammt. Zur Herleitung bieten sich folgende Zugänge an:

1. Grenzbetrachtung am KALMAN-BUCY-Filter (Betrachtung deterministischer Signale als entartete stochastische Signale) [244].
2. Frequenzbereichsbetrachtung im Fall von LTI-Systemen [117].
3. Dualität zum optimalen Tracking-Regler-Problem für LTV-Systeme [299, S. 376]. Im Gegensatz zum optimalen Folgeregler muss beim KALMAN-BUCY-Beobachter „die Zeit umgedreht“ werden, weil die Anfangswerte des unbekanntem Zustands von Interesse sind und nicht die Endwerte. Ferner muss bezüglich aller möglichen Anfangswerte optimiert werden, weil – anders als beim Folgereglerproblem – hier die Differenz zwischen gewünschtem und realem Endzustand nicht bekannt ist.
4. Zugang über zeitabhängige LYAPUNOV-Funktion.

---

<sup>2</sup>Normalverteilte unkorrelierte Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig.

Hier wird der LYAPUNOV-basierte Zugang vorgestellt, da die LYAPUNOV-Theorie dem Ingenieur weitaus vertrauter ist als der in den anderen Herleitungen benötigte Apparat. Allerdings wird damit lediglich Stabilität, nicht aber Optimalität gezeigt. Der hier vorgestellte Zugang kombiniert Beweisideen anderer Arbeiten [113, 299]. Sein Grundgedanke basiert auf einem zeitabhängigen quadratischen LYAPUNOV-Ansatz. Gegenüber den Zugängen aus der Variationsrechnung für LTV-Systeme, in denen der Stabilitätsnachweis weitgehend weggelassen wird, wird hier direkt gleichmäßige exponentielle Stabilität gezeigt. Sie wird zwar durch Zusatzbedingungen auch für Probleme gesichert, die sich auf die algebraische RICCATI-Gleichung beziehen, allerdings ist dann die Aussage nur für LTI-Systeme gültig. Die Problematik vieler Beweise zum KALMAN-BUCY-Beobachter wird in der Äußerung von GAUTHIER in [113, S. 113] deutlich, wonach die bisherigen Beweise – wenn überhaupt geführt – zur positiven Definitheit der Lösung der RICCATI-Differenzialgleichung mathematisch nicht stringent sind. Ferner belegen die zahlreichen Veröffentlichungen hinsichtlich Voraussetzungen, Modifikationen und Gegenbeispielen zur algebraischen RICCATI-Gleichung (Überblick in [249]) die Schwierigkeiten, die bereits bei LTI-Systemen auftreten.

#### Satz 3.4. KALMAN-BUCY-Beobachter

Für ein System (3.5) kann der KALMAN-BUCY-Beobachter

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs}} : \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - P(t)C^T(t)R(C(t)\hat{x}(t) - y(t)), \\ \hat{x}(t_0) &= \hat{x}_0 \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= P(t)A^T(t) + A(t)P(t) - P(t)C^T(t)RC(t)P(t) + Q, \\ P(t_0) &= P_0 \succ 0_{n \times n}. \end{aligned} \quad (3.12b)$$

mit  $R \succ 0_{p \times p}$  und  $Q \succ 0_{n \times n}$  unter der Voraussetzung, dass  $(C(t), A(t))$  für alle  $t > t_0$  detektierbar ist, entworfen werden und zeigt eine globale gleichmäßige exponentielle Fehlerdynamik.  $\square$

*Beweis:* Zum Nachweis der globalen gleichmäßigen exponentiellen Stabilität wird eine zeitvariante LYAPUNOV-Funktion  $V(x, t)$  für das Fehlersystem benötigt, für die gilt [184, Satz 4.10]

$$k_1 \|\tilde{x}\|^2 \leq V(\tilde{x}, t) \leq k_2 \|\tilde{x}\|^2 \quad (3.13a)$$

$$\dot{V}(\tilde{x}, t) \leq -k_3 \|\tilde{x}\|^2. \quad (3.13b)$$

Wird LYAPUNOV-Funktionskandidat

$$V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T P^{-1}(t)\tilde{x} \quad \text{mit} \quad V(0_n, t) = 0 \quad (3.14)$$

gewählt, so ist zu zeigen, dass  $P(t)$  für alle  $t > t_0$  positiv definit ist. Die Voraussetzung der Detektierbarkeit aus Satz 3.4 garantiert zunächst, dass die algebraische RICCATI-Gleichung zu (3.12b) eine eindeutige, positiv semidefinite Lösung  $P_\infty$  hat [193], wobei die Aussage durch Variablenvergleich anhand der RICCATI-Gleichung des dualen LQ-Optimalreglerproblems und Ausnutzen der Dualität von Stabilisierbarkeit und Detektierbarkeit ableitbar ist. Da im Satz 3.4 – anders als beim dualen LQ-Optimalreglerproblem –  $Q$  positiv definit gefordert wird, entfällt die zur Eindeutigkeit und positiven Definitheit in [249] zusätzlich erhobene Forderung nach Stabilisierbarkeit von  $(A(t), Q^{\frac{T}{2}})$  mit  $Q = Q^{\frac{T}{2}} Q^{\frac{1}{2}}$  für alle  $t > t_0$ <sup>3</sup>. Ferner wird in [113, Satz 2.18, S. 113] bewiesen, dass

$$\gamma I_n \preceq P(t) \preceq \delta I_n \quad \text{und} \quad \frac{1}{\delta} I_n \preceq P^{-1}(t) \preceq \frac{1}{\gamma} I_n \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.15)$$

gilt. Dabei hängen die Konstanten  $0 < \gamma < \delta$  lediglich von der Zeit  $t_0$  und von  $Q$  und  $R$  ab, nicht aber vom Anfangswert  $P_0$ . Hieraus ist sofort ersichtlich, dass durch Linksmultiplikation mit  $\tilde{x}^T$  und Rechtsmultiplikation mit  $\tilde{x}$  die Bedingung (3.13a) mit  $k_1 = \frac{1}{\delta}$  und  $k_2 = \frac{1}{\gamma}$  folgt. Zum Nachweis, dass der LYAPUNOV-Funktionskandidat in der Tat eine LYAPUNOV-Funktion ist, muss  $\dot{V}(\tilde{x}, t) < 0$  für alle  $\tilde{x} \neq 0$  gezeigt werden. Zur Vorbereitung des Nachweises werden die Fehlerdifferenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} \\ &= A(t)\hat{x} + B(t)u - P(t)C^T(t)RC(t)(\hat{x} - x) - A(t)x - B(t)u \\ &= (A(t) - P(t)C^T(t)RC(t))\tilde{x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

und die Identitätsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{(P(t)P^{-1}(t))}_{=I_n} &= \dot{P}(t)P^{-1}(t) + P(t)\dot{P}^{-1}(t) = 0 \\ \Rightarrow \dot{P}^{-1}(t) &= P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

---

<sup>3</sup>Beim KALMAN-Filterproblem bedarf es hingegen dieser Forderung, da  $Q$  die Kovarianzmatrix des Systemrauschens darstellt und als solche nicht immer als regulär anzunehmen ist. Wirkt umgangssprachlich ausgedrückt ein Rauschprozess auf mehrere Zustandsvariablen, kommt es zu linearen Abhängigkeiten. In der deterministischen Frequenzbereichsbetrachtung für zeitinvariante Systeme ist die Regularitätsforderung an  $Q$  in einer elliptischen Normbedingung versteckt [117, S. 684].

eingeführt. Die Ableitung des LYAPUNOV-Funktionskandidaten führt auf

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\tilde{x}) &= \dot{\tilde{x}}^T P^{-1}(t)\tilde{x} + \tilde{x}^T \dot{P}^{-1}(t)\tilde{x} + \tilde{x}^T P^{-1}(t)\dot{\tilde{x}} \quad \text{mit (3.17)} \\
 &= \dot{\tilde{x}}^T P^{-1}(t)\tilde{x} \\
 &\quad - \tilde{x}^T P^{-1}(t)\dot{P}(t)P^{-1}(t)\tilde{x} + \tilde{x}^T P^{-1}(t)\dot{\tilde{x}}(t) \quad \text{mit (3.16)} \\
 &= \tilde{x}^T \left( A^T(t)P^{-1}(t) - C^T(t)RC(t) \right) \tilde{x} \\
 &\quad - \tilde{x}^T(t) \left( A^T(t)P^{-1}(t) + P^{-1}(t)A(t) \right. \\
 &\quad \left. - C^T(t)RC(t) + P^{-1}(t)QP^{-1}(t) \right) \tilde{x} \\
 &\quad + \tilde{x}^T \left( P^{-1}(t)A(t) - C^T(t)RC(t) \right) \tilde{x} \\
 &= -\tilde{x}^T \left( \underbrace{C^T(t)RC(t)}_{\succeq 0_{n \times n}} + \underbrace{P^{-1}(t)QP^{-1}(t)}_{\succ 0_{n \times n}} \right) \tilde{x} \\
 &\leq -\tilde{x}^T P^{-1}(t)QP^{-1}(t)\tilde{x} < 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0_n \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

und bestätigt ihn als LYAPUNOV-Funktion. Damit ist globale gleichmäßige asymptotische Stabilität nachgewiesen. Um im abschließenden Schritt exponentielle Stabilität über die Gültigkeit von (3.13b) zu zeigen, ist eine Verfeinerung der Ungleichung (3.18) vorzunehmen

$$\begin{aligned}
 &-\tilde{x}^T P^{-1}(t)QP^{-1}(t)\tilde{x} \\
 &\leq \max_{\tilde{x}} \{ -\tilde{x}^T P^{-1}(t)QP^{-1}(t)\tilde{x} \} \\
 &= -\min_{\tilde{x}} \{ -\tilde{x}^T P^{-1}(t)QP^{-1}(t)\tilde{x} \} \\
 &= -\lambda_{\min} \left( P^{-1}(t)QP^{-1}(t) \right) p \|\tilde{x}\|_2^2 \quad \text{aus RAYLEIGH-RITZ-Ungleichung} \\
 &= -\theta_i \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{x}\|_2^2 \\
 &\quad \text{mit } \lambda_{\min}(P^{-1}(t)P^{-1}(t)) \leq \theta_i \leq \lambda_{\max}(P^{-1}(t)P^{-1}(t)) \\
 &\quad \text{OSTROWSKI-Theorem [148, S. 224]} \\
 &\leq -\lambda_{\min}^2(P^{-1}(t)) \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{x}\|_2^2 \\
 &\leq -\frac{1}{\delta^2} \lambda_{\min}(Q) \|\tilde{x}\|_2^2 \quad \text{aus (3.15), Monotoniesatz von WEYL} \\
 &\quad \text{[148, Cor. 4.3.3 auf S. 182]} \\
 &= -k_3 \|\tilde{x}\|_2^2 < 0 \quad \forall \tilde{x} \neq 0_n. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Somit ist Bedingung (3.13b) erfüllt. ■

Handelt es sich nicht um ein zeitvariantes System, für das ein KALMAN-BUCY-Beobachter entworfen wird, führt dies zu einigen Vereinfachungen. Insbesondere reduziert sich der Rechenaufwand um die Berechnung der RICCATI-Differenzialgleichung.

### Anmerkung 3.3. Stationärer KALMAN-BUCY-Beobachter

Für den zeitinvarianten Spezialfall kann prinzipiell mit dem KALMAN-BUCY-Beobachter für LTV-Systeme nach Satz 3.4 gearbeitet werden. Allerdings ist dabei die RICCATI-Differenzialgleichung zu lösen. Darauf kann jedoch verzichtet werden, wenn statt  $P(t)$  mit einem  $P$  gearbeitet wird. Das  $P$  muss dann Ruhelage der RICCATI-Differenzialgleichung sein und wird durch Nullsetzen der linken Seite von (3.12b) unter der Zusatzforderung nach positiver Definitheit errechnet, weil nur solche Ruhelagen von der Differenzialgleichung angenommen werden können. Die daraus resultierende Gleichung

$$0_{n \times n} = AP + PA^T - PC^T Q C P + BR^{-1} B^T \quad \text{mit } P \succ 0_{n \times n} \quad (3.20)$$

trägt den Namen algebraische Filter-RICCATI-Gleichung. Sie hat unter den dann gültigen Voraussetzungen von  $(C, A)$  detekierbar und  $R$  und  $Q$  positiv definit eine eindeutige Lösung.

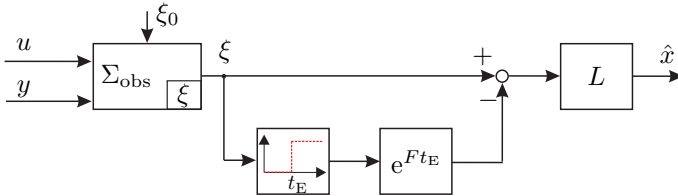
Sowohl beim KALMAN- wie auch beim LUENBERGER-Beobachter ist es nicht möglich, das Einschwingen in einer bestimmten Zeit zu garantieren. Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt und diskutiert, das genau das ermöglicht.

## 3.1.4 Beobachter mit endlicher Einstellzeit

Bei Beobachtern mit endlicher Einstellzeit ist der Fehler – wie der Name schon sagt – nach einer endlichen Zeit  $t_E$  identisch Null. Prinzipiell sind in der Regelungstechnik unterschiedliche Verfahren bekannt, mit denen sich Konvergenz in endlicher Zeit (z. B. [139, 147, 228]) erreichen lässt. Jedoch sind nicht alle Ansätze für kontinuierliche Systeme geeignet und nicht alle haben ihren Hintergrund im Beobachterentwurf. Der erste Beobachteransatz mit endlicher Einstellzeit für kontinuierliche Systeme geht auf [77] zurück. In [224] wird der Ansatz auf LTV-Systeme und in [225] auf nichtlineare Systeme übertragen, wobei die Beobachternormalform jeweils als Ausgangspunkt diente. Ein spezieller Abbildungsbeobachter wird in [260] beschrieben. [288] und [289] zeigen, dass für Systeme mit einem Ausgang, die gleichförmig beobachtbar und LIPSCHITZ-stetig sind, ein Beobachter mit endlicher Einstellzeit entworfen werden kann. Anwendungen von Beobachtern mit endlicher Einstellzeit finden sich bei einem Bandantrieb [223, Kap.

5] mit Modell aus [101], bei einem elastischen doppelgelenkigen Roboter mit Modell aus [251] sowie bei einem zeitvarianten Modell aus [102].

Hier wird der Beobachter mit endlicher Einstellzeit für LTI-Systeme in Satz 3.5 vorgestellt, dessen Konfiguration in Bild 3.3 ersichtlich ist. Die Beweisführung orientiert sich weitgehend an [77].



**Bild 3.3:** Beobachter mit endlicher Einstellzeit (nach [77])

**Satz 3.5. Beobachter für LTI-Systeme mit endlicher Einstellzeit [77]**

Für jedes beobachtbare System (3.3) kann ein Beobachter mit endlicher Einstellzeit  $t_E$

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & F_2 \end{bmatrix}}_{:=F} \xi + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u, \quad \xi_0(t) = \varrho(t) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad -t_E \leq t \leq 0, \quad (3.21a)$$

$$\hat{x}(t) = L \left( \xi(t) - e^{F t_E} \xi(t - t_E) \right) \quad (3.21b)$$

mit  $F_1 = A - K_1 C$ ,  $F_2 = A - K_2 C$ ,  $L = \left[ I_n - e^{F_1 t_E} (e^{F_1 t_E} - e^{F_2 t_E})^{-1}, e^{F_1 t_E} (e^{F_1 t_E} - e^{F_2 t_E})^{-1} \right]$  und mit stabiler Fehlerdynamik entworfen werden.  $K_1$  und  $K_2$  sind die Einstellparameter des Beobachters, die so zu wählen sind, dass  $F_1$  und  $F_2$  HURWITZ-stabil sind und zudem die Inverse in  $L$  existiert.  $\square$

Auf den Beweis wird hier näher eingegangen, weil er nicht standardmäßig ist, zum besseren Verständnis des Entwurfsverfahrens beiträgt und die Totzeitproblematik verdeutlicht.

*Beweis:* Aus Satz 3.1. wird übernommen, dass ein  $K$  existiert, sodass die Eigenwerte beliebig eingestellt werden können, wenn  $(C, A)$  beobachtbar ist. Die Lö-

sung der Fehlerdifferenzialgleichung

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} \dot{x} &= F\xi + \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} (Ax + Bu) \\
 &\text{mit } \xi(t_0), x(t_0) \text{ und } t_0 \geq 0 \\
 &= F(\xi - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x) \\
 &\quad + \left( \begin{bmatrix} A - K_1 C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & A - K_2 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 C \\ K_2 C \end{bmatrix} \right) x \\
 &= F(\xi - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x) \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

lautet

$$\begin{aligned}
 \xi(t) - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x(t) &= e^{F(t-t_0)} \left( \xi(t_0) - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x(t_0) \right) \quad \text{für } t \geq t_0 \\
 &= e^{F t_E} \left( \xi(t - t_E) - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x(t - t_E) \right) \quad \text{für } t \geq t_0 + t_E. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Wegen  $L \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} = I_n$  und  $L e^{F t_E} \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} = 0_{n \times n}$  folgt

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \begin{cases} L \left( \xi(t) - e^{F t_E} \xi_0(t - t_E) \right) & \text{für } 0 \leq t \leq t_E \\ L \left( \xi(t) - e^{F t_E} \xi(t - t_E) \right) & \text{für } t \geq t_E \end{cases} \\
 &= x(t) + L \left( \xi(t) - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x(t) \right) - L e^{F t_E} \left( \xi(t - t_E) - \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \end{bmatrix} x(t - t_E) \right) \\
 &\hspace{20em} \text{für } t \geq t_E \\
 &= x(t) \quad \text{für } t \geq t_E \text{ mit } t_0 = 0. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

□

Um den Unterschied zu einem herkömmlichen LUENBERGER-Beobachter zu verdeutlichen, wird in dem folgenden Beispiel 3.2 der Beobachter mit endlicher Einstellzeit mit einem LUENBERGER-Beobachter verglichen.



**Beispiel 3.2. Vergleich eines Beobachters mit endlicher Einstellzeit mit einem LUENBERGER-Beobachter**

Für das System  $\Sigma_{\text{sys}} := \left( \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{=:A}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:b}, \underbrace{[1 \ 0 \ 0]}_{=:c^T}, [0] \right)$  mit  $x_0 =$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$  wird der Beobachter (3.21) mit  $t_E = 0.1$

$$F_1 = A - k_1 c^T \quad \text{mit} \quad k_1 = [9 \ 33 \ -6]^T \quad (3.25a)$$

$$F_2 = A - k_2 c^T \quad \text{mit} \quad k_2 = [18 \ 228 \ -120]^T \quad (3.25b)$$

$$e^{F t_E} = \begin{bmatrix} 0.2693 & 0.0547 & 0.0516 & 0 & 0 & 0 \\ -1.7864 & 0.7979 & -0.0212 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2917 & 0.0182 & 0.7584 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0098 & 0.0338 & 0.0315 \\ 0 & 0 & 0 & -7.4287 & 0.3619 & -0.4407 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5122 & 0.2698 & 1.0004 \end{bmatrix} \quad (3.25c)$$

$$L = 10^7 \begin{bmatrix} -0.0056 & 0.0010 & 0.0013 & 0.0056 & -0.0010 & -0.0013 \\ -8.3554 & 1.5590 & 2.0071 & 8.3554 & -1.5590 & -2.0071 \\ 7.9692 & -1.4869 & -1.9143 & -7.9692 & 1.4869 & 1.9143 \end{bmatrix} \quad (3.25d)$$

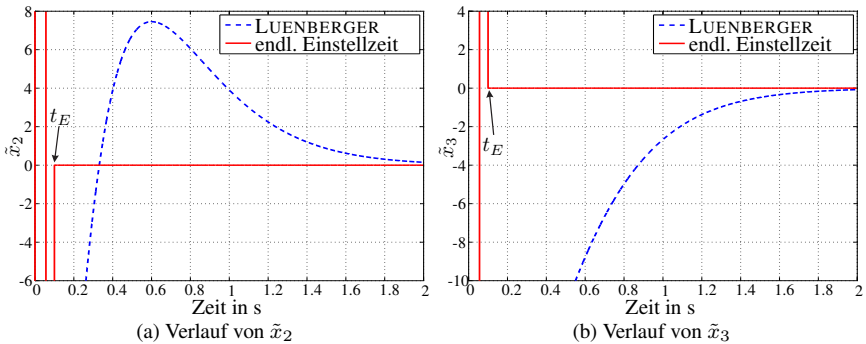
$$\xi_0(t) \equiv 0_6(t) \quad \text{auf} \quad [-t_E, 0] \quad (3.25e)$$

entworfen und mit dem LUENBERGER-Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 9 \\ 33 \\ -6 \end{bmatrix} ([1 \ 0 \ 0] \hat{x} - y), \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

verglichen.

In Bild 3.4 zeigt sich der Unterschied zwischen dem Beobachter mit endlicher Einstellzeit und einem LUENBERGER-Beobachter. Bei ersterem wird die endliche Einstellzeit eingehalten, allerdings kommt es zu einer nichtdifferenzierbaren Stelle bei  $t_E$ . Zudem nimmt die Matrix  $L$  aus (3.25d) bei einer relativ kurzen Zeit  $t_E$  sehr große Werte an. Zu beachten sind die Wertebereiche von  $x_2$  von  $[-1800, 3700]$  und von  $x_3$  von  $[-3600, 1700]$ , die eine vollständige graphische Darstellung nicht ermöglichen, da sie bis zum Faktor 400 über den Werten des



**Bild 3.4:** Vergleich eines Beobachters mit endlicher Einstellzeit mit einem LUENBERGER-Beobachter

LUENBERGER-Beobachters liegen.

Das transiente Verhalten beim LUENBERGER-Beobachter ist typisch. Nach einem anfänglichen Überschwingen klingt der Fehler ab der Zeit von 2 s gegen 0 ab.

Im Gesamtbeispiel ist zu berücksichtigen, dass der Wert  $t_E = 0.1$  bewusst so gewählt wird, um den in den einführenden Bemerkungen erwähnten Größeneffekt zu erzeugen. Ein Vergrößern von  $t_E$  schwächt ihn ab und kann in Verbindung mit zusätzlichen Heuristiken, z. B. Konstanthalten der Werte während der Einstellzeit, das Beobachterverhalten in Regelkreisen verbessern.  $\square$

Das Beispiel hat gezeigt, dass ein Beobachter mit endlicher Einstellzeit auch mit kurzen Einstellzeiten entworfen werden kann. Der wesentliche Vorteil des Abklingens des Fehlers in einer vordefinierten Zeit wird mit einigen Nachteilen erkauft. So ist zunächst die Nichtdifferenzierbarkeit (Bild 3.4) zu nennen, die sich insbesondere beim Zusammenspiel von Beobachter und Regler negativ auf die Stabilität des Gesamtsystems auswirken kann. Gleichfalls nachteilig ist zu bewerten, dass die Norm des Beobachterfehlers innerhalb der Einstellzeit sehr große Werte annehmen kann. In der Regelungstechnik wird ein ähnlicher Effekt als praktisch instabil bezeichnet, da sich das System temporär wie ein instabiles System verhält, obwohl es asymptotisch betrachtet stabil ist. Dieses Phänomen ist ein weiterer Grund, warum das Zusammenspiel von Regler und Beobachter insbesondere bei kurzen Einstellzeiten problematisch sein kann.

Neben der angesprochenen Stabilitätsproblematik bergen die Beobachter mit endlicher Einstellzeit weitere Realisierungsschwierigkeiten. Das Signal muss über die gesamte Totzeitlänge gespeichert werden, die Beobachterordnung ist doppelt so hoch wie die Systemordnung und bei kurzen Einstellzeiten können hohe Werte

in den Entwurfsmatrizen zu numerischen Schwierigkeiten bei Mikrocontrolleranwendungen führen, was in Beispiel 3.2 auf Seite 65 ersichtlich ist.

Losgelöst von der Vor- und Nachteilsdiskussion haben Untersuchungen hinsichtlich des Einflusses von Störungen gezeigt, dass sich der Beobachter mit endlicher Einstellzeit und der LUENBERGER-Beobachter in etwa gleichwertig verhalten [223].

Im folgenden Abschnitt wird auf Beobachter mit reduzierter Ordnung eingegangen. Hier wird sich auf die Verfahren beschränkt, bei denen per Polvorgabe das Einschwingen des Beobachterfehlers entworfen wird. Dies liegt daran, dass KALMAN-BUCY-Beobachter oder Beobachter mit endlicher Einstellzeit für Beobachter mit reduzierter Ordnung nicht in der Literatur bekannt sind.

## 3.2 Reduzierter Beobachter für lineare Systeme

Auf Beobachter reduzierter Ordnung, kurz reduzierte Beobachter, wird bereits in der zweiten Arbeit zu Beobachtern von LUENBERGER [209] hingewiesen. Sie finden ihren Einsatz, wenn die Beobachterdimension möglichst klein ausfallen soll (geringerer numerischer Aufwand) oder wenn ein partieller Zustandsbeobachter bzw. Abbildungsbeobachter zu entwerfen ist. Bei Letzterem liegt in aller Regel keine vollständige Zustandsbeobachtbarkeit vor, sondern lediglich eine Abbildungsbeobachtbarkeit (partielle Beobachtbarkeit kann als Spezialfall angesehen werden). In solchen Fällen ist es stringent, die Simulation nur im Raum der beobachtbaren Zustände und damit in einem Unterraum zu realisieren. Kriterien und Hinweise hierzu sind in Anmerkung 2.2 angegeben.

Dem Vorteil des reduzierten Simulationsaufwands bei reduzierten Beobachtern steht der einmalige Entwurfsmehraufwand durch die erforderlichen Anpassungen gegenüber. Ein weiterer Nachteil der reduzierten Beobachter liegt bei der praktischen Anwendung darin, dass Messstörungen sich direkter als bei vollständigen Beobachtern in den rekonstruierten Zustandswerten widerspiegeln. Das lässt sich auch dadurch plausibilisieren, dass das Störrauschen im Mittel nunmehr auf weniger Zustände wirkt. Die höhere Empfindlichkeit gegenüber Messstörungen liegt an Formel (3.28b) (BURMEISTER) und (3.36b) (CUMMING), die eine Linearkombination von reduzierten Zuständen (indirekte Wirkung der Messstörung) und Ausgangsgrößen (direkte Wirkung) ist. Zudem ist die Störunterdrückung durch die Tiefpassfilterwirkung des Beobachters in den reduzierten Zuständen wegen der reduzierten Ordnung in der Regel weniger ausgeprägt als bei vollständigen Beobachtern.

In diesem Abschnitt werden zwei Verfahren für Beobachter reduzierter Ordnung vorgestellt. Ziel ist es dabei, die Darstellung zu vereinheitlichen, die Unterschiede klar herauszuarbeiten und die Systemklassen, die für den Entwurf in Frage kommen, zu erweitern. Ferner liefern die Verfahren grundlegende Einsichten, die auch in weiteren Entwurfsmethoden Einsatz finden. In Abschnitt 3.2.3 wird auf Abbildungsbeobachter eingegangen, die hier als Spezialfall reduzierter Beobachter interpretiert werden.

Das in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Entwurfsverfahren geht auf einen Lehrbrief von BURMEISTER [43] zurück und ist als reduzierter Beobachter in der Literatur kaum bekannt. Allerdings verwendet [80] in einer Veröffentlichung aus dem Jahr 2010 eine nahezu identische Herangehensweise, die als eine punktuelle Erweiterung der Idee von BURMEISTER angesehen werden kann und sich zugleich als Brücke zum Verfahren in Abschnitt 3.2.2 von CUMMING aus dem Jahr 1969 [58]<sup>4</sup> erweist. Beide Verfahren unterscheiden sich im Wesentlichen in der Reihenfolge der Festlegung der Entwurfsfreiheitsgrade (Transformationsmatrix, Fehlerdynamik) voneinander.

Abschnitt 3.2.3 widmet sich dem Entwurf von Abbildungsbeobachtern, die ohne vollständige Zustandsrekonstruktion auskommen und die bereits von LUENBERGER im Jahr 1966 in [209] sowie ein Jahr zuvor in [19] vorgestellt wurden. Insbesondere bei einer linearen Abbildung besteht die Beobachtertrajektorie aus einer Linearkombination von Systemzuständen und bildet im Gegensatz zu den reduzierten Beobachtern keinen Entwurfsfreiheitsgrad mehr. Da die reduzierten Beobachter für diesen Spezialfall fast unverändert angewendet werden können, konzentriert sich dieser Abschnitt auf die Systemformulierung. Anwendung findet der Abbildungsbeobachter bei dem in Abschnitt 4.1 neuformulierten Beobachteransatz bei unbekanntem Signalen. Durch die transformierte Systemmatrix kann häufig die Beobachtbarkeit verloren gehen, sodass ein Abbildungsbeobachter bei weiterhin existierender Detektierbarkeit Abhilfe schaffen kann.

### 3.2.1 Entwurfsverfahren nach BURMEISTER

Das Entwurfsverfahren von BURMEISTER beruht darauf, dass zur Rekonstruktion von  $x$  direkt  $p$  algebraische Gleichungen über die Systemausgangsgleichung  $y = Cx + Du$  verfügbar sind, weshalb nur noch  $n - p$  Freiheitsgrade rekonstruiert werden müssen. Diese Freiheitsgrade werden in der Beobachtervariablen  $\xi \in \mathbb{R}^{n-p}$  zusammengefasst. Mit Hilfe einer Transformation  $\xi = Tx$  und deren

---

<sup>4</sup>In Verbindung mit der Veröffentlichung von CUMMING wird oft noch [248] genannt. In der Regel wird in der Literatur der Ansatz aber GOPINATH [118] und [66] zugeschrieben. Allerdings wird in [254] darauf hingewiesen, dass die verwendete Transformation bereits in [42] Anwendung gefunden hat, was aber zumeist unbeachtet bleibt.

Kombination mit den  $p$  algebraischen Gleichungen durch Blockmatrixdarstellung wird die Rekonstruktion von  $\hat{x}$  erreicht.

**Satz 3.6. Reduzierter Beobachter nach BURMEISTER**

Die nichtmessbaren Zustände des vollständig beobachtbaren LTI-Systems

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$x(0) = x_0, \tag{3.27a}$$

$$y = Cx + Du, \quad C \in \mathbb{R}_p^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m} \tag{3.27b}$$

lassen sich mit dem reduzierten Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = F\xi + Gu + Hy, \quad F \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)},$$

$$G \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m},$$

$$\xi(0) = Tx_0, \tag{3.28a}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \xi \end{bmatrix}, \quad H \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p},$$

$$T \in \mathbb{R}_{n-p}^{(n-p) \times n} \tag{3.28b}$$

rekonstruieren, solange die Matrizen den Bedingungen genügen:

$$FT - TA + HC = 0_{(n-p) \times n} \tag{3.29a}$$

$$G + HD - TB = 0_{(n-p) \times m} \tag{3.29b}$$

$$F \text{ HURWITZ-stabil} \tag{3.29c}$$

$$F \text{ und } A \text{ haben disjunkte Eigenwerte} \tag{3.29d}$$

$$(F, H) \text{ ist steuerbar.} \tag{3.29e}$$

□

*Beweis:* Die Matrizen  $F$ ,  $G$  und  $H$  werden derart bestimmt, dass der Fehler  $\xi - Tx$  zum einen keinen erzwungenen Vorgang durchläuft, zum anderen schnell gegen 0 abklingt. Dies ist wegen

$$\dot{\xi} - T\dot{x} = F(\xi - Tx) + (FT - TA + HC)x + (G + HD - TB)u \tag{3.30}$$

erfüllt, wenn die ersten beiden Bedingungen (3.29a) und (3.29b) gelten. Die Lösbarkeit der SYLVESTER-Gleichung [17] erfordert, dass  $F$  keinen Eigenwert hat, der gleichzeitig Eigenwert von  $A$  ist (Bedingung (3.29d))<sup>5</sup>. Sonst ist sie frei wählbar.  $H$  kann bis auf die Einschränkung, dass  $(F, H)$  ein steuerbares Paar bilden

<sup>5</sup>Dies führt zu keiner, keiner eindeutigen oder zu einer trivialen Lösung, die nicht erwünscht ist, s. Beispiel 3.3.

muss (Bedingung (3.29e)), ebenfalls frei gewählt werden. Mit der SYLVESTER-Gleichung wird dann die Transformation  $T$  berechnet. Die Matrix  $G$  ergibt sich direkt durch Umstellen aus (3.29b). Der Zustandsfehler  $\tilde{x}$  genügt dem Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} (\hat{x} - x) = \begin{bmatrix} 0_p \\ \xi - Tx \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

und strebt wegen der Regularität von  $\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$  gegen Null, da  $\xi - Tx \rightarrow 0_{n-p}$ . Die Konsistenz ist mit der Wahl von  $\xi_0 = \bar{T}x_0$  gesichert. ■

In der folgenden Anmerkung wird herausgearbeitet, wie der reduzierte Beobachter nach BURMEISTER in der Praxis entworfen wird.

**Anmerkung 3.4. Entwurfsschritte beim reduzierten Beobachter nach BURMEISTER**

1.  $F$  und  $H$  so wählen, dass die Bedingungen (3.29c) – (3.29e) erfüllt sind. Pragmatische Wahl:  $F = \text{diag}(\lambda_i)$  mit  $\lambda_i$  disjunkt zu  $A$ , untereinander disjunkt und HURWITZ-stabil und  $H = 1_{n-p}$  bzw.  $F = \text{Jordan}(\lambda)$  und  $\lambda \neq \lambda_i$  von  $A$  und  $H = [0, \dots, 0, 1]^T$ .
2. Die LYAPUNOV-Gleichung  $FT - TA + HC = 0$  nach  $T$  auflösen.
3.  $G$  gemäß (3.29b) berechnen.
4. Beobachter ergibt sich nach (3.28).

□

Eine weitere Modifikation erfährt der Ansatz, wenn die Zustände nicht nur um additive Eingangs-, sondern darüber hinaus noch über additive Ausgangsgrößen verschoben werden. Dies führt zu folgenden Änderungen.

**Anmerkung 3.5. Erweiterung bei [80]**

Die gleiche Idee wie in Satz 3.6 wird in [80] zum Entwurf eines Abbildungsbeobachters verwendet. Allerdings wird hierbei die Beziehung zwischen Beobachtervariable und System mit

$$\xi = Tx - E(y - Du) \quad (3.32)$$

angesetzt. Die Entwurfsbedingungen (3.29a) und (3.29b) verändern sich in diesem Fall zu

$$0_{(n-p) \times n} = F(T - EC) - (T - EC)A + HC \quad (3.33a)$$

$$0_{(n-p) \times m} = G + HD - (T - EC)B. \quad (3.33b)$$

□

An folgendem selbstkonstruierten Beispiel wird verdeutlicht, wieso die Spektralbedingung (3.29d) notwendig ist.

### Beispiel 3.3. Zur Spektralbedingung bei BURMEISTER

Für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = x_0 \quad (3.34a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x \quad (3.34b)$$

soll der reduzierte Beobachter mit Eigenwerten bei  $-3$  und  $-1$  entworfen werden. Der Entwurf nach BURMEISTER für  $F = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  führt auf die Lösung des Gleichungssystems  $FT - TA + HC = 0$  bzw.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \\ 0 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Aus der vierten Zeile folgt  $t_{21} = \frac{h_2}{4}$ , was wiederum zum Widerspruch zur fünften und sechsten Zeile führt. Das hat die Nichtlösbarkeit des Gleichungssystems zur Folge und damit kann der Beobachter nach BURMEISTER nicht entworfen werden. Ähnliches passiert beim Ansatz nach CUMMING. □

## 3.2.2 Entwurfsverfahren nach CUMMING

Die Grundidee von CUMMING beruht auf einem Beobachterentwurf für ein transformiertes System, in dem die ersten  $p$  Zustandskomponenten bei durchgriffsfreier Betrachtung gerade den Ausgangsgrößen entsprechen. Auf die Simulation dieser

Komponenten kann dann verzichtet werden, und der resultierende Beobachter reduziert sich auf die verbleibenden  $n-p$  Dynamikgleichungen, in denen die  $p$  direkt messbaren Zustandskomponenten durch die Ausgangsgrößen ersetzt werden. Der hier vorgestellte Satz ist gegenüber der Originalveröffentlichung [58] um Systeme mit Durchgriff erweitert worden.

**Satz 3.7. Reduzierter Beobachter nach CUMMING**

Die Zustände des vollständig beobachtbaren Systems (3.27) lassen sich mit dem reduzierten Beobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = F\xi + Gu + Hy, \quad \xi(0) = Tx_0 - K(y(0^+) - Du(0^+)) \quad (3.36a)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \xi + K(y - Du) \end{bmatrix}, \quad (3.36b)$$

mit

$$F = \bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12} \quad (3.36c)$$

$$G = TB - KCB - (\bar{A}_{22}K - K\bar{A}_{12}K + \bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11})D \quad (3.36d)$$

$$H = \bar{A}_{22}K - K\bar{A}_{12}K + \bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11} \quad (3.36e)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1}, \quad \bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad \bar{A}_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}, \\ \bar{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}, \quad \bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)} \quad (3.36f)$$

rekonstruieren, wobei  $T$  lediglich so zu wählen ist, dass  $\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$  regulär wird. Die Matrix  $K$  wird mit einem beliebigem Entwurfsverfahren so bestimmt, dass  $\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12}$  HURWITZ-stabil wird.  $\square$

*Beweis:* Mit der Ähnlichkeitstransformation

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x \quad \begin{array}{l} \zeta_1 \in \mathbb{R}^p \\ \zeta_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)} \end{array}, \quad (3.37)$$

---

<sup>6</sup>Die Zeitangabe  $0^+$  meint den rechtsseitigen Grenzwert von  $t_0$  und ist notwendig, da  $u$  nur als stückweise stetig gefordert wird und zum Zeitpunkt  $t_0$  noch einen Sprung aufweisen kann.



die so zu wählen ist, dass  $\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$  regulär wird, wird das System (3.27a) äquivalent zur Modellklasse

$$\dot{\zeta}_1 = \bar{A}_{11}\zeta_1 + \bar{A}_{12}\zeta_2 + CBu \quad (3.38a)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{A}_{21}\zeta_1 + \bar{A}_{22}\zeta_2 + TBu \quad (3.38b)$$

$$y = \zeta_1 + Du. \quad (3.38c)$$

(3.38c) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} C \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} &= C \left( \begin{bmatrix} C^+ & 0_{n \times (n-p)} \end{bmatrix} + P_{N(C)} (P_{N(C)} + P_{N(T)})^{-1} \begin{bmatrix} -C^+ & T^+ \end{bmatrix} \right) \\ &\quad \text{aus [25, S. 216]} \\ &= \begin{bmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{bmatrix} \quad \text{wegen } CP_{N(C)} = 0_{p \times n}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Das Ableiten von (3.38c) ergibt

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\zeta}_1 + D\dot{u} \quad \text{mit (3.38a)} \\ &= \bar{A}_{11}\zeta_1 + \bar{A}_{12}\zeta_2 + CBu + D\dot{u} \quad \text{mit (3.38b)} \\ &= \bar{A}_{11}(y - Du) + \bar{A}_{12}\zeta_2 + CBu + D\dot{u}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Werden alle  $u$ - und  $y$ -Terme der letzten Gleichung zusammengefasst und als neuer Ausgang interpretiert, und wird ferner  $\zeta_1 = y - Du$  in (3.38b) ersetzt, lautet die neue Systembeschreibung

$$\dot{\zeta}_2 = \bar{A}_{22}\zeta_2 + \bar{A}_{21}(y - Du) + TBu \quad (3.41a)$$

$$\dot{y} - \bar{A}_{11}(y - Du) - CBu - D\dot{u} = \bar{A}_{12}\zeta_2, \quad (3.41b)$$

für die mit klassischen Methoden ein LUENBERGER-Beobachter entworfen werden kann

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2 &= \bar{A}_{22}\zeta_2 + \bar{A}_{21}y + (TB - \bar{A}_{21}D)u \\ &\quad + K(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - D\dot{u} - (CB - \bar{A}_{11}D)u - \bar{A}_{12}\zeta_2), \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei  $\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12}$  HURWITZ-stabil zu wählen ist. Die Existenz einer entsprechenden Matrix  $K$  ist durch die Beobachtbarkeit des Gesamtsystems gesichert, da sie invariant unter Ähnlichkeitstransformationen bleibt. Die zusätzliche Transformation

$$\xi = \zeta_2 - K(y - Du) \quad (3.43)$$

beseitigt die Ableitungen  $\dot{y}$  und  $\dot{u}$  und liefert (3.36a). Die Rückrechnung (3.36b) erfolgt über Komposition von (3.37), (3.38c) und (3.43). Die Stabilität der Dynamik des Fehlers  $\tilde{\zeta}_2$  impliziert die Stabilität von  $\tilde{\xi}$  und wegen der Ähnlichkeitstransformation und additiven Signalverschiebungen die Stabilität von  $\tilde{x}$ . Die Konsistenz ist mit der Wahl von  $\xi_0 = Tx_0 - K(y(0^+) - Du(0^+))$  gesichert. ■

Im Folgenden wird eine praktische Anweisung angegeben, wie ein System derart transformiert wird, dass der reduzierte Beobachter nach CUMMING entworfen werden kann.

**Anmerkung 3.6. Entwurfsschritte beim reduzierten Beobachter nach CUMMING**

1. Wähle  $T$  so, dass  $\begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$  regulär wird. Zum Beispiel  $T$  aus dem transponierten Nullraum von  $C$ , weil dann die Zeilen von  $T$  senkrecht auf den Zeilen von  $C$  stehen.
2. Wende Ähnlichkeitstransformation an  $\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1}$ .
3. Entwerfe Beobachter für  $(\bar{A}_{12}, \bar{A}_{22})$ , sodass  $\bar{A}_{12} - K\bar{A}_{22}$  HURWITZ-stabil ist.
4. Berechne  $F, G$  und  $H$  nach den Formeln (3.36c) - (3.36e).
5. Beobachter ergibt sich nach (3.36a) - (3.36b).

□

### 3.2.3 Abbildungsbeobachter ohne vollständige Zustandsrekonstruktion

Lineare Abbildungsbeobachter rekonstruieren Linearkombinationen der Zustände für Systeme

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du, & C &\in \mathbb{R}_p^{p \times n} && \text{(Messgleichung)} \\ z &= Lx, & L &\in \mathbb{R}_r^{r \times n} && \text{(Abbildungsgleichung).} \end{aligned}$$

Alternativ können die Messgleichung auch als direkte und die Abbildungsgleichung als indirekte Messgröße bezeichnet werden. Nützlich sind derartige Beobachter in Regelungen, in denen das Ausgangssignal eine Linearkombination der Zustände ist.

Abbildungsbeobachter werden unterteilt in jene, die eine vollständige Zustandsrekonstruktion vornehmen, und jene, die mit einer reduzierten Beobachterordnung auskommen. Bei Ersteren kann ein herkömmlicher Entwurf für  $\hat{x}$  vorgenommen werden, der dann lediglich um  $\hat{z} = L\hat{x}$  zu ergänzen ist. Interessanterweise fallen Abbildungsbeobachter ohne vollständige Zustandsrekonstruktion in die Klasse der Beobachter mit reduzierter Ordnung. Derartige Beobachter kommen zum Einsatz, wenn das System nichtbeobachtbar, aber dennoch abbildungsbeobachtbar ist. Eine Aussage darüber, ob dieser Fall vorliegt, kann mit Hilfe des modifizierten Beobachtbarkeitskriteriums von KALMAN [79, 172]

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ L \\ LA \\ \vdots \\ LA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

bzw. des von HAUTUS [234]

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \\ L \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (3.46)$$

getroffen werden.

Die erste Erwähnung finden Abbildungsbeobachter bereits im Jahr 1965 in [19]. Ein Jahr später führt [209] sie neben den vollständigen und reduzierten Beobachtern als dritte und eigenständige Gattung auf. Erste notwendige und hinreichende Bedingung für Abbildungsbeobachter sind in [98] zu finden. In [232] wird der Sonderfall betrachtet, wenn der funktionale Beobachter die Ordnung  $p$  annimmt. In [126] wird ein Beobachterentwurf für einen eindimensionalen Zustandsvektor entworfen. In [317] wird letzterer Ansatz modifiziert und die Matrix  $A$  in eine untere HESSENBERG-Matrix transformiert. In [7] wird ein Ansatz entwickelt, bei dem das Verhältnis zwischen Eingangs- und unabhängigen Ausgangsgrößen die

Beobachterdimension bestimmt. Im Gegensatz zu den vorherigen Ansätzen kommt der Beobachterentwurf ohne Transformation in eine Normalform aus. In [60] wird ein Ansatz wie in Anmerkung 3.5 vorgestellt und notwendige und hinreichende Bedingungen für dessen Entwurf angegeben.

In [246] wird der Entwurf von Abbildungsbeobachtern im Zusammenhang mit Zustandsreglern betrachtet. Dabei wird die Matrix  $F$  aus dem Reglergesetz  $u = Fx$  so gewählt, dass

$$u = Fx = KTx + WCx = Kz + Wy \quad (3.47)$$

ist und für  $z = Tx$  der Abbildungsbeobachter entworfen wird. In [222] wird ein Abbildungsbeobachter zur Glukose-Regulierung entworfen.

Hier wird eine Idee präsentiert, die auf der Aufspaltung des Systems in beobachtbare und nichtbeobachtbare Zustände beruht. Auf einen vollumfänglichen Beweis wird verzichtet, da die eigentlichen Beweisdetails bereits in den Beweisen zum Beobachter von detektierten, aber nichtbeobachtbaren Systemen sowie zum Beobachter reduzierter Ordnung vorhanden sind. Das Vorgehen wird an einem Beispiel näher erläutert.

Die Entwurfsschritte lauten wie folgt:

1. Prüfe Abbildungsbeobachtbarkeit anhand von (3.45) oder (3.46).
2. Bestimme eine Transformation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}}_{\zeta} = \underbrace{\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}}_T x, \quad \begin{array}{l} \zeta_1 \in \mathbb{R}^r \\ \zeta_2 \in \mathbb{R}^{n_b-r} \\ \zeta_3 \in \mathbb{R}^{n_{nb}} \end{array} \quad (3.48)$$

(für  $n_b$  und  $n_{nb}$  siehe Anhang), wobei die Zeilenvektoren von  $N$  Basisvektoren des Nichtbeobachtbarkeitsraums sind. Wähle  $M$  so, dass die Zeilenvektoren von  $\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$  orthogonal zu denen von  $N$  stehen. Über den Basisergänzungssatz<sup>7</sup> ist die Existenz der Matrix  $M$  gesichert. Hierzu brauchen aus  $\mathcal{R}(O^T)$  nur  $n_b - r$  Spalten herausgegriffen werden, die linear unabhängig zu den Spalten von  $L^T$  sind.

<sup>7</sup>Der Basisergänzungssatz (z. B. [170]) besagt, dass jede Menge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums zu einer Basis dieses Vektorraums erweitert werden kann.

## 3. Vollziehe Ähnlichkeitstransformation auf

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n_b - r)} & 0_{r \times n_{nb}} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & 0_{(n_b - r) \times n_{nb}} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} u, \zeta(0) = \zeta_0 \quad (3.49a)$$

$$y = [C_1 \ C_2 \ 0_{p \times n_{nb}}] + Du. \quad (3.49b)$$

## 4. Entwerfe einen vollständigen oder reduzierten Beobachter für

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1 \\ \dot{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n_b - r)} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} \zeta_1(0) \\ \zeta_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_{1,0} \\ \zeta_{2,0} \end{bmatrix} \quad (3.50a)$$

$$y = [C_1 \ C_2] \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + Du \quad (3.50b)$$

bzgl.  $\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$  und nutze  $\hat{z} = \hat{\zeta}_1$ .

An dem folgenden selbst entwickelten Beispiel soll der Entwurf eines Abbildungsbeobachters für ein nichtbeobachtbares System aufgezeigt werden.

**Beispiel 3.4. Entwurf eines Abbildungsbeobachters für ein nichtbeobachtbares System**

Gegeben ist das nichtbeobachtbare System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 & -3.5 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1.5 & -1.5 & -0.5 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.51a)$$

$$y = [2 \ -2 \ 0] x \quad (3.51b)$$

$$z = [0 \ 0 \ 2] x. \quad (3.51c)$$

Die Ähnlichkeitstransformation

$$T = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

führt auf das System

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \zeta, \quad \zeta(0) = T x_0 \quad (3.53a)$$

$$y = [1 \ -1 \ 0] \zeta \quad (3.53b)$$

bzw. das reduzierte System

$$\Sigma_{\text{red}} : \quad \dot{\zeta}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \zeta_{\text{red}}, \quad \zeta_{\text{red}}(0) = T_{\text{red}} x_0 \quad (3.54a)$$

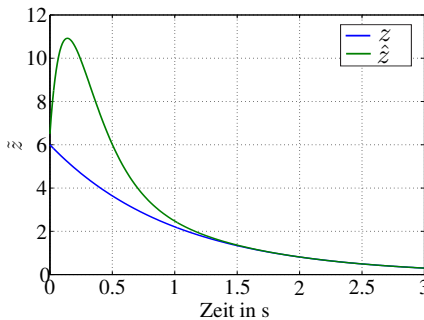
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \zeta_{\text{red}}. \quad (3.54b)$$

Der Beobachterentwurf mit  $\xi = \hat{\zeta}_{\text{red}}$  lautet schließlich

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xi - \begin{bmatrix} -24 \\ -33 \end{bmatrix} ([1 \ -1] \xi - y), \quad \xi(0) = T_{\text{red}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.55a)$$

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \xi. \quad (3.55b)$$

Das Einschwingverhalten des Abbildungsbeobachters ist in Bild 3.5 zu sehen. Insgesamt zeigt sich, dass für das eigentlich nichtbeobachtbare System dennoch ein stabiler Beobachter für eine gewählte Abbildung der Zustände entworfen werden kann. Der Beobachter schwingt innerhalb von etwa 1.5 s ein, zeigt anfangs aber eine deutliche Gegenbewegung. Dies ist durch Verwendung der Polvorgabe begründet und könnte durch geschicktere Wahl der Anfangswerte, durch Verwendung eines KALMAN-Beobachters oder mittels der Verfahren der praktischen Stabilität [145] verbessert werden.  $\square$



**Bild 3.5:** Einschwingen des Abbildungsbeobachters

Der Abbildungsbeobachter kann immer dann noch Abhilfe leisten, wenn das zu beobachtende System nichtbeobachtbar und eine Abbildung der Zustände als Information ausreichend ist. Dabei kommen insbesondere die in den vorigen Abschnitten vorgestellten Methoden für den reduzierten Beobachter zum Einsatz. Im Folgenden wird nun auf Beobachterverfahren für nichtlineare Systeme eingegangen, die für den späteren Entwurf von Verbundbeobachter benötigt werden.

### 3.3 Beobachterentwurf mit Hilfe von Linearisierungstechniken

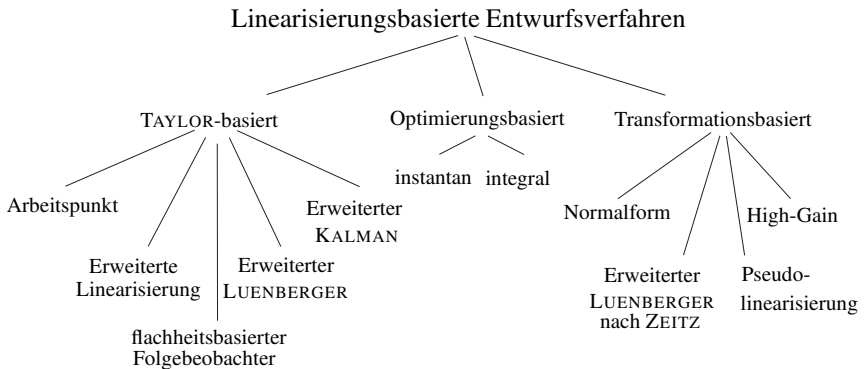
Zahlreiche Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme basieren auf Linearisierungstechniken. Die hier vorgestellten Entwurfsverfahren beziehen sich auf Systeme der Klasse

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = f(x, u), \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{C}^1, \quad (3.56a)$$

$$y = h(x, u), \quad h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad h \in \mathcal{C}^1. \quad (3.56b)$$

Zum besseren Verständnis der Thematik wird sich hier auf SISO-Systeme beschränkt. Die entsprechenden Erweiterungen auf MIMO-Systeme sind z. B. in [269, 272] zu finden.

Prinzipiell wird zwischen Techniken unterschieden, die sich auf einen TAYLOR-Reihenabbruch stützen, und solchen, die sich auf Transformationen beziehen. In Bild 3.6 wird die Unterscheidung mit den entsprechenden Verfahren ersichtlich. In den selbst erstellten Tabellen 3.1 und 3.2 werden jeweils die Linearisierungstechnik, die Bestimmung der Verstärkungsmatrix, der Beobachteransatz und entsprechende Literaturverweise angegeben.



**Bild 3.6:** Einteilung von Beobachtern für nichtlineare Systeme

Dabei werden in Tabelle 3.1 die Verfahren genauer vorgestellt, die auf einem Abbruch der TAYLOR-Reihe basieren und entweder um eine formale Trajektorie oder um einen bzw. mehrere Arbeitspunkte linearisieren.

Der Arbeitspunktbeobachter linearisiert das System um einen einzigen Arbeitspunkt und berechnet eine konstante Beobacherverstärkung für diesen Punkt. Unklar ist dabei, in welchem Bereich der Einzugsbereich stabil ist. Deshalb wird

Entwurf	Linearisierungsprinzip	Bestimmung der Verstärkung	Beobachteransatz	Lit.
Arbeitspunkt-beobachter	Linearisierung um einen Arbeitspunkt $(u_s, x_s)$	LTI-Beobachter für das Paar $c^T = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=x_s \\ u=u_s}}, A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=x_s \\ u=u_s}}$	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k \cdot (h(\hat{x}, u) - y)$	[190]
Beobachter mit Erweiterter Linearisierung	Linearisierung um alle Arbeitspunkte auf der Ruhelage mannigfaltigkeit $\mathcal{R}$ , die durch $u$ bzw. $y$ parametrisiert werden	Entwurf von $k(u)$ bzw. $k(y)$ für das Paar $c^T = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right _{\mathcal{R}}, A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right _{\mathcal{R}}$ , sodass Eigenwerte der linearisierten Fehlerdynamik unabhängig von $u$ sind	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - (g(h(\hat{x}, u)) - g(y))$ $g(y) = \int_0^y k(v) dv$	[21, 323]
Erweiterter LUENBERGER-Beobachter	Gain-Scheduling bezogen auf die formale Linearisierung bzgl. Beobachtertrajektorie $\hat{x}(t)$	LUENBERGER-Beob. mit $k(\hat{x}, u)$ für $c^T(t) = \underbrace{\left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}}}_{\bar{c}^T(\hat{x}(t), u(t))}, A(t) = \underbrace{\left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}}}_{\bar{A}(\hat{x}(t), u(t))}$ sodass die Eigenwerte von $\bar{A}(\hat{x}(t), u(t)) - k(\hat{x}(t), u(t)) \bar{c}^T(\hat{x}(t), u(t))$ unabhängig von $u(t)$ und $\hat{x}(t)$ sind	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k(\hat{x}, u)(h(\hat{x}, u) - y)$	[65, 76, 285, 302]
Erweiterter KALMAN-BUCY-Beobachter	Formale Linearisierung bzgl. Beobachtertrajektorie $\hat{x}(t)$	KALMAN-BUCY-Beob. für das zeitvariable Paar $c^T(t) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}}, A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}}$	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k(t)(h(\hat{x}, u) - y)$ $k(t) = P(t)c(t)r$ $\dot{P}(t) = P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + Q - rP(t)c(t)c^T(t)P(t),$ $P(t_0) = P_0 \succ 0_{n \times n}$	[115, 171]
Flachheits-basierter Folge-beobachter	Linearis. bzgl. Solltrajek. $x_d(t)$ , ggf. Berechnung von $x_d(t)$ aus $u(t), y_d(t)$ bei flachen Ausgängen	LTV-Beobachter für das zeitvariable Paar $c^T(t) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=x_d(t) \\ u=u(t)}}, A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right _{\substack{x=x_d(t) \\ u=u(t)}}$	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k(t)(h(\hat{x}, u) - y)$	[34, 88, 89]

**Tabelle 3.1:** Übersicht über TAYLOR-basierte Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme



Entwurf	Linearisierungsprinzip	Bestimmung der Verstärkung	Beobachteransatz	Lit.
Normalform-beobachter	Globale Linearisierung durch Koordinatentransformation auf LTI-System plus E/A-Aufschaltung (Beobachternormalform)	Transf. $\zeta = \Phi(x)$ und $w = \gamma(y)$ auf nichtlineare BNF $\dot{\zeta} = E_n \zeta + \alpha(u, w)$ und $w = e_n^T \zeta$ ; Entwurf von $k$ in transformierten Koordinaten für das Paar $(e_n^T, E_n)$	$\dot{\xi} = E_n \xi + \alpha(u, \gamma(y)) - k(e_n^T \xi - \gamma(y))$ $\xi(0) = \Phi(\hat{x}_0)$ $\hat{x} = \Phi^{-1}(\xi)$	[31, 188]
Pseudo-linearisierungs-Tracker	Linearisierung durch Koordinatentransformation, sodass alle Linearisierungen um neue Ruhelagenmännigfaltigkeit $\mathcal{R}_{\zeta, u}$ identisch sind	Transf. $\zeta = \Phi_P(x)$ und $w = \gamma_P(y)$ auf $\dot{\zeta} = E_n \zeta + \alpha(u, w) + \mathcal{O}^2$ und $w = e_n^T \zeta + \mathcal{O}^2$ (TAYLOR-Linearisierung entlang aller Ruhelagen entspricht BNF); Entwurf von $k$ in transformierten Koordinaten für das Paar $(e_n^T, E_n)$	$\dot{\xi} = E_n \xi + \alpha(u, \gamma_P(y)) - k(e_n^T \xi - \gamma_P(y))$ $\xi(0) = \Phi_P(\hat{x}_0)$ $\hat{x} = \Phi_P^{-1}(\xi)$	[196, 197, 251, 265]
Erweiterter LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ	Linearisierung der Fehler-DGL in transformierten Koordinaten; keine Bestimmung der Transformation erforderlich; ACKERMANN-Formel für nichtlineare Systeme	Entwurf von $k(\hat{x}, u)$ gemäß ACKERMANN-Formel für nichtlineare Systeme	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k(\hat{x}, u)(h(\hat{x}, u) - y)$	[271, 273, 274, 341]
High-Gain-Beobachter	Transformation des Systems auf BRUNOVSKI-Normalform durch Wahl des Korrekturterms derart, dass linear dominantes System in transformierten Koordinaten entsteht	Transformation $q(x, u) = \begin{bmatrix} h(x, u) \\ L_f h(x, u) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x, u) \end{bmatrix}^T$ Wahl eines konstanten $k$	$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \left( \frac{\partial q(x, u)}{\partial x^T} \bigg _{\hat{x}} \right)^{-1} k \cdot (h(\hat{x}, u) - y)$	[56, 112]

**Tabelle 3.2:** Übersicht über transformationsbasierte Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme

in Abschnitt 3.3.1 anhand von zwei selbst entwickelten Beispielen gezeigt, dass einerseits eine instabile Fehlerdynamik bei Anfangswerten im stabilen Systemeinzugsbereich und andererseits eine stabile Fehlerdynamik bei Anfangswerten im instabilen Systemeinzugsbereich auftreten können.

Für ein System, bei dem ein Betrieb mit mehreren Arbeitspunkten erforderlich ist, stellt der Beobachter mit Erweiterter Linearisierung eine Alternative dar. Er linearisiert ein System um alle Arbeitspunkte und berechnet mittels der durch  $u$  parametrisierten Ruhelagenmannigfaltigkeit das Polynom der Fehlerdifferenzialgleichung derart, dass diese unabhängig von den Arbeitspunkten wird.

Beim Entwurf des Erweiterten LUENBERGER-Beobachters wird formal um die Beobachtertrajektorie linearisiert und ein Gain-Scheduling-Verfahren genutzt, um die Eigenwerte der Fehlerdifferenzialgleichung zeitinvariant zu halten. Der Zusatz „formal“ rührt daher, dass die unbekannt Systemtrajektorie durch die geschätzte Trajektorie ersetzt wird. Strenggenommen handelt es sich somit nicht um eine klassische Trajektorienlinearisierung, da die erforderliche Bedingung  $\dot{x}_{\text{traj}} = f(x_{\text{traj}}, u)$  für  $\hat{x}$  nur näherungsweise gilt. Die Linearisierung wird deshalb als formal bezeichnet. Der Ableitungsbeobachter zur Krümmungsrekonstruktion in Beispiel 4.3 in Abschnitt 4.3 beruht auf diesem Verfahren.

Beim Entwurf des Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachters wird ebenfalls formal um die Beobachtertrajektorie linearisiert. Für die Zustandsrekonstruktion des entstehenden LTV-Systems kommt ein KALMAN-BUCY-Beobachter zum Einsatz, der für zeitvariante Problemstellungen entwickelt wurde.

Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Entwurfsverfahren linearisiert der Folgebeobachter, der manchmal auch flachheitsbasierter Folgebeobachter genannt wird, um die Solltrajektorie  $x_d(t)$  und nutzt einen LUENBERGER- oder KALMAN-BUCY-Beobachterentwurf.

In Tabelle 3.2 wird auf die Beobachterentwurfsverfahren für nichtlineare Systeme eingegangen, die eine Transformation nutzen, die nichtlineare Systeme direkt in lineare überführt, oder die eine Kombination aus Transformation und Linearisierungstechniken verwenden. Der Normalformbeobachter basiert auf differenzialgeometrischen Methoden und wird in den Arbeiten [31, 188, 189, 332] behandelt. Er liefert eine globale Transformation eines nichtlinearen in ein lineares System. Da die Bedingungen für diese Transformation restriktiv sind, das Lösen einer partiellen Differenzialgleichung erfordert und es keine Entwurfsverfahren für die Transformation gibt, findet dieser Ansatz in der Praxis selten Anwendung. Beispiele für Anwendungen werden in den Arbeiten [269, 272] gegeben.

Der Erweiterte LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ [341] beruht ebenfalls auf differenzialgeometrischen Methoden, linearisiert aber den Beobachterfehler. Dadurch fallen die Transformationsbedingungen wesentlich schwächer aus. Obwohl die Systemklasse gegenüber dem Normalformbeobachter vergrößert wurde und

keine Transformation gefunden werden muss, weil das Lösen einer partiellen Differenzialgleichung entfällt, bleibt der Aufwand immer noch beträchtlich hoch. In [271] wird dieses Verfahren als ACKERMANN-Formel für nichtlineare Systeme beschrieben.

Der High-Gain-Beobachter transformiert das System auf die duale BRUNOVSKI-Normalform, wofür der volle relative Grad<sup>8</sup> des Systems vorauszusetzen ist. In dieser Normalform wird durch hohe Verstärkungswerte erreicht, dass der lineare Teil den nichtlinearen Term dominiert. Die so entworfenen Beobachter sind aus theoretischer Sicht nur lokal gültig. Es zeigt sich jedoch, dass in der Praxis der Einzugsbereich fast immer ausreichend groß ist – nur so ist seine große Popularität zu erklären. Für weitere Diskussionen sei auf [269] verwiesen. Die Systemklasse für High-Gain-Beobachter lässt sich erweitern, wenn die Relative-Grad-Forderung abgeschwächt wird. Hierbei wird eine approximierte Transformation auf die approximierten duale BRUNOVSKI-Normalform ausgeführt, bei der spezielle Terme höherer Ordnung der klassischen Transformation vernachlässigt werden. Diverse Techniken für diese Art von Approximation sind in [140, 173] zu finden.

Der Pseudolinearisierungs-Tracker ist in der Literatur nur wenig bekannt. Deshalb wird ihm ein eigener Abschnitt (Abschnitt 3.3.2) gewidmet und dort das Verfahren genauer erklärt. Gleiches gilt für den optimierungsbasierten Beobachterentwurf in Abschnitt 3.3.3.

In Abschnitt 3.3.4 werden alle Entwurfsverfahren der beiden Tabellen miteinander an einem Beispiel verglichen.

### 3.3.1 Diskussion des Einzugsbereichs des Arbeitspunktbeobachters

In welchem Einzugsbereich der Anfangsfehler (Differenz der Anfangszustände von Beobachter und System) bei TAYLOR-basierten Verfahren liegen muss, um Fehlerstabilität zu garantieren, ist in der Praxis schwer zu bestimmen. Vielfach liefert die Theorie nur lokal gültige Aussagen, sodass der Einzugsbereich durch Rechnersimulation zu bestimmen ist.

Hier wird für den Arbeitspunktbeobachter gezeigt, dass der stabile bzw. instabile Einzugsbereich des zu beobachtenden Systems nichts über die Stabilität des Beobachters aussagt. Dafür wird zunächst für den Arbeitspunktbeobachter in Beispiel 3.5 gezeigt, dass eine instabile Fehlerdynamik auftritt, obwohl die Anfangszustände von System und Beobachter innerhalb des stabilen Einzugsgebiets des Systems liegen.

---

<sup>8</sup>Die Forderung nach relativem Grad  $n$  impliziert, dass  $u$  in der Ausgangsabbildung sowie in den ersten  $n - 1$  LIE-Ableitungen nicht auftaucht.

### Beispiel 3.5. Instabile Fehlerdynamik bei Anfangswerten im stabilen System-eingungsbereich

Wird das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2, \quad x_1(0) = x_{10} \quad (3.57a)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2, \quad x_2(0) = x_{20} \quad (3.57b)$$

mit  $x_2 = e^{-t} x_{20}$  in eine BERNOULLI-Differenzialgleichung der Art

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1^2} = -\frac{1}{x_1} + 2x_2 \quad (3.58)$$

überführt, dann ergibt sich mit der Substitution  $z = x_1^{-1}$  eine inhomogene lineare Differenzialgleichung mit konstantem Koeffizienten

$$\dot{z} = z - 2e^{-t} x_{20}. \quad (3.59)$$

Eine LAPLACE-Transformation in den Bildbereich liefert

$$sZ(s) - z_0 = Z(s) - 2\frac{1}{s+1}x_{20} \quad (3.60a)$$

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{z_0}{s-1} - \frac{2x_{20}}{(s+1)(s-1)} \\ &= \frac{z_0}{s-1} + \frac{x_{20}}{s+1} - \frac{x_{20}}{s-1}, \end{aligned} \quad (3.60b)$$

wodurch die Zeitbereichslösung

$$z(t) = e^t z_0 + (e^{-t} - e^t) = \frac{(e^{-2t} - 1)x_{20} + z_0}{e^{-t}} \quad (3.61)$$

direkt ablesbar ist, woraus letztlich per Rücksubstitution

$$x_1(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-2t} - 1)x_{20} + \frac{1}{x_{10}}} = \frac{e^{-t}x_{10}}{(e^{-2t} - 1)x_{10}x_{20} + 1} \quad (3.62)$$

folgt. Das System ist für  $x_{10}x_{20} < 1$  stabil. Für den Beobachter des Systems (3.57)

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}}_1 = -\hat{x}_1 + 2\hat{x}_1^2 \hat{x}_2 - k_1(\hat{x}_1 - x_1), \quad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10} \quad (3.63a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 - k_2(\hat{x}_2 - x_2), \quad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20} \quad (3.63b)$$

lautet die Lösung von  $\hat{x}_2$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_2 &= -(k_2 + 1)\tilde{x}_2 \\ \hat{x}_2 - x_2 &= e^{-(k_2+1)t}(\hat{x}_{20} - x_{20}) \\ \hat{x}_2 &= e^{-t}x_{20} + e^{-(k_2+1)t}(\hat{x}_{20} - x_{20}).\end{aligned}\quad (3.64)$$

Mit Wahl von  $k_1 = 0$  und der Substitution von  $z = \hat{x}_1^{-1}$  folgt

$$\dot{z} = z - 2\hat{x}_2. \quad (3.65)$$

Mit der LAPLACE-Transformation

$$\begin{aligned}sZ(s) - z_0 &= Z(s) - \frac{2x_{20}}{s+1} - \frac{2(\hat{x}_{20} - x_{20})}{s+k_2+1} \\ Z(s) &= \frac{z_0}{s-1} + \frac{x_{20}}{s+1} - \frac{x_{20}}{s-1} + \frac{\frac{2}{k_2+1}}{s+k_2+1}\tilde{x}_{20} - \frac{\frac{2}{k_2+1}}{s-1}\tilde{x}_{20}\end{aligned}\quad (3.66)$$

und der Rücktransformation lautet die Lösung von  $z$

$$\begin{aligned}z(t) &= e^t\left(z_0 - x_{20} - \frac{2}{k_2+1}(\hat{x}_{20} - x_{20})\right) \\ &\quad + e^{-t}x_{20} + \frac{2}{k_2+1}e^{-(k_2+1)t}(\hat{x}_{20} - x_{20}).\end{aligned}\quad (3.67)$$

Für hohe Werte von  $k_2$  in (3.67) gilt wegen  $k_2$  im Nenner die Näherung

$$\begin{aligned}z(t) &\approx e^t\left(z_0 - x_{20} + e^{-2t}x_{20}\right) \\ &= e^t\left(\frac{1}{\hat{x}_{10}} + (e^{-2t} - 1)x_{20}\right) \\ &= \frac{e^t}{\hat{x}_{10}}\left(1 + (e^{-2t} - 1)x_{20}\hat{x}_{10}\right).\end{aligned}\quad (3.68)$$

Sofern  $1 + (e^{-2t} - 1)x_{20}\hat{x}_{10} = 0$  wird, „explodiert“  $\hat{x}_1(t) = z^{-1}(t)$ . Wird  $x_{20}\hat{x}_{10} > 1$  gewählt (also Start im Stabilitätsgebiet von  $\Sigma$ ) und kommt es im Verlauf zu  $x_{20}\hat{x}_{10} < 1$ , kann der Beobachter instabil werden.  $\square$

Während das vorige Beispiel den Fall zeigte, dass die Fehlerdynamik instabil werden kann, auch wenn sich der Anfangszustand im stabilen Einzugsbereich befindet, führt das folgende Beispiel 3.6 zu einer stabilen Fehlerdynamik bei Anfangswerten im instabilen Systemeinzugsbereich.

### Beispiel 3.6. Stabile Fehlerdynamik bei Anfangswerten im instabilen System-einzugsbereich

Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = x - x^2, \quad x(0) = x_0 \quad (3.69a)$$

$$y = x \quad (3.69b)$$

hat seine Ruhelagen bei  $x_{s,1} = 0$  und  $x_{s,2} = 1$ . Ein dazu passender Beobachteransatz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} &= \hat{x} - \hat{x}^2 - (\hat{x} - x), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ &= -\hat{x}^2 + x. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Mit der Wahl von  $x_0 = 1$  folgt  $x(t) \equiv 1$  und die Beobachterdifferentialgleichung wird zu  $\dot{\hat{x}} = -\hat{x}^2 + 1$ . Die Wahl von  $\hat{x}_0 = -\frac{1}{2}$  liefert  $\hat{x}(t) = \tanh(t + \operatorname{artanh}(-\frac{1}{2}))$ . Obwohl der Einzugsbereich von  $x_{s,1}$  bei  $(0, \infty)$  liegt und  $\hat{x}_0$  außerhalb gewählt wird, konvergiert der Beobachter gegen  $\hat{x}(t) \rightarrow 1$ .  $\square$

### 3.3.2 Pseudolinearisierungs-Tracker

Im Gegensatz zu den anderen in den Tabellen 3.1 und 3.2 erwähnten Ansätzen wird dem Pseudolinearisierungs-Tracker hier ein eigener Abschnitt gewidmet. Solch eine ausführliche Behandlung erweist sich als sinnvoll, da der Zugang wenig bekannt ist und kaum Publikationen verfügbar sind. Zudem werden die vorhandenen Publikationen selten zitiert. Die Erfahrung aus Beispiel 3.8 zeigt aber, dass er durchaus mit anderen Konzepten konkurrieren kann und dass der Entwurfsaufwand sowie das benötigte theoretische Repertoire noch angemessen erscheinen. Weiterhin haben die Pseudolinearisierungs-Tracker den Vorteil, dass sie weniger Einschränkungen unterworfen sind als die Normalformbeobachter, weil z. B. das Lösen einer partiellen DGL nicht notwendig ist. So wird in [251] für einen zweigelenkigen Roboter ein Pseudolinearisierungs-Tracker entworfen und gleichzeitig gezeigt, dass für diese Anwendung kein Normalformbeobachter existieren kann.

Das Konzept der Pseudolinearisierung hat seinen Ursprung in der Regelung nichtlinearer Systeme und wurde in [48, 49, 265] eingeführt. Das Ziel ist, die exakte Ein-Ausgangslinearisierung zu approximieren und damit deren Anforderungen abzuschwächen, um eine größere Systemklasse abdecken zu können. Die Übertragung auf Beobachterkonzepte wurde unabhängig voneinander sowohl in [251] als auch in [196] vorgenommen.

Das Konzept beruht darauf, dass eine Transformation von Ausgang und Zustand eines Systems in neue Koordinaten gesucht wird, sodass das gleiche LTI-System

für alle Ruhelagen entsteht. Existieren derartige Transformationen  $\zeta = T_P(x)$  und  $w = \gamma_P(x)$ , so können sie so gewählt werden, dass das transformierte System in dualer BRUNOVSKI-Normalform<sup>9</sup> bis auf einige Terme höherer Ordnung  $\mathcal{O}^2$

$$\dot{\zeta} = E_n \zeta + \alpha(u, w) + \mathcal{O}^2 \quad (3.71)$$

entsteht. Die Terme zweiter und höherer Ordnung werden beim Entwurf vernachlässigt. Für (3.71) wird mit  $\xi = \hat{\zeta}$  ein Pseudolinearisierungs-Tracker mit der Struktur

$$\Sigma_{\text{obs,PL}} : \quad \dot{\xi} = E_n \xi + \alpha(u, \gamma_P(y)) - k_{\text{PL}}(\xi_n - \gamma_P(y)), \quad \xi(0) = T_P(\hat{x}_0) \quad (3.72a)$$

$$\hat{x} = T_P^{-1}(\xi). \quad (3.72b)$$

entworfen, der letztlich in  $\xi$ -Koordinaten eine von den Ruhelagen unabhängige Dynamik aufweist. In dieser Arbeit wird der Ansatz von [196] vorgestellt, da er konstruktive Schritte vorgibt. Zum besseren Verständnis wird die Herangehensweise an SISO-Systemen erläutert. Hinweise für die Behandlung von MIMO-Systemen finden sich in [196]. Der Ansatz wird hier didaktischer als in der Originalarbeit herausgearbeitet.

### Anmerkung 3.7. Entwurfsschritte beim Pseudolinearisierungs-Tracker für SISO-Systeme

1. Bestimme Ruhelagenmannigfaltigkeit  $\mathcal{R} = \{u(y), x(y), y\}$  mit  $y$ -Parametrierung.
2. Berechne  $A(y) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right|_{\mathcal{R}_{x,u}}$ ,  $b(y) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\mathcal{R}_{x,u}}$  und  $c^T(y) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right|_{\mathcal{R}_{x,u}}$ .
3. Überprüfe Beobachtbarkeit

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} c^T(y) \\ c^T(y)A(y) \\ \vdots \\ c^T(y)A^{n-1}(y) \end{bmatrix} = n \quad \forall y. \quad (3.73)$$

<sup>9</sup>Die duale BRUNOVSKI-Normalform entspricht der Beobachternormalform, in der die letzte Spalte der Systemmatrix durch Nullen ersetzt wird und die mit  $x_n := y$  korrespondierenden Terme stattdessen als Ausgangsaufschaltung aufgefasst werden.

4. Bestimme eine Matrix  $T(y)$ , die das linearisierte System auf die duale BRUNOVSKI-Normalform transformiert, wobei die Bestimmung in gleicher Weise wie die Berechnung der Transformationsmatrix für die Beobachternormalform erfolgt. Hierfür wird

$$p(y) = \begin{bmatrix} c^T(y) \\ c^T(y)A(y) \\ \vdots \\ c^T(y)A^{n-1}(y) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \chi(y) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

mit  $\chi(y)$  als Freiheitsgrad<sup>10</sup> berechnet. Die Transformation  $T(y)$  wird anschließend über

$$T(y) = [p(y) \ A(y)p(y) \ \cdots \ A^{n-1}(y)p(y)]^{-1} \quad (3.75)$$

bestimmt.

5. Berechne den Vektor  $\zeta(y) = [\zeta_1(y) \ \cdots \ \zeta_n(y)]^T$  aus

$$\frac{d\zeta(y)}{dy} = T(y) \frac{dx(y)}{dy}, \quad (3.76)$$

d. h. löse

$$\zeta_i(y) = \int_0^y \left( T_{i1}(v) \frac{dx_1(v)}{dv} + \cdots + T_{in}(v) \frac{dx_n(v)}{dv} \right) dv \quad (3.77)$$

für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $\frac{dx_i(v)}{dv}$  die Ableitung der bekannten Ruhelagenfunktion  $x_i(y)$  ist. Somit ergibt sich

$$\Phi_P(x) = \left( \zeta(y) + T(y)(x - x(y)) \right) \Big|_{y=h(x)} \quad (3.78a)$$

$$\gamma_P(y) = \zeta_n(y). \quad (3.78b)$$

6. Berechne  $\alpha(u, \gamma_P(y))$  über

$$\alpha(u, \gamma_P(y)) = - \left( E_n \zeta(y) + T(y)b(y)(u(y) - u) \right). \quad (3.79)$$

---

<sup>10</sup>Wenn  $\chi(y) \equiv 1$  gewählt wird, dann folgt  $\zeta_n = y$ .



7. Wähle  $k_P$  als Koeffizienten laut der charakteristischen Eigenwertvorgabe

$$\Sigma_{\text{obs,P}} : \quad \dot{\xi} = E_n \xi + \alpha(u, \gamma_P(y)) - k_P(\xi_n - \gamma_P(y)), \quad \xi(0) = \Phi_P(\hat{x}_0) \quad (3.80a)$$

$$\hat{x} = \Phi_P^{-1}(\xi). \quad (3.80b)$$

□

Folgendes selbst entwickeltes Beispiel zeigt, warum der Pseudolinearisierungs-Tracker ein Tracker und kein Beobachter ist, obwohl der Entwurf in [196] als Beobachteransatz vorgestellt wird.

### Beispiel 3.7. Verletzung der Konsistenzbedingung

Für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \quad (3.81a)$$

$$y = x_2 \quad (3.81b)$$

wird mit  $\mathcal{R}_{x,y} = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$ ,  $A(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $c(y) = [0 \ 1]$ ,  $T = I_2$ ,  $\Phi_P(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  und  $\alpha = 0$  der Pseudolinearisierungs-Tracker

$$\hat{\Sigma} : \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xi + k_P([0 \ 1] \xi - y), \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (3.82a)$$

$$\hat{x} = \xi \quad (3.82b)$$

entworfen. Bei exakten Anfangswerten ist der Korrekturterm (3.82a) gleich Null. Da sich aber die Simulatorterme von Beobachter und System unterscheiden, kann keine Konsistenz vorliegen. □

## 3.3.3 Optimierungsbasierter Beobachter

Die optimierungsbasierten Beobachterzugänge beruhen auf der Online-Minimierung eines Gütekriteriums  $J(t)$ . Diese kann dabei hybrid durch zeitdiskrete Optimierung kombiniert mit zeitkontinuierlicher Beobachtung [351, 352] oder rein zeitkontinuierlich (Realisierung über eine Differenzialgleichung) analog zu den Identifikationsverfahren in Abschnitt 5.1.2 erfolgen. Als Standardverfahren

der rein zeitkontinuierlichen Herangehensweise wird der negative Gradient des Gütekriteriums, versehen mit geeigneter Wichtung  $\Gamma$ , als Korrekturterm des Beobachters verwendet, sodass ein optimierungsbasierter Beobachter die Struktur

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \Gamma \nabla J, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (3.83a)$$

$$\hat{y} = h(\hat{x}) \quad (3.83b)$$

aufweist. Da mit einem Gradienten und damit mit einer Linearisierung operiert wird, ist die Zuordnung zu den linearisierungsbasierten Beobachtern gerechtfertigt. Die Korrektur bei einem solchen Beobachter erfolgt also stets so, dass der Ausgangsfehler entsprechend dem Gütekriterium minimiert wird. Das Vorgehen ist vergleichbar mit dem Speed-Gradientenzugang in der Regelungstechnik [99, 100], bei dem der Regler so entworfen wird, dass der Regelfehler entsprechend eines Gütekriteriums zeitkontinuierlich minimiert wird. Als Gütekriterium kommen instantane und integrale Kriterien zum Einsatz, z. B.

$$J_1(t) = \frac{1}{2} (\hat{y}(t) - y(t))^2 \quad (3.84a)$$

$$J_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} (\hat{y}(\tau) - y(\tau))^2 d\tau. \quad (3.84b)$$

Im mehrvariablen Fall werden die Quadrate durch geeignete Normquadrate ersetzt, wobei zusätzlich eine Wichtung der einzelnen Ausgangskomponenten integriert werden kann. Außerdem kann es in der Anwendung durchaus hilfreich sein, neben dem aktuellen Fehler  $e^2(t)$  auch eine bestimmte Anzahl von dessen Ableitungen  $(e^{(i)}(t))^2$  in das Gütekriterium einzubeziehen, z. B. durch

$$J_3(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r w_i \left( \hat{y}^{(i)}(t) - y^{(i)}(t) \right)^2 \quad w_i > 0. \quad (3.85)$$

Dadurch kann erreicht werden, dass die Fehlerkorrektur viel direkter und damit schneller auf die einzelnen Zustandskomponenten wirkt und sich nicht erst indirekt über die Verkoppelung der Zustandsgrößen bemerkbar macht. In [290] wird dieses Vorgehen als eine Modifikation des instantanen Gradientenabstiegsverfahrens vorgeschlagen. Speziell für das gut handhabbare Gütekriterium  $J_1(t)$  nimmt der Beobachter die Gestalt

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - \Gamma \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} (\hat{y} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (3.86a)$$

$$\hat{y} = h(\hat{x}) \quad (3.86b)$$

an. Für den Fall, dass alle Zustandskomponenten direkt durch den Fehler beeinflusst werden, kann  $\Gamma$  häufig als Diagonalmatrix gewählt werden. Beeinflusst der Fehler die Zustände aber nur indirekt, reicht eine diagonale Matrix  $\Gamma$  zur Sicherung der Stabilität häufig nicht aus, was zum Beispiel an dem System  $\Sigma = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1 \ 0], 0 \right)$  ersichtlich ist. Der Entwurf eines stabilisierenden  $\Gamma$  führt dann in aller Regel dazu, dass  $\Gamma \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}}$  ein in allen Komponenten voll besetzter Vektor ist, womit ebenfalls die bereits angesprochene direkte Fehlereinwirkung auf alle Zustände erreicht wird. Zum Entwurf der stabilisierenden Matrix  $\Gamma$  wird in [290] ein Kriterium angegeben, in das neben dem Gradienten der Ausgangsabbildung auch die zeitvariante JACOBI-Matrix von  $f$  mit einfließt. Zudem werden die Parallelen zum klassischen LUENBERGER-Beobachter aufgezeigt. Der praktische Entwurf eines optimierungsbasierten Beobachters wird im nächsten Abschnitt am Beispiel des Ball-Balken-Systems vorgestellt.

### 3.3.4 Vergleich der Beobachter für das Ball-Balken-System

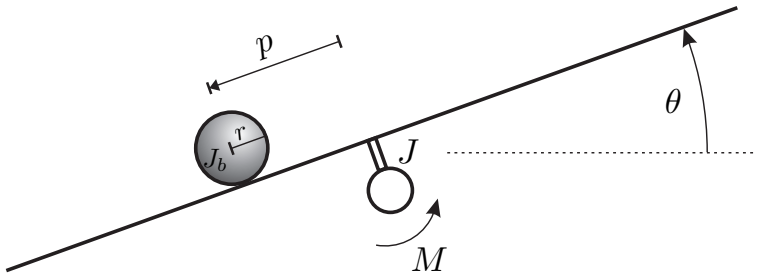
An dem Beispiel eines Ball-Balken-Systems wird nun die praktische Umsetzung der Entwurfsverfahren aus den Tabellen 3.1 und 3.2 gezeigt. Hierbei wird die Veröffentlichung von [173] als Vorbild verwendet und um die Entwurfsverfahren der beiden Tabellen, die dort nicht angewendet werden, erweitert. Die Pole der Fehlerdynamik werden jeweils gleich gewählt, um das Einschwingverhalten der Verfahren vergleichen zu können. Von Interesse ist das Beispiel darüber hinaus, da beim High-Gain-Entwurfsverfahren mit einer Approximation gearbeitet werden muss. Der Entwurf eines Erweiterten LUENBERGER-Beobachters nach ZEITZ scheitert zudem, weil sich die Problemstellung trotz Verwendung moderner CAD-Software als zu komplex erweist.

#### Beispiel 3.8. Vergleich von Beobachterentwürfen für ein Ball-Balken-System

Bild 3.7 zeigt den Aufbau des Ball-Balken Systems. Mit der Beziehung  $v = \sqrt{\dot{p}^2 + p^2\dot{\theta}^2}$  wird die LAGRANGE-Funktion zu

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_b \left( \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgp \sin \theta \quad (3.87a)$$

$$= \frac{1}{2}m \left( \dot{p}^2 + p^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J_b \left( \frac{\dot{p}^2}{r^2} + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgp \sin \theta. \quad (3.87b)$$



**Bild 3.7:** Aufbau des Ball-Balken-Systems (nach [173])

Der LAGRANGE-Formalismus liefert

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{p}} L \right) - \frac{\partial}{\partial p} L = \left( m + \frac{J_b}{r^2} \right) \ddot{p} - m\dot{p}\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta = 0 \quad (3.88a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} L = (mp^2 + J + J_b) \ddot{\theta} + 2mp\dot{p}\dot{\theta} + mgp \cos \theta = M. \quad (3.88b)$$

Mit Wahl des Zustandsvektors  $x = [p \ \dot{p} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$  und mit Einführen von  $B = m / (\frac{J_b}{r^2} + m)$  wird die Zustandsraumdarstellung zu

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ Bx_1x_4^2 - Bg \sin x_3 \\ x_4 \\ -\frac{2mx_1x_2x_4 + mgx_1 \cos x_3}{mx_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix}}_{:=f(x,u)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{mx_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (3.89a)$$

$$y = \underbrace{x_1}_{:=h(x)}. \quad (3.89b)$$

Nullsetzen der Ableitung liefert die Ruhelagenmannigfaltigkeit in  $y$ -Parametrierung

$$\mathcal{R}_{u,x,y} = \left( mgy, \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y \right). \quad (3.90)$$

Die JACOBI-Matrizen zu (3.89) lauten

$$\frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ Bx_4^2 & 0 & -Bg \cos x_3 & 2Bx_1x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{-2mx_1x_4}{mx_1^2 + J + J_b} & \frac{mgx_1 \sin x_3}{mx_1^2 + J + J_b} & \frac{-2mx_1x_2}{mx_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} \quad (3.91a)$$

mit

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{2mx_2x_4 + mg \cos x_3}{mx_1^2 + J + J_b} - \frac{2mx_1(-mx_1(2x_2x_4 + g \cos x_3) + u)}{(mx_1^2 + J + J_b)^2}, \quad (3.91b)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x^T} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.91c)$$

Mit den JACOBI-Matrizen und der Ruhelagenmannigfaltigkeit werden nun die Beobachter entworfen. Für Literatur der entsprechenden Entwurfsverfahren sei auf die Tabellen 3.1 und 3.2 verwiesen.

### 1. High-Gain- und approximativer High-Gain-Beobachter

Für den High-Gain-Beobachter muss die Ausgangsabbildung hergeleitet werden. Da diese in Originalform zu einem sehr komplexen Term mit Umfang von mehreren Seiten führt, wird hier mit einer approximierten Ausgangsabbildung nach [140] gearbeitet. Derart komplexe Terme lassen sich am besten per Computer-Algebra oder mittels automatischen Differenzierens lösen [269, 272]. Die approximierte Beobachtbarkeitsabbildung lautet

$$q_{\text{app}}(x) = \begin{bmatrix} L_f^0 h(x) \\ L_f^1 h(x) \\ \hat{L}_f^2 h(x) \\ L_f(\hat{L}_f^2 h(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -Bg \sin x_3 \\ -Bgx_4 \cos x_3 \end{bmatrix}$$

mit der Approximation  $L_f^2 h(x) = \underbrace{Bx_1 x_4^2}_{\approx 0} - \underbrace{Bg \sin x_3}_{= \hat{L}_f^2 h(x)}$ . Die Beobachtbarkeitsmatrix wird damit zu

$$Q_{\text{app}}(x) = \frac{\partial q_{\text{app}}}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bg \cos x_3 & 0 \\ 0 & 0 & Bgx_4 \sin x_3 & -Bg \cos x_3 \end{bmatrix},$$

$$Q_{\text{app}}^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{Bg \cos x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-x_4 \sin x_3}{Bg \cos^2 x_3} & \frac{-1}{Bg \cos x_3} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Der Beobachter lautet schließlich

$$\Sigma_{\text{obs,HG}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - Q_{\text{app}}^{-1}(\hat{x}) k_{\text{HG}} \cdot (\hat{x}_1 - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (3.93)$$

## 2. Arbeitspunktbeobachter

Für die Ruhelage  $(0, 0_4, 0)$  ergibt sich durch Einsetzen in die JACOBI-Matrizen (3.91)

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right|_{(0,0_4,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{J+J_b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.94a)$$

$$c^T = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x^T} \right|_{(0,0_4,0)} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (3.94b)$$

womit  $k_{\text{AP}}$  für das Paar  $(c^T, A)$  für den Arbeitspunktbeobachter

$$\Sigma_{\text{obs,AP}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k_{\text{AP}} \cdot (\hat{x}_1 - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (3.95)$$

über die ACKERMANN-Formel bestimmt werden kann.

## 3. Erweiterte Linearisierung

Einsetzen der Ruhelagenmannigfaltigkeit  $\mathcal{R}$  in die JACOBI-Matrizen (3.91)

liefert

$$A(y) = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \Big|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{my^2+J+J_b} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96a)$$

$$c^T(y) = \frac{\partial h(x)}{\partial x^T} \Big|_{\mathcal{R}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.96b)$$

Um die gesuchte Beobachterverstärkung  $k(y)$  zu bestimmen, sodass für alle  $y$  die Eigenwerte von  $A(y) - k(y)c^T(y)$  den konstanten frei zu wählenden Eigenwerten  $\lambda_{i,d}$  entsprechen, sind das charakteristische Beobachterpolynom und das Designpolynom gleichzusetzen

$$\det(sI_n - A(y) + \underbrace{k_{\text{EL}}(y)}_{:=\bar{k}} c^T(y)) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^4 (s - \lambda_{i,d})$$

$$s^4 + \bar{k}_3 s^3 + \bar{k}_2 s^2 - Bg\bar{k}_1 s + Bg\left(\frac{-mg}{my^2+J+J_b} - \bar{k}_0\right)$$

$$= s^4 + k_{3,d} s^3 + k_{2,d} s^2 + k_{1,d} s + k_{0,d}. \quad (3.97)$$

Daraus folgt

$$k_{\text{EL}}(y) = \begin{bmatrix} \frac{-mg}{my^2+J+J_b} - \frac{k_{0,d}}{Bg} \\ -\frac{1}{Bg} k_{1,d} \\ k_{2,d} \\ k_{3,d} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$g(y) = \begin{bmatrix} -\frac{k_{0,d}}{Bg} \cdot y - g\sqrt{\frac{m}{J+J_b}} \arctan\left(\sqrt{\frac{m}{J+J_b}} y\right) \\ -\frac{k_{1,d}}{Bg} \cdot y \\ k_{2,d} \cdot y \\ k_{3,d} \cdot y \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

gemäß der Forderung  $g_i(y) = \int_0^y k_{i,\text{EL}}(\nu) d\nu$  mit  $i = 1, \dots, n$ . Der Beobachter lautet dann mit  $f(\hat{x}, u)$  gemäß (3.89) und  $g(y)$  nach (3.98) bzw.  $g(\hat{x})$  gemäß (3.98)

$$\Sigma_{\text{obs,EL}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - g(\hat{x}_1) + g(y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (3.100)$$

#### 4. Erweiterter KALMAN-BUCY-Beobachter

Der Erweiterte KALMAN-BUCY-Beobachteransatz lautet

$$\Sigma_{\text{obs,Kal}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + P(t)c(t)r, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (3.101a)$$

$$\dot{P}(t) = P(t)A^T(t) + A(t)P(t) - rP(t)c(t)c^T(t)P(t) + Q,$$

$$P(0) = I_n \quad (3.101b)$$

mit

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \right|_{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}} \quad \text{und} \quad c^T(t) = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x^T} \right|_{\substack{x=\hat{x}(t) \\ u=u(t)}} \quad (3.101c)$$

und den Entwurfsparametern

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad r = \frac{20}{3}. \quad (3.101d)$$

#### 5. Erweiterter LUENBERGER-Beobachter

Im Gegensatz zum Beobachter mit Erweiterter Linearisierung, bei dem durch Einsetzen der Ruhelagenmannigfaltigkeit viele Werte zu Null werden und damit die Bestimmung des charakteristischen Polynoms erheblich vereinfachen, fallen diese Werte beim Erweiterten LUENBERGER-Beobachter nicht weg, und die Herleitung von  $k_{\text{ELU}}$  hat einen Umfang von mehreren Seiten Berechnung. In der Simulation schafft die Ermittlung via ACKERMANN-Formel in jedem Schritt Abhilfe. Ist dies nicht möglich, kann alternativ auf Computer-Algebra-Berechnung mit anschließendem Koeffizientenvergleich, eine numerische Vorgehensweise oder eine elegante Eingangstransformation [140] zurückgegriffen werden, die die Beschreibung wesentlich vereinfachen. Der Beobachteransatz lautet wie folgt

$$\Sigma_{\text{obs,ELU}} : \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - k_{\text{ELU}}(\hat{x})(\hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (3.102)$$

#### 6. Pseudolinearisierungs-Tracker

Das Einsetzen der Ruhelagenmannigfaltigkeit  $\mathcal{R}$  in die JACOBI-Matrizen (3.91) liefert (3.96). Zusätzlich muss

$$b(y) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline my^2 + J + J_b \end{bmatrix} \quad (3.103)$$



berechnet werden.  $p(y)$  berechnet sich über

$$p(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bg & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Bg \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Bg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

mit  $\chi(y) = -Bg$ . Die erforderliche Transformationsmatrix lautet im speziellen Fall

$$T(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -Bg \\ 0 & 0 & -Bg & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

Die Lösung von

$$\frac{d\zeta(y)}{dy} = T(y) \frac{dx(y)}{dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dy} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{Bg} \end{bmatrix} \quad (3.106a)$$

$$\zeta(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{Bg}y \end{bmatrix} \quad (3.106b)$$

liefert

$$\Phi_{\text{P}}(x) = [\zeta(y) + T(y)(x - x(y))]_{y=h(x)} \quad (3.107a)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{Bg}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{Bg} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ \frac{-1}{Bg}x_2 \\ \frac{-1}{Bg}x_1 \end{bmatrix} \quad (3.107b) \end{aligned}$$

bzw.

$$x = \Phi_{\mathbb{P}}^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} -Bg\zeta_4 \\ -Bg\zeta_3 \\ \zeta_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \quad (3.108a)$$

$$w(y) = \gamma_{\mathbb{P}}(y) = \zeta_n(y) = \frac{-1}{Bg}y. \quad (3.108b)$$

Nun kann

$$\begin{aligned} \alpha(u, \gamma_{\mathbb{P}}(y)) &= -\left(E_n \zeta(y) + T(y)b(y)(u(y) - u)\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{my^2+J+J_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (mgy - u) \end{aligned} \quad (3.109)$$

bestimmt werden. Der Beobachteransatz lautet dann

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs},\mathbb{P}} : \quad \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \frac{1}{my^2+J+J_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (mgy - u) \\ &\quad - k_{\mathbb{P}} \left( \xi_4 - \frac{-1}{Bg}y \right), \quad \xi(0) = \xi_0 \end{aligned} \quad (3.110a)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} -Bg\xi_4 \\ -Bg\xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}. \quad (3.110b)$$

### 7. Normalformbeobachter

Der Entwurf eines Normalformbeobachters scheitert an der Integritätsbedingung [173].

### 8. Erweiterter LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ

Der Erweiterte LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ arbeitet mit der letzten Zeile der invertierten Beobachtbarkeitsmatrix  $Q(x)$  von Formel (3.92), bezeichnet diese mit  $v(x)$  und berechnet damit die LIE-Klammern<sup>11</sup> bis

---

<sup>11</sup>Die LIE-Klammer berechnet sich über  $\text{ad}_f v(x) = [f, v](x) = \frac{\partial v}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} v$ , die höhere Ordnung über  $\text{ad}_f^k v(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} v](x)$  mit  $\text{ad}_f^0 v(x) = v(x)$  [168].

$\text{ad}_f^4 v(\hat{x})$ . Wie beim Entwurf des High-Gain-Beobachters führt das bei diesem System zu einem sehr komplexen Term. Die approximierte Form zeigte in der Simulation ein instabiles Verhalten. Daher wird der Entwurf hier nicht weiter verfolgt. Abhilfe schafft beispielsweise das Automatische Differenzieren. In [270] wird angegeben, wie dieses für den erweiterten LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ angewendet werden kann.

### 9. Optimierungsbasierter Entwurf

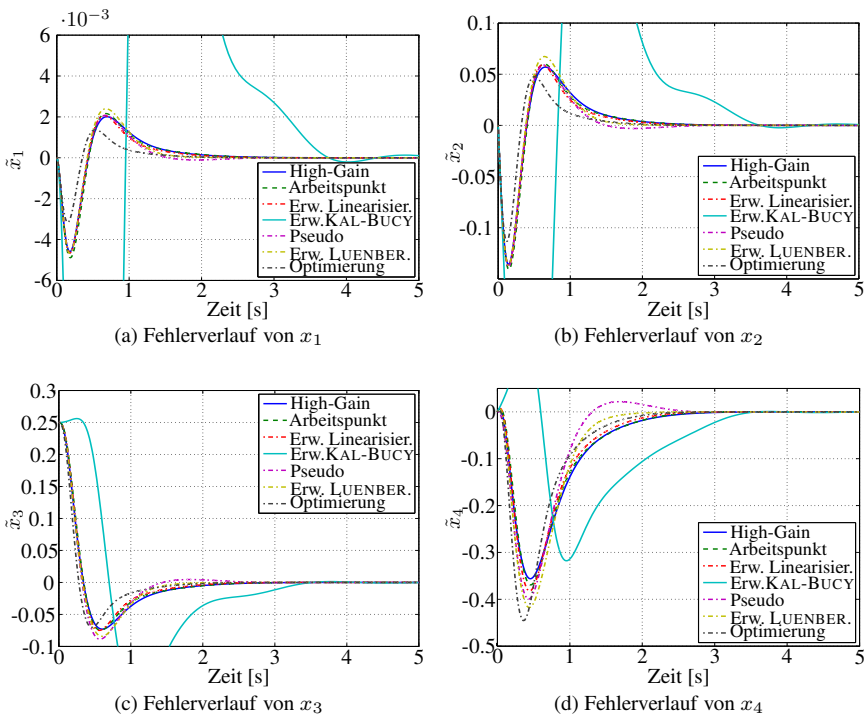
In diesem Fall kann die Matrix  $\Gamma$  nicht die gewünschte Diagonalstruktur annehmen, weil die Ruhelage (3.90) durch den Vektor  $\frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}^T} = [1, 0, 0, 0]$  nicht stabilisiert werden kann. Deshalb wird die Matrix so gewählt, dass die Ruhelage stabilisiert werden kann. Dies gelingt mit einem per Polvorgabe bestimmten  $\Gamma \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}^T} = [34, 431, -345, -744]$ . Der optimierungsbasierte Beobachter lautet dann

$$\Sigma_{\text{obs,g}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ B\hat{x}_1\hat{x}_4^2 - Bg \sin \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ -\frac{2m\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_4 + mg\hat{x}_1 \cos \hat{x}_3}{m\hat{x}_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m\hat{x}_1^2 + J + J_b} \end{bmatrix} u$$

$$+ \begin{bmatrix} 34 \\ 431 \\ -345 \\ -744 \end{bmatrix} (\hat{x}_1 - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (3.111)$$

In Bild 3.8 wird das Einschwingverhalten für einen Beobachteranfangszustand von  $\hat{x}_0 = [1, 0, 0.3, 0]^T$  und einen Systemanfangszustand von  $x_0 = [0, 0, 0.3, 0]^T$  gezeigt. Arbeitspunkt-, High-Gain-, Erweiterter Linearisierungs- und Erweiterter LUENBERGER-Beobachter zeigen ein sehr ähnliches Einschwingverhalten in allen vier Zuständen. Der Pseudolinearisierungs-Tracker zeigt trotz gleich gewählter Eigenwerte ein schnelleres Einschwingverhalten bei allerdings größeren Amplituden. Der Erweiterte KALMAN-BUCY-Beobachter schwingt vergleichsweise langsam ein und ist zudem rechentechnisch aufwändig.

In Bild 3.9 hat der Beobachter einen Anfangswert von  $\hat{x}_0 = [1, 0.1, 0.8, 0.1]^T$  und damit eine erheblich größere Abweichung zum Systemanfangswert. Es ergeben sich die gleichen Ergebnisse wie in der vorangegangenen Simulation. Der Erweiterte KALMAN-BUCY-Beobachterentwurf schwingt zwar ein, braucht aber viel länger als die anderen Beobachter.

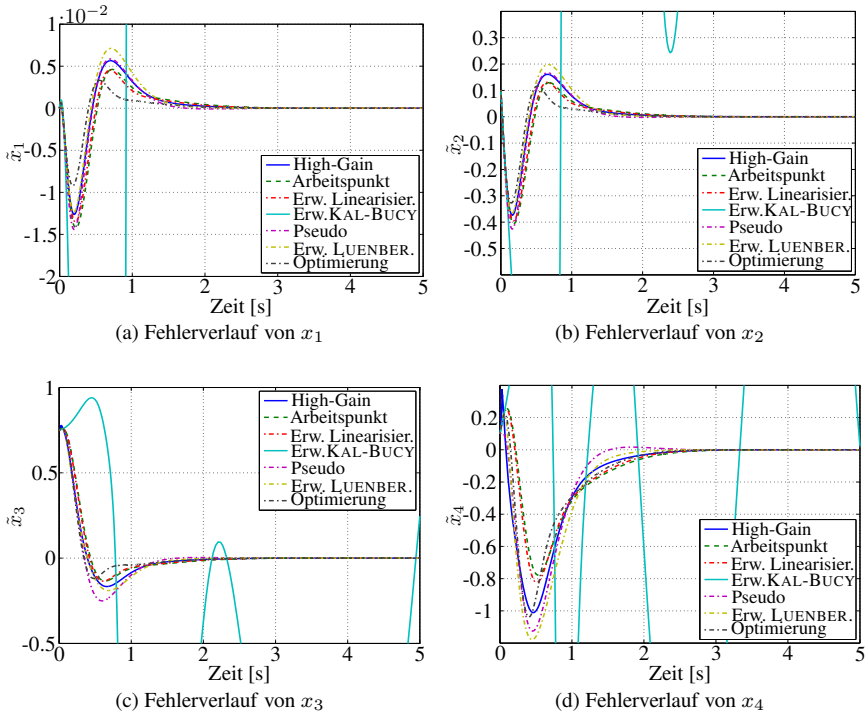


**Bild 3.8:** Ball-Balken-System mit Anfangswerten von  $\hat{x}_0 = [1, 0, 0, 3, 0]^T$

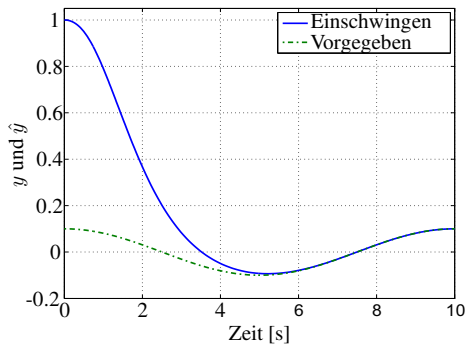
Der Reglerentwurf für das System basiert auf [140] und sein Einschwingverhalten ist in Bild 3.10 zu sehen. Die Dynamik des Reglers ist dreimal langsamer als die Beobachterdynamik eingestellt worden, weil der Regler auf die beobachteten Zustände regelt.  $\square$

### Anmerkung 3.8. Einschwingverhalten beim Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachter

Der Erweiterte KALMAN-BUCY-Beobachter zeigt hier linearisierungsbedingt bestenfalls lokales Konvergenzverhalten. Das hat er mit dem weit verbreiteten Erweiterten KALMAN-Filter für zeitdiskrete Systeme gemeinsam. Doch trotz seiner Verbreitung sind für das Erweiterte KALMAN-Filter kaum Aussagen darüber zu finden, welche Bedingungen für Konvergenz erfüllt sein müssen. Dies betrifft auch artverwandte Fragestellungen wie die größtmögliche Systemklasse, den Einzugsbereich, die Konvergenzgeschwindigkeit oder Probleme der numerischen Diver-



**Bild 3.9:** Ball-Balken-System mit Anfangswerten von  $\hat{x}_0 = [1, 0.1, 0.8, 0.1]^T$



**Bild 3.10:** Einschwingverhalten des Reglers

genz [82]. Eine Literaturrecherche lieferte einige Arbeiten [38, 137, 176, 267, 296] sowie eine Ausschreibung der niederländischen Forschungseinrichtung TNO [252] aus dem Jahr 2011 zu den genannten Fragen. Für den kontinuierlichen Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachter wurde lediglich eine Arbeit zur Divergenz des Erweiterten KALMAN-BUCY-Filters [82] gefunden, deren Ergebnisse sich auf einen Beobachteransatz übertragen lassen, sowie eine Arbeit über einen modifizierten Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachter [266] mit einstellbarer Stabilitätsreserve. Daher ist es empfehlenswert, den Erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachter nur nach intensiven Studien zur Stabilität beim konkreten Anwendungsfall einzusetzen.  $\square$

In Kapitel 3 wurden die verschiedenen Verfahren vorgestellt, die bei der vorliegenden Arbeit für den Beobachterentwurf zum Einsatz kommen. Hierbei wurden die Ansätze für lineare Systeme als weitgehend bekannt vorausgesetzt, sodass sich auf spezielle Aspekte konzentriert wurde. In Abschnitt 3.1 wurde dabei der LUENBERGER-Beobachter mit Detektierbarkeit als Voraussetzung anders hergeleitet als in der Literatur sonst üblich. Ferner wurde auf den zeitvarianten LUENBERGER- und den KALMAN-BUCY-Beobachter näher eingegangen. Die Beobachter mit endlicher Einstellzeit rundeten die Übersicht zu Entwurfsmethoden für lineare Systeme ab.

Die reduzierten Beobachter aus Abschnitt 3.2 kommen mit einer geringeren Ordnung als das zu beobachtende System aus und reduzieren somit den Rechenaufwand. Sie kommen ferner bei Systemen zum Einsatz, die nichtbeobachtbar und nur abbildungsbeobachtbar sind.

Abschnitt 3.3 widmete sich den auf Linearisierungstechniken basierten Verfahren, die später in Kapitel 5 für die Verbundbeobachter benötigt wurden. Nach der Vorstellung der gängigen Verfahren in Übersichtstabellen wurde auf weniger bekannte Verfahren näher eingegangen. Anschließend wurden alle Ansätze an einem Komplexbeispiel angewendet.

Die in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren bilden die Grundlage für den Beobachterentwurf in den Kapiteln 4 und 5. In Kapitel 4 werden Beobachterverfahren für Systeme vorgestellt, die in der Gegenwart von unbekanntem Signalen arbeiten. Hierbei wird zunächst das System so transformiert, dass das unbekanntes Signal keinerlei Einfluss auf das System hat. Anschließend wird die Vorgehensweise vorgestellt, bei der Signale mittels Beobachter rekonstruiert werden.

## 4 Beobachter mit unbekanntem Signalen

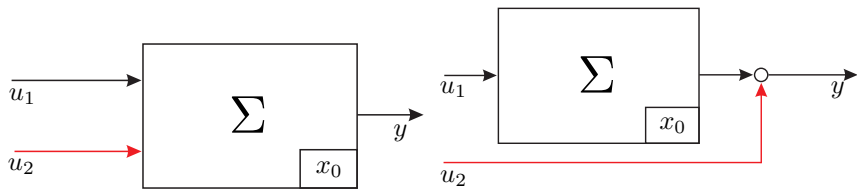
Die bisher vorgestellten Entwurfsverfahren für Beobachter setzen die Messbarkeit aller äußeren Systemsignale voraus, was in der regelungstechnischen Praxis eine Annahme darstellt, die nicht immer erfüllt ist und die den Einsatz von Beobachtern einschränkt. Signale können aus folgenden Gründen nicht zur Verfügung stehen: Die Messung ist nicht möglich, zu ungenau oder wirtschaftlich untragbar. Im Wesentlichen gibt es zwei Strategien, wie mit unbekanntem Signalen umgegangen werden kann:

1. Beobachter *bei* unbekanntem Signalen und
2. Beobachter *für* unbekanntem Signale.

Im Folgenden ist von Beobachtern *bei* unbekanntem Signalen die Rede, wenn die Koordinaten des Beobachters so gewählt werden, dass die Zustände trotz Unkenntnis der Störung richtig rekonstruiert werden können. In aller Regel kommen dabei Projektionsverfahren zum Einsatz. In der englischsprachigen Literatur ist vom Unknown Input Observer, abgekürzt UIO, die Rede. Das zeigt, dass in der Regel die unbekanntem Signale als Eingänge aufgefasst werden. Abschnitt 4.1 stellt grundlegende Verfahren vor und beschreibt erstmalig eine Systemumformulierung mittels schiefer Projektoren, sodass keine extra Entwurfsverfahren mehr gebraucht werden, sondern mit den bekannten Entwurfsverfahren gearbeitet werden kann.

Von Beobachtern *für* unbekanntem Signale wird gesprochen, wenn es Aufgabe des Beobachters ist, das unbekanntem Signal zu rekonstruieren. Je nachdem, ob die Dynamik, die das Signal bewirkt, exakt oder nur approximativ bekannt ist, wird von Signalbeobachtern bzw. -trackern gesprochen. Die Störgrößenbeobachter bzw. -tracker fallen in diese Kategorie. Abschnitt 4.2 untersucht die Robustheit von Verfahren, wenn sich das angenommene dynamische Modell vom realen stark unterscheidet, also wie sich z. B. ein auf konstante Größen ausgelegter Beobachter bei Schwingungen verhält, und behandelt damit einen Fall, der bisher wenig in der Literatur behandelt wurde.

Abschnitt 4.3 widmet sich der beobachterbasierten Ableitungsrekonstruktion von Signalen. Darüber hinaus wird an einem Anwendungsbeispiel die Methodik aufgezeigt. Gleichzeitig bildet Abschnitt 4.3 den theoretischen Hintergrund für Ab-



(a) Unbekanntes Signal in der Zustandsdifferenzialgleichung (b) Unbekanntes Signal in der Ausgangsgleichung

**Bild 4.1:** Mögliche Stellen, bei denen unbekannte Signale auf das zu beobachtende System wirken

schnitt 4.4, in dem Methoden vorgestellt werden, die mit Hilfe von Beobachterverfahren Nichtlinearitäten oder sogar ganze Strecken als unbekannte Signale auffassen. Das Ziel liegt in einer möglichst allgemeinen Entwurfsmethodik für Regelungsverfahren, die auf der einen Seite die Dynamiken per Beobachterverfahren berücksichtigen, auf der anderen Seite aber den Aufwand für den Reglerentwurf sowie die erforderliche Fachkenntnis des Entwerfenden möglichst gering halten. Insgesamt werden hier drei Verfahren vorgestellt und erstmalig miteinander verglichen, die von der Idee her ähnlich arbeiten:

1. Die aktive Störunterdrückungsregelung,
2. die modellfreie Regelung und
3. die beobachterbasierende nichtlinearitätskompensierende Zustandsregelung.

## 4.1 Beobachter bei unbekanntem Signalen

In der folgenden Darstellung wird das unbekannte Signal – egal ob Störung oder unbekannter Eingang – mit  $u_2$  bezeichnet. Dabei kann es sowohl auf die Dynamik als auch auf die Ausgangsgleichung wirken. Die beiden Situationen sind in Bild 4.1 dargestellt. Die schematische Darstellung wird durch das folgende LTI-System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.1a)$$

$$y = Cx + Du_1 + Ju_2 \quad (4.1b)$$



mit  $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$  als bekanntem Eingangssignal und  $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  als unbekanntem Signal untersetzt.

Um die Darstellung im Folgenden kompakt zu halten, wird der neue Ausgang  $\bar{y} = y - Du_1$  eingeführt. Mit der Variablenumbenennung  $y := \bar{y}$  entsteht dann das Ausgangssystem für die weitere Betrachtung

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.2a)$$

$$y = Cx + Ju_2. \quad (4.2b)$$

Die Grundidee der Verfahren beruht auf der Zerlegung eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^s$  in zwei Komponenten

$$\begin{aligned} x &= P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}x + (I_n - P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}})x \\ &= P_{\mathcal{R}(V)}x + P_{\mathcal{R}(V)^\perp}x = VV^+x + (I_r - VV^+)x, \quad \text{Spezialfall: orth.} \\ &\hspace{15em} \text{Projektion} \\ &= P_{\mathcal{N}(V)^\perp}x + P_{\mathcal{N}(V)}x = V^+Vx + (I_s - V^+V)x \end{aligned}$$

mit geeignet gewählter Matrix  $V \in \mathbb{R}^{r \times s}$ . Die Matrix  $V^+$  bezeichnet die MOORE-PENROSE-Inverse von  $V$ .

Die Idee geht auf [18] und [125] zurück und wurde in der Folge zahlreich vertieft und erweitert. Dabei wurden für lineare Systeme Beobachter reduzierter und vollständiger Ordnung über die Matrizen­theorie [325, 326], Polynom-Matrizen [195] oder invariante Unterräume [284] erarbeitet. Für zustandsaffine Systeme sind Lösungen in [131, 235] zu finden. Spezielle Klassen nichtlinearer Systeme werden in [202, 233] beschrieben. Deskriptorsysteme bei unbekanntem Signalen sind Gegenstand von [61] (vollständige Beobachter) und [62] (reduzierte Beobachter). Die Entwürfe basieren zumeist auf der Annahme, dass keinerlei A-priori-Wissen über die Störung existiert, es sich also um ein komplett unbekanntes Signal handelt [195, 309]. Die Annahme wird im Folgenden übernommen. Darüber hinaus existieren Arbeiten, die spezielle Annahmen an die Störung stellen. In [253] wird beispielsweise ein Modell der Störungen mit der Annahme aufgestellt, dass die Störungen Differenzialgleichungen mit bekannten Parametern, aber unbekanntem Anfangswerten genügen.

### 4.1.1 Systemumformulierung bei unbekanntem Signal in der Ausgangsgleichung

Wenn das unbekanntes Signal  $u_2$  wie in Bild 4.1b nur auf den Ausgang wirkt, so kann ein neuer Ausgang gebildet werden, in dem das unbekanntes Signal  $u_2$  nicht

mehr sichtbar ist. Die gleiche Technik kann herangezogen werden, wenn das System in der Struktur (4.2) vorliegt. Auch hierbei wird ein neuer Ausgang  $\bar{y}$  konstruiert, sodass  $u_2$  nicht mehr direkt auf  $\bar{y}$ , sondern nur noch indirekt über die Systemdifferenzialgleichung Einfluss hat. Der nachfolgende Satz zeigt die Konstruktion des neuen Ausgangs  $\bar{y}$  und die um  $u_2$  reduzierte Ausgangsgleichung. Der einfache Fall, in dem  $u_2$  nicht in der Systemdifferenzialgleichung auftritt, wird somit auf ein Zustandsraumssystem reduziert, für das ein beliebiger Beobachterentwurf vorgenommen werden kann. Der schwierigere Fall mit  $u_2$  in der Systemdifferenzialgleichung wird in Abschnitt 4.1.2 behandelt.

**Satz 4.1. Elimination des unbekanntnen Signals aus der Ausgangsgleichung**

Unter der Voraussetzung  $p > m_2$  und  $\mathcal{R}(C) \setminus \mathcal{R}(J) \neq \emptyset$  und mit  $J := [U_1, U_2] \Sigma V^T$  mit  $U_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $U_2 \in \mathbb{R}^{p \times (p-r)}$ ,  $\text{Rang}(J) = r$  existiert ein neuer Ausgang  $\bar{y} = U_2^T y = U_2^T Cx = \bar{C}x$ , in dem  $u_2$  nicht mehr sichtbar ist:

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.3a)$$

$$\bar{y} = \bar{C}x. \quad (4.3b)$$

□

*Beweis:* Voraussetzung  $p > m_2$  sichert wegen  $m_2 \geq r$  ( $m_2 = r$  Standardfall) mit  $p - r \geq 1$  die Existenz von  $U_2$ . Die Bedingung  $\mathcal{R}(C) \setminus \mathcal{R}(J) \neq \emptyset$  garantiert, dass  $\bar{C} \neq 0_{(p-r) \times n}$  ist.  $\mathcal{R}(U_2) \perp \mathcal{R}(J) = \mathcal{R}(U_1)$  impliziert  $U_2^T J u_2 = 0_{p-r}$  zwecks Elimination. ■

### 4.1.2 Systemumformulierung bei unbekanntem Signal in der Systemdifferenzialgleichung

Ausgangspunkt für die im Folgenden beschriebenen Beobachterentwürfe bilden Systeme von der Struktur (4.3). Die Grundidee beruht auf einer Koordinatentransformation mit einer schiefen Projektion. Ganz allgemein bezeichnet  $P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$  den Projektor einer schiefen Projektion in den Raum  $\mathcal{L}$  entlang des Raums  $\mathcal{M}$ . Ein solcher Projektor erfüllt die folgenden Bedingungen [135]

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0_n\} \quad (4.4a)$$

$$\forall u \in \mathcal{L} : P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} u = u \quad (4.4b)$$

$$\forall v \in \mathcal{M} : P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} v = 0_n \quad (4.4c)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} x \in \mathcal{L} \quad (4.4d)$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{u}_{\in \mathcal{L}} + \underbrace{v}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{w}_{\in (\mathcal{L} \cup \mathcal{M})^\perp} : P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} x = u. \quad (4.4e)$$

Die Räume sind dabei linear unabhängig, d. h.  $\mathcal{M} \cap \mathcal{L} = \{0_n\}$ , aber nicht notwendig komplementär. Durch die Projektion „parallel“ zu  $\mathcal{M}$  sind die entstehenden Komponenten von  $\mathcal{M}$  gleich Null, d. h.  $P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}} \mathcal{M} = \{0_n\}$ . Anders ausgedrückt bedeutet das, dass das Produkt aus  $P_{\mathcal{L}, \mathcal{M}}$  und einer Matrix, deren Spalten  $\mathcal{M}$  aufspannen, die Nullmatrix ist. Die Idee hilft, um bei einer Zustandstransformation von  $x$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{R}(E)$  den Einfluss des unbekanntes Signals zu unterdrücken. Frei ist noch die Wahl des Raums  $\mathcal{L}$ . Wird berücksichtigt, dass

$$Cx = y \quad \Rightarrow \quad x = \underbrace{C^+ y}_{\in \mathcal{N}(C)^\perp} + \underbrace{(I_n - C^+ C) q}_{P_{\mathcal{N}(C), \mathcal{N}(C)^\perp}}$$

gilt, dann wird zur Rekonstruktion von  $x$  die Information aus  $\mathcal{N}(C)$  benötigt, da die in seinem Komplement liegende Information aus  $y$  abgeleitet werden kann. Das erklärt, warum in der nachfolgenden Aufteilung des  $x$ -Vektors

$$\begin{aligned} x &= P_{\mathcal{L}, \mathcal{R}(E)} x + (I_n - P_{\mathcal{L}, \mathcal{R}(E)}) x \\ &= \xi + (I_n - P_{\mathcal{L}, \mathcal{R}(E)}) x \end{aligned} \quad (4.5)$$

als Projektionsziel eine Obermenge des Nullraums von  $C$ , d. h.  $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{N}(C)$  (Gleichheit bei komplementären Räumen  $\mathcal{N}(C) + \mathcal{R}(E) = \mathbb{R}^n$ ), gewählt wird. So bleibt in den transformierten Koordinaten  $\xi$  die maximale Information enthalten. Hier bekommt die für die Existenz des Projektors gestellte Voraussetzung  $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \{0_n\}$  eine anschauliche Interpretation. Wenn  $\mathcal{R}(E)$  und  $\mathcal{N}(C)$  nicht linear unabhängig sind, besitzen sie gemeinsame Vektoren. Das hat zur Folge, dass  $u_2$  auf jeden Fall in  $\mathcal{N}(C)$  sichtbar wird, womit eine Zustandsrekonstruktion unabhängig von  $u_2$  scheitert.

Unter der Voraussetzung  $\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{N}(C) = \{0_n\}$  hat nach [135, Theorem 1] der schiefe Projektor die Darstellung

$$P_{\mathcal{R}(E), \mathcal{N}(C)} = E(CE)^+ C, \quad (4.6)$$

woraus

$$W := P_{\mathcal{L}, \mathcal{R}(E)} = I_n - P_{\mathcal{R}(E), \mathcal{N}(C)} = I_n - E(CE)^+ C \quad (4.7)$$

folgt. Die Vorüberlegungen münden in die folgende Systemumformulierung

$$\dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.8a)$$

$$W\dot{x} = WA(\xi + E(CE)^+Cx) + WBu_1 + \underbrace{WEu_2}_{=0} \quad (4.8b)$$

$$\dot{\xi} = WA\xi + WAE(CE)^+y + WBu_1 \quad (4.8c)$$

mit der Systemausgangsgleichung

$$x = \xi + E(CE)^+y \quad (4.9a)$$

$$Cx = C\xi + CE(CE)^+y \quad (4.9b)$$

$$\bar{y} := (I_p - CE(CE)^+)y = C\xi, \quad (4.9c)$$

zusammengefasst

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{\xi} = WA\xi + WAE(CE)^+y + WBu_1, \quad \xi(0) = Wx_0 \quad (4.10a)$$

$$\bar{y} = C\xi. \quad (4.10b)$$

Das neue System (4.10) steht bei Detektierbarkeit von  $(WA, C)$  den bekannten Beobachterentwürfen (reduziert [195], Abbildungsbeobachter [152]) offen. Die dem LUENBERGER-Entwurf entstammenden Gleichungen fasst Satz 4.2 zusammen.

#### **Satz 4.2. Vollständiger Beobachter für LTI Systeme mit unbekanntem Eingängen**

Für das LTI-System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.11a)$$

$$y = Cx \quad (4.11b)$$

kann unter den Voraussetzungen

$$\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{N}(C) = \{0_n\} \quad (4.12a)$$

$$(WA, C) \text{ detektierbar} \quad (4.12b)$$

der Beobachter

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{\xi}} &= F\hat{\xi} + Gu_1 + Hy, \quad \hat{\xi}(0) = \hat{\xi}_0, \\ \hat{x} &= \hat{\xi} + E(CE)^+y\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}F &= WA - KC & F &\in \mathbb{R}^{n \times n}, & K &\in \mathbb{R}^{n \times p} \\ G &= WB, & & & G &\in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ H &= K(I_p - CE(CE)^+) + WAE(CE)^+, & & & H &\in \mathbb{R}^{n \times p}, \\ W &= I_n - E(CE)^+C, & & & W &\in \mathbb{R}^{n \times n},\end{aligned}$$

mit HURWITZ-stabiler Fehlerdynamik  $\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}$  entworfen werden.  $\square$

*Beweis:* Die Gleichungen (4.13c) – (4.13f) gewährleisten in der Fehlerdifferenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x}, & \tilde{x}_0 &= \hat{x}_0 - x_0 \\ &= \dot{\hat{\xi}} - (I_n - E(CE)^+C)\dot{x}, & \tilde{x}_0 &= \hat{\xi}_0 - (I_n - E(CE)^+C)x_0 \\ & & & \text{mit (4.13b)} \\ &= F\hat{\xi} + Gu + Hy - W(Ax + Bu_1 + Eu_2), & \tilde{x}_0 &= \hat{\xi}_0 - Wx_0 \\ & & & \text{mit (4.13a), (4.13f)} \\ &= F \underbrace{(\hat{\xi} - Wx)}_{=\tilde{x}} + \underbrace{(G - WB)}_{=0 \text{ wg. (4.13d)}} u_1 + \underbrace{(FW + HC - WA)}_{=0} x + \underbrace{WE}_{=0 \text{ siehe (4.8b)}} u_2 \\ &= F\tilde{x}\end{aligned}\tag{4.14}$$

bei einer HURWITZ-stabilen Matrix  $F$  das exponentielle Abklingen des Fehlers, wobei (4.12b) die Einstellbarkeit der stabilen Fehlerdynamik garantiert.  $\blacksquare$

In Satz 4.2 über einen vollständigen Beobachter für ein LTI-System mit zwei unbekanntem Eingängen werden die Voraussetzungen (4.12) genannt. Wie die Erfüllbarkeit der Voraussetzungen überprüft werden kann, wird in den beiden nachfolgenden Anmerkungen erklärt.

**Anmerkung 4.1. Überprüfbarkeit von Voraussetzung (4.12a) über einen Rangtest**

$\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{N}(C) = \{0_n\}$  lässt sich durch die äquivalente Bedingung  $\text{Rang}(CE) = \text{Rang}E$  überprüfen. Das folgt direkt aus SYLVESTERS Rangbeziehung für ein Matrixprodukt [343, S. 46]:  $\text{Rang}(CE) = \text{Rang}E - \dim(\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{N}(C))$ .  $\square$

**Anmerkung 4.2. Detektierbarkeit und invariante Nullstellen**  $(WA, C)$ 

Mit

$$\begin{aligned}
\text{Rang} \begin{bmatrix} W \\ E^+ \end{bmatrix} &= \text{Rang} P_{\mathcal{N}(C), \mathcal{R}(E)} + \text{Rang} E^+ \stackrel{[343, \text{S. } 50]}{\Leftrightarrow} \mathcal{R}(W^H) \cap \mathcal{R}((E^+)^H) = \{0_n\} \\
&= n - \text{Rang} P_{\mathcal{R}(E), \mathcal{N}(C)} + \text{Rang} E & \mathcal{N}(W)^\perp \cap \mathcal{N}(E^+)^\perp &= \{0_n\} \\
&= n - \dim \mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(E), \mathcal{N}(C)}) + \text{Rang} E & \mathcal{R}(E)^\perp \cap \mathcal{N}(E^H)^\perp &= \{0_n\} \\
&= n - \dim \mathcal{R}(E) + \text{Rang} E & \underbrace{\mathcal{R}(E)^\perp \cap \mathcal{R}(E)} &= \{0_n\} \\
&= n & \text{gilt immer} &
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\text{Rang} \begin{bmatrix} sI_n - A & E \\ C & 0_{p \times m_2} \end{bmatrix} \\
&= \text{Rang} \left( \underbrace{\begin{bmatrix} W & 0_{n \times p} \\ E^+ & 0_{m_2 \times p} \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Rang} = n+p \\ \text{wegen (4.15a)}}} \begin{bmatrix} sI_n - A & E \\ C & 0_{p \times m_2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m_2} \\ -(sE^+ - E^+A) & I_{m_2} \end{bmatrix}}_{\text{regulär}} \right) \\
&= \text{Rang} \begin{bmatrix} sW - WA & 0_{n \times m_2} \\ 0_{m_2 \times n} & I_{m_2} \\ C & 0_{p \times m_2} \end{bmatrix} \\
&= m_2 + \text{Rang} \begin{bmatrix} sW - WA \\ C \end{bmatrix} \\
&= m_2 + \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} I_n & sE(C E)^+ \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - WA \\ C \end{bmatrix} \right) \\
&= m_2 + \underbrace{\text{Rang} \begin{bmatrix} s - WA \\ C \end{bmatrix}}_{\text{HAUTUS-Testmatrix}}.
\end{aligned}$$

Wenn keine invariante Nullstelle in der rechten Halbebene liegt, beträgt der Rang auf der linken Seite der Gleichung  $m_2 + n$ . Daraus folgt, dass der Rang der HAUTUS-Testmatrix  $n$  sein muss, was äquivalent zur Detektierbarkeit von  $(WA, C)$  ist.  $\square$

Der Satz 4.2 steht in enger Beziehung zur Arbeit [63], die einen zusätzlichen Freiheitsgrad nutzt und beim Ignorieren des Freiheitsgrads auf Satz 4.2 zurückgeht.

**Anmerkung 4.3. Beziehung zu Entwurf [63]**

In [63] werden aus einem Beobachteransatz

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} &= F\xi + Gu + Hy, \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \hat{x} &= \xi - Qy \end{aligned}$$

fast gleich lautende Matrizen wie in Satz 4.2 abgeleitet, allerdings über umfängliche Matrizenrechnung. Einzig die Matrix  $W$  hat eine andere Struktur

$$\begin{aligned} W^* &= I_n - \left( E(CE)^+ + M \left( I_p - CE(CE)^+ \right) \right) C \\ &= (I_n + MC) \left( I - E(CE)^+ C \right). \end{aligned}$$

$W^*$  ist dann kein Projektor mehr, da die Idempotenz nicht mehr gültig ist. In [63] wird diskutiert, dass die Matrix  $M$  so gewählt werden soll, dass  $(I_n + MC)$  keinen Rangabfall im Matrixprodukt erzeugt, was sicher der Fall ist, wenn  $(I_n + MC)$  regulär ist. Das ist mit  $M = 0$ , also der Lösung von Satz 4.2, aber immer gegeben. Letztendlich bedeutet der Vorterm  $(I_n + MC)$  lediglich eine zusätzliche Transformation des um das Signal  $u_2$  bereinigten  $\xi$  in Formel (4.10).  $\square$

**4.1.3 Anwendung von Beobachtern bei unbekanntem Signal**

Anwendung finden UIOs insbesondere im Bereich der Fehlererkennung und -eingrenzung [73, 74, 310, 311, 334]. Von Interesse ist hier vor allem, ein System unabhängig von bestimmten Eingängen gestalten zu können, um die Fehlerquelle besser ermitteln zu können.

In [50] wird die Anwendung eines Beobachters bei unbekanntem Signal auf Gleichstromservomotoren beschrieben. Als Störung wird die COULOMBSche Reibung als unbekanntes Signal aufgefasst. Das Ziel des Entwurfs ist die Rekonstruktion der Zustandsgrößen Winkelposition und -geschwindigkeit in Gegenwart des unbekanntes Signals.

Ein Beobachter bei unbekanntes Signalen für die Quergeschwindigkeit von Fahrzeugen wird in [161] konstruiert. Die Idee beruht hier auf Erweiterung der linearen Beobachterentwürfe bei unbekanntes Signalen auf eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme. Als unbekanntes Eingang wirkt der Anteil der Querbeschleunigung, der bei einem Querneigungswinkel des Fahrzeugs durch die Gravitation beim Beschleunigungssensor in Querrichtung gemessen wird.

Nachfolgend wird ein lineares Feder-Masse-System in Anlehnung an [275] verwendet, an dem der neu hergeleitete Entwurf eines Beobachters bei unbekanntem Signal aufgezeigt wird. Absichtlich ist ein System gewählt worden, dessen Beobachtbarkeit bei der Transformation verloren geht, aber dessen Detektierbarkeit

gesichert ist, sodass der Entwurf eines Abbildungsbeobachters notwendig wird (siehe Abschnitt 3.2.3).

#### Beispiel 4.1. UIO für ein Feder-Masse-System

Das Feder-Masse-System in Bild 4.2a hat die Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma_{\text{sys}} : \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2+c_{\text{lin}}}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}}_{:=A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{:=B} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}_{:=E} u_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.15a)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{:=C} x, \quad (4.15b)$$

wobei die Konstanten die Werte

$$k_1 = 30, \quad k_2 = 10, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 2, \quad m_1 = 5, \quad m_2 = 10, \quad c_{\text{lin}} = 5$$

annehmen und

$$u_1(t) = 5 \quad \text{bzw.} \quad u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 20 \\ 4 \sin t + 2 & \text{für } t \geq 20, \end{cases}$$

als bekannter Eingang bzw. unbekanntes Signal wirken. Der Verlauf von  $u_2(t)$  ist in Bild 4.2b abgebildet. Die Transformation in die UIO-Form (4.10) führt auf

$$\Sigma_{\text{UIO}} : \dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -2.2 & 2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y, \quad \xi(0) = W x_0 \quad (4.16a)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi \quad \text{mit} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y. \quad (4.16b)$$

Durch die Veränderung von  $A$  zu  $WA$  geht die Beobachtbarkeit wegen  $\text{Rang } \mathcal{O}(WA, C) = 2$  verloren. Die stabilen nichtbeobachtbaren Eigenwerte  $\lambda_{1,2} = -1.1 \pm 2.6058i$  ermöglichen aber einen Beobachteransatz für detektierbare Systeme und somit die Verschiebung der beobachtbaren Eigenwerte  $\lambda_{3,4} = 0$ . Mit dem im Anhang beschriebenen Verfahren können die beobachtbaren Eigenwerte



verschoben werden. Das gelingt mit der für die Minimalrealisierung benötigten Transformation

$$\bar{\xi} = T\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi \quad (4.17)$$

und der Reduktion des Systems um die beiden nichtbeobachtbaren Zustände  $\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4$

$$\bar{\Sigma} : \quad \dot{\bar{\xi}}_{1:2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\xi}_{1:2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y, \quad \bar{\xi}_{1:2,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Wx_0 \quad (4.18a)$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\xi}_{1:2}. \quad (4.18b)$$

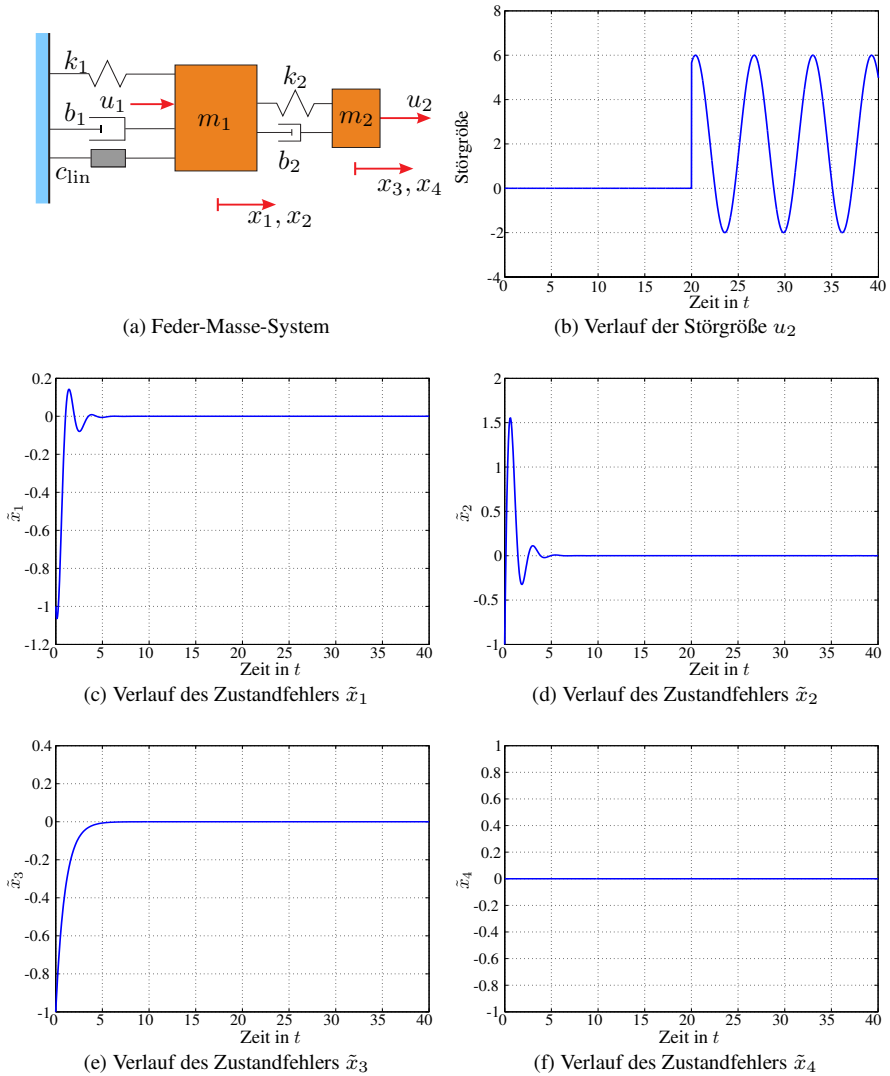
Der Beobachterkorrekturterm

$$-K(\bar{C}\bar{\xi} - \bar{y}) = -\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{\xi} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \right) \quad (4.19)$$

verschiebt die Eigenwerte des Beobachters auf  $-3$  und  $-4$ . Nach anschließender Transformation in Ursprungskoordinaten lautet der Beobachter schließlich

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{\xi}} &= WA\hat{\xi} + WBu_1 + WAE(CE)^+ y \\ &\quad - K \left( C\hat{\xi} - (I_p - CE(CE)^+) y \right), \quad \hat{\xi}(0) = Wx_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -2.2 & 2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\xi} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y \right) \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\hat{x} = \hat{\xi} + E(CE)^+ y = \hat{\xi} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y. \quad (4.20b)$$



Das Einschwingverhalten für die vier Zustände ist in den Bildern 4.2c – 4.2f zu sehen. Das Einschwingen dauert dabei bei allen vier Zuständen rund 5 s. Nach Aufschalten der Störung bei  $t = 20$  s (Verlauf siehe Bild 4.2b) wird bei allen Zuständen in den Bildern 4.2c – 4.2f – wie aufgrund des Wesens des UIOs nicht anders zu erwarten war – deutlich, dass der Beobachter alle Zustände trotz Unkenntnis der Störung richtig rekonstruiert. Dabei bringt hier die Systemkonstellation mit sich, dass beim vierten Zustand direkt der Systemausgang verwendet wird und so  $\tilde{x}_4 = 0$  folgt.  $\square$

## 4.2 Beobachter für unbekannte Signale – Störgrößenbeobachter

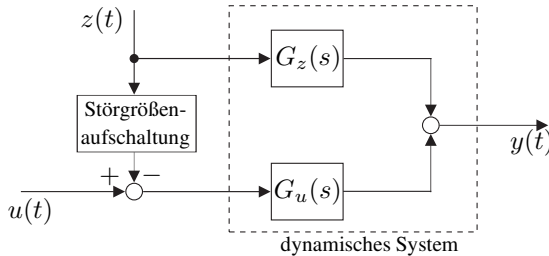
Im vorherigen Abschnitt wird gezeigt, wie ein Beobachter in Gegenwart von unbekanntem Signalen entworfen werden kann, ohne dass das unbekannte Signal auf die Rekonstruktion Einfluss hat. Diese Vorgehensweise wird allgemein als Stör-entkopplung bezeichnet. Der nun folgende Abschnitt widmet sich der Strategie, das unbekannte Signal zu rekonstruieren bzw. zu tracken.

Im Zusammenhang mit dem Reglerentwurf wird die Signalrekonstruktion in der Regel für das Bestimmen von unerwünschten Störgrößen verwendet. Die Berücksichtigung des Signals beim Reglerentwurf wird Störgrößenaufschaltung genannt (siehe Bild 4.3). Der Beobachter, der die Störgröße bestimmt, falls sie nicht direkt messbar ist, heißt Störgrößenbeobachter.

Es gibt folgende Sonderfälle, bei denen beim Reglerentwurf trotz einer wirkenden Störung auf den Entwurf eines Störgrößenbeobachters verzichtet werden kann. Die Aufzählung erfolgt in Anlehnung an [205].

1. In den einfachsten Fällen wirkt eine Störung nicht auf den Ausgang oder deren Wirkung kann durch statische Zustandsrückführung eliminiert werden.
2. Ist das nicht möglich, so kann mit dem Inneren-Modell-Prinzip gearbeitet werden, bei dem im Regler das Störmodell integriert wird (siehe [212, S. 186]). Konstante Störungen haben stationär durch den I-Anteil des Reglers auf den Ausgang keine Auswirkung mehr. Allerdings beeinflusst der I-Anteil Dynamik und Stabilitätsverhalten tendenziell ungünstig. Beim Inneren-Modell-Prinzip muss die Störung über den Ausgang bis zum Regler wirken, bevor entsprechend gegengesteuert werden kann.
3. Ist die Störung selbst messbar und wird sie direkt am Eingang berücksichtigt, verbessert sich das dynamische Verhalten. Darüber hinaus hat die Stör-

größenaufschaltung keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten. Der Störgrößenbeobachter gehört bei der Störgrößenaufschaltung zu den dynamischen Verfahren, daneben kommen auch noch statische Verfahren zum Einsatz.



**Bild 4.3:** Prinzip der Störgrößenaufschaltung (nach [205])

Hier wird sich auf die beobachterbasierte Rekonstruktion von unbekanntem Signalen beschränkt, die vorrangig bei der Störgrößenaufschaltung zum Einsatz kommen werden. Allerdings eignen sich die Verfahren selbstverständlich auch zur Rekonstruktion von Signalen jenseits des Einsatzgebietes, weshalb im Folgenden der Term Störgrößenbeobachter nicht weiter verwendet wird.

Signalbeobachter beruhen auf einem Signalmodell, das das Wissen über die jeweilige Störung beinhaltet. Im Folgenden wird allgemein von dem Störgrößenmodell

$$\Sigma_{\text{disturb}} : \quad \dot{\hat{\zeta}} = M\hat{\zeta}, \quad \hat{\zeta}(0) = \hat{\zeta}_0, \quad M \in \mathbb{R}^{r \times r} \text{ blockdiagonal} \quad (4.21a)$$

$$\hat{u}_2 = H\hat{\zeta} \quad (4.21b)$$

ausgegangen. Oft ist es für den Entwurf vereinfachend, wenn Zustands- und Störgrößenbeobachter in ein gemeinsames System geschrieben werden. Das gelingt über das Kombinieren von (4.21) und dem Identitätsbeobachter für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + Bu_1 + Eu_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.22a)$$

$$y = Cx \quad (4.22b)$$

und lautet dann

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & EH \\ 0_{r \times n} & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0_{r \times m_1} \end{bmatrix} u_1 \\ - K \left( [C \ 0_{p \times r}] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} - y \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{\zeta}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{\zeta}_0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Für den kombinierten Entwurf von Signalbeobachter und Zustandsregler sei auf [205] und [242] verwiesen.

Die in der Literatur angegebenen Beispiele gehen von einer Übereinstimmung der Signalmodellstruktur mit dem Störmodell aus. Thematisch wird deshalb auf die Robustheit von Beobachterverfahren eingegangen, wenn die angenommene und modellierte Störung der tatsächlichen widerspricht, da diesem Umstand bisher kaum Aufmerksamkeit gewidmet wurde. In Beispiel 4.2 wird im ersten Teil der häufige Fall betrachtet, bei dem die Frequenz des Signals des Beobachters nicht mit der des Systems übereinstimmt. Im zweiten Teil wird weiter gegangen und gezeigt, dass selbst das Modell der Rampenfunktion für eine Frequenzrekonstruktion – wenn auch mit dem Risiko von Schleppfehlern und bleibenden Regelabweichungen – verwendet werden kann.

Es handelt sich dabei um eine Modifikation von [134], wobei insbesondere die Schreibweise vereinheitlicht und an die hier verwendeten Notationen angepasst wird.

#### Beispiel 4.2. Robustheit eines Signalbeobachters gegenüber einem modellfremden Störsignal

Für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.24a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (4.24b)$$

wird der Regler

$$u_1 = - \begin{bmatrix} 15 & 8 & h_{i,1} & h_{i,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

mit  $H = \begin{bmatrix} h_{i,1} & h_{i,2} \end{bmatrix}$  als Einfluss der Störgrößendynamik entworfen, der die Eigenwerte des geschlossenen Kreises auf  $-5$  und  $-3$  legt. Der Zustand wird über den Beobachter mit integriertem Störgrößenbeobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{i,1} & h_{i,2} \\ 0 & 0 & m_{i,11} & m_{i,12} \\ 0 & 0 & m_{i,21} & m_{i,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

$$+ k_{Bi} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} - y \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{\zeta}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{\zeta}_0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

mit der Störgrößenbeobachterdynamik  $M_i = \begin{bmatrix} m_{i,11} & m_{i,12} \\ m_{i,21} & m_{i,22} \end{bmatrix}$  und der Beobach-  
terverstärkung  $k_{B_i}$  rekonstruiert. Ferner enthält der Zustandsregler eine Störgrö-  
ßenaufschaltung. Es werden zwei verschiedene Störgrößen betrachtet:

### 1. Modellierung für eine Rampenfunktion

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = [1 \ 0] \quad \text{und} \quad k_{B1} = [18, 119, 342, 360]^T \quad (4.27)$$

Die Beobachtereigenwerte sind auf  $-3$ ,  $-4$ ,  $-5$  und  $-6$  gelegt.

### 2. Modellierung einer Sinusstörung mit bekannter Frequenz $f = 10$ Hz

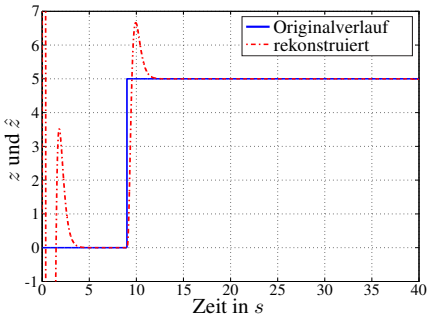
$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(2\pi f)^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = [1 \ 0] \quad \text{und} \\ k_{B2} = [18, -3.828.8, -1125.5, 240580]^T \quad (4.28)$$

Die Beobachtereigenwerte sind auf  $-3$ ,  $-4$ ,  $-5$  und  $-6$  gelegt, wobei von  $f = 10$  ausgegangen wird. Dass die gewählte Frequenz entscheidend für den Verstärkungsvektor  $k_{B2}$  ist, ist bei dessen Berechnung für  $f = 1$  ersichtlich:  $k_{B2} = [18, 79.5, -58.7, -442.4]$ .

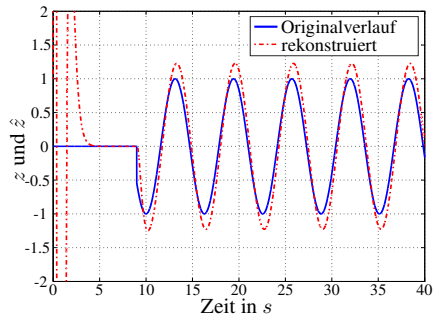
Die Simulationsergebnisse sind in Bild 4.4 dargestellt. Aufgrund der bewusst falsch angenommenen Modelle kommt es natürlich zu Differenzen zwischen Stör-  
signal und dessen beobachterbasierter Rekonstruktion. Dem Störgrößenbeobachter  
gelingt es jedoch trotz des falschen Signalmodells noch gut, die Größe zu rekon-  
struieren und in Verbindung mit der Störgrößenaufschaltung einen wesentlichen  
Teil der Störung bereits zu unterdrücken. Der Regler muss dann die verbleibende  
Störung ausregeln.

Die Wahl der Verstärkungsfaktoren stellt einen Kompromiss zwischen Minimie-  
rung des Schleppfehlers und transientem Verhalten dar. In allen Fällen in Bild 4.4  
ist ein sehr dynamisches transientes Verhalten erkennbar, dafür weist aber der Si-  
gnalbeobachter, der für eine andere Störung als die tatsächliche ausgelegt wurde,  
ein erstaunlich robustes Verhalten auf. Der alternative Ausweg für ein verbessertes  
transientes Verhalten über die Optimierung der Anfangswerte kann hier Schwierig-  
keiten bereiten, wenn keinerlei Wissen über die Störung vorliegt.

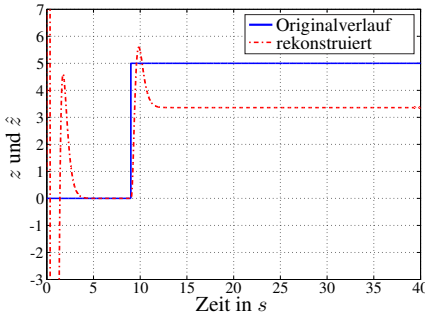
Neben den dargestellten Fällen wurden gleiche Systemklassen mit anderen Para-  
metern untersucht, die diese Ergebnisse bestätigen. Für allgemeingültige Aussagen  
bedarf es aber weiterer Untersuchungen.  $\square$



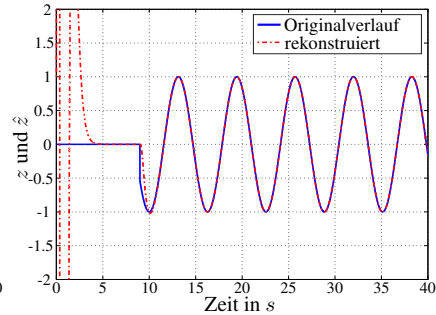
(a) 1. Fall: Sprung als Störung, Rampenstörmmodell. Signal wird gut geschätzt.



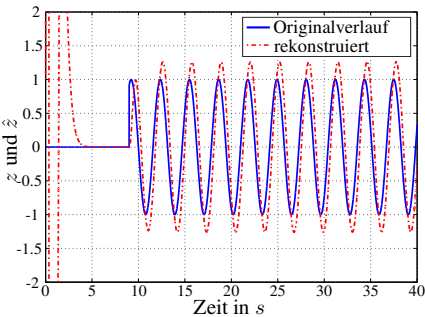
(b) 2. Fall: Sinus als Signal, Rampenstörmmodell. Sehr gutes Einschwingen bei starken Verstärkungen.



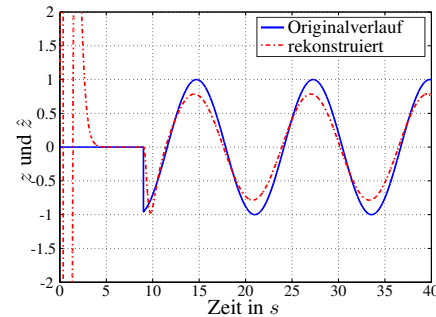
(c) 3. Fall: Sprung als Signal, Sinusstörmmodell. Störgröße wird nur bedingt gut geschätzt.



(d) 4. Fall: Störung und Störgrößenmodell sind Sinusmodelle gleicher Frequenz.



(e) 5. Fall: Störung hat doppelte Frequenz wie Störgrößenmodell. Gute Übereinstimmung, aber konstante Abweichung.



(f) 6. Fall: Störung hat halbe Frequenz wie Störgrößenmodell. Gute Übereinstimmung, aber konstante Abweichung.

**Bild 4.4:** Robustheit eines Störgrößenbeobachters mit bewusst falschem Signalmodell. Die Störung wird jeweils bei  $t = 10$  s zugeschaltet.

### 4.3 Beobachter für Ableitungen

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der beobachterbasierten Ableitungsbildung. Er bildet gleichzeitig die theoretische Grundlage für den Abschnitt 4.4, bei dem nicht wie in den Abschnitten 4.1 und 4.2 einzelne Signale, sondern komplette Strecken als unbekannte Signale aufgefasst werden.

Der Abschnitt gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil stellt eine neue Herleitung über Deskriptorsysteme vor und der zweite Teil zeigt an einem Beispiel praktisch, wie ein beobachterbasierter Entwurf für die Bildung von Wegableitungen aussieht.

Bedarf an Ableitungen von Signalen gibt es in verschiedenen Disziplinen der Regelungstechnik. Bei adaptiven Reglern werden sie für die Parameteridentifikation gebraucht. Bei Vorsteuerungen werden häufig Ableitungen von Eingangssignalen benötigt. In technischen Systemen haben sie ebenso eine große Bedeutung. Bei Tracking-Messungen müssen aus Abstandsmessungen Geschwindigkeiten bestimmt werden, bei thermischen Anwendungen sind Heizraten von Interesse. Informationen zu Beschleunigungen, die die zweite Ableitung von Positionen sind, werden ebenso benötigt.

Die Herausforderung bei der Bildung von Ableitungssignalen liegt weniger in der Bildung der Ableitung selbst – vielmehr liegt sie darin, unerwünschte Störsignale, Rauschen oder Unstetigkeiten zu vermeiden. Tiefpassfilter oder Beobachter ermöglichen es daher, Ableitungen trotz der Einflüsse zuverlässig bilden zu können. Die Grundidee der Tiefpassfilter ist es, die technische Realisierbarkeit (engl.: *properness*) der Ableitungsbildung sicherzustellen. Mit dieser Forderung muss der Tiefpassfilter die gleiche Ordnung aufweisen wie die höchste benötigte Ableitung. Alle Ableitungen müssen dann aber mit dem gleichen Tiefpassfilter versehen werden, um Inkonsistenzen in der Phasenverschiebung zu vermeiden. In Abschnitt 5.1.1 wird gezeigt, dass sogar ein Tiefpassfilter mit Ordnung  $n - 1$  ausreichend ist, da sich die höchste Ableitung als Linearkombination der anderen Ableitungen erzeugen lässt.

Ebenfalls auf der Idee der Linearkombinationen basieren beobachterbasierende Systeme. Denn die Herleitung des Beobachterkriteriums nach KALMAN zeigt, dass die Ableitungen von 0-ter bis  $n - 1$ -ter Ordnung der Ausgangsgrößen die Linearkombination der Zustände eines LTI-Systems sind. Die Besonderheit bei dem hier hergeleiteten Differenzierer als LTI-System ist, dass er sich nicht in Zustandsraumdarstellung, sondern nur als Deskriptorsystem darstellen lässt. Dieser Nachteil kann durch eine Regularisierung behoben werden, wie die nachfolgende Darstellung zeigt und was zur Folge hat, dass lediglich ein Tracker und kein Beobachter entworfen werden kann. Gleichzeitig ermöglicht die gewählte Darstellung, den Zusammenhang zu den filterbasierten Zugängen aufzuzeigen.



Hier wird lediglich auf den beobachterbasierten Zugang eingegangen. Die Ableitungsbildung mittels Tiefpassfiltern wird im Zusammenhang mit den adaptiven Beobachtern in Abschnitt 5.1.1 behandelt.

Ein Differenzierer  $y = \dot{u}$  als Deskriptorsystem sieht wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.29a)$$

$$\dot{u} := y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.29b)$$

Die übliche Regularisierung<sup>1</sup> für Deskriptorsysteme lautet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.30a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\varepsilon} & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \end{bmatrix} u \quad (4.30b)$$

mit  $\varepsilon$  als Einstellparameter und führt schließlich auf

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma \\ \gamma^2 \end{bmatrix} (u - \hat{x}_1) \quad (4.31)$$

mit  $\gamma$  als Einstellparameter. Für höhere Ableitungen lässt sich die Darstellung verallgemeinern und ein Ableitungs-Tracker herleiten

$$\Sigma_{\text{tr}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} k_{n-1} \\ \vdots \\ k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} (u - \hat{x}_1), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (4.32a)$$

$$\dot{u}^{(n-1)} := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}. \quad (4.32b)$$

Das System ist dabei ein JORDAN-Block der Ordnung  $n$ . Außerdem wird hier – bewusst anders als in Kapitel 2 – der Fehler als  $u - \hat{x}_1$  gewählt, weil dann bei der äquivalenten Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^{n-1}k_0}{s^n + k_{n-1}s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-1} + \cdots + k_1s + k_0} \quad (4.33)$$

---

<sup>1</sup>Die zunächst naheliegende Regularisierung über  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$  erzeugt beispielsweise bei  $u = \sin(\omega t)$  eine zweite Schwingung bzw. eine Schwebung.

besser deutlich wird, dass der Ableitungsbeobachter einer Verkettung von Tiefpassfiltern entspricht.

Die folgende Anmerkung zeigt den Zusammenhang mit einem High-Gain-Beobachterbasierten Zugang zur Ableitungsbildung auf.

**Anmerkung 4.4. Ableitungs-Tracker**

Die Veröffentlichung [154] beschäftigt sich mit der Bildung von Ableitungssignalen und schlägt dafür im zeitkontinuierlichen Bereich einen High-Gain-Beobachteransatz vor. Die Herleitung hier ist äquivalent, da kleine Werte von  $\varepsilon$  zu großen  $\gamma$  in (4.31) führen und dann ebenfalls einem High-Gain-Beobachteransatz entsprechen.  $\square$

In Beispiel 4.3 wird ein zeitdiskreter Beobachter für die Krümmungsrekonstruktion von Fahrbahnen entworfen. Die zu rekonstruierenden Krümmungsparameter entsprechen dabei den ersten beiden Ableitungen der Winkeländerung. Entgegen der dieser Arbeit zugrunde liegenden Beschränkung auf zeitkontinuierliche Systeme wird hier ein zeitdiskreter Entwurf vorgestellt, da er für die Problemstellung erforderlich ist. Der Entwurf zeigt ferner, dass auch andere Ableitungen als die Zeitableitung möglich gebildet werden können.

**Beispiel 4.3. Beobachterentwurf zur Rekonstruktion von Krümmungsableitungen [164]**

Ein wesentliches Problem bei der Navigation von autonomen Fahrzeugen stellt die Rekonstruktion von Bahnen vorausfahrender Fahrzeuge dar. Solche Bahnen werden durch Klothoiden<sup>2</sup> beschrieben, die sich durch konstante Krümmungsänderungsraten auszeichnen. Als Messwerte liegen Punktwolken von Lidar-Sensoren vor, aus denen die Verschiebung der Mittelwerte  $\Delta s_k = \|\left[\Delta x_k \ \Delta y_k\right]^T\|_2$  und die Verdrehung  $\Delta\psi_k$  der Punktwolke mit Hilfe des Procrustes-Algorithmus [213] bestimmt werden. Aus den Abtastwerten  $\Delta s_k, \Delta\psi_k$  sind die Krümmung und Krümmungsänderung für diverse Aufgaben beim autonomen Fahren (Vorsteuerung, Kollisionsvermeidung, usw.) abzuleiten. Mit anderen Worten: Es ist die erste und zweite Ableitung  $\psi$  bezüglich des Bogenparameters  $s$  zu bestimmen. Das erfordert die Herleitung einer diskreten Vorschrift für die Ableitungsbildung. Ausgangs-

---

<sup>2</sup>Unter der Bezeichnung „Klothoiden“ [183] sind spezielle ebene Kurven mit linearem Krümmungsverlauf bekannt, die als Übergangskurven im Straßenbau zum stoßfreien Verlauf von Bahnen zwischen Geraden und Kreisbögen eingesetzt werden. Sie werden durch die Krümmung  $\kappa(s)$ , deren Wert reziprok zum aktuellen Kurvenradius ist, und die Krümmungsänderung  $\kappa'(s)$  vollständig beschrieben. Klothoiden eignen sich zur Beschreibung von Bewegungen von Fahrzeugen, weil Gerade und Kreis jeweils einen Sonderfall der Klothoide darstellen, nämlich wenn Krümmung und Krümmungsänderung bzw. nur Krümmungsänderung identisch Null sind.

punkt für die Diskretisierung bildet das Differenzialgleichungssystem

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \psi \\ \kappa \\ \kappa' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \kappa \\ \kappa' \end{bmatrix} \quad (4.34a)$$

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \kappa \\ \kappa' \end{bmatrix}. \quad (4.34b)$$

Entsprechend dem Klothoidenmodell sichert die dritte Differenzialgleichung eine konstante Krümmungsänderung. Durch hinreichend hohe Beobacherverstärkung zum ingenieurmäßig angepassten transienten Verhalten wird das Beobachtermodell zum Tracker-Modell für die sich zeitlich ändernden Klothoiden (Straßenverläufe). Die Diskretisierung von (4.34a) liefert die Differenzgleichung

$$\begin{bmatrix} \psi_{k+1} \\ \kappa_{k+1} \\ \kappa'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta s & \frac{1}{2} \Delta s^2 \\ 0 & 1 & \Delta s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_k \\ \kappa_k \\ \kappa'_k \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Aus der ersten Differenzgleichung in (4.35) kann die für einen Beobachter benötigte Ausgangsgleichung für den Messwert  $\Delta\psi_k = \psi_{k+1} - \psi_k$  direkt abgelesen werden, wodurch das für den Beobachter verwendete Modell

$$\begin{bmatrix} \kappa_{k+1} \\ \kappa'_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_k \begin{bmatrix} \kappa_k \\ \kappa'_k \end{bmatrix} \quad (4.36a)$$

$$\Delta\psi_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta s & \frac{1}{2} \Delta s^2 \end{bmatrix}}_k \begin{bmatrix} \kappa_k \\ \kappa'_k \end{bmatrix} \quad (4.36b)$$

entsteht. Der an  $A$  und  $C$  angefügte Index  $k$  soll verdeutlichen, dass die Weginkremente nicht äquidistant sein müssen. Ursache hierfür sind beispielsweise sich ändernde Geschwindigkeiten des vorausfahrenden Fahrzeugs. Der Beobachter ist demnach für ein zeitdiskretes zeitvariantes Problem zu entwerfen. Die Beobachtgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_{k+1} \\ \hat{\kappa}'_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \Delta s_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_k \\ \hat{\kappa}'_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{1,k} \\ l_{2,k} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Delta s_k & \frac{1}{2} \Delta s_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_k \\ \hat{\kappa}'_k \end{bmatrix} - \Delta\psi_k \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 + l_{1,k} \Delta s_k & \Delta s_k + \frac{1}{2} l_{1,k} \Delta s_k^2 \\ l_{2,k} \Delta s_k & 1 + \frac{1}{2} l_{2,k} \Delta s_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\kappa}_k \\ \hat{\kappa}'_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{1,k} \\ l_{2,k} \end{bmatrix}_k \Delta\psi_k. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die zeitvarianten Beobacherverstärkungen sind so zu bestimmen, dass die charakteristische Gleichung zeitinvariant ist. Das geschieht über das charakteristische Polynom

$$\det(zI_2 - A - lC^T) = z^2 + \left(-\frac{1}{2}l_{2,k}\Delta s_k^2 - l_{1,k}\Delta s_k - 2\right)z - \frac{1}{2}l_{2,k}\Delta s_k^2 + l_{1,k}\Delta s_k + 1. \quad (4.38)$$

Das Entwurfsziel sind zwei Pole auf der positiven reellen Achse im Bereich  $(0, 1)$

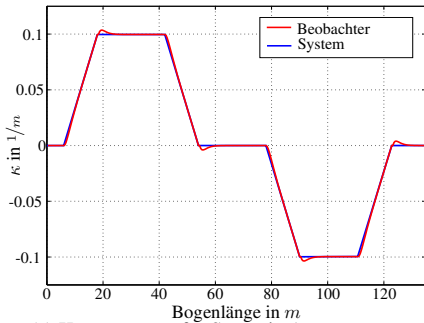
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\Delta s_k & -\frac{1}{2}\Delta s_k^2 \\ \Delta s_k & -\frac{1}{2}\Delta s_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{1,k} \\ l_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_{1,k} \\ l_{2,k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\Delta s_k^{-1} & \frac{1}{2}\Delta s_k^{-1} \\ -\Delta s_k^{-2} & -\Delta s_k^{-2} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei  $k_0$  und  $k_i$  die Koeffizienten des gewünschten Polynoms sind. Sollen dessen Wurzeln bei 0.3 und 0.5 liegen, lauten die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms  $k_0 = 0.15$  und  $k_1 = -0.8$  und die zeitvariante Verstärkung liegt bei  $l_{1,k} = -\frac{41}{40}\Delta s^{-1}$  und  $l_{2,k} = -\frac{7}{20}\Delta s^{-2}$ . Das System ist beobachtbar, solange die Determinante der KALMAN-Beobachtbarkeitsmatrix

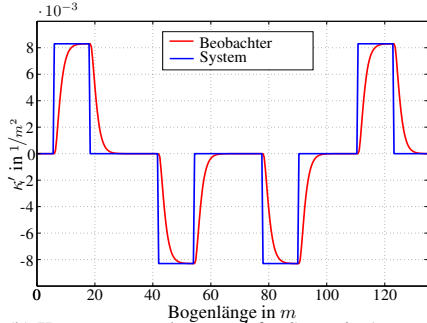
$$\det \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \Delta s_k & \frac{1}{3}\Delta s_k^2 \\ \Delta s_k & \frac{3}{2}\Delta s_k^2 \end{bmatrix} = \Delta s_k^3 \quad (4.40)$$

ungleich Null ist, also solange  $\Delta s_k \neq 0$ . Das bedeutet wiederum, dass der Beobachter funktioniert, solange sich ein Objekt bewegt, da ansonsten die Beobacherverstärkungen nicht bestimmt werden können. Das Problem wird gelöst, indem die vorherigen Werte verwendet werden, solange  $\Delta s$  klein (z. B. unter 1 cm) ist.

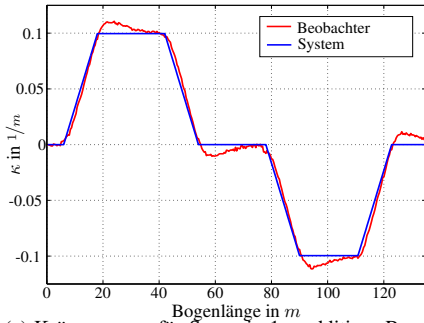
Der Ansatz wird in zwei unterschiedlichen Szenarien getestet. Im ersten wird eine S-Kurve mit einem Radius von 10 m und einer Geschwindigkeit von  $15 \text{ m/s}$  durchfahren, die den innerstädtischen Verkehr repräsentieren soll. Im zweiten werden der Radius auf 100 m und die Geschwindigkeit auf  $30 \text{ m/s}$  geändert. Die Werte stehen für den außerstädtischen Verkehr. Die Bilder 4.5a und 4.5b zeigen den Verlauf von Krümmung und -änderung. Dabei ist in Bild 4.5b ersichtlich, dass der Verlauf der Krümmungsänderung nicht modelliert ist und deshalb nur getrackt werden kann. Der Korrekturterm zeigt ein exponentielles Einschwingverhalten. Der Fehlerverlauf bei der Krümmungsänderung ist auch für das leichte Überschwingen in Bild 4.5a verantwortlich. Es ist möglich, durch Wahl von höheren Verstärkungswerten das Einschwingverhalten zu verbessern. Allerdings ist die Wahl der Verstärkungswerte bei der Verwendung künstlich verrauschter Werte ein Kompromiss zwischen Einschwing- und Störverhalten: Je besser das Einschwingverhalten ist, desto schlechter das Störverhalten (und umgekehrt). Die Bilder 4.5c und 4.5d zeigen das gleiche Szenario wie die Bilder 4.5a und 4.5b, sie sind jedoch – wie



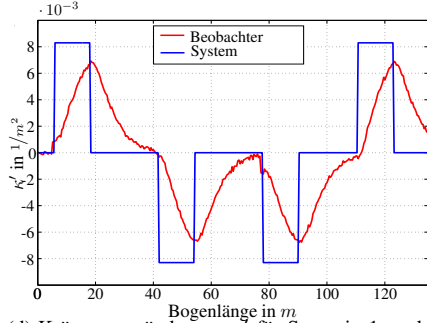
(a) Krümmung  $\kappa$  für Szenario 1 – ungestört



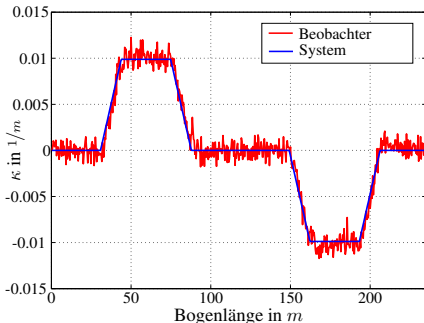
(b) Krümmungsänderung  $\kappa'$  für Szenario 1 – ungestört



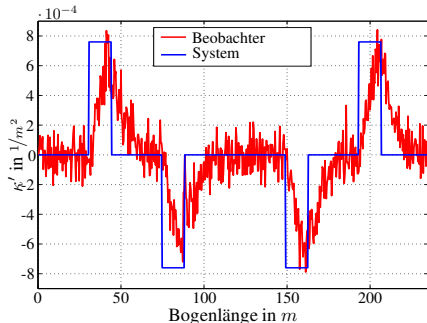
(c) Krümmung  $\kappa$  für Szenario 1 – additives Rauschen auf Messwerte



(d) Krümmungsänderung  $\kappa'$  für Szenario 1 – additives Rauschen auf Messwerte

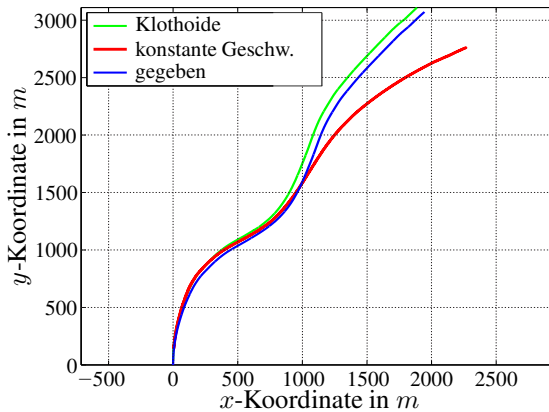


(e) Krümmung  $\kappa$  für Szenario 2 – additives Rauschen auf Messwerte



(f) Krümmungsänderung  $\kappa'$  für Szenario 2 – additives Rauschen auf Messwerte

**Bild 4.5:** Simulationsergebnisse für Ableitungsbeobachter



**Bild 4.6:** Genauigkeitsvergleich verschiedener Modelle

auch die Bilder 4.5e und 4.5f, die das zweite beschriebene Szenario darstellen – mit einem weißen Rauschen mit einer Standardabweichung von  $\sigma = 1 \text{ cm}^2$  versehen, das auf die Messwerte von  $\Delta x_k$  und  $\Delta y_k$  wirkt. Während die rekonstruierten Werte der Krümmung gute Übereinstimmung mit den vorgegebenen Werten aufweisen, so zeigen die Krümmungsänderungswerte, dass die Verstärkungswerte im Vergleich zu 4.5b reduziert werden müssen, um einen guten Verlauf zu gewährleisten.

Es offenbart ferner, dass es wesentlich schwieriger ist, die Ableitung zu rekonstruieren. Zwar haben in Szenario 2 die rekonstruierten Werte der Krümmung in Bild 4.5e nach wie vor eine gute Übereinstimmung, obwohl sie eine Größenordnung geringer als bei Szenario 1 sind. Dagegen sind die Auswirkungen der kleineren Werte beim Verlauf der Krümmungsänderung in Bild 4.5f deutlich sichtbar. Der ursprüngliche Verlauf ist zwar gut erkennbar, das Rauschen hat aber einen viel größeren Einfluss als in Szenario 1.

In Bild 4.6 wird das hergeleitete Modell anhand von realen Daten mit dem Bewegungsmodell von [305] verglichen, das konstante Geschwindigkeit in  $x$ - und  $y$ -Richtung annimmt. Die Eigengeschwindigkeit des Fahrzeugs, auf dem der Scanner installiert ist, wird mit Hilfe von Geschwindigkeits- und Lenkradwinkeldaten rekonstruiert und kompensiert. Bild 4.6 zeigt, dass anfangs beide Modelle sehr gute Übereinstimmung mit der gegebenen Kurve haben, dass das Modell mit konstanter Geschwindigkeit zwischenzeitlich sogar näher an der gegebenen liegt und dass das Klothoidenmodell bei längeren Messungen insgesamt bessere Ergebnisse als das Modell von [305] erzielt.  $\square$

Im folgenden Abschnitt wird die beobachterbasierende Ableitungsbildung nicht für die Signalableitung, sondern für das Identifizieren des kompletten Systemverhaltens genutzt.

## 4.4 Vergleich von Zugängen der adaptiven Störunterdrückungsregelung

Beim Reglerentwurf sind Störungen und unmodellierete Dynamiken zu berücksichtigen. Für messbare Störungen geschieht das üblicherweise durch Störkompensationsschaltungen, für nichtmessbare Störungen wird es in der Reglerauslegung berücksichtigt. Zur Behandlung unmodellierter Dynamiken bieten sich einerseits die robusten, andererseits die adaptiven Reglerkonzepte an. Beide sind aber für nichtlineare Systeme sehr kompliziert. Deshalb wurde in den letzten Jahren an Reglerstrategien gearbeitet, die gewissermaßen die Vorteile der robusten und adaptiven Regelung vereinen, gleichzeitig aber dank einfacher Modelle die Entwurfsaufgabe wesentlich vereinfachen. In diese Richtung zielen die nichtlinearitätskompensierenden Zustandsregler, die aktive Störunterdrückungsregelung und die modellfreie Regelung. Der Vergleich der drei Verfahren wird in dieser Arbeit erstmalig vorgenommen.

Allen Konzepten ist die folgende Grundidee mehr oder weniger eigen: Nichtlinearitäten, eventuelle Störungen und/oder sogar ganze Streckendynamiken werden als zeitveränderliche Parameter oder unbekannte Signale aufgefasst und mit Hilfe geeigneter Identifikationsverfahren – meist kommen Beobachterverfahren zum Einsatz – fortwährend getrackt. Für das verbleibende Basismodell wird ein konventioneller relativ robuster Regler gewählt und um die beobachteten Parameter (eigentlich Nichtlinearitäten und Störungen) korrigiert. Beispielsweise kann bei der modellfreien Regelung der Ableitungstracker aus Abschnitt 4.3 zum Einsatz kommen.

In Tabelle 4.1 werden die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Verfahren gegenübergestellt. Bei dem angenommenen Signalmodell fällt auf, dass bei den behandelten Problemstellungen Systeme erster und zweiter Ordnung typisch sind. Während die aktive Störunterdrückungsregelung und die modellfreie Regelung ohne Streckenmodellierung auskommen, beschränkt sich die nichtlinearitätskompensierende Regelung auf die Annahme, dass lediglich die nichtlineare Streckendynamik unbekannt ist.

Bei den verwendeten Identifikationsverfahren kommen verschiedene Beobachterverfahren zum Einsatz. Die aktive Störunterdrückungsregelung verwendet einen im nächsten Kapitel vorgestellten Verbundbeobachter. Die modellfreie Regelung

Aspekt	Aktive Störunterdrückungsregelung	Modellfreie Regelung	Nichtlinearitätskompensierende Regelung
Signalmodellannahme	$\ddot{y} = f(x, \dot{x}, t) + \alpha u$ $\alpha$ Designparameter	$\dot{y} = F + \alpha u + \beta,$ $\ddot{y} = F + \alpha u + \beta,$ $\alpha, \beta$ Designparameter	linearer Zustandsraum mit bekannten Parametern, nichtlinearer Systemteil als unbekanntes Signal
Identifikationsverfahren	Verbundbeobachter: Unbekannter, konstanter Parameter als 3. Zustand eingeführt. Beobachterdynamik durch Polvorgabe	Ableitungs-Tracker	LUENBERGER-Beobachter mit linearem Signalmodell
Regler	PID-Regler	PID-Regler	Zustandsregler
Anwendung	Systeme 1./2. Ordnung	Systeme 1./2. Ordnung	bei Reibung, Spiel
Literatur	[108, 110, 132]	[85, 86]	[238–240]

**Tabelle 4.1:** Übersicht der Verfahren zur adaptiven Störunterdrückung

nutzt ein Verfahren, das Ähnlichkeiten mit dem Ableitungs-Tracker aus dem vorherigen Abschnitt aufweist. Die nichtlinearitätskompensierende Regelung entwirft einen LUENBERGER-Beobachter mit linearem Signalmodell.

#### 4.4.1 Modellfreie Regelung

Das mathematische Modell der Wirklichkeit stellt die Grundlage für jeden Reglerentwurf dar und ist entscheidend für die Wahl der richtigen Regelungsstrategie. Der Begriff der modellfreien Regelung [85, 86, 91, 114] impliziert zumindest indirekt, dass keinerlei Vorbedingungen an das Problem gestellt werden und der Regler ohne größere Analyse eingesetzt werden kann. Die Autoren bezeichnen hierbei ihr Vorgehen als phänomenologisch anstelle von mathematisch präzise. Für eine sehr



kurze Zeit wird angenommen, dass die Strecke der Gleichung

$$\ddot{y} = F + \alpha u + \beta \quad \text{oder} \quad \dot{y} = F + \alpha u + \beta \quad (4.41)$$

entspricht. Sowohl die Ordnung der Ableitung  $n$  als auch die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sind Designparameter, wobei der Parameter  $\beta$  nur in [92, 175] vorkommt und sonst weggelassen wird. Für die Designparameter empfiehlt [85], dass  $F$  und  $\alpha u$  in etwa die gleiche Größenordnung aufweisen. Der Wert von  $F$  wird mit Hilfe des numerischen Differenzierens bestimmt. Die Verwendung der Methode hilft dabei auch, Ableitungen bei verrauschten Signalen zu bestimmen. Als Regler kommt im Fall von  $n = 2$  der intelligente PID-Regler<sup>3</sup> [85]

$$u = -\frac{F}{\alpha} + \frac{\ddot{y}_d}{\alpha} + k_P(y - y_d) + k_I \int_0^t (y(\tau) - y_d(\tau))d(\tau) + k_D(\dot{y} - \dot{y}_d) \quad (4.42)$$

mit dem gewünschten Streckenverhalten  $y_d$  und den üblichen Reglerverstärkungen  $k_P$ ,  $k_I$  und  $k_D$  zum Einsatz. Bei  $n = 1$  wird aus dem intelligenten PID-Regler ein intelligenter PI-Regler, bei  $n \geq 2$  ein generalisierter intelligenter PID-Regler [87]. Allerdings stimmt die Annahme der völligen Modellfreiheit nicht, denn zumindest der relative Grad der Problemstellung wird als bekannt vorausgesetzt bzw. gewählt. Auch sind modellfreie Regler auf Basis des relativen Grads nicht neu. Bereits bei den Veröffentlichungen von ILCHMANN über identifikationslose adaptive Regelung [155, 158] werden solche Verfahren vorgestellt.

Anti-Windup-Probleme können einfach durch das Stoppen des Integrierens bei Erreichen der Sättigung des Eingangssignals realisiert werden [86]. Das Rauschen bei Messsignalen wird mit Hilfe von Tiefpassfiltern reduziert. Im Zusammenhang mit dem algebraischen Zugang, der zumeist für die Streckenidentifikation bei der modellfreien Regelung verwendet wird, hat sich [84] mit dem Thema auseinandergesetzt.

Die modellfreie Regelung ist bei folgenden Anwendungen zum Einsatz gekommen:

- Drei-Tank-System (Modell 1. Ordnung) [86],
- System allgemein mit Nichtlinearitäten und Reibung (Modell 2. Ordnung) [86],
- Regelung einer Drosselklappe (Modell unklar) [175],
- Aktuator von entgegenwirkenden Formgedächtnislegierungen (Modell 1. Ordnung) [114],

---

<sup>3</sup>Der Begriff des intelligenten PID-Reglers wurde in der Literatur bereits in einem anderen Kontext verwendet, s. z. B. [12].

- Gleichstrommaschine (Modell 2. Ordnung) [93],
- Abstandsregeltempomat und Stop-and-Go-Szenarien (Modell 2. Ordnung) [55, 321],
- „Ball auf Balken“-Experiment (Modell 2. Ordnung) [92].

#### **Anmerkung 4.5. Das verwendete Identifikationsverfahren im Vergleich**

In [220, 221] wird die bei der modellfreien Regelung übliche algebraische Identifikationsmethode [95] mit Least-Squares-Methoden verglichen, in [90, 277] zudem mit adaptiven Zugängen.  $\square$

### **4.4.2 Aktive Störunterdrückungsregelung**

Der Begriff der aktiven Störunterdrückungsregelung geht auf Arbeiten von [132] und [110] zurück, wobei die Autoren in den Arbeiten auf frühere chinesische Veröffentlichungen verweisen. Im Englischen wird von Active Disturbance Rejection Control, kurz ADRC, gesprochen. Anstelle von „Active“ wird in einigen Publikationen auch das Wort „Auto“ verwendet. Offen bleibt die Frage, warum bei dem Begriff explizit der Zusatz „aktiv“ verwendet wird, impliziert er doch, dass es auch passive Störunterdrückungsregelung gibt. Eine Literaturrecherche hat hierbei zu keinem Ergebnis geführt.

Das ADRC-Konzept umfasst dabei mehr als den reinen Störgrößenbeobachter, der die Streckendynamik trackt. Ausgangspunkt für das Konzept sind Bedenken beim Einsatz des klassischen PID-Reglers, der – trotz zahlreicher viel leistungsfähigerer und modernerer Regelungsstrategien – aufgrund seiner Einfachheit und Unempfindlichkeit gegenüber Störungen auch 90 Jahre nach seiner ersten Erwähnung [229] der am weitesten verbreitete im industriellen Umfeld ist. Wesentliche Ansatzpunkte sind in [108, 133, 308] zum einen Glättungsmaßnahmen des Eingangssignals, die von Stellgliedern unbeliebte Sprünge im Führungsgrößenverlauf vermeiden, und der Einsatz von Tiefpassfiltern bei verrauschten Signalen, um den D-Anteil des PID-Reglers effizienter nutzen zu können. Zum anderen kommen Anti-Windup-Maßnahmen und nichtlineare Kombinationen von P-, I- und D-Anteilen zum Einsatz, die je nach Anwendung bessere Ergebnisse als Linear-kombinationen liefern können.

In Bild 4.7 ist der strukturelle Aufbau eines ADRC-Konzepts zu sehen. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich der Aspekt des Einsatzes des Beobachters weiter untersucht. Eine Übersicht von in Frage kommenden Beobachterverfahren ist in [259] und [327] zu finden. Als Strecke wird – wie auch bei der modellfreien Regelung – ein Modell zweiter Ordnung verwendet, das in Zustandsraumdarstel-

lung

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(t, x_1, x_2, w) + bu \end{bmatrix} \quad (4.43a)$$

$$y = x_1 \quad (4.43b)$$

lautet. Der verwendete Beobachter ist in der Definition dieser Arbeit ein Verbundbeobachter, da er die Streckendynamik als konstant annimmt und für sie den dritten Zustand einführt

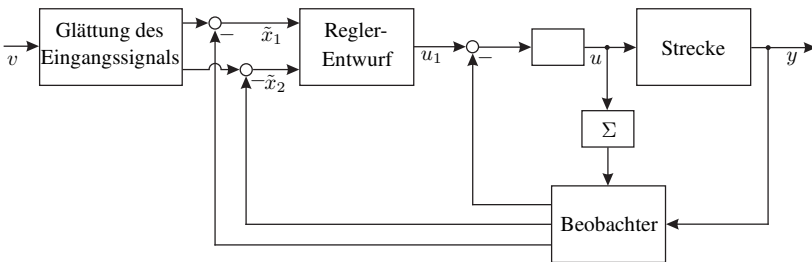
$$\Sigma_{\text{sys,ext}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 + bu \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \cdot g_1(\hat{x}_1 - y) \\ k_2 \cdot g_2(\hat{x}_1 - y) \\ k_3 \cdot g_3(\hat{x}_1 - y) \end{bmatrix} \quad (4.44a)$$

$$y = x_1 \cdot \quad (4.44b)$$

In den Arbeiten, die sich mit ADRC beschäftigen, wird in der Regel vom erweiterten Zustandsbeobachter (Extended State Observer, ESO) gesprochen [107]. Die Werte  $k_i$  in (4.44a) stellen die Beobacherverstärkung dar und  $g_i(\cdot)$  sind geeignete lineare oder nichtlineare Funktionen in Abhängigkeit vom Beobachterfehler. Letztere können zu höherer Effizienz beim Beobachter führen und werden in der Regel experimentell bestimmt. Wird statt der Funktionen der Beobachterfehler gewählt, entspricht der Beobachter einem LUENBERGER-Beobachteransatz

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -k_2 & 1 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 \\ -k_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} k_2 \\ k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (4.45a)$$

$$y^* = [0 \ 0 \ 1] \hat{x} \quad (4.45b)$$



**Bild 4.7:** Übersicht Active-Disturbance-Rejection-Control (ADRC)-Konzept [133]

mit  $y^*$  als Beobachteraussgang. Wie in Abschnitt 4.3. bereits beschrieben, entspricht der Beobachter einer Tiefpassfilterkette zur Bildung der zweiten Ableitung des Streckenausgangs  $y$ . Zusätzlich wird noch der Eingang  $u$  als Vorsteuerungsterm mit berücksichtigt.

In [348] wird die Stabilität des ESO für die Fälle untersucht, in denen die Ableitung der Strecke bekannt bzw. unbekannt ist. Für den Fall, dass die Ableitung der Streckendynamik bekannt ist, gelingt mit der Anforderung der LIPSCHITZ-Stetigkeit an die Ableitung über einen klassischen LYAPUNOV-Ansatz der Beweis der asymptotischen Fehlerstabilität. Ist die Ableitung der Streckendynamik unbekannt, so gelingt ein direkter Beweis über die Lösung der Fehlerdifferenzialgleichung mit etlichen Abschätzungen. Wird ein stabiler Eigenwert der Fehlerdynamik gewählt, ist der Beobachterfehler beschränkt und die obere Grenze sinkt monoton, wenn der Eigenwert nach links bewegt wird.

ADRC ist bei folgenden Anwendungen zum Einsatz gekommen:

- MEMS-Kreiselkompass (System 2. Ordnung) [347],
- Mikroturbine (System 1. Ordnung) [339],
- Asynchronmaschine [306],
- Gleichspannungswandler (System 2. Ordnung) [307],
- hybride Blindleistungskompensationsschaltung (System 2. Ordnung) [203],
- Destillationskolonne (System 1. Ordnung) [346].

### 4.4.3 Nichtlinearitätskompensierender Zustandsregler

Im Gegensatz zur modellfreien und zur aktiven Störunterdrückungsregelung, die die ganze Streckendynamik als Störung oder unbekanntem Parameter auffassen und deshalb die gesamte Streckendynamik tracken, gehen die Ursprünge des nichtlinearitätskompensierenden Zustandsreglers [239, 240, 295] auf die Idee zurück, lediglich das Verhalten der Nichtlinearitäten durch Ausgangssignale eines fiktiven Modells zu tracken

$$f(x(t), u(t)) \approx H u_2(t) \quad (4.46a)$$

$$\dot{u}_2(t) = E_2 u_2(t). \quad (4.46b)$$

Dabei ist sowohl die Dimension von  $u_2(t)$  als auch die Matrix  $E_2$  geeignet zu wählen. Für den linearen Anteil wird ein LUENBERGER-Beobachter entworfen. Das Tracking der Nichtlinearität lässt sich direkt als Zustandserweiterung in den Beobachter integrieren. Das Gesamtsystem aus Zustandsregler und den beiden Be-

obachtern sieht dann wie folgt aus

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & H \\ 0_{n \times m_2} & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0_{m_2} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} l_x \\ l_{u_2} \end{bmatrix} (\hat{y} - y). \quad (4.47)$$

Anwendung gefunden hat die Methodik insbesondere bei Regelungen mechanischer Systeme, auf die aufgrund von Kopplungen, Massenänderung, Lose<sup>4</sup> und Reibung nichtlineare Terme wirken. Letztere werden hierbei nicht genauer betrachtet, sondern einfach als unbekanntes Signal aufgefasst und rekonstruiert. Als konkrete Anwendungen sind zu nennen:

- Positionierung von Parabolantennen [138],
- Gelenkreibung bei Industrierobotern [3, 4, 241],
- Risserkennung bei einer rotierenden Welle [294],
- Positionsregelung von Robotern [153].

#### 4.4.4 Anwendungen

In den Arbeiten zu den drei vorgestellten Verfahren werden die Grenzen für die Anwendbarkeit der Verfahren nicht eindeutig benannt. Gleichzeitig beschränken sich die Beispiele auf Systeme bis zur Ordnung 2. Außerdem wird durch die gewählten oft akademischen Anwendungen der Eindruck erweckt, dass das Verfahren relativ unbedarft mit Erfolg angewendet werden kann. Aufgrund der theoretisch nicht abgesicherten Ergebnisse der vorgestellten Zugänge lag die Vermutung der Existenz von Gegenbeispielen, also Beispielen, bei denen das System divergiert, nahe. Ein derartiges Beispiel wird hier vorgestellt und demonstriert.

##### Beispiel 4.4. ADRC-Konzept mit Störung und Streckenänderung

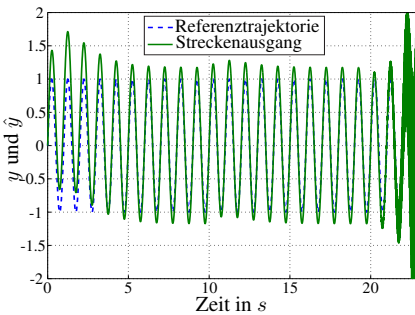
Für das System  $\Sigma_{\text{sys}} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right)$  wird mit der Referenztrajektorie  $y_d = \sin(2\pi 10t)$  ein ADRC-Regler entworfen. Dabei wird der erweiterte Zustandsbeobachter mit einem 3-fachen Pol bei  $-100$  entworfen. Die Reglerverstärkungen werden als  $k_P = -1$  und  $k_D = -2$  gewählt. In den Bildern 4.8a und 4.8b ist ein gutes Einschwingverhalten zu sehen, allerdings bleibt dauerhaft ein Schleppfehler bestehen. Der Ursprung des Schleppfehlers ist in den Bildern 4.8c und 4.8d ersichtlich. Aufgrund des fehlenden Signalmodells kann die Stördynamik durch den Beobachter nur getrackt werden kann.

Der ADRC-Ansatz reagiert gut auf ein Störsignal, das bei  $t = 10$  s durch eine Sprungfunktion mit einer Amplitude von 10 auf den Eingang wirkt. Nach dem transienten Verhalten ist kaum ein Unterschied zum stationären Verhalten vor der

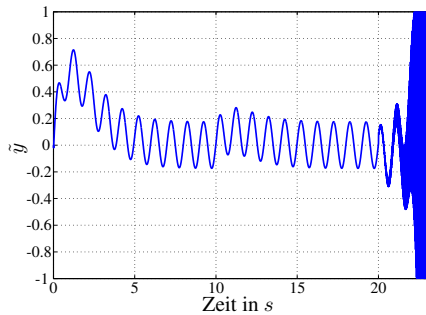
<sup>4</sup>Lose steht im Allgemeinen für Spiel bzw. für Backlash im Englischen.

Störung erkennbar.

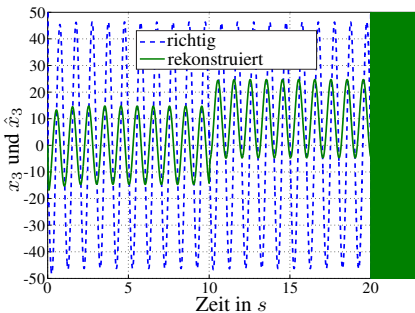
Zur Divergenz führt hingegen ein scharfes Umschalten auf das System  $\Sigma_{\text{sys2}} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.3 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right)$  bei  $t = 20$  s.  $\square$



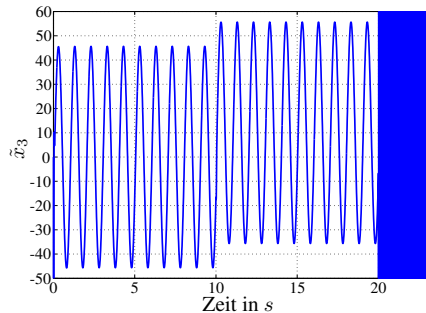
(a) Verlauf von Ausgang und Referenztrajektorie



(b) Fehlerverlauf zwischen realem Ausgang und Referenztrajektorie



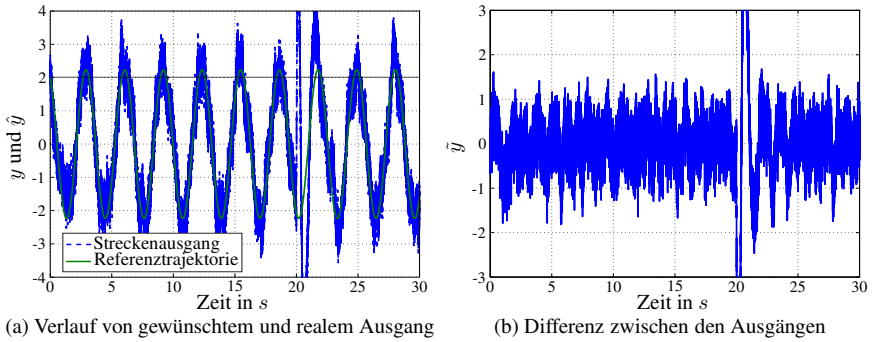
(c) Verlauf des richtigen und rekonstruierten Zustands  $x_3$



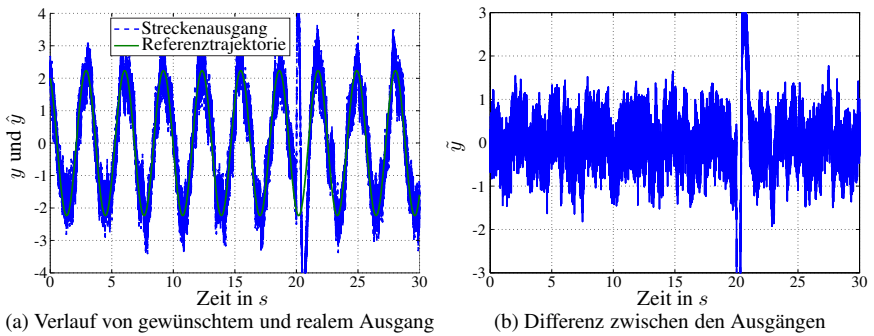
(d) Fehlerverlauf des Fehlers  $\tilde{x}_3$

**Bild 4.8:** ADRC-Konzept mit Divergenzen

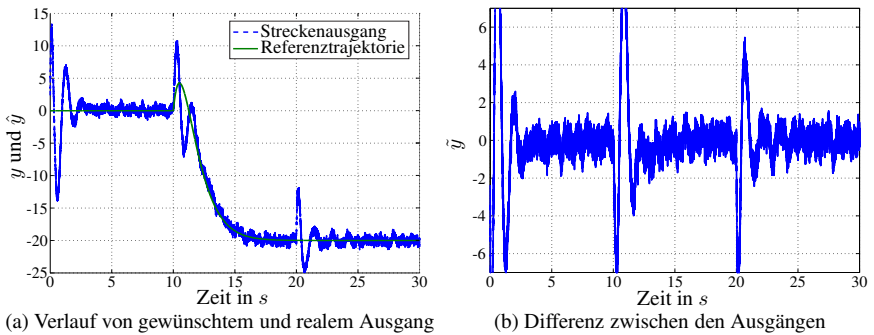
Beim nächsten Beispiel für ein nichtminimalphasiges System handelt es sich streng genommen nicht um ein Beispiel für einen intelligenten PID-Regler. Da es aber nach Kenntnis des Autors das einzige in der Literatur genannte Beispiel von ADRC und modellfreier Regelung im Umgang mit einem nichtminimalphasigen System überhaupt ist, wird hier näher darauf eingegangen. Zunächst wird gezeigt, dass in den Simulationen in der vorliegenden Arbeit bessere Ergebnisse als in [86] erzielt werden. Danach wird überprüft, wie sich der Ansatz verhält, wenn in der Vorsteuerung mit den von der Strecke abweichenden Parametern gearbeitet wird.



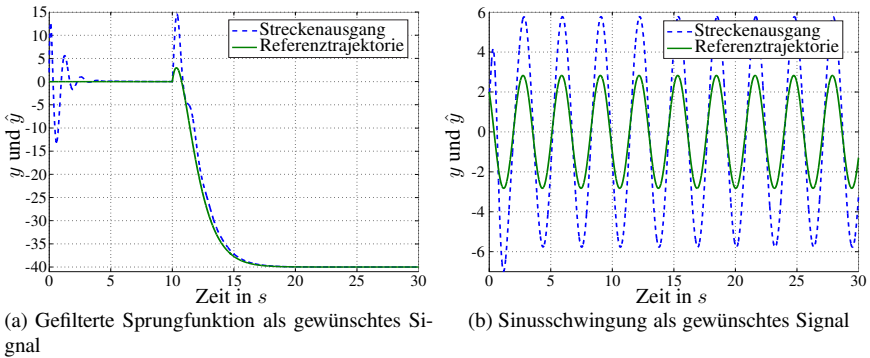
**Bild 4.9:** ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit  $z_1$  und  $u_1$



**Bild 4.10:** ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit  $z_2$  und  $u_1$



**Bild 4.11:** ADRC-Konzept mit nichtminimalph. System mit  $z_1$  und  $u_2$



**Bild 4.12:** ADRC-Konzept mit falschen Parametern in der Vorsteuerung

Zu guter Letzt wird gezeigt, dass der klassische Identifikationsansatz, der bei der modellfreien Regelung zum Einsatz kommt, bei dem hier verwendeten minimalphasigen Ansatz versagt.

#### Beispiel 4.5. Umgang mit einem nichtminimalphasigen System [86]

Für das nichtminimalphasige System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s - a}{s^2 - (b+c)s + bc} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -bc & b+c \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \\ y = \begin{bmatrix} -a & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (4.48)$$

in der Zustandsraumdarstellung gelingt es nicht, einen Ansatz modellfreier Regelung zu entwerfen, wie weiter unten gezeigt wird. Deswegen wird hier ein Regler entworfen, der die bekannte Minimalphasigkeit mit Hilfe des flachen Ausgangs  $z = x_1$  berücksichtigt. Die nicht modellierte Dynamik wird mit Hilfe des üblichen Identifikationsverfahrens identifiziert und kompensiert. Das Verfahren ähnelt somit dem des nichtlinearitätskompensierenden Zustandsreglers.

Für den flachen Ausgang  $z = x_1$  lautet der neue Eingang  $u^* = \ddot{x}_{1,d} - (b+c)x_{1,d} + bcx_{1,d}$  und der neue Ausgang  $y^* = \dot{x}_{1,d} - ax_{1,d}$ . Als Regler kommt der generalisierte PID Regler [87]

$$u = u^* + k_u \int_0^t \tilde{u}(\tau) d\tau + k_p \tilde{y}(t) + k_i \int_0^t \tilde{y}(\tau) d\tau + k_{ii} \int_0^t \int_0^\tau \tilde{y}(\tau_1) d\tau_1 d\tau \quad (4.49)$$



zum Einsatz. Mit den Umrechnungen

$$\tilde{y} = y - y^* = \dot{x}_1 - ax_1 - \dot{x}_{1,d} - ax_{1,d} = \dot{\tilde{x}}_1 - a\tilde{x}_1 \quad (4.50a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u} = u - u^* &= \ddot{x}_1 - (b+c)\dot{x}_1 + bcx_1 - (\ddot{x}_{1,d} - (b+c)\dot{x}_{1,d} + bcx_{1,d}) \\ &= \ddot{\tilde{x}}_1 - (b+c)\dot{\tilde{x}}_1 + bc\tilde{x}_1 \end{aligned} \quad (4.50b)$$

lassen sich die Verstärkungsfaktoren gemäß Polvorgabe der Fehlerdifferenzialgleichung für  $\tilde{x}_1$  über

$$\begin{bmatrix} k_u \\ k_p \\ k_i \\ k_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & -1 & 0 \\ bc & 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_3 + b + c \\ p_2 - bc \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

berechnen, wobei  $p_0, p_1, p_2$  und  $p_3$  die Koeffizienten des entsprechenden Polynoms sind. Es werden im Folgenden drei unterschiedliche Szenarien betrachtet, wobei bei der Vorsteuerung die Parameter den originalen Parametern der Strecke entsprechen: Jedes Mal sind Ein- und Ausgang mit einem weißen Rauschen mit einer Varianz von  $\sigma = 10^{-1}$  überlagert und auf den Ausgang wirkt zusätzlich ein Sprung von 0 auf 1 bei  $t = 20$  s. Als gewünschte Trajektorie wird  $u_1 = \sin 2t$  verwendet und zwei verschiedene zusätzliche Eingangsstörungen:  $z_1 = -0.5$  in Bild 4.9 und  $z_2 = -0.1\dot{y}$  in Bild 4.10. Bei der Wahl der Störung zeigt sich kein großer Unterschied, deshalb wird sich in Bild 4.11 auf die konstante Störung  $z_1 = -0.5$  beschränkt. Allerdings wird als gewünschte Trajektorie diesmal  $u_2 = 20 \cdot 1(t-10)$  verwendet, der über die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$  geschickt wird.

Im Gegensatz zum Originalbeispiel von [86] kann das schlechte Verhalten bei nichtminimalphasigen Systemen in allen drei Beispielen nicht reproduziert werden. Hier wird – sogar ohne Identifikation und Aufschaltung der Störgröße – ein gutes und stabiles Verhalten erzielt, obwohl das überlagerte Rauschen eine sichtbar höhere Varianz aufweist. Das verwundert nicht weiter, da durch die Vorsteuerung das nichtminimalphasige Verhalten kompensiert werden kann. Es bleibt also davon auszugehen, dass der Regler im Originalbeispiel suboptimal eingestellt ist.

Als Nächstes wird untersucht, wie sich ein nichtminimalphasiges System verhält, wenn der Parameter in der Vorsteuerung mit dem der Strecke nicht übereinstimmt. Die Parameter werden hier von Originalwerten um  $\Delta a = 1$ ,  $\Delta b = 0,5$  und  $\Delta c = -0,5$  verändert. Ein Unterschied zwischen vorgegebenem und gewünschtem Verlauf wird sowohl für eine Sinusschwingung (Bild 4.12b) als auch für eine abgeleitete Sprungfunktion (wie oben erwähnt) gezeigt (Bild 4.12a). Bei der Sinusschwingung ist eine bleibende Regelabweichung zu erkennen; bei der Sprungfunktion regelt sich der Fehler über die Zeit aus.

Zuletzt wird gezeigt, wie sich der Beobachter verhält, wenn ohne Vorsteuerung gearbeitet wird. Aufgrund des relativen Grads 1 wird hier das System mit einem Beobachter ersten Grads verwendet. Zur Bestimmung der ersten Ableitung wird ein Beobachteransatz verwendet, der die Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{p_0 s}{s^2 + p_1 s + p_0} Y(s) + \frac{-p_0}{s^2 + p_1 s + p_0} U(s) \quad (4.52)$$

hat. Als Regler wird ein PI-Regler mit

$$U(s) = -F(s) + sY_d(s) + \frac{k_i}{s}(Y(s) - Y_d(s)) + k_p(Y(s) - Y_d(s)) \quad (4.53)$$

verwendet. Werden die Gleichungen in die Übertragungsfunktion (4.48) eingesetzt, wird die Übertragungsfunktion von  $Y_d(s)$  nach  $Y(s)$  zu

$$G_2(s) = \frac{(-s + a)(-k_i + s^2 - k_p s)(s^2 + p_1 s + p_0)}{s^5 + q_4 s^4 + q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0} \quad (4.54a)$$

$$q_4 = p_1 - b - k_p - c \quad (4.54b)$$

$$q_3 = -k_i + bc - bp_1 - k_p p_1 - cp_1 + p_0 + ak_p \quad (4.54c)$$

$$q_2 = bc p_1 - k_i p_1 + ak_i - k_p p_0 + ak_p p_1 - ap_0 \quad (4.54d)$$

$$q_1 = ak_i p_1 - k_i p_0 + ak_p p_0 \quad (4.54e)$$

$$q_0 = ak_i p_0. \quad (4.54f)$$

Mit den o. g. Werten von a, b, und c sowie  $p_0 = 1$  und  $p_1 = 2$  müssen zum Nachweis der asymptotischen Stabilität der Übertragungsfunktion über das HURWITZ-Kriterium beim Polynom im Nenner alle Koeffizienten  $q_i > 0$  sein. Das ist dann der Fall, wenn entweder  $2.25 \leq k_p < 3.5$  und  $0 < k_i < 4.5 - k_p$  oder  $0 < k_p < 2.25$  und  $0 < k_i < k_p$ . Außerdem müssen zusätzlich die beiden Bedingungen  $q_3 q_4 - q_2 q_5 > 0$  und  $(q_1 q_2 - q_0 q_3)(q_3 q_4 - q_2 q_5) - (q_1 q_4 - q_0 q_5)^2 > 0$  erfüllt sein [103, S. 125]. Eine numerische Analyse letzterer Bedingung hat aber gezeigt, dass das nie der Fall ist. Somit ist die Stabilisierung der nichtminimalphasigen Strecke mit den gewählten Parametern nicht möglich.  $\square$

#### 4.4.5 Vergleichende Betrachtung der Verfahren

Die prinzipiellen Unterschiede zwischen den Verfahren wurden bereits in der Tabelle 4.1 aufgezeigt: Während bei der modellfreien Regelung sämtliche Dynamiken als unbekannt aufgefasst werden, behandeln die ADRC-Zugänge und die nichtlinearitätskompensierende Regelung bekannte und unbekanntes bzw. lineare

und nichtlineare Dynamiken getrennt. Die Identifikation beschränkt sich dabei auf den unbekanntem bzw. nichtlinearen Teil. Kriterien dafür, in welchen Fällen die Zugänge funktionieren und in welchen nicht, sind dabei bisher nicht bekannt.

Als Vorteile der modellfreien Regelung werden die stark vereinfachte Wahl der Reglerverstärkungswerte und die bessere Leistungsfähigkeit dank Streckenidentifikation genannt [86].

Bei der modellfreien Regelung wird als wichtigste offene theoretische Frage der Umgang mit nichtminimalphasigen Systemen gesehen [86]. Darüber hinaus fehlen auch Aussagen zum Reglerentwurf bei Systemen unendlicher Dimension sowie bei totzeitbehafteten Systemen.

Bei ADRC-Zugängen gibt es Arbeiten zur Stabilitätsanalyse [346]. Hier wird der oben genannte Erweiterte Beobachter hinsichtlich seiner Stabilität untersucht. Ist die Ableitung der Streckendynamik  $\dot{x} = f(x, u)$  bekannt und zudem LIPSCHITZ-stetig, so kann über einen klassischen LYAPUNOV-Beweis die asymptotische Stabilität bewiesen werden.

Obwohl erfolgreiche Anwendungen zu dem Verfahren realisiert wurden, sind einige Fragestellungen noch nicht abschließend geklärt. Es fehlt eine konsistente Theorie, mit der die Ideen unterlegt werden können. Auch sind keine Kriterien dafür bekannt, wann ein klassischer Ansatz der adaptiven oder robusten Regelung oder ein ADRC- bzw. modellfreier Regelungsansatz zu wählen sind. Ferner sind noch Fragen hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens des Reglers und des Konvergenzverhaltens des erweiterten Zustandsbeobachters offen.

Kapitel 4 beschäftigte sich eingehend mit der Frage, welche Vorgehensweise bei Beobachterentwürfen mit unbekanntem Signalen, die auf die Systemdifferenzial- und/oder die Ausgangsgleichung wirken, gewählt werden kann. Es wurde prinzipiell unterschieden zwischen Beobachtern, bei denen die Zustandsrekonstruktion erfolgt, selbst wenn nicht alle Signale messbar sind (Beobachter mit unbekanntem Signalen), und Beobachtern für unbekanntem Signale (auch Störgrößenbeobachter genannt), die durch ein Signalmodell das Störsignal rekonstruieren und anschließend eliminieren.

Dabei wurde in Abschnitt 4.1 durch Verwendung spezieller schiefer Projektionen nicht nur eine kompakte Darstellung des Beobachters bei unbekanntem Signalen erzielt, sondern darüber hinaus auch eine geometrische Interpretation der Entwurfsverfahren geschaffen. Folglich müssen für diese Klasse nicht mehr spezielle Entwurfsverfahren geschaffen werden. Stattdessen ist durch Umformulierung der Problemstellung der Entwurf mit den gängigen Verfahren für Systeme ohne unbekanntem Eingänge möglich.

Den Beobachtern mit unbekanntem Signalen, die in Abschnitt 4.2 behandelt wurden, wird vorgeworfen, dass bei unexakter Modellierung des Signaltyps das

Ziel der Beobachtbarkeit nicht zu erreichen sei. Anhand von simulativen Untersuchungen wurde beispielhaft gezeigt, dass eine Robustheit des Signalbeobachters gegenüber modellfremden Signalen auftreten kann.

In Abschnitt 4.3 wurde die beobachterbasierende Ableitungsbildung über die Deskriptorsystemdarstellung anders als bisher üblich hergeleitet. Anhand eines Beispiels aus dem Automobilbereich wurde veranschaulicht, dass mit einem zeitvarianten Beobachteransatz weitere Ableitungen über die Zeitableitung hinaus rekonstruiert werden können.

Mit dem Abschnitt wurde die theoretische Grundlage für Abschnitt 4.4. geschaffen. Hier wurden die Reglerentwurfsverfahren aktive Störunterdrückungsregelung, die modellfreie Regelung und die beobachterbasierende nichtlinearitätskompensierende Zustandsregelung erstmalig miteinander verglichen. Alle Konzepte basieren auf der folgenden Idee: Nichtlinearitäten, Störungen oder sogar ganze Streckendynamiken werden als unbekannte Signale oder zeitveränderliche Parameter interpretiert, zumeist mittels beobachterbasierter Identifikation fortwährend getrackt und mit herkömmlichen Reglern (zumeist vom Typ PID) geregelt.

## 5 Beobachter mit unbekanntem Parametern

In den vorangegangenen Darstellungen zu Beobachtern wird mit der Annahme gearbeitet, die Systemparameter seien bekannt. In der Praxis kommt es jedoch häufig vor, dass die Parameter unbekannt sind. Eine Ausnahme bilden dabei jene Modelle, bei denen keine unbekannt Parameter auftreten, wie z. B. der Doppelintegrator. Existieren unbekannt Parameter, so können sie einmalig vor dem Beobachterentwurf oder fortwährend beim Beobachtereinsatz bestimmt werden. Erfolgt die Parameterermittlung im Vorfeld, so stimmen System- und Modellparameter in aller Regel nicht überein. Gründe hierfür können beispielsweise Störungen, Approximationsfehler oder Parameteränderungen zwischen dem Identifikationszeitpunkt und dem Beobachtereinsatz sein. Die Diskretisierung hat aber zur Folge, dass die Beobachterzustände nicht gegen die des Systems konvergieren, sondern ihnen quasi nur folgen (Tracker). Einen Ausweg hierzu bietet die Parameterbestimmung während des Beobachtereinsatzes. Der Zugang stellt das Pendant zum adaptiven Regler dar, wobei in Analogie zum Regler zwischen den konstanten, den langsam veränderlichen und den sich fortwährend ändernden Parametern unterschieden werden muss.

Die Beobachter für unbekannt Parameter werden in der vorliegenden Arbeit in adaptive Beobachter und Verbundbeobachter unterteilt, wobei letzterer Begriff neu eingeführt wurde. Im Abschnitt 2.4.3 auf S. 40 werden die grundlegenden Unterschiede zwischen beiden Typen aufgezeigt. Der adaptive Beobachter verbindet einen klassischen Beobachterentwurf für die Zustandsrekonstruktion mit Identifikationsverfahren für die Parameterbestimmung. Die Zustandsrekonstruktion geschieht darauf aufbauend mit Hilfe des Gewissheitsprinzips. Der Verbundbeobachter hingegen fasst die Parameter als Zustände auf, der Zustandsraum wird um die Parameter erweitert und Zustände und Parameter werden im Verbund rekonstruiert.

Adaptive Beobachter wurden bereits 1973 entwickelt [46]. In der Regel ist eine Transformation auf eine spezielle Normalform notwendig, die die nichtlinearen multiplikativen Kopplungen zwischen Parametern und Zuständen verhindert und so lineare Zugänge ermöglicht. Adaptive Beobachter mit exponentiell abklingendem Fehler wurden in [187] entwickelt. Ansätze für zeitvariante MIMO-Systeme finden sich in [344], solche für zustandsaffine Systeme in [30]. Für adaptive

Beobachter reduzierter Ordnung sei auf [231] verwiesen. Fragen zur Robustheit beim Einsatz adaptiver Beobachter werden in [214, 349] erörtert. Adaptive Beobachter für spezielle Klassen nichtlinearer Systeme kamen Ende der 1980er mit [20] und später mit [216, 345] auf. Die Bildung der Ableitungen mittels Block-Puls-Funktionen und eines adaptiven Beobachters, der als Identifizierer ein Least-Squares-(LS)-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor verwendet, wird in [237] vorgestellt.

Erste Ansätze für Verbundbeobachter wurden 1976 in [32] vorgestellt, um den Bias über einen weiteren Zustand zu rekonstruieren. In [258] wird ein Verbundbeobachter für Zustände und Parameter entwickelt, wobei ein entkoppelter Entwurf für Zustände und Parameter beschrieben wird. In [201] wird das Konzept auf die Systemklasse erweitert, bei der Parameter sowohl auf die Systemgleichung als auch auf die -ausgangsgleichung wirken. In [169] wird ein Verbundbeobachter auf Basis eines KALMAN-BUCY-Beobachters entworfen. Eine Verbindung zwischen adaptiven und Verbundbeobachtern wird in [287] vorgestellt. Dabei werden Identifikationsverfahren für die Rekonstruktion von Parametern verwendet und gleichzeitig die für die Verbundbeobachter übliche Zustandserweiterung zur Bias-Rekonstruktion genutzt.

Während zu adaptiven Reglern eine Reihe von Monographien existieren [162, 247, 281, 312], fehlen sie für adaptive Beobachter. Ein Beitrag der vorliegenden Arbeit liegt deshalb in der Zusammenführung der wenigen und mitunter weit gestreuten Publikationen, in der Vereinheitlichung der Darstellung und in der Systematisierung der entsprechenden Ansätze.

Die Parameter werden im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders beschrieben, als konstant angenommen. Dadurch ist die Verwendung des Begriffs des Beobachters gerechtfertigt, weil nur so Parameter und Zustände sicher konvergieren. Unter praktischen Gesichtspunkten kann der sprungförmige Verlauf von Parametern zu den konstantparametrischen Problemen hinzugezählt werden, sofern der Zeitabstand zwischen den Sprüngen relativ groß ist, sodass die Konvergenz in der Zeit praktisch abgeschlossen ist, was aber theoretisch unter einer  $e$ -Funktion nie der Fall ist. Ebenso können die nachfolgend beschriebenen Verfahren auch für sich zeitlich langsam ändernde Parameter angewendet werden. Spezielle Parameteränderungen, z. B. Drift oder sinusförmige Änderungen, können mit den Techniken aus Abschnitt 4.2 in konstantparametrische Probleme überführt werden. Bei Parameteränderungen, die nicht zu den beiden beschriebenen Problemstellungen zählen, kann maximal von einem Parameter-Tracker gesprochen werden, und bei Verwendung der nachfolgenden Verfahren können Parameterkonvergenz und Stabilität nicht garantiert werden. Für sich zeitlich signifikant ändernde Parameter sei ansonsten auf [350] verwiesen.

Das fünfte Kapitel ist wie folgt gegliedert. Abschnitt 5.1 beschäftigt sich mit

den Identifikationsverfahren, die grundlegender Bestandteil adaptiver Beobachter sind. Dabei werden die verschiedenen Verfahren vorgestellt, miteinander verglichen und Hinweise zum Umgang mit Anfangswerten und zur Wahl der Designparameter gegeben. Die Wahl der hier verwendeten Betrachtungsweise berücksichtigt die Tatsache, dass sie in den o. g. Monographien kaum behandelt wurde. Zahlreiche Beispiele verdeutlichen eventuelle Schwierigkeiten bei der Umsetzung.

Abschnitt 5.2 behandelt adaptive Beobachter und vergleicht verschiedene Verfahren. Insgesamt wird sich hier auf Verfahren beschränkt, die für LTI-Systeme entworfen und deren Ersatzsignale mittels Tiefpassfilter gebildet werden.

Abschnitt 5.3 beschäftigt sich mit Verbundbeobachtern, zeigt den Entwurf mittels Beobachterverfahren für nichtlineare Systeme und stellt einen LYAPUNOV-basierten Zugang vor.

In Abschnitt 5.4 werden die adaptiven und Verbundbeobachter an einem Beispiel diskutiert und Unterschiede aufgezeigt.

## 5.1 Identifikationsverfahren

Wie die einführenden Bemerkungen zeigen, ist die wesentliche Schwierigkeit der linearen adaptiven Beobachter mit der Lösung des Identifikationsproblems verbunden. Ziel des folgenden Abschnitts ist es, praktische Schwierigkeiten bei der Implementierung aufzuzeigen und dem Ingenieur einige wichtige Hinweise zu geben, auf welche Faktoren zu achten ist.

Begonnen wird in Abschnitt 5.1.1 mit dem Vergleich von Algebraisierungsmethoden zur Bildung von Signalableitungen. Da in aller Regel ein Signal wegen Störeinflüssen nicht direkt abgeleitet werden kann, existieren unterschiedliche filterbasierte Methoden als Ausweg.

In Abschnitt 5.1.2 werden die Identifikationsverfahren vorgestellt und die Identifikationsgleichungen um die unbekanntenen Anfangswerte als weitere Parameter erweitert.

Abschnitt 5.1.3 beschäftigt sich mit dem Ansatz des Verfahrens. Anhand eines Beispiels wird auf den bisher unbekanntenen Umstand hingewiesen, dass algebraisch identische Lösungen aus Identifikationssicht zu völlig unterschiedlichen Ergebnissen führen können und es werden Gründe dafür angeführt. Ferner wird der Einfluss von Designparametern und Eingangssignalen diskutiert, die entscheidend für eine erfolgreiche Identifikation sind.

Abschnitt 5.1.4 widmet sich dem Einfluss von Anfangswerten. Anhand eines Beispiels aus dem vorangegangenen Abschnitt werden die Ergebnisse veranschau-

licht. Es wird gezeigt, auf welche Werte u. U. verzichtet und wie mit Problemstellungen umgegangen werden kann, die nicht in Normalform vorliegen.

In Abschnitt 5.1.5 wird die Wahl der Designparameter für die jeweiligen Verfahren ausführlich diskutiert. Insbesondere wird hierbei auf die Wahl der Filter und die Berücksichtigung der Startwerte eingegangen. Anhand einer Tabelle und eines Simulationsbeispiels wird erörtert, wie die Startparameter bei den LS-Verfahren je nach A-priori-Wissen und Störungen zu wählen sind.

### 5.1.1 Übersicht über Algebraisierungsmethoden zur Bildung von Signalableitungen

Im Folgenden werden drei verschiedene tiefpassfilterbasierende Verfahren vorgestellt, mit denen gefilterte Signale gebildet werden, die als Ersatzsignale bezeichnet und anstelle von Ableitungen verwendet werden. Dabei wird allgemein das Signal  $w(t)$  betrachtet. Ihre Struktur wird am Ende des Abschnitts in Tabelle 5.1 zusammengefasst, ihre Vorteile werden herausgearbeitet und eine abschließende Wertung wird gegeben.

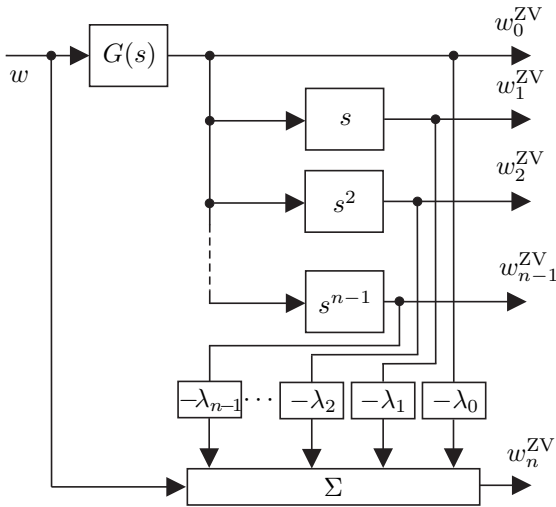
#### Zustandsvariablenfilter

In Zustandsraumdarstellung können die Zustandsvariablenfilter wie folgt realisiert werden

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & \dots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} w, \quad \zeta(0) = 0_n \quad (5.1a)$$

$$\begin{bmatrix} w_0^{ZV} \\ \vdots \\ w_n^{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} w \quad (5.1b)$$





**Bild 5.1:** Struktur des Zustandsvariablenfilters (z. B. [167])

oder in kompakter Darstellung

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} w, \quad \zeta(0) = 0_n \quad (5.2a)$$

$$\begin{bmatrix} w_0^{ZV} \\ \vdots \\ w_n^{ZV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ -\lambda_{0:n-1}^T \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0_n \\ \lambda_0 \end{bmatrix} w. \quad (5.2b)$$

Die strukturelle Darstellung ist in Bild 5.1 zu sehen.

### POISSON-Filterketten

In [280] wurde die POISSON-Momenten-Funktional-Methode zur Bestimmung von Ersatzsignalen entwickelt, die einen Sonderfall der Verfahren mit linearen Filtern darstellt. Die Darstellung im Zustandsraum geschieht wie folgt

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} -T^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -T^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -T^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -T^{-1} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w, \quad \zeta(0) = 0_n \quad (5.3a)$$

$$\begin{bmatrix} w_0^{\text{PF}} \\ w_1^{\text{PF}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n^{\text{PF}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T^{-3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T^{-n} \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} w. \quad (5.3b)$$

Bild 5.2 zeigt die strukturelle Darstellung der POISSON-Filterkette.

### Paralleles Filter nach NARENDRA und LÜDERS

Die Bildung der Ersatzsignale in [207] erfolgt mit parallelen Filtern (siehe Bild 5.3). Die Formulierung in Zustandsraumdarstellung lautet

$$\dot{\zeta} = -\text{diag}(T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1})\zeta + 1_n u, \quad \zeta(0) = 0_n \quad (5.4a)$$

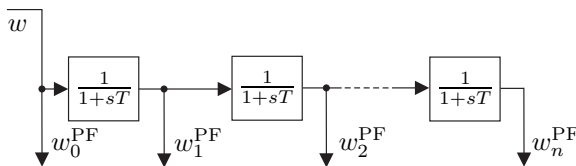
$$w^{\text{NL}} = \begin{bmatrix} 0_{n+1}^T \\ \text{diag}(T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0_n \end{bmatrix} w. \quad (5.4b)$$

Das Zustandsvariablenfilter gilt als eine klassische Anwendung der Regelungsnormform und wurde bereits frühzeitig<sup>1</sup> zur Bildung der Ersatzsignale eingeführt. Es zählt im Rahmen der direkten LTI-Identifikation zu den Standardverfahren [167].

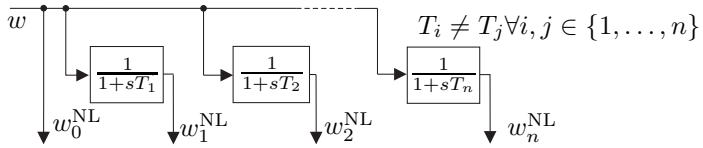
Die Ausgänge  $w_i^{\text{PF}}$  der POISSON-Filterkette können direkt zur Identifikation verwendet werden. Das hat aber zur Folge, dass die geschätzten Parameter nicht die der Übertragungsfunktion sind. Alternativ können auch Linearkombinationen der  $w_i^{\text{PF}}$  verwendet werden, was aber letztendlich wieder auf die Zustandsvariablenfilternotation führt. Deshalb wird der Zugang hier nicht weiter betrachtet.

Der Vorteil der parallelen Filter nach NARENDRA und LÜDERS liegt in der Entkopplung der einzelnen Filter. Somit werden zur Ersatzsignalbildung nur  $n$ -Differenzialgleichungen 1. Ordnung benötigt, was für spezielle Mikrocontrolleranwendungen von Vorteil sein kann. Auch hierbei werden nicht die Parameter der

<sup>1</sup>Laut [338] wurde der Begriff des Zustandsvariablenfilters erstmals in [146] verwendet.



**Bild 5.2:** Struktur des POISSON-Filters [280]



**Bild 5.3:** Struktur des parallelen Filters nach NARENDRA und LÜDERS [207]

Aspekt	Zustandsvariablenfilter	POISSON-Filterkette	Filter nach NARENDRA-LÜDERS
Identifizierte Parameter	$\frac{1}{G_Z(s)} \sum_{i=0}^n \theta_i^{ZV} s^i$	$\sum_{i=0}^n \theta_i^{PF} \frac{1}{(1+sT)^i}$	$\sum_{i=0}^n \theta_i^{NL} \frac{1}{1+sT_i}$
Änderung	Zählerableitung	Potenz der Filter	Zeitkonstante
Identifizierte Parameter = Streckenparameter	ja	nein, Umrechnung erforderlich	nein, Umrechnung erforderlich
Vorteil	formal flexibel, in der Praxis aber nur Grenzfrequenz angebar	lediglich eine Zeitkonstante	Vorteile durch entkoppelte DGL und Zeitkonstante entspr. Orthogonalität anpassbar

**Tabelle 5.1:** Übersicht über Filter zur Ersatzsignalbildung

Übertragungsfunktion direkt ermittelt, sodass eine zusätzliche umständliche Umrechnung erforderlich sein kann. Punktuell lässt sich das durch eine spezielle Normalform umgehen, die beim adaptiven Beobachter von NARENDRA und LÜDERS Anwendung findet. Für reine Identifikationsanwendungen bietet der Zugang weniger Vorteile, da insbesondere die A-priori-Information der Übertragungsfunktion nur schwer eingebaut werden kann.

**Wertung der Filter**

Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht verschiedener Tiefpassfilterketten, die zur Bildung von Ableitungen von Signalen bereits eingesetzt werden. Das parallele Filter nach NARENDRA und LÜDERS bietet den Vorteil der Entkopplung der einzelnen Signale sowie die Verwendung von Filtern erster Ordnung, allerdings ist hier wie auch bei den POISSON-Filterketten der Aufwand für die Umrechnung der identifizierten Parametern in die der Strecke so beträchtlich, dass die Zustandsvariablenfilter als sinnvollste Wahl erscheinen.

### 5.1.2 Übersicht über Identifikationsverfahren

Im folgenden Abschnitt werden grundlegende Zusammenhänge für die direkte Identifikation linearer zeitkontinuierlicher Modelle zusammengestellt. Entgegen der sonst in den Lehrbüchern gewählten Darstellung wird hier das Identifikationsverfahren um die unbekanntes Anfangswerte der Differenzialgleichung erweitert, die ansonsten immer mit dem Wert 0 angenommen werden. Die direkte Identifikation hat gegenüber der indirekten Identifikation über ein zeitdiskretes Zwischenmodell zahlreiche Vorteile [122]. So entfällt u. a. das Problem der Rücktransformierbarkeit und die Wahl der Abtastzeit. Im Zusammenhang mit adaptiven Beobachtern kommt als weiterer Vorteil hinzu, dass Stabilitäts- und Konvergenzuntersuchungen durchweg mittels der besser handhabbaren und vertrauteren Theorien für zeitkontinuierliche Systeme erfolgen können, während im anderen Fall eine kombiniert zeitkontinuierlich-zeitdiskrete Betrachtung notwendig wird.

Um die Darstellung im Folgenden einfach zu halten, wird sich auf SISO-Systeme beschränkt. MIMO-Systeme können in der E/A-Darstellung durch die Komposition in MISO-Systeme gelöst werden, wobei sich lediglich der sogenannte Regressionsvektor um die zusätzlichen Eingangssignale vergrößert. Deshalb wird nachfolgend mit  $m$  die höchste Ableitung des Eingangssignals (Zählergrad in der Übertragungsfunktionsdarstellung) und nicht wie bisher die Anzahl der Eingangssignale bezeichnet. Gegeben sei somit die Differenzialgleichung in Minimalrealisierung

$$\underbrace{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} y^{(\nu)}(t)}_{:=A(s)[y(t)]} = \underbrace{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} u^{(\mu)}(t)}_{:=B(s)[u(t)]}$$

mit  $u(0^+), \dots, u^{(m-1)}(0^+), y(0^+), \dots, y^{(n-1)}(0^+)$ . Hierbei wird die Darstellung  $A(s)[y(t)]$  und  $B(s)[u(t)]$  genutzt, in der  $s$  als Differenzialoperator betrachtet wird, der auf das in eckigen Klammern stehende Signal anzuwenden ist (Darstellung nach [312]). Tritt statt eines Polynoms eine gebrochen rationale Funktion  $G_f(s)$  auf, so ist das aus der Operation hervorgehende Signal  $y_f(t) = G_f(s)[y(t)]$  als das Ausgangssignal der zur Übertragungsfunktion gehörigen Differenzialgleichung mit Nullanfangswerten zu betrachten.

Die Differenzialgleichung kann aber nicht zur Bestimmung der Parameter  $a_i$  und  $b_i$  verwendet werden, da hierfür die Ableitungen von  $u(t)$  und  $y(t)$  zu berechnen sind. Deshalb muss die Gleichung algebraisiert werden, was in klassischer Weise über einen stabilen Tiefpassfilter erfolgt, der mindestens einen relativen Grad  $r = n$  haben muss. Der Einfachheit halber werden deshalb Tiefpassfilter mit einer Nennerordnung  $n_f = n$  und Zählerordnung  $m_f = 0$  verwendet. Die zusätzlichen Tiefpassfilter werden immer aus dem Nullzustand gestartet, um zusätzliche

Probleme mit deren Anfangswerten zu vermeiden. Die Realisierung der Tiefpassfilterung erfolgt über die Zustandsvariablenfilter (siehe Abschn. 5.1.1), da dadurch die benötigten gefilterten Ableitungen in sehr kompakter und eleganter Form rechen- und rechen-technisch gebildet werden können. Zum Zweck der Algebraisierung wird die Differenzialgleichung zunächst in den LAPLACE-Bereich transformiert

$$A(s)Y(s) = B(s)U(s) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i s^i, \quad (5.5a)$$

wobei die aggregierten Anfangswerte

$$c_i = \begin{cases} \sum_{v=i+1}^n a_v y^{(v-i-1)}(0^+) + \sum_{v=i+1}^m b_v u^{(v-i-1)}(0^+), & \text{für } 0 \leq i \leq m-1 \\ \sum_{v=i+1}^n a_v y^{(v-i-1)}(0^+), & \text{für } m \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad (5.5b)$$

zu berücksichtigen sind. Die Gleichung wird mit  $G_f(s)$  multipliziert, was einer Filterung entspricht. Mit den abkürzenden Schreibweisen

$$y_{f,i}(t) = s^i G_f(s)[y(t)], \quad (5.6a)$$

$$u_{f,i}(t) = s^i G_f(s)[u(t)], \quad (5.6b)$$

$$\delta_{f,i}(t) = s^i G_f(s)[\delta(t)] \quad (5.6c)$$

lässt sich dann die algebraisierte Identifikationsgleichung formulieren

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -y_{f,0} & \dots & -y_{f,n-1} & u_{f,0} & \dots & u_{f,m} & \delta_{f,0} & \dots & \delta_{f,n-1} \end{bmatrix}}_{:=\phi^T} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = y_{f,n}(t) \quad (5.7)$$

$:=\theta$

mit  $t > 0$ . In der weiteren Anwendung können die Signale  $\delta_{f,i}(t)$  entweder explizit als die Gewichtsfunktionen der Übertragungsfunktion  $s^i G_f(s)$  angegeben werden (Rücktransformation algebraisch ausgeführt) oder sie werden implizit

über ein Zustandsvariablenfilter wie die anderen Signale behandelt. Um den dabei auftretenden Delta-Impuls am Filtereingang zu umgehen, wird die Beziehung  $\delta(t) = \left(s \cdot \frac{1}{s}\right) [\delta(t)] = s[1(t)]$  herangezogen. Das hat zur Folge, dass

$$\delta_{f,i}(t) = s^i G_f(s) [\delta(t)] := s^{i+1} G_f(s) [1(t)] = 1_{f,i+1}(t) \quad (5.8)$$

gilt.

In den folgenden Darstellungen wird zur besseren Lesbarkeit angenommen, dass die Anfangswerte identisch Null sind. Allen folgenden Identifikationsverfahren liegt die Fehlerdefinition

$$e = z - \phi^T \hat{\theta} \quad (5.9)$$

zugrunde. Die Verfahren unterscheiden sich hinsichtlich der Betrachtungsweise, auf der sie beruhen: Die Verfahren existieren entweder auf einem Gradienten oder auf einem Least-Squares Ansatz und sie verwenden entweder eine instantane, d. h. nur auf den derzeitigen Zeitpunkt bezogene, oder integrale Kostenfunktion. Es werden ausschließlich am Fehlerquadrat orientierte Verfahren verwendet, die ggf. gewichtet werden, da sie wegen der Parameterlinearität und Problemkonvexität auf eine eindeutige und zudem gut handhabbare Lösung führen. Eine Zusammenstellung der gängigen Verfahren findet sich in Tabelle 5.2. Dabei werden jeweils (soweit möglich) das dem Verfahren zugrunde liegende Kostenfunktional beschrieben, das daraus resultierende Update-Gesetz sowie die Designparameter, mit denen auf das Einschwingverhalten Einfluss genommen werden kann. Anders als zumeist in der Literatur üblich, werden hier die Startwerte direkt im Gütekriterium berücksichtigt. Bei Startwerten handelt es sich um die Anfangswerte des Parameters  $\hat{\theta}(0)$  sowie ggf. um die Anfangswerte der Kovarianzmatrix  $P$  bei LS-Verfahren.

Unabhängig von Tabelle 5.1, für deren Anwendung die Identifizierbarkeit stillschweigend vorausgesetzt wird, seien hier noch einige Hinweise zur Identifizierbarkeit [41] gegeben. Der erste Aspekt bezieht sich auf die strukturelle Identifizierbarkeit der Parameter, also die Frage, ob sich unter optimalen Bedingungen der Anregung die Parameter überhaupt identifizieren lassen. Dabei können aus der E/A-Differenzialgleichung bestenfalls  $m + n$  Parameter der Systemmatrix bestimmt werden (notwendige Bedingung). Für erklärende Beispiele sei auf [258] verwiesen. Eine Diskussion am praktischen Beispiel mit eventueller Änderung der Mess- oder E/A-Signale findet in [166] statt. Der zweite Aspekt bezieht sich auf die Versuchsbedingungen. Es muss sichergestellt werden, dass die Spalten des  $\phi$ -Vektors über alle Zeitintervalle linear unabhängig sind. Das lässt sich einerseits

---

<sup>2</sup>Bei der Anwendung des Verfahrens erweist sich eine Modifikation von Vorteil, die verhindert, dass  $P(t)$  sehr groß wird. Details und Rechtfertigung dieser Modifikation werden in [162] beschrieben.

<b>Least-Squares</b>	
Kostenfunktional	$J(\hat{\theta}(t)) = \int_{t_0}^t \frac{e^2(\tau)}{m^2(\tau)} d\tau + \frac{1}{2} \ \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}_0\ _{P_0^{-1}}^2$
Update-Gesetz	$\dot{\hat{\theta}} = P\phi e, \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0$ $\dot{P} = -P\frac{\phi\phi^T}{m^2}P, \quad P(t_0) = P_0$
Designparameter	$P_0 = P_0^T \succ 0_{l \times l}; \hat{\theta}_0$
<b>Least-Squares und Kovarianz-Resetting</b>	
Kostenfunktional	Kann nicht in geschlossener Form angegeben werden.
Update-Gesetz	$\dot{\hat{\theta}} = P\phi e, \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0$ $\dot{P} = -P\frac{\phi\phi^T}{m^2}P, \quad P(t_r^+) = P_0 = \rho_0 I_l,$ wobei $t_r$ die Zeit bei $\lambda_{\min}(P) \leq \rho_1$ ist.
Designparameter	$\rho_0 > \rho_1 > 0; \hat{\theta}_0$
<b>Least-Squares mit exponentiellem Vergessen<sup>2</sup></b>	
Kostenfunktional	$J(\hat{\theta}(t)) = \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{e^2(\tau)}{m^2(\tau)} d\tau + \frac{1}{2} e^{-\beta t} \ \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}_0\ _{P_0^{-1}}^2$
Update-Gesetz	$\dot{\hat{\theta}} = P\phi e, \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0,$ $\dot{P} = \beta P - P\frac{\phi\phi^T}{m^2}P, \quad P(t_0) = P_0$
Designparameter	$P_0 = P_0^T \succ 0_{l \times l}; \ P(t)\  \leq \gamma; \beta > 0; \hat{\theta}_0$
<b>Gradientabstiegsverfahren mit instantaner Kostenfunktion</b>	
Kostenfunktion	$J(\hat{\theta}(t)) = \frac{1}{2} e^2(t)$
Update-Gesetz	$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\phi e, \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0$
Designparameter	$\Gamma = \Gamma^T \succ 0_{l \times l}; \hat{\theta}_0$
<b>Gradientabstiegsverfahren mit integraler Kostenfunktion</b>	
Kostenfunktional	$J(\hat{\theta}(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{e^2(t,\tau)}{m^2(\tau)} d\tau$
Update-Gesetz	$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma(R\hat{\theta} + q), \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0$ $\dot{R} = -\beta R + \frac{\phi\phi^T}{m^2}, \quad R(t_0) = 0_{l \times l};$ $\dot{q} = -\beta q - \frac{z\phi}{m^2}, \quad q(t_0) = 0$
Designparameter	$\Gamma = \Gamma^T \succ 0_{l \times l}; \beta > 0; \hat{\theta}_0$

**Tabelle 5.2:** Übersicht Adaptionsverfahren mit  $e(t) = z(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t)$  und  $m^2(t) = 1 + \alpha\phi^T\phi$  mit  $\alpha > 0$  [162, 163]

über die Bedingung der fortwährenden Anregung (Persistent Excitation) garantieren, die ein integrales Kriterium an den  $\phi$ -Vektor darstellt. Es stellt bei der Konstruktion von LYAPUNOV-Funktionen und bei der Regularität/positiven Definitheit im Rahmen der zeitkontinuierlichen LS-Theorie eine grundlegende Annahme dar. Andererseits wird an das erregende Eingangssignal die Bedingung der Sufficient Richness gestellt. Danach müssen  $l/2$  von Null verschiedene signifikante Frequenzen im erregenden Signal zur Identifikation der  $l$  Parameter vorhanden sein. Für Ergänzungen und den Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen sei auf die Standardwerke zur adaptiven Regelungstechnik (z. B. [162]) oder zur Systemidentifikation (z. B. [78, 167, 318]) verwiesen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Least-Squares-Verfahren mit exponentiellem Vergessen beim experimentellen Nachweis die besten Ergebnisse erzielt. Dieses Ergebnis deckt sich mit [122, 142], steht aber im Widerspruch zu der in der Literatur propagierten Anwendung des instantanen Gradientenabstiegsverfahrens. Aus Sicht des Autors liegt die Popularität von letzterem Verfahren im Wesentlichen daran, dass hier der Konvergenzbeweis besonders einfach gelingt. Allerdings wird die Konvergenzrate nicht näher betrachtet. Auch wird in der Literatur immer von optimalen Bedingungen wie z. B. vorhandener fortwährender Anregung ausgegangen. Dies ist in der Praxis allerdings nicht immer vorhanden, weil im Gesamtsystem mit Regler die Dynamik möglichst gering sein muss und der Wunsch nach ständiger Anregung dazu im Widerspruch steht.

### 5.1.3 Diskussion der Gleichungsfehlerbildung und Vergleich der Verfahren

Für die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Identifikationsverfahren wird nun auf den Ansatz der Verfahren und nicht auf die Verfahren selbst eingegangen. In den folgenden Beispielen 5.1 und 5.2 wird der Gleichungsfehler in zwei unterschiedlichen Varianten formuliert und das Verfahren mit zwei unterschiedlichen Eingangssignalen getestet. Hierbei wird ein Aspekt herausgearbeitet, der im Rahmen der adaptiven Strukturen bisher nicht behandelt wurde. Es handelt sich dabei um eine Betrachtung der Phasenwinkel, die mit dem Konditionierungsproblem vergleichbar ist, das bei zeitdiskreten Problemstellungen intensiv untersucht wurde.

#### Beispiel 5.1. Vergleich der Identifikationsverfahren

Für die Differenzialgleichung

$$T\dot{y} + y = Ku, \quad y(0) = y_0, \quad \text{speziell mit } K = 12 \text{ und } T = 3 \quad (5.10)$$



lautet die LAPLACE-Bereichsdarstellung

$$T(sY(s) - y_0) + Y(s) = KU(s). \quad (5.11)$$

Durch Multiplikation mit  $G_f(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$  (speziell  $\lambda = 8$ ), was einer Filterung der auftretenden Signale entspricht, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(s + \frac{1}{T})}{s + \lambda} Y(s) - \frac{\lambda}{s + \lambda} y_0 &= \frac{\lambda}{s + \lambda} \frac{K}{T} U(s) \\ \frac{K}{T} \frac{\lambda}{s + \lambda} U(s) + \left(-\frac{1}{T}\right) \frac{\lambda}{s + \lambda} Y(s) &= \frac{\lambda s}{s + \lambda} Y(s) - \frac{\lambda s}{s + \lambda} \frac{1}{s} y_0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Zu den Darstellungen korrespondieren die algebraischen Gleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{f,0}(t) & y_{f,0}(t) \end{bmatrix}}_{:=\phi_1^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{K}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{bmatrix}}_{:=\theta_1} = \underbrace{y_{f,1} - y_0 1_{f,1}}_{z_1(t)}, \quad 0 \leq t \leq t_e, \quad (5.13)$$

speziell  $\theta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$  und  $y(0) = 0$ , wobei für die gefilterten Signale die folgenden Abkürzungen

$$u_{f,0} = \frac{\lambda}{s + \lambda} [u], \quad y_{f,0} = \frac{\lambda}{s + \lambda} [y], \quad y_{f,1} = \frac{\lambda s}{s + \lambda} [y], \quad 1_{f,1} = \frac{\lambda s}{s + \lambda} [1(t)] \quad (5.14)$$

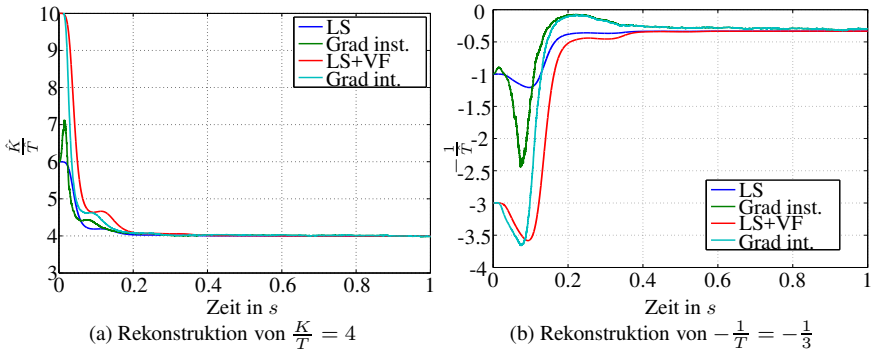
verwendet werden. Für die Identifikationsverfahren nach Tabelle 5.2 wird mit Parametern gearbeitet:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{1,0} &= \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}, & P_{0,LS} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, & P_{0,LS+VF} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Gamma_{\text{Grad}} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \Gamma_{\text{Grad.-Int.}} &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, & \beta_{LS+VF} &= 10, \\ \beta_{\text{Grad.-Int.}} &= 0.2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Als Eingangssignale dienen

$$\begin{aligned} u_1 &= 50 \sin(2\pi 5t) && \text{(Ergebnis siehe Bild 5.4) und} \\ u_2 &= 50 \sin(2\pi 0.5t) && \text{(Ergebnis siehe Bild 5.5).} \end{aligned}$$

Die Simulationsergebnisse werden in den Bildern 5.4 und 5.5 dargestellt. Bei  $u_1$  werden die Parameter mit allen Identifikationsverfahren in sehr kurzer Zeit richtig



**Bild 5.4:** Identifikationsansätze mit (5.13) und mit  $u_1$

rekonstruiert. Das Einschwingverhalten wird bei den LS-Methoden wesentlich von den Startwerten von  $P_0$  bestimmt, was hier nicht ersichtlich ist, aber in Abschnitt 5.1.5 nochmals aufgegriffen wird. Beim gradientenbasierten Verfahren hängt die Konvergenz von der Wahl der Verstärkungsmatrix  $\Gamma$  ab. Liegen die Parameter ungefähr in der gleichen Größenordnung, sind die Teilverstärkungen so zu wählen, dass auch die Terme der Parameterdifferentialgleichung (rechte Seite) in etwa in der gleichen Größenordnung liegen. Unterscheiden sich die Parameter um eine Größenordnung, empfiehlt es sich, dass das auch für die Terme gilt.

Bei  $u_2$  versagt das instantane Gradientenabstiegsverfahren und zeigt ein deutliches Schwingungsverhalten ohne erkennbares Einschwingen. Die übrigen Identifikationsverfahren liefern weiterhin eine richtige Parameterrekonstruktion.

### Beispiel 5.2. Vergleich der Identifikationsverfahren mit anderem Ansatz

Das Beispiel unterscheidet sich von Beispiel 5.1 lediglich in der Wahl des Identifikationsansatzes. Bis auf die Startwerte bleiben Parameter und Eingangssignale identisch.

Durch formales Umstellen von Formel (5.13) ergibt sich ein äquivalenter Ansatz

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_{f,0}(t) & -y_{f,1}(t) + y_0 1_{f,1} \end{bmatrix}}_{:=\phi_2^T} \underbrace{\begin{bmatrix} K \\ T \end{bmatrix}}_{:=\theta_2} = \underbrace{y_{f,0}}_{z_2(t)}, \quad (5.16)$$

speziell  $\theta_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$  und  $y_0 = 0$ . Die Simulation wird mit den Eingangssignalen  $u_1$  (Ergebnis Bild 5.6) und  $u_2$  (Ergebnis Bild 5.7) und den gleichen Parametern

wie in (5.15) wiederholt mit Ausnahme von

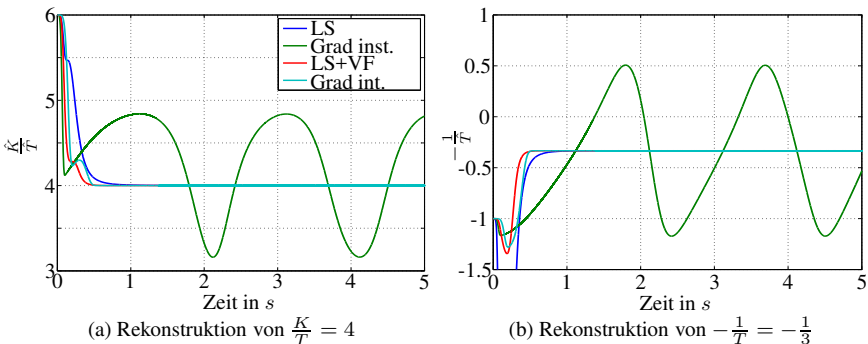
$$\hat{\theta}_{2,0} = \begin{bmatrix} 12.7 \\ 2.3 \end{bmatrix}, \quad P_{0,LS} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_{0,LS+VF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Für die Begründung der Wahl von  $P_0$  sei auf Abschnitt 5.1.5 verwiesen.

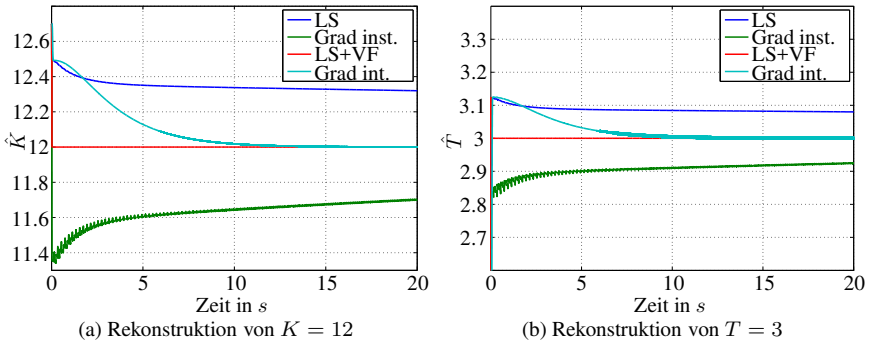
Die Simulationsergebnisse werden in den Bildern 5.6 und 5.7 dargestellt. Das Eingangssignal  $u_1$  führt dazu, dass weder das LS-Identifikationsverfahren noch das instantane Gradientenabstiegsverfahren zur Parameterkonvergenz führen. Das integrale Gradientenabstiegsverfahren nähert sich nur sehr langsam den wahren Werten. Lediglich das LS-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor konvergiert innerhalb kürzester Zeit.

Bei  $u_2$  führt das LS-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor zur Parameterkonvergenz innerhalb von etwa von 0,5 s, das LS-Verfahren ohne Vergessenheitsfaktor und das integrale Gradientenabstiegsverfahren benötigen grob 1 s bis zur Parameterkonvergenz. Das instantane Gradientenabstiegsverfahren hingegen ist auch nach 5 s nicht vollständig eingeschwungen.  $\square$

Dass beim Eingangssignal  $u_1$  das Identifikationsverfahren (5.16) bedeutend schlechter als (5.13) abschneidet, liegt in der Abhängigkeit der Signale von  $y_{f,1}$  und  $u_{f,0}$  voneinander. Der Phasenwinkel beträgt weniger als  $1^\circ$ . Zum Vergleich: Bei (5.13) liegt der Phasenwinkel von  $y_{f,0}$  und  $u_{f,0}$  bei etwa  $90^\circ$ . Bei  $u_2$  wächst der Phasenunterschied auf etwa  $6^\circ$  bzw. sinkt auf  $84^\circ$ . Das erklärt das wesentlich bessere Einschwingverhalten des Identifikationsansatzes von (5.13) bei  $u_2$ . Eine Diskussion der Tatsache, dass die erste Methode aus statistischen Gründen besser geeignet ist, findet sich in [122].

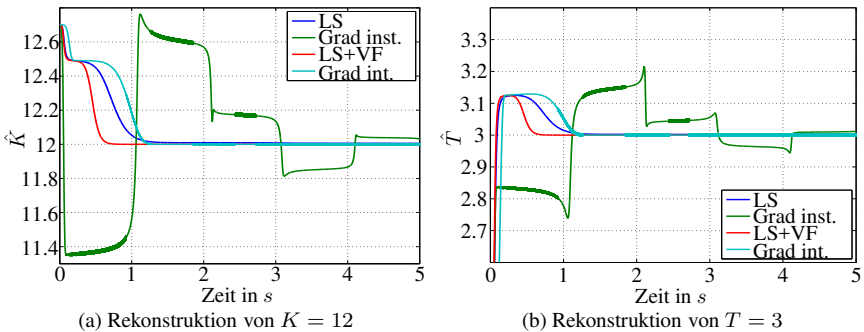


**Bild 5.5:** Identifikationsansätze mit (5.13) und mit  $u_2$



**Bild 5.6:** Identifikationsansätze mit (5.16) und mit  $u_1$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Vorsicht bei der Aufstellung des Gleichungsfehlers geboten ist und algebraisch korrekte Lösungswege nicht mit idealen Bedingungen für Identifikationsverfahren gleichzusetzen sind. Es handelt sich dabei um ein Ansatzproblem, nicht um ein Verfahrensproblem. Bei den gefilterten Signalen muss darauf geachtet werden, dass sie linear unabhängig voneinander sind. Ferner zeigt sich, dass auch die Frequenz des Eingangssignals nicht völlig frei gewählt werden kann und Auswirkung auf die Parameterrekonstruktion hat. Das hier erzielte Ergebnis des Vergleichs der Identifikationsverfahren, dass LS-Verfahren besser als Gradientenabstiegsverfahren sind und dass das LS-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor besser als das ohne ist, deckt sich mit den weiteren Erfahrungen des Autors aus nicht dokumentierten Beispielen.



**Bild 5.7:** Identifikationsansätze mit (5.16) und mit  $u_2$

### 5.1.4 Erweiterung der Identifikationsverfahren um Berücksichtigung unbekannter Anfangswerte

Die meisten adaptiven Verfahren gehen bei der Differenzialgleichung von der Anregung aus dem Nullzustand aus. Dann fällt die  $\delta_{f,n-1}$ -Spalte in Gleichung (5.7) vollständig weg und die Anfangswerte müssen bei der Identifikation nicht weiter berücksichtigt werden.

Tritt bei Ein- und Ausgangssignalen kein Messrauschen auf, kann die  $\delta_{f,n-1}$ -Spalte wegen der bekannten Werte  $u(0)$  und  $y(0)$  entfallen, wodurch sich das Problem vereinfacht. Die Berücksichtigung der bekannten Anfangswerte führt bei Problemstellungen, die nicht in Normalform vorliegen, häufig auf längere Berechnungen.

Bei aktiver Experimentation ist in der Regel das Eingangssignal bekannt, und somit sind auch die Anfangswerte  $u(0^+), \dot{u}(0^+), \dots, u^{(m-1)}(0^+)$  bekannt. Bei passiver Experimentation, wenn also ein laufender Prozess betrachtet oder wenn  $u(t)$  durch einen Regler generiert wird, sind hingegen die  $u$ -Anfangswerte unbekannt. Ferner kann nach Abklingen der Eigenvorgänge auf die reine Parameterrekonstruktion umgeschaltet werden, weil dann Probleme aufgrund mangelnder fortwährender Anregung (Persistent Excitation) umgangen werden (abgeklungene Eigenvorgänge können nicht mehr beobachtet werden und können zur Instabilität führen).

Im Beispiel 5.3 wird gezeigt, dass das Vernachlässigen der Anfangswerte durch formales Nullsetzen eine deutlich schlechtere Konvergenzrate zur Folge hat. Eine erheblich bessere Konvergenzgeschwindigkeit wird hingegen erreicht, wenn die Anfangswertkenntnis in den Identifikationsansatz einfließt.

#### Beispiel 5.3. Anwendung des LS-Identifikationsverfahrens

In Anlehnung an das Beispiel in [258] wird hier das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.18a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x, \quad (5.18b)$$

mit der E/A-Darstellung

$$\ddot{y} + (3+a)\dot{y} + (3a-1)y = u \quad (5.19)$$

mit  $y(0) := y_0 = x_{1,0}$  und  $\dot{y}(0) := \dot{y}_0 = -3x_{1,0} + x_{2,0}$  betrachtet. Die Anwendung der LAPLACE-Transformation liefert

$$s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0 + (3+a)(sY(s) - y_0) + (3a-1)Y(s) = U(s). \quad (5.20)$$

Die Anwendung der Tiefpassfilter liefert

$$y_{f,2} + (3+a)y_{f,1} + (3a-1)y_{f,0} - y_0 1_{f,2} - (\dot{y}_0 + (3+a)y_0) 1_{f,1} = u_{f,0}. \quad (5.21)$$

Die Identifikationsform der algebraischen Differenzialgleichung lautet

$$\begin{bmatrix} y_{f,1} + 3y_{f,0} & -1_{f,2}(t) & -1_{f,1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ y_0 \\ \dot{y}_0 + (3+a)y_0 \end{bmatrix} \\ = u_{f,0} - y_{f,2} - 3y_{f,1} + y_{f,0} \quad (5.22)$$

und in verkürzter Form mit bekanntem Anfangswert  $y_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{f,1} + 3y_{f,0} - y_0 1_{f,1}(t) & -1_{f,1}(t) \end{bmatrix}}_{:=\phi^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix}}_{:=\theta} \\ = \underbrace{u_{f,0} - y_{f,2} - 3y_{f,1} + y_{f,0} + y_0 1_{f,2}(t) + 3y_0 1_{f,1}(t)}_{:=z(t)}. \quad (5.23)$$

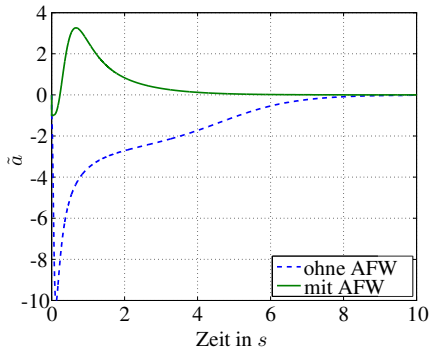
Die Parameterdifferenzialgleichung lautet somit

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} = P\phi \left( z - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{y}_0 \end{bmatrix} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{y}_0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{y}_{0,0} \end{bmatrix} \quad (5.24a)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^T P, \quad P(0) = \text{diag}([10, 10]), \quad \beta = 1. \quad (5.24b)$$

Der Unterschied bei der Parameterrekonstruktion, der mit und ohne Berücksichtigung der Anfangswerte der Differenzialgleichung auftritt, ist in Bild 5.8 ersichtlich. Die Parameterkonvergenz bei Berücksichtigung der Anfangswerte tritt bei  $t = 4$  s statt bei  $t = 8$  s ein. Werden die Anfangswerte in der Modellierung nicht berücksichtigt, wirken sie wie Störungen auf die Identifikation und sorgen so während ihres Abklingens für ein langsames Einschwingen.  $\square$

Das Beispiel zeigt, wie mit Parametern verfahren werden kann, die nicht in der klassischen Normalform vorliegen, und wie mit  $\phi$  umgegangen werden muss. Die Identifikation des Verfahrens wird später in Beispiel 5.4 aufgegriffen.



**Bild 5.8:** Vergleich des Parameterfehlers mit und ohne Berücksichtigung der Anfangswerte

### 5.1.5 Hinweise zur Wahl der Designparameter für die Identifikation

Die in Tabelle 5.2 vorgestellten Verfahren enthalten eine Reihe von Einstellparametern. In der Literatur konzentriert sich die Angabe der Parameter in aller Regel nur auf Bedingungen, die für die Stabilität des jeweiligen Verfahrens erforderlich sind. Allerdings werden kaum Hinweise gegeben, die sich auf das transiente und asymptotische Verhalten, die Numerik, die Einbeziehung von A-priori-Information, diverse Einflüsse gestörter Messsignale (z. B. Bias [122]) und spektrale Betrachtungen bzgl. Identifizierbarkeit beziehen.

Ein bzw. mehrere wichtige Parameter stellen die Filterparameter zur Erzeugung der Ersatzsignale für die Algebraisierung der Differentialgleichung dar. Je nach Filterordnung sind demnach  $n_f$  Parameter zu wählen. Da das aus praktischer Sicht inakzeptabel ist, wird sich bei der Klasse der Filter häufig auf POISSON- oder BUTTERWORTH-Filter beschränkt. Mit der Festsetzung einer statischen Filterverstärkung von 1 bleibt letztlich nur die Filtergrenzfrequenz als einziger einzustellender Parameter. In der Arbeit [122] wird darauf verwiesen, dass der Parameter so zu wählen ist, dass sich Filter und System in ihrem Frequenzgang ähneln. Dadurch wird sichergestellt, dass jene Frequenzen, die das System signifikant passieren, auch nach Filterung nennenswerte Amplituden aufweisen.

Alle angesprochenen Verfahren sind durch eine Parameterdifferentialgleichung gekennzeichnet, die das zeitkontinuierliche Analogon der in der Optimierung verwendeten zeitdiskreten Parameter-Update-Gleichung darstellt. Wie jede Differentialgleichung benötigt auch die Parameterdifferentialgleichung Anfangswerte. Sie werden in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an die diskrete Optimierung als

		Störung	
		keine	signifikant
A-priori über Parameter	Startwert nah am echten Wert	$P_0$ mittel	$P_0$ klein
	Startwert weit vom echten Wert	$P_0$ groß	$P_0$ mittel

**Tabelle 5.3:** Übersicht über die Beeinflussung von Startwerten bei Least-Squares-Verfahren ohne Vergessenheitsfaktor. Mit Vergessenheitsfaktor mit Störung,  $\delta P_0$  kleiner zu wählen.

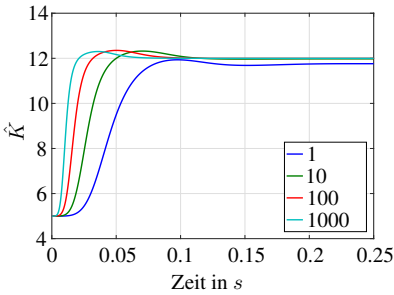
Startwerte bezeichnet, um sie von den Anfangswerten der Systemdifferenzialgleichung abgrenzen zu können. Analog zur Optimierung ist es auch hier von Vorteil, wenn die Startwerte in der Nähe der wahren Werte liegen. Durch Nutzen der A-priori-Information, die aus physikalischen oder systemtheoretischen Überlegungen erhalten werden kann (z. B. Frequenzverhalten, statische Verstärkung, Stabilität, Passivität, siehe Hinweise in [123]), lassen sich oft gute Startwerte angeben. Wenn diesbezüglich eine Präzisierung nicht gelingt, ist die Mindestforderung empfehlenswert, dass die Startwerte das richtige Vorzeichen aufweisen. Unter der Stabilitätsannahme folgt nach der notwendigen Bedingung für HURWITZ-Polynome die Positivität der Nennerkoeffizienten und aus der statischen Verstärkung zumindest das Vorzeichen von  $b_0$ .

In enger Verbindung mit den Startwerten steht die Startmatrix  $P_0$  bei den LS-orientierten Verfahren. Sie taucht im zusätzlichen Term in Form von  $P_0^{-1}$  als Wichtungsmatrix in der elliptischen Norm<sup>3</sup> auf. Eine positiv definite Matrix  $P_0$  mit großen Eigenwerten wird bei diskreten LS-orientierten Verfahren propagiert. Das bedeutet, dass die Eigenwerte von  $P_0^{-1}$  klein sind, was wiederum einen kleinen additiven Zusatzterm im Gütefunktional zur Folge hat und schlussendlich den Einfluss des Startwerts der Parameterdifferenzialgleichung  $\hat{\theta}_0$  auf den Parameterverlauf  $\hat{\theta}$  reduziert. Aus diesen Überlegungen folgt, dass bei guter A-priori-Information über  $\hat{\theta}_0$  (z. B. über Experimentation aus Ruhelage) die Matrix  $P_0$  nicht zu groß zu wählen ist (groß bedeutet in diesem Fall Zahlen von  $10^5 \dots 10^6$ ). Das Gleiche gilt, wenn die Messdaten signifikant gestört sind, da dann die integralen Terme im Verhältnis zum additiven Startwertterm weniger stark ins Gütefunktional einfließen.

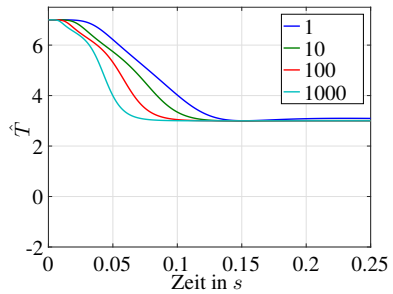
Die Entscheidung darüber, welches der in Tabelle 5.2 angegebenen LS-orientierten Verfahren zu verwenden ist, fällt aus Sicht des Autors zugunsten des LS-orientierten Verfahrens mit Vergessenheitsfaktor. Diese Einschätzung spiegelt sich in den Beispielen 5.1 und 5.2 wider. Wichtiger wiegen aber die

<sup>3</sup>Die elliptische Norm ist durch  $\|x\|_{A^T A} = \sqrt{x^T A^T A x} = \|Ax\|_2$  mit dem  $A$ -Innenprodukt auf  $\mathbb{C}^n$  und  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  nichtsingulär definiert [226].

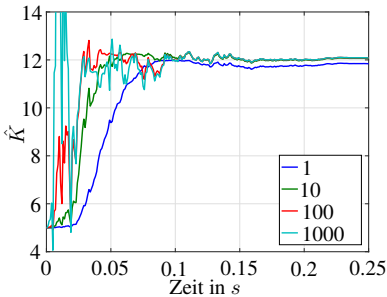




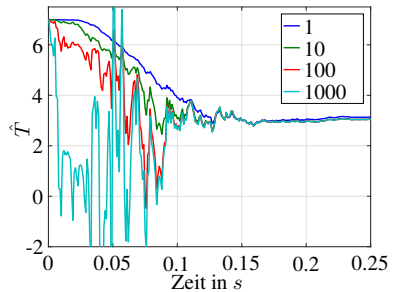
(a) Rekonstruktion von  $K = 12$  – keine Störung, falscher Startwert



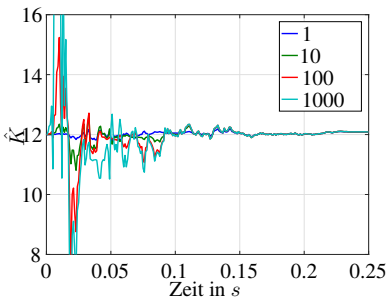
(b) Rekonstruktion von  $T = 3$  – keine Störung, falscher Startwert



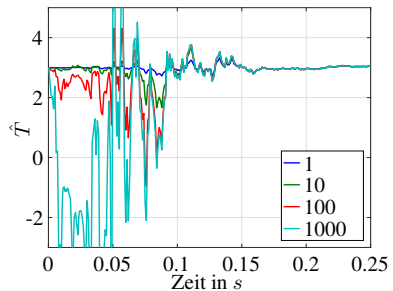
(c) Rekonstruktion von  $K = 12$  – mit Störung, falscher Startwert



(d) Rekonstruktion von  $T = 3$  – mit Störung, falscher Startwert



(e) Rekonstruktion von  $K = 12$  – mit Störung, richtiger Startwert



(f) Rekonstruktion von  $T = 3$  – mit Störung, richtiger Startwert

**Bild 5.9:** Vergleich der Simulationsergebnisse mit Identifikationsansatz aus Beispiel 5.2 für unterschiedlich gewählte Startwerte von  $P_0^{-1}$ .

durch die Beispiele nicht deutlich gewordenen Argumente, dass in der Praxis fast immer diverse Parameterdriften vorhanden sind, und dass bei Verwendung von linearisierten Modellen die Parameter immer vom Arbeitspunkt abhängen, weshalb jeder Arbeitspunktwechsel ohnehin eine Parameteränderung nach sich zieht. Die Wahl des Vergessenheitsfaktors hängt dabei vom Stör-Nutz-Verhältnis der Signale und der Schnelligkeit des Arbeitspunktwechsels ab. Überwiegen in der Anwendung die Störungen, ist  $\beta$  klein zu wählen (LS-ähnliches Verhalten). Werden hingegen die Zustände für eine Regelung benötigt, empfiehlt es sich, das Einschwingverhalten der Parameter schneller als das Einschwingverhalten der Zustände einzustellen.

Tabelle 5.3 zeigt, welche Startwerte bei unterschiedlichem A-priori-Wissen und ggf. bei störungsbehaftetem Ausgangssignal bei  $P_0$  zu wählen sind. Bild 5.9 zeigt Simulationen mit unterschiedlichen Werten für  $P_0$ . Dabei wird  $P_0$  als Diagonalmatrix gewählt und alle Diagonalelemente werden jeweils mit dem gleichen Wert besetzt. Als Identifikationsansatz wird der in Beispiel 5.2 vorgestellte gewählt. Es zeigt sich, dass bei ungestörtem Ausgangssignal ein hoher Wert von  $P_0$  zu schnellem Einschwingen führt (Bilder 5.9a und 5.9b). Bei vorhandener Störung führen hohe Werte aber zu einer großen Verstärkung des Fehlers und haben signifikanten Einfluss auf die Parameterrekonstruktion. In den Bildern 5.9c und 5.9d werden dabei falsche, in den Bildern 5.9e und 5.9f richtige Startwerte angenommen. Insgesamt muss ein Kompromiss zwischen schnellem Parametereinschwingen und Rauschunterdrückung gefunden werden.

Bei Identifikationsproblemen, in denen aggregierte Anfangswerte geschätzt werden, sind die betreffenden  $P$ -Diagonalelemente relativ hoch zu wählen. Zum einen sind die Hilfssignale für die aggregierten Anfangswerte stets ungestört, zum anderen klingen die Signale zumeist schnell nach 0 ab, sodass die  $P$ -induzierte Dynamik schneller als die Abklingdynamik sein muss. Bei zu niedrigen  $P$ -Diagonalelementen für die aggregierten Anfangswerte kann es in der Praxis dazu kommen, dass die aggregierten Anfangswerte falsch geschätzt werden, was aber nicht zwingend bedeutet, dass auch die Systemparameter falsch geschätzt werden, wohl aber die Parameterkonvergenz unnötig verlangsamen. Bei zu hohen  $P$ -Diagonalelementen für die aggregierten Anfangswerte wird ein sehr schnelles Einschwingen auf Kosten eines starken Überschwingens erkaufte, was sich negativ auf die Konvergenzgeschwindigkeit der anderen Parameter auswirkt.

Existieren stochastische Ausgangsstörungen und werden die Startwerte auf die wahren Parameterwerte gelegt, führen gleichungsfehlerbasierte LS-orientierte Verfahren zu einem dauerhaften Bias. Für die Begründung und entsprechende Abhilfemaßnahmen sei auf [67, 122, 303] verwiesen.

Die Verstärkungsmatrix  $\Gamma$  bei den Gradientenabstiegsverfahren wird üblicherweise als Diagonalmatrix gewählt, um die Zahl der Designparameter gering zu halten.

Für die dann erforderlichen Verstärkungsfaktoren gelten die in der Erläuterung zu Beispiel 5.1 gegebenen Empfehlungen. Ergänzend sei vermerkt, dass eine lange Rechenzeit für die Simulation ein Indiz für eine steife Differenzialgleichung ist, die ihre Ursache meist in falsch eingestellten Verstärkungsfaktoren hat.

In Abschnitt 5.1 wurde eingehend auf die Identifikationsverfahren eingegangen. Nach der Übersicht über die tiefpassfilterbasierte Ableitungsbildung in Abschnitt 5.1.1 und über die Identifikationsverfahren in Abschnitt 5.1.2 wurde in Abschnitt 5.1.3 ein Aspekt herausgearbeitet, der bisher im Rahmen der adaptiven Strukturen nicht behandelt wurde. Neben dem Einfluss der Eingangssignale wurde auf die Ansatzformulierung der Gleichungsfehlerbildung eingegangen, die großen Einfluss auf die Identifikationsergebnisse hat. In Abschnitt 5.1.4 wurde herausgearbeitet, welche Verbesserung die Berücksichtigung unbekannter Anfangswerte bei den Identifikationsverfahren auf das Konvergenzverhalten bewirkt. In Abschnitt 5.1.5 wurden Hinweise zur Wahl der Designparameter gegeben.

Die in Abschnitt 5.1 erarbeiteten Ergebnisse für die Identifikationsverfahren bilden die Grundlage für die Weiterentwicklung der adaptiven Beobachter in Abschnitt 5.2.

## 5.2 Adaptive Beobachter

Der adaptive Beobachter nach Bild 2.7a besteht aus den zwei Teilsystemen Beobachter und Identifizierer und weist keine Rückkopplung von den rekonstruierten Zuständen auf die Parameter auf, da zur Identifikation nur die Ein- und Ausgangssignale verwendet werden. Unter Ausnutzung des Gewissheitsprinzips<sup>4</sup> werden die geschätzten Parameter im Beobachter als korrekt betrachtet und auf deren Basis wird ein linearer Beobachterentwurf ausgeführt. Das Stabilitätsverhalten des Gesamtsystems hängt dabei entscheidend vom Erfolg der Identifikation ab.

Ziel des Abschnitts ist die Weiterentwicklung, Korrektur und Gegenüberstellung bekannter linearer adaptiver Beobachterzugänge. Davon ausgehend werden Hinweise gegeben, wie die Verfahren geschickt implementiert werden können. Wie im vorangegangenen Abschnitt an einem Beispiel gezeigt wurde, beschleunigt die Berücksichtigung der Anfangswerte die Identifikation wesentlich. In den Originalarbeiten zu den im Folgenden vorgestellten adaptiven Beobachtern wurde dieser Umstand nicht beachtet. Deshalb werden die Identifizierer der jeweiligen adaptiven Beobachter, wie auch die Zustandsrekonstruktion, um das Einbeziehen der

---

<sup>4</sup>Im Nichtlinearen gilt das Separationsprinzip zwischen Identifizierer und Beobachter nicht mehr. In Anlehnung an das einführende Beispiel aus [192, S. 7-9] lässt sich ein System konstruieren, bei dem das Gesamtsystem divergiert.

Anfangswerte erweitert.

Neben adaptiven Beobachtern, die auf speziellen Normformen basieren und damit maximal  $2n$  Parameter im Fall von Systemen ohne Durchgriff aufweisen, wird an einem Beispiel das prinzipielle Vorgehen erläutert, nach dem adaptive Beobachter zu entwerfen sind, wenn vereinzelte Parameter in der Systemmatrix unbekannt sind. Voraussetzung für die Existenz eines adaptiven Beobachters ist dann, dass sich die unbekannt Parameter über die E/A-Differenzialgleichung identifizieren lassen.

Anwendung haben adaptive Beobachter bei Asynchron- [47, 218], bei Gleichstrom- [286] und bei permanentmagneterregten Synchronmaschinen [256] sowie bei der Rekonstruktion des Reibwertkoeffizienten für Reifen [119] und bei aktiven Fahrwerken [263] gefunden. Ferner werden adaptive Beobachter für die Fehlerdetektion von Aktoren [324] und für die Frequenzrekonstruktion [149, 150, 217] eingesetzt.

In diesem Abschnitt werden drei bekannte normalformbasierte lineare adaptive Beobachterzugänge betrachtet. Der erste Ansatz von [194] basiert auf der BNF und nutzt den Umstand, dass dadurch Produkte zwischen Zuständen und Parametern verhindert werden. Dafür wird anstelle von  $\hat{x}_n$  im Beobachter mit  $y$  gearbeitet, wodurch eine lineare  $a$ -Parametervektorrekonstruktion möglich ist. Liegt das System nicht in BNF vor, muss es entsprechend transformiert werden. Hinweise darauf sind in Abschnitt 3.1.2 angegeben. Im Vergleich zum ersten Ansatz von [194] wird ein Hinweis für einen ISS-basierten Stabilitätsbeweis gegeben, der die umständliche alte Beweisführung stark verkürzt.

Der zweite Ansatz von KREISSELMEIER [187] geht einen anderen Weg und berechnet die Zustände direkt aus den Ersatzsignalen. Deshalb handelt es sich nicht um einen Beobachter im klassischen Sinne. Eine entsprechende Diskussion findet im Abschnitt statt. Ebenso wird eine vereinfachte Berechnung für notwendige Transformationen angegeben.

Der dritte Ansatz geht den Weg über eine spezielle Normalform für adaptive Beobachter. [207] kommt dabei ohne die normalerweise außerhalb des Beobachteransatzes stattfindende Bildung der gefilterten Ausgangssignale aus und integriert sie in die Normalform. Die Ersatzsignale werden hier – anders als bei den vorherigen Ansätzen – über einzelne Tiefpassfilter gebildet. Das Verfahren wird hier über einen anderen Zugang hergeleitet und ein Fehler im Identifikationsverfahren korrigiert. Zusätzlich wird erstmals eine Berechnung für die Zustände angegeben. Eine neue Interpretation erlaubt einen ähnlichen Ansatz wie bei [187], sodass auf eine Zustandsdifferenzialrechnung verzichtet werden kann.

Im vierten Abschnitt wird der adaptive Beobachter für Systeme diskutiert, die nicht in Normalform vorliegen. Anhand eines Beispiels werden die Unterschiede zwischen klassischen zeitvarianten Beobachterzugängen, die um ein Identifikations-

verfahren ergänzt werden, und einem BNF-basierten adaptiven Beobachter [194] herausgearbeitet. Der Ansatz ohne Normalform ist insbesondere dann von Vorteil, wenn es nur um vergleichsweise wenige Parameter geht, weil er dann mit wenig Aufwand entworfen werden kann. Nachteilig kann sich unter Umständen auswirken, dass hier keine Stabilitätsbeweise gegeben sind.

### 5.2.1 Adaptiver Beobachter mit LUENBERGER-Beobachteransatz

Die BNF erlaubt eine gleichzeitige Rekonstruktion von Zuständen und Parametern mit linearen Methoden. Das hier vorgestellte Entwurfsverfahren aus [194] ist eine der ersten Veröffentlichungen zu adaptiven Beobachtern, die sich den Umstand zunutze machen und die  $2n$  unbekannt Parameter rekonstruieren. Der Ansatz beruht auf  $5n$  Differenzialgleichungen, davon  $2n$  für die Bildung der Ersatzsignale,  $2n$  für Identifikationsgleichungen und  $n$  für die Beobachtergleichung. Die Ersatzsignale werden auf Basis der Zustandsvariablenfilter erzeugt und hier – anders als in der Originalarbeit – mit einer statischen Verstärkung von 1 gewählt, wodurch eine spätere Reskalierung der Parameter entfällt und somit der Aufwand reduziert wird.

Bei dem hier vorgestellten adaptiven Beobachter wird das LS-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor verwendet. Das geschieht aufgrund der im vorangegangenen Abschnitt erwähnten Nachteile des instantanen Gradientenabstiegsverfahrens, welches in der Originalarbeit zum Einsatz kommt und einen einfacheren Stabilitätsbeweis erlaubt. Deshalb kommt es nach Ansicht des Autors bei den meisten Ansätzen zum Einsatz, zeigt aber, wie z. B. in Abschnitt 5.1.3 gezeigt wurde, nur eine schlechte Performance. Daher ist der Einsatz in der Regel nicht empfehlenswert. Der Beobachteransatz basiert auf einem LUENBERGER-Ansatz und erlaubt eine frei wählbare Beobachterdynamik. Für das vollständig beobachtbare, strikt propre [120] System in Beobachternormalform

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0_{n-1}^T & -a_0 \\ I_{n-1} & -a_{1:n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_{0:m} \\ 0_{n-m-1} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.25a)$$

$$y = e_n^T x \quad (5.25b)$$

kann der adaptive Beobachter

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} y, \quad \zeta(0) = 0_n \quad (5.26a)$$

$$y_{f,0:n} = \begin{bmatrix} I_n \\ -\lambda_{0:n-1}^T \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0_n \\ \lambda_0 \end{bmatrix} y \quad (5.26b)$$

$$\dot{u}_{f,0:n-1} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} u_{f,0:n-1} + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} u, u_{f,0:n-1}(0) = 0_n \quad (5.26c)$$

$$\dot{\varsigma} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} \varsigma + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} 1(t), \quad \varsigma(0) = 0_n \quad (5.26d)$$

$$1_{f,0:n} = \begin{bmatrix} I_n \\ -\lambda_{0:n-1}^T \end{bmatrix} \varsigma + \begin{bmatrix} 0_n \\ \lambda_0 \end{bmatrix} 1(t) \quad (5.26e)$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0_{n-1}^T & 0 \\ I_{n-1} & 0_{n-1} \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_{1:n-1} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_{1:n-1} \end{bmatrix} u - k(\hat{x}_n - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.26f)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = P\phi \left( y_{f,n} - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{a}_{0:n-1}(0) \\ \hat{b}_{0:m}(0) \\ \hat{c}_{0:n-1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{0:n-1,0} \\ \hat{b}_{0:m,0} \\ \hat{c}_{0:n-1,0} \end{bmatrix} \quad (5.26g)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^T P, \quad P(0) = P_0 \quad (5.26h)$$

$$\phi = [-y_{f,0} \dots -y_{f,n-1} \ u_{f,0} \dots u_{f,m} \ 1_{f,1} \dots 1_{f,n}]^T \quad (5.26i)$$

entworfen werden. Die Berechnung von  $u_{f,n}$  ist hier nicht notwendig wegen der Forderung eines strikt properen Systems. Somit sind die Zustandsvariablen direkt die des Filters und der Weg über eine Hilfsvariable entfällt.

### Anmerkung 5.1. Stabilitätsbeweis

Der Stabilitätsbeweis des Gesamtsystems, auf den hier nicht näher eingegangen wird, erfolgt in [194] über das KALMAN-YAKOBOVIC-Lemma. Es ist auch ein Stabilitätsbeweis über die ISS-Methoden [120] möglich. Aus der ISS-Stabilität folgt die CICS-Stabilität<sup>5</sup> [297, 298, 300]. Wenn  $\tilde{a} \rightarrow 0_n$  und  $\tilde{b} \rightarrow 0_{m+1}$  gelten, folgt  $\tilde{x} \rightarrow 0_n$ . Wenn die Identifizierung also erfolgreich ist, strebt auch der Beobachterfehler  $\tilde{x}$  gegen Null. Dafür muss das Eingangssignal aber fortdauernd angeregt sein.  $\square$

<sup>5</sup>CICS steht für Converging Input, Converging State.

**Anmerkung 5.2. Reduzierung der zu identifizierenden Parameter**

Bei der dem adaptiven Beobachter zugrunde liegenden BNF werden die ersten  $n - 1$  Werte des  $b$ -Vektors berücksichtigt. Da der relative Grad  $r$  bzw. gleichbedeutend der Zählergrad  $m$  der Übertragungsfunktion im Allgemeinen a priori bekannt ist, müssen nur die Koeffizienten  $b_0, \dots, b_m$  rekonstruiert werden. Die verbleibenden Koeffizienten sind gleich Null zu setzen. Die dargestellte Variante lässt sich auf alle sprungfähigen Systeme erweitern. Der sprungfähige Fall wird hier aber nicht weiter betrachtet.  $\square$

## 5.2.2 Modifizierter Adaptiver Beobachter nach KREISSELMEIER

Der adaptive Beobachter nach KREISSELMEIER [187] ist, was die Idee betrifft, eigentlich ein Ein-Ausgangsidentifizierer. Die Zustände für die BNF berechnet er direkt aus den Ersatzsignalen. Da die Zustände aber explizit angegeben werden, ist die Bezeichnung als adaptiver Beobachter gerechtfertigt. Allerdings handelt es sich entsprechend der Klassifikation aus Abschnitt 2.5.3 um einen nichteinstellbaren adaptiven Beobachter. Der Verzicht auf die Verwendung des Zustandsraums erspart die Berechnung von  $n$ -Differenzialgleichungen, allerdings geht auch ein Freiheitsgrad zur direkten Beeinflussung des Einschwingverhaltens der Zustände verloren. Der Umstand erscheint zunächst als Nachteil, erweist sich aber in späteren Simulationen als Vorteil. Der Fehler in der Parameterrekonstruktion beeinflusst die Zustandsrekonstruktion so stark negativ, dass der von KREISSELMEIER gewählte Ansatz schnellere Zustandskonvergenz im Vergleich zu dem Entwurf von KUDVA aufweist.

In der vorliegenden Arbeit ist die direkte Berechnung von Transformationsmatrizen für die Zustandsberechnung neu, die auf einer Zerlegung der Adjungierten basiert und eine effiziente algorithmische Umsetzung der algebraischen Bedingung darstellt.

Das System (5.25) wird umgeschrieben auf

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{n-1}^T & -\lambda_0 \\ I_{n-1} & -\lambda_{1:n-1} \end{bmatrix}}_F x + \left( \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_{1:n-1} \end{bmatrix}}_\lambda - \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_{1:n-1} \end{bmatrix}}_a \right) y + \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_{1:n-1} \end{bmatrix}}_b u, \quad (5.27a)$$

$$y = e_n^T x \quad (5.27b)$$

mit  $x(0) = x_0$ . Die Verwendung des Superpositionsprinzips führt auf

$$\dot{\zeta}_i = F\zeta_i + e_{i+1}y, \quad \zeta_i(0) = 0_n, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (5.28a)$$

$$\dot{\varsigma}_i = F\varsigma_i + e_{i+1}u, \quad \varsigma_i(0) = 0_n, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (5.28b)$$

$$x = \begin{bmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 & \dots & \zeta_{n-1} & \varsigma_0 & \varsigma_1 & \dots & \varsigma_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda - a \\ b \end{bmatrix} + e^{Ft}x_0. \quad (5.28c)$$

Der beträchtliche Aufwand der Simulation der  $2n$  Differenzialgleichungen für die  $n$ -dimensionalen Vektoren  $\zeta_i$  und  $\varsigma_i$  lässt sich reduzieren. Hierzu wird die Beziehung

$$(sI_n - F)^{-1}e_{i+1} = T_i(sI_n - F^T)^{-1}\lambda_0e_n = T_i \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \frac{\lambda_0}{s^n + \dots + \lambda_1s + \lambda_0}$$

verwendet, die zeigt, dass sich die Signale  $\zeta_i$  und  $\varsigma_i$

$$\dot{u}_f = F^T u_f + \lambda_0 e_n u, \quad u_f(0) = u_{f,0}$$

$$\dot{y}_f = F^T y_f + \lambda_0 e_n y, \quad y_f(0) = y_{f,0}$$

$$\zeta_i(t) = T_i u_f$$

$$\varsigma_i(t) = T_i y_f$$

aus  $u_f$  und  $y_f$  über  $T_i$  erzeugen lassen. Für die Berechnung der  $T_i$  wird eine Entwicklungsmethode der Adjungierten angewendet

$$\begin{aligned} \text{adj}(sI_n - F) &= (s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0)I_n \\ &\quad + (s^{n-2} + \lambda_{n-3}s^{n-3} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0)F \\ &\quad + \dots + (s + \lambda_{n-2})F^{n-2} + F^{n-1} \\ &= s^{n-1}I_n + (\lambda_{n-1}I_n + F)s^{n-2} \\ &\quad + \dots + (\lambda_2I_n + \lambda_3F + \dots + \lambda_{n-1}F^{n-3} + F^{n-2})s \\ &\quad + (\lambda_1I_n + \lambda_2F + \dots + \lambda_{n-1}F^{n-2} + F^{n-1}). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die  $i$ -te Transformationsmatrix für  $i = 0, \dots, n-1$  errechnet sich über

$$T_i = [t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n] \quad \text{mit} \quad t_j = \left( F^{n-j} + \sum_{k=j}^{n-1} \lambda_k F^{k-j} \right) e_{i+1}. \quad (5.30)$$



Die Gleichung aus (5.28c) wird mit den Transformationsmatrizen zu

$$\begin{aligned}
 x &= [T_0 y_f \quad T_1 y_f \quad \dots \quad T_{n-1} y_f \quad T_0 u_f \quad T_1 u_f \quad \dots \quad T_{n-1} u_f] \begin{bmatrix} \lambda - a \\ b \end{bmatrix} \\
 &\quad + e^{Ft} x_0 \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_i - a_i) T_i y_f + \sum_{i=0}^m b_i T_i u_f + e^{Ft} x_0.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Für das System (5.25) kann der adaptive Beobachter

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_f &= \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} y_f + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} y, & y_f(0) &= 0_n, \\
 & & y_f &= [y_{f,0}, \dots, y_{f,n-1}]^T
 \end{aligned} \tag{5.32a}$$

$$y_{f,n} = -\lambda_{0:n-1}^T y_f + \lambda_0 y \tag{5.32b}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_f &= \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} u_f + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} u, & u_f(0) &= 0_n, \\
 & & u_f &= [u_{f,0}, \dots, u_{f,n-1}]^T
 \end{aligned} \tag{5.32c}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{1}_f &= \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ -\lambda_0 & -\lambda_{1:n-1}^T \end{bmatrix} 1_f + \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ \lambda_0 \end{bmatrix} 1(t), & 1_f(0) &= 0_n, \\
 & & 1_f &= [1_{f,0}, \dots, 1_{f,n-1}]^T
 \end{aligned} \tag{5.32d}$$

$$1_f = -\lambda_{0:n-1}^T 1_f + \lambda_0 1(t) \tag{5.32e}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_i - \hat{a}_i) T_i y_f + \sum_{i=0}^m \hat{b}_i T_i u_f + e^{Ft} \hat{x}_0 & \text{mit } T_i \text{ über Gl. (5.30)} \\
 & & & F \text{ aus (5.27a)}
 \end{aligned} \tag{5.32f}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} &= P \phi \left( y_{f,n} - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \right), & \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \\ \hat{c}(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_{0:n-1,0} \\ \hat{b}_{0:m,0} \\ \hat{c}_{0:n-1,0} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.32g}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{P} &= \beta P - P \phi \phi^T P, & P(0) &= P_0
 \end{aligned} \tag{5.32h}$$

mit

$$\phi = [-y_{f,0} \dots -y_{f,n-1} \ u_{f,0} \dots u_{f,m} \ 1_{f,1} \dots 1_{f,n}]^T \quad (5.32i)$$

$$\hat{x}_0 = \hat{c} - \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \dots & \hat{b}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_m & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0^+) \\ \dot{u}(0^+) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0^+) \end{bmatrix} \quad (5.32j)$$

entworfen werden. (5.32j) folgt unmittelbar aus der Formel aus den aggregierten Anfangszuständen (5.5b) über

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c}_0 \\ \hat{c}_1 \\ \vdots \\ \hat{c}_{n-1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \dots & \hat{a}_{n-1} & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \hat{a}_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0^+) \\ \dot{y}(0^+) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0^+) \end{bmatrix}}_{\substack{:= \mathcal{O}^{-1}(e_n^T, A) \\ := \hat{x}_0}} \\ &+ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \dots & \hat{b}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{b}_m & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0^+) \\ \dot{u}(0^+) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0^+) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Beispiel 5.4 entwirft die beiden adaptiven Beobachter nach KUDVA und nach KREISSELMEIER. Insbesondere wird die Verbesserung gezeigt, die durch die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte erreicht wird.

#### Beispiel 5.4. Modifizierte Adaptive Beobachter nach KUDVA und KREISSELMEIER

Für das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (5.34a)$$

$$y = [0 \ 1] x \quad (5.34b)$$

wird der adaptive Beobachter

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} y, \quad \zeta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35a)$$

$$y_{f,0:2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} y \quad (5.35b)$$

$$\dot{u}_{f,0:1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} u_{f,0:1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u, \quad u_f(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35c)$$

$$\dot{\varsigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \varsigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} 1(t), \quad \varsigma(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35d)$$

$$1_{f,0:2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \varsigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} 1(t) \quad (5.35e)$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} - \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} u - k(\hat{x}_n - y), \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.35f)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = P\phi \left( y_{f,2} - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{a}_{0:1}(0) \\ \hat{b}_{0:1}(0) \\ \hat{c}_{0:1}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.35g)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^T P, \quad P(0) = 10 \cdot I_6, \quad \beta = 1, \quad (5.35h)$$

$$\phi = [-y_{f,0} \quad -y_{f,1} \quad u_{f,0} \quad u_{f,1} \quad 1_{f,1} \quad 1_{f,2}]^T \quad (5.35i)$$

mit  $u(t) = 50 \sin(\pi t) + 10 \sin(5\pi t)$  entworfen. Die aggregierten Anfangszustände berechnen sich über die Formel (5.5b)

$$c_0 = a_1 y(0^+) + a_2 \dot{y}(0^+) + b_1 u(0^+) = 3 \quad \text{und} \quad c_1 = a_2 y(0^+) = 3,$$

wobei  $y(0^+) = c^T x_0 = x_{2,0} = 3$ ,  $\dot{y}(0^+) = c^T A x_0 = x_{1,0} - 5x_{2,0} + 3u(0^+) = -12$  und  $u(0^+) = 0$  zu verwenden sind.

In den Bildern 5.10a-5.10d werden die Ergebnisse der Parameteridentifikation gezeigt. Die Berücksichtigung der aggregierten Anfangszustände führt zu einer viel schnelleren Konvergenz. Bild 5.10e zeigt die Rekonstruktion der aggregierten

Anfangszustände selbst. Die Wahl höherer Werte in  $P_0$  führt, wie in Abschnitt 5.1.5 beschrieben, zu einem starken Überschwingen der Parameter, die dann ein Verlangsamen der Parameteridentifikation nach sich ziehen. Das Verlangsamen kann so groß werden, dass der Ansatz ohne Berücksichtigung der aggregierten Anfangszustände ein besseres Ergebnis erzielt. Gleichzeitig ist hier ab einer Zeit von  $t = 9\text{ s}$  zu erkennen, dass die Werte nach Abklingen der Eigenvorgänge nicht mehr richtig rekonstruiert werden können. Dies liegt an der dann nicht mehr vorhandenen fortwährenden Anregung (Persistent Excitation).

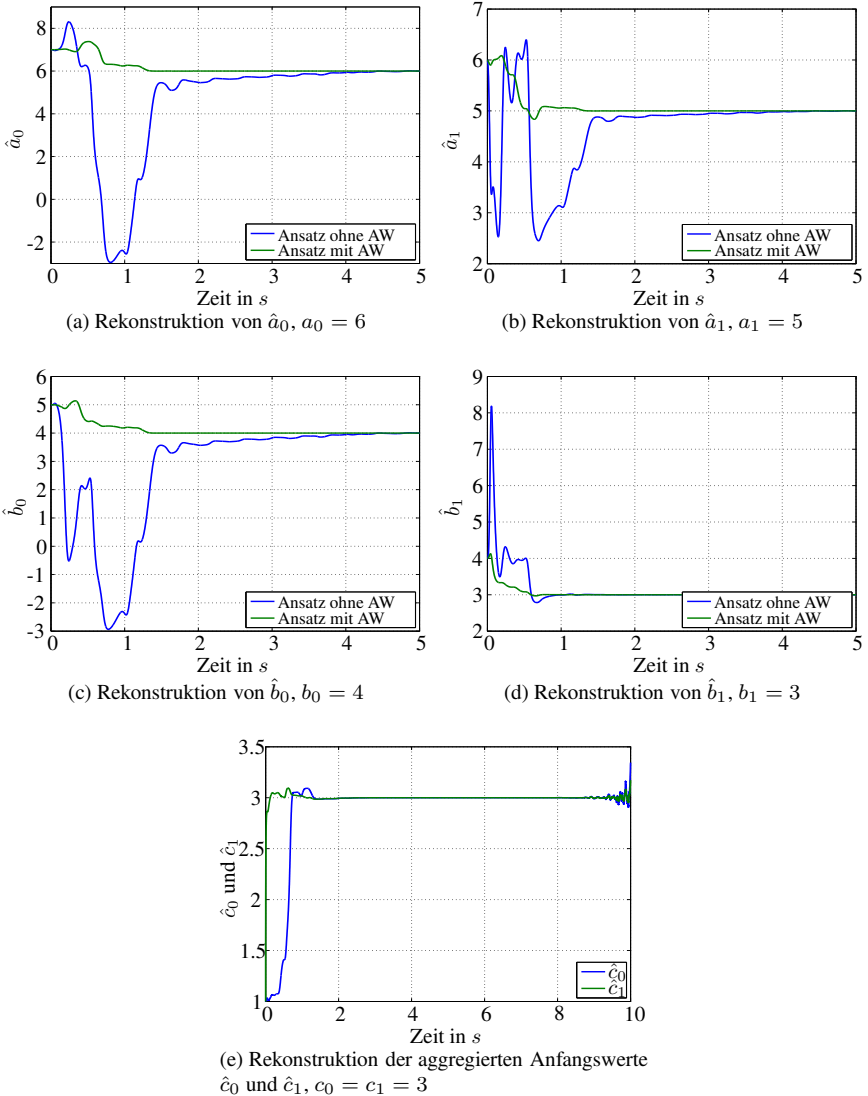
Der Verlauf der Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter von KUDVA ist in Bild 5.11 zu sehen. Hier führen die besseren Ergebnisse der Parameteridentifikation auch zum besseren Verlauf der Zustandsfehler. Gleiche Ergebnisse sind auch im Verlauf der Zustandsfehler in den Simulationsergebnissen des adaptiven Beobachters nach KREISSELMEIER in Bild 5.12 zu sehen.

Die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte führt zu einem wesentlich besseren Einschwingverhalten bei der Parameteridentifikation und somit auch zu einem schnelleren Abklingen der Zustandsfehler. Wie bereits in Abschnitt 5.1.4 erwähnt, ist die Parameteridentifikation ohne Berücksichtigung der Anfangswerte vergleichbar mit der Wirkung unbekannter Signale, die störend auf den Identifikationsvorgang wirken und ihn verlangsamen.

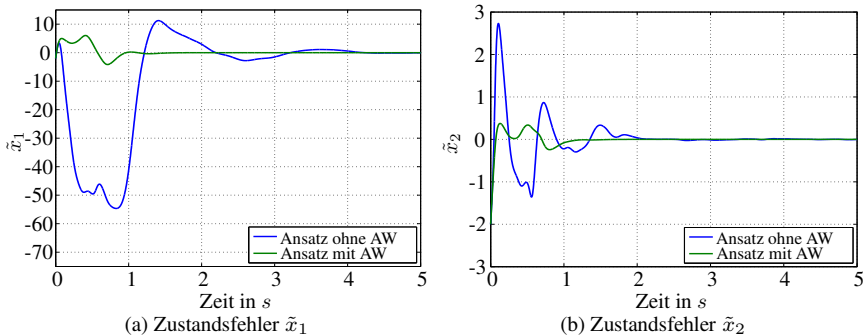
Negativen Einfluss auf die Parameterrekonstruktion können auch Abweichungen in den Anfangswerten von Hilfssignalen oder Zuständen haben. So kann es auch bei Parametern, deren Anfangswerte nah an den wirklichen Werten sind, noch zu größeren Abweichungen als den anfänglichen kommen, die aber dann wieder abklingen.

Die aggregierten Anfangswerte bringen aber den Nachteil mit sich, dass sie nach Abklingen der Eigenvorgänge nicht mehr richtig rekonstruiert werden können (siehe Bild 5.10e). Darüber hinaus kommt es bei integralen Verfahren zu einer Nullzeile in der  $P$ -Matrix, die eine Lösbarkeit erheblich erschwert, wenn nicht völlig unmöglich macht. Aus den beiden Gründen ist eine Umschaltstrategie zu empfehlen, die die Identifikation nach Einschwingen der Eigenvorgänge ausschaltet, was auch in der Arbeit von [122] vorgeschlagen wird.

□



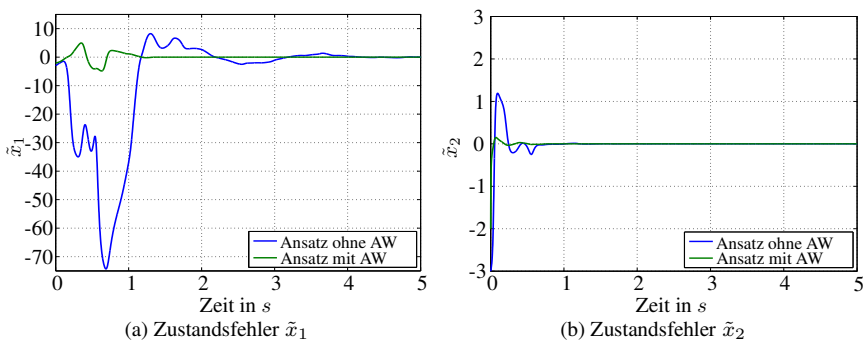
**Bild 5.10:** Identifikationsergebnisse bei den Beobachteransätzen nach KUDVA und KREISSELMEIER



**Bild 5.11:** Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach KUDVA

### 5.2.3 Neuformulierung des Adaptiven Beobachters mit parallelen Filtern

NARENDRA und LÜDERS entwickeln in [206, 207] einen adaptiven Beobachter, der auf einer Ersatzsignalbildung mit  $n$  PT1-Gliedern mit unterschiedlicher Dynamik basiert. Die spezielle Struktur hat zur Folge, dass die rekonstruierten Parameter nicht mit denen der gewöhnlichen Übertragungsfunktion übereinstimmen, weshalb die rekonstruierten Parameter mit einem Querstrich versehen werden. Sie lassen sich aber über einen Koeffizientenvergleich in die Übertragungsfunktionsparameter überführen. Für die Parameterdifferenzialgleichung verwenden NARENDRA und LÜDERS ein instantanes Gradientenabstiegsverfahren, welches in der vorlie-



**Bild 5.12:** Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach KREISSELMEIER

genden Arbeit durch ein LS-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor ersetzt wird. Das zur Berechnung des Fehlers  $e$  benötigte Signal  $\hat{y}$  wird in der Originalarbeit über eine Hilfsdifferenzialgleichung erzeugt.

In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz dahingehend modifiziert, dass die PT1-Glieder hinsichtlich der Verstärkung skalierbar sind. Das erweist sich als vorteilhaft, da die für die Identifikation erforderliche Phasenverschiebung zwischen den Ersatzsignalen gleichzeitig eine Dämpfung in der Amplitude nach sich zieht. Durch die skalierbaren Verstärkungen kann die Dämpfung unterdrückt werden, sodass die Ersatzsignale in etwa die gleichen Amplituden wie die Originalsignale aufweisen.

In der nachfolgenden Darstellung wird die Hilfsdifferenzialgleichung eliminiert und durch je eine zusätzliche Differenzialgleichung bei der Ersatzsignalbildung ersetzt. Der Mehraufwand von einer Differenzialgleichung erster Ordnung hat den Vorteil, dass der Regressionsvektor  $\phi$  stringent zum Gütekriterium des instantanen Gradientenabstiegsverfahrens ist und sich direkt bilden lässt. Zusätzlich wird eine Berechnung der Zustände der Normalform angegeben, die in der Originalarbeit fehlt und die zudem wegen der andersartigen Bildung der Ersatzsignale eine geschickte Berechnung weiterer Ersatzsignale ermöglicht, ohne sie neu bilden zu müssen.

Da durch die Neuformulierung die Hilfsdifferenzialgleichung entfällt, erübrigt sich auch die Berücksichtigung von deren Dynamik bei der Bildung des  $\phi$ -Vektors. Der Einfluss der Hilfsdifferenzialgleichung wurde bei der Formulierung der Parameteridentifikation in der Originalarbeit nicht berücksichtigt.

Der adaptive Beobachter in Anlehnung an NARENDRA und LÜDERS baut auf folgender Normalform auf

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_0 & \left[ \frac{k_1}{T_1}, \dots, \frac{k_{n-1}}{T_{n-1}} \right] \\ -\bar{a}_{1:n-1} & \text{diag}\left(-\frac{1}{T_1}, \dots, -\frac{1}{T_{n-1}}\right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{b}_0 \\ \bar{b}_{1:n-1} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.36a)$$

$$y = e_1^T x. \quad (5.36b)$$

Die betreffenden Parameter können ausgehend von der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{b}_m \frac{k_m}{1+sT_m} \right) \frac{1}{s+\frac{1}{T_0}}}{\left( s + \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1+sT_{n-1}} \right) \frac{1}{s+\frac{1}{T_0}}} \\ &= \frac{\left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{b}_m \frac{k_m}{1+sT_m} \right) \frac{1}{s+\frac{1}{T_0}}}{1 + \left( \bar{a}_0 - \frac{1}{T_0} + \bar{a}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1+sT_{n-1}} \right) \frac{1}{s+\frac{1}{T_0}}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

identifiziert werden. Die zu  $G(s)$  korrespondierende E/A-Darstellung unter der Berücksichtigung aggregierter Anfangswerte lautet

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & - \left( \bar{a}_0 - \frac{1}{T_0} + \bar{a}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}} \right) \underbrace{\frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} Y(s)}_{\mathcal{L}\{\bar{y}_{f,0}(t)\}} \\
 & + \left( \bar{b}_0 + \bar{b}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \bar{b}_m \frac{k_m}{1 + sT_m} \right) \underbrace{\frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} U(s)}_{\mathcal{L}\{\bar{u}_{f,0}(t)\}} \\
 & + \left( \bar{c}_0 + \bar{c}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \bar{c}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}} \right) \underbrace{\frac{1}{s + \frac{1}{T_0}}}_{\mathcal{L}\{\bar{\delta}_{f,0}(t)\}}. \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Der adaptive Beobachter berechnet sich dann über

$$\dot{\bar{y}}_{f,0} = -\frac{1}{T_0} \bar{y}_{f,0} + y, \quad \bar{y}_{f,0}(0) = 0 \quad (5.39a)$$

$$\dot{\bar{y}}_{f,i} = -\frac{1}{T_i} \bar{y}_{f,i} + \frac{k_i}{T_i} \bar{y}_{f,0}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{y}_{f,i}(0) = 0 \quad (5.39b)$$

$$\dot{\bar{u}}_{f,0} = -\frac{1}{T_0} \bar{u}_{f,0} + u, \quad \bar{u}_{f,0}(0) = 0 \quad (5.39c)$$

$$\dot{\bar{u}}_{f,i} = -\frac{1}{T_i} \bar{u}_{f,i} + \frac{k_i}{T_i} \bar{u}_{f,0}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \bar{u}_{f,i}(0) = 0 \quad (5.39d)$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{T_0} \zeta + 1(t), \quad \zeta(0) = 0 \quad (5.39e)$$

$$\bar{\delta}_{f,0} = -\frac{1}{T_0} \zeta + 1(t) \quad (5.39f)$$

$$\dot{\bar{\delta}}_{f,i} = -\frac{1}{T_i} \bar{\delta}_{f,i} + \frac{k_i}{T_i} \bar{\delta}_{f,0}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \bar{\delta}_{f,i}(0) = 0 \quad (5.39g)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = P \phi \left( y - \frac{1}{T_0} y_{f,0} - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \\ \hat{c}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{b}_0 \\ \hat{c}_0 \end{bmatrix} \quad (5.39h)$$

$$\dot{P} = \beta P - P \phi \phi^T P, \quad P(0) = P_0 \quad (5.39i)$$

$$\phi = \left[ -\bar{y}_{f,0} \quad \dots \quad -\bar{y}_{f,n-1} \quad \bar{u}_{f,0} \quad \dots \quad \bar{u}_{f,m} \quad \bar{\delta}_{f,0} \quad \dots \quad \bar{\delta}_{f,n-1} \right]^T. \quad (5.39j)$$



Gemäß der Normalform werden gefilterte Signale von  $u$  und  $y$  benötigt, die allerdings anders als bei der Identifikation nicht den Zusatzfilter  $\frac{1}{s+\frac{1}{T_0}}$  enthalten. Um die Signale nicht extra über  $2n$  Differenzialgleichungen berechnen zu müssen, werden die gefilterten Signale über eine Linearkombination aus den verfügbaren Signalen konstruiert

$$\frac{1}{s + \frac{1}{T_i}} = \frac{1}{k_i} \left( \frac{T_i}{T_0} - 1 \right) \frac{k_i}{1 + sT_i} \frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} + \frac{1}{s + \frac{1}{T_0}}. \quad (5.40)$$

Die Zustandskomponenten werden über

$$\hat{x}_1 = \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} + \frac{1}{T_0} y_{f,0} \quad (5.41)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} &= \frac{1}{s + \frac{1}{T_i}} [\hat{a}_i y + \hat{b}_i u] \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1 \\ &= -\hat{a}_i \left( \frac{1}{k_i} \left( \frac{T_i}{T_0} - 1 \right) \bar{y}_{f,i} + \bar{y}_{f,0} \right) + \hat{b}_i \left( \frac{1}{k_i} \left( \frac{T_i}{T_0} - 1 \right) \bar{u}_{f,i} + \bar{u}_{f,0} \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

rekonstruiert.

Ein Stabilitätsbeweis kann in Anlehnung an die Originalarbeit geführt werden, wobei nur lokale Stabilitätsaussagen zu erwarten sind. Primär wird das Verhalten durch die Wahl der Signale und der Zeitkonstanten der PT1-Glieder bestimmt, wobei selbstverständlich fortwährende Anregung (Persistent Excitation) voraussetzen ist.

### Anmerkung 5.3. Bezug zur Darstellung in [206, 207]

Abgesehen von den in NARENDRA und LÜDERS nicht berücksichtigten aggregierten Anfangswerten, d. h.  $\bar{c}_i = 0$ , verwenden sie die zu Gl. (5.43) ähnliche Darstellung

$$G(s) = \frac{\bar{b}_0 + \bar{b}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{b}_m \frac{k_m}{1+sT_m}}{s + \frac{1}{T_0} + \bar{a}_0 - \frac{1}{T_0} + \bar{a}_1 \frac{k_1}{1+sT_1} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1+sT_{n-1}}}. \quad (5.43)$$

Somit folgt mit Verwendung der geschätzten anstelle der originalen Parameter

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{1}{T_0}\right) \hat{Y}(s) &= \left(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \hat{b}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}}\right) U(s) \\ &\quad - \left(\hat{a}_0 - \frac{1}{T_0} + \hat{a}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \hat{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}}\right) Y(s). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Eine weitere Umstellung führt dann auf die LAPLACE-Darstellung der Hilfsdifferenzialgleichung in [207]

$$\begin{aligned} s\hat{Y}(s) &= \left(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \hat{b}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}}\right) U(s) \\ &\quad - \left(\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \frac{k_1}{1 + sT_1} + \dots + \hat{a}_{n-1} \frac{k_{n-1}}{1 + sT_{n-1}}\right) Y(s) \\ &\quad - \frac{1}{T_0} (\hat{Y}(s) - Y(s)). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Das Einführen der Zusatzterme mit  $\frac{1}{T_0}$  sichert eine stabile Differenzialgleichung bzgl.  $\hat{y}$ , da sich sonst ein Integrator ergibt.  $\square$

In Beispiel 5.5 wird der korrigierte und modifizierte adaptive Beobachter nach NARENDRA und LÜDERS vorgestellt. Die Parameter werden dabei so umgerechnet, dass die Simulationsergebnisse mit denen des vorangegangenen Beispiels 5.4 verglichen werden können.

### Beispiel 5.5. Adaptiver Beobachter nach NARENDRA und LUEDERS

Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse der beschriebenen adaptiven Beobachter zu gewährleisten, werden die Parameter aus Beispiel 5.4 in die Parameter der Normalform von NARENDRA und LÜDERS über

$$\bar{a}_0 = a_1 - \frac{1}{T_1}, \quad \bar{a}_1 = a_0 \frac{T_1}{k_1} - \frac{a_1}{k_1} + \frac{1}{T_1 k_1}, \quad (5.46a)$$

$$\bar{b}_0 = b_1, \quad \bar{b}_1 = \frac{1}{k_1} (T_1 b_0 - b_1), \quad (5.46b)$$

$$a_0 = \frac{\bar{a}_0}{T_1} + \frac{\bar{a}_1 k_1}{T_1}, \quad a_1 = \bar{a}_0 + \frac{1}{T_1}, \quad (5.46c)$$

$$b_0 = \frac{\bar{b}_0}{T_1} + \frac{\bar{b}_1 k_1}{T_1}, \quad b_1 = \bar{b}_0 \quad (5.46d)$$

umgerechnet. Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1\frac{2}{3} \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (5.47a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (5.47b)$$

hat dabei das gleiche E-/A-Verhalten (Übertragungsfunktion gleich, Anfangswerte angepasst) wie das System in Beispiel 5.4. Der adaptive Beobachter lautet

$$\dot{\bar{y}}_{f,0} = -10\bar{y}_{f,0} + y, \quad \bar{y}_{f,0}(0) = 0 \quad (5.48a)$$

$$\dot{\bar{y}}_{f,1} = -3\bar{y}_{f,1} + 3\bar{y}_{f,0}, \quad \bar{y}_{f,1}(0) = 0 \quad (5.48b)$$

$$\dot{\bar{u}}_{f,0} = -10\bar{u}_{f,0} + u, \quad \bar{u}_{f,0}(0) = 0 \quad (5.48c)$$

$$\dot{\bar{u}}_{f,1} = -3\bar{u}_{f,1} + 3\bar{u}_{f,0}, \quad \bar{u}_{f,1}(0) = 0 \quad (5.48d)$$

$$\dot{\zeta} = -10\zeta + 1(t), \quad \zeta(0) = 0 \quad (5.48e)$$

$$\dot{\bar{\delta}}_{f,0} = -10\bar{\delta}_{f,0} + 1(t) \quad (5.48f)$$

$$\dot{\bar{\delta}}_{f,1} = -3\bar{\delta}_{f,1} + 3\bar{\delta}_{f,0}, \quad \bar{\delta}_{f,1}(0) = 0 \quad (5.48g)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \\ \dot{\hat{c}} \end{bmatrix} = P\phi \left( y - 10y_{f,0} - \phi^T \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} \right), \quad \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \\ \hat{c}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \\ 4 \\ -2\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.48h)$$

$$\dot{P} = \beta P - P\phi\phi^T P, \quad P_0 = P_0, \quad \beta = 1 \quad (5.48i)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} -\bar{y}_{f,0} & -\bar{y}_{f,1} & \bar{u}_{f,0} & \bar{u}_{f,1} & \bar{\delta}_{f,0} & \bar{\delta}_{f,1} \end{bmatrix}^T \quad (5.48j)$$

mit  $P_0 = \text{diag}([10, 10, 10, 10, 1000, 1000])$ . Dabei werden die Werte für die gefilterten Ein- und Ausgangssignale klein, weil der Anfangswert jeweils bei 0 liegt und die Simulation aus der Ruhelage beginnt, und die Werte für  $\bar{\delta}_{f,0}$ ,  $\bar{\delta}_{f,1}$  groß gewählt, da Parameter und Anfangswert unbekannt sind.

In den Bildern 5.13a-5.13d werden die Ergebnisse der Parameteridentifikation mit parallelen Filtern gezeigt. Die Parameter werden hier direkt in die Werte der Übertragungsfunktion umgerechnet, sodass ein Vergleich mit dem vorangegangenen Beispiel möglich ist. Die Berücksichtigung der aggregierten Anfangszustände führt auch hier zu einer viel schnelleren Konvergenz. Bild 5.13e zeigt die Rekonstruktion der aggregierten Anfangszustände selbst. Die Wahl höherer Werte in  $P_0$  ist hier notwendig, damit die Werte überhaupt einschwingen, da eine Zeitkonstante von  $T_0$  derart schnell ist, dass eine richtige Identifikation sonst nicht möglich ist

oder zur Instabilität führen kann. Insgesamt gilt es, den Gradienten zu homogenisieren.

Durch die Modifizierungen und die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte gelingt die Parameterkonvergenz aller vier unbekannt Parameter sowie zweier weiterer Parameter für die unbekannt Anfangswerte. Diese Erfahrungen decken sich mit nicht dokumentierten simulativen Untersuchungen des Autors mit anderen Parameteranfangswerten und anderen Eingangssignalen, wobei dann die Designparameter u. U. anders gewählt werden müssen.

Als „tedious work“ (engl. mühsame, lästige, nervtötende Arbeit) wird in [247] das Einstellen der Designparameter beim Gradientenabstiegsverfahren beschrieben, und gleichzeitig scheitern in den Beispielen des Buchs alle Versuche, mehr als zwei Parameter richtig zu identifizieren. Von daher ist der in der vorliegenden Arbeit gewählte Weg vielversprechender, zumal die Konvergenz auch wesentlich schneller stattfindet.

Bei den Zuständen zeigt sich die positive Auswirkung der Anfangswertberücksichtigung noch deutlicher. Während der ursprüngliche Ansatz in Bild 5.14a beim Zustand  $x_1$  zwischenzeitlich ein deutliches Schwingungsverhalten aufweist, ist das beim neuen Weg nicht der Fall.

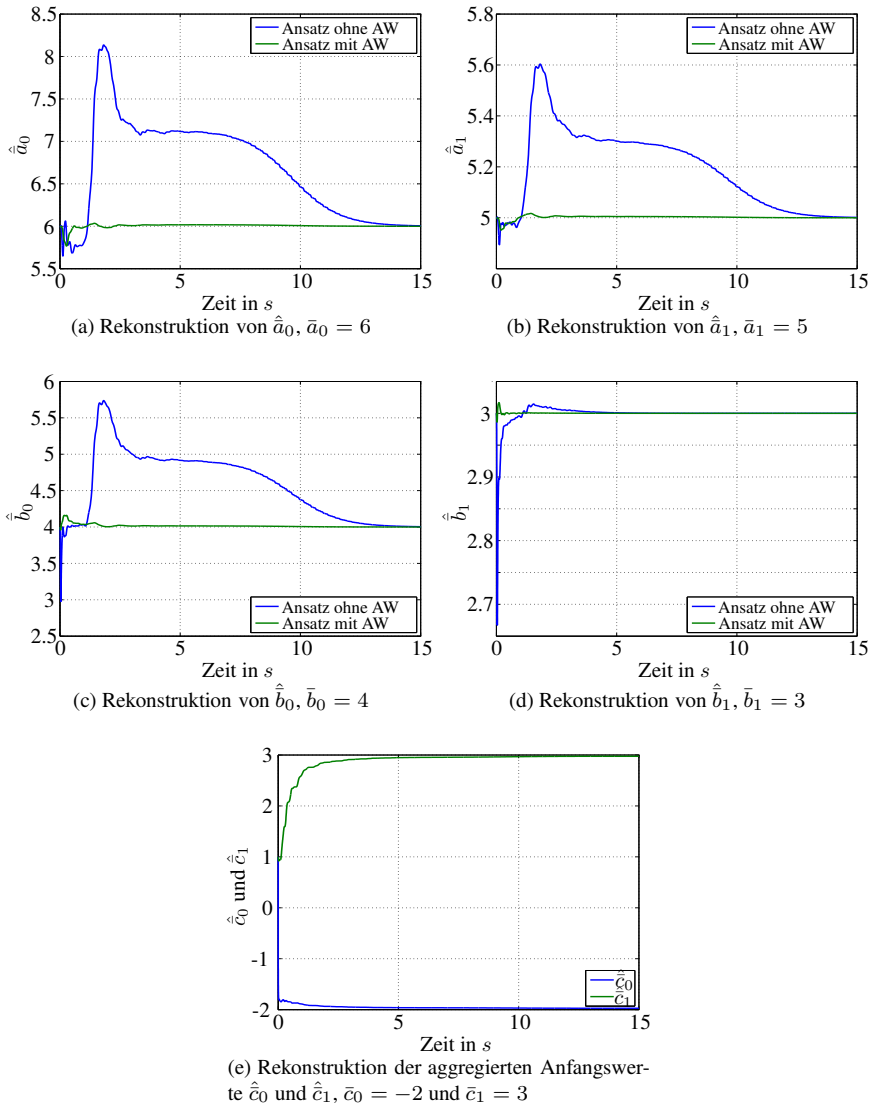
□

## 5.2.4 Bewertung der normalformbasierten adaptiven Beobachterzugänge

Durch die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte wird erreicht, dass in den Simulationen die Parameter in der Regel doppelt bis dreimal so schnell einschwingen. Neben dem Mehraufwand durch mehr Parameter ist zusätzlich eine Umschaltstrategie einzusetzen, da die aggregierten Anfangszustände nach Abklingen der Eigenvorgänge aufgrund der fehlenden fortwährenden Anregung (Persistent Excitation) nicht mehr rekonstruiert werden können.

Mit der Korrektur des Identifikationsverfahrens erzielt das Verfahren nach NARENDRA und LÜDERS vergleichbare Identifikationsergebnisse wie das Verfahren von KUDVA und KREISSELMEIER. Ersteres bietet insgesamt aber keine Vorteile, da insbesondere die Parameter nicht mit denen der Übertragungsfunktion übereinstimmen und ggf. umständlich umgerechnet werden müssen. Zudem haben die im Rahmen dieser Arbeit erfolgten simulativen Untersuchungen mehrerer Systeme darauf hingewiesen, dass das Verfahren nach NARENDRA und LÜDERS eine langsamere Parameterkonvergenz aufweist.

Zwischen den Ansätzen von KUDVA und KREISSELMEIER unterscheiden sich die Verfahren nur hinsichtlich der Zustandsrekonstruktion. Der Entwurf von KREIS-



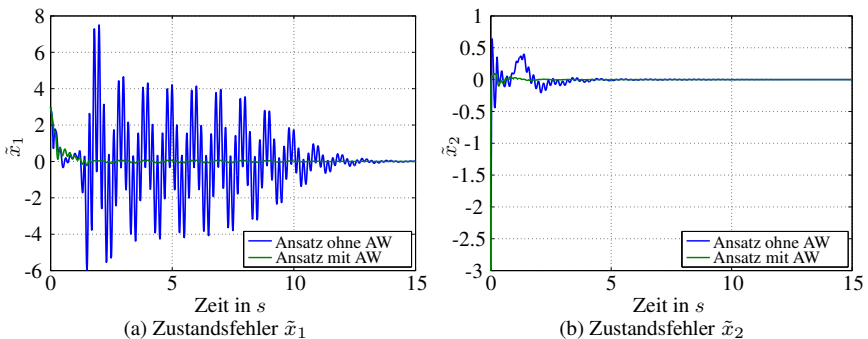
**Bild 5.13:** Identifikationsergebnisse beim Beobachteransatz nach NARENDRA und LÜDERS

SELMEIER kommt mit weniger Differenzialgleichungen aus und schafft es elegant, die Zustände aus den gefilterten Signalen zu berechnen. Das Verfahren nach KUDVA benötigt zwar  $n$ -Differenzialgleichungen mehr als bei KREISSELMEIER, kommt aber ohne eine umständliche Berechnung der Transformationsmatrizen aus. Ferner ist es nach Meinung des Autors für die meisten Regelungstechniker sehr viel intuitiver, den adaptiven Beobachter in der Beobachternormalform zu entwerfen.

Das Verfahren nach KREISSELMEIER zeigt ein besseres Konvergenzverhalten als der adaptive Beobachter nach KUDVA. Das liegt an der zusätzlichen Beobachterdynamik, die der Beobachter nach KUDVA hat und die durch die anfänglich falschen Parameterrekonstruktionen negativ beeinflusst wird.

### 5.3 Verbundbeobachter

Während beim adaptiven Beobachter im vorherigen Abschnitt die Parameterbestimmung per Ein- und Ausgangsidentifikation erfolgt und die Zustandsrekonstruktion darauf aufbauend mit Hilfe des Gewissheitsprinzips geschieht, besteht die Idee des Verbundbeobachters darin, dass die unbekannt Parameter als neue Zustände aufgefasst werden, um die der Zustandsvektor erweitert wird (siehe Abschnitt 2.4.3 auf S. 40). Da hier ausschließlich zeitinvariante Systeme betrachtet werden, sind die Parameter konstant. In Analogie zur Rekonstruktion von Störsignalen werden konstante Signale, oder hier konstante Parameter, durch Einfachin-



**Bild 5.14:** Zustandsfehler beim adaptiven Beobachter nach NARENDRA und LÜDERS

tegratoren modelliert. Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = f(x, u, \theta), \quad x(0) = x_0 \quad (5.49a)$$

$$y = h(x, u, \theta) \quad (5.49b)$$

hat somit nach Erweiterung die für den Verbundbeobachterentwurf benötigte Systemdarstellung

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x, u, \theta) \\ 0_I \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.50a)$$

$$y = h(x, u, \theta). \quad (5.50b)$$

Im folgenden Beispiel wird die prinzipielle Vorgehensweise für den Entwurf eines Verbundbeobachters aufgezeigt. Hierfür wird ein Zustandsraummodell für eine Schwingung erstellt, bei dem die Frequenz den unbekannt Parameter darstellt.

### Beispiel 5.6. Frequenzbestimmung mittels Verbundbeobachter

Für die Schwingungsrekonstruktion wird ein Verbundbeobachter hergeleitet. Die Zustandsraumdarstellung lautet

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} A \sin \varphi \\ A\omega \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (5.51a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \quad (5.51b)$$

$\omega$  wird als konstant angenommen und ergänzt als dritter Zustand  $x_3 = \omega$  mit  $\dot{x}_3 = 0$  das Modell

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \quad (5.52a)$$

$$y = x_1. \quad (5.52b)$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix und ihre Inverse lauten

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3^2 & 0 & -2x_1 x_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q^{-1} = \frac{1}{2x_1 x_3^2} \begin{bmatrix} 2x_1 x_3^2 & 0 & 0 \\ x_2 x_3^2 & 2x_1 x_3 & x_2 \\ x_3^3 & 0 & -x_3 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

Solange der Wert der Determinante  $-2x_1 x_3^2 \neq 0$  bleibt, ist das System beobachtbar. Die Beobachtbarkeit geht also verloren, sobald die Schwingung den Wert 0 annimmt. Simulative Untersuchungen haben gezeigt, dass der Verlust der Beobachtbarkeit immer zu Peaks im Verlauf führt und in dem speziellen Fall eine Frequenzrekonstruktion unmöglich macht. Auswege bieten neben adaptiven Zugängen [149, 150] auch nichtlineare Zugänge wie [45].  $\square$

Nichtlineare Kopplungen zwischen Parameter und Zustand werden also bewusst zugelassen. Die Zugänge für die hier vorliegende Problemstellung basieren deshalb auch auf Entwurfsmethoden für nichtlineare Systeme. Die dort verwendeten Linearisierungstechniken werden bereits in Abschnitt 3.3 vorgestellt.

Für Ingenieure, die mit den Entwurfsmethoden für nichtlineare Beobachter und Regler gut vertraut sind, ist der Verbundbeobachteransatz für die gleichzeitige Rekonstruktion von Parametern und Zuständen einfacher und intuitiver als die adaptiven Beobachteransätze. Dagegen werden Ingenieure, die ihren fachlichen Hintergrund im Bereich der Modellbildung haben, die adaptiven Beobachter verwenden. Dann bleibt bei linearen Systemen trotz der multiplikativen Kopplung zwischen Parametern und Zuständen durch die Entkopplung in Identifikation und Zustandsrekonstruktion viel von der linearen Systemtheorie erhalten, was Stabilitätsbetrachtungen wesentlich vereinfacht. Der Verbundbeobachter unterscheidet sich nach Bild 2.7b vom adaptiven Beobachter dahingehend, dass Zustands- und Parameterrekonstruktion hier direkt voneinander abhängen (Definition 2.6).

Als Anwendungen für die Verbundbeobachter seien Asynchronmaschinen [69, 70], flexible Greifer [337] und die Reibkoeffizientenschätzung [104] genannt.

Ein Sonderfall der Verbundbeobachter tritt auf, wenn das System parameterlinear in den unbekanntem Parametern  $\theta$  ist und in  $A, b, c, d$  durchweg bekannte konstante Werte stehen. Zu der Modellklasse

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = Ax + F(x, u)\theta + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5.54a)$$

$$y = c^T x + h^T(x, u)\theta + du \quad (5.54b)$$

existiert eine Blockmatrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F(x, u) \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0_p \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ \theta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (5.55a)$$

$$y = \begin{bmatrix} c^T & h^T(x, u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} + du. \quad (5.55b)$$

Die Blockmatrixdarstellung erlaubt einen vereinfachten Beobachterentwurf z. B. mit dem Erweiterten LUENBERGER-Beobachterentwurf aus Abschnitt 3.3

$$A_{\text{obs}} = \begin{bmatrix} A + (\hat{\theta} \otimes I_n) \frac{\partial \text{vec} F}{\partial x^T}(\hat{x}, u) & F(\hat{x}, u) \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \quad (5.56a)$$

$$c_{\text{obs}}^T = \begin{bmatrix} c^T + \hat{\theta}^T \frac{\partial h}{\partial x^T}(\hat{x}, u), & h^T(\hat{x}, u) \end{bmatrix} \quad (5.56b)$$



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & F(\hat{x}, u) \\ 0_{p \times n} & 0_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0_p \end{bmatrix} u \\ &\quad - k_{\text{Acker}}(\hat{x}, \hat{\theta})(c^T \hat{x} + h^T(\hat{x}, u)\hat{\theta} + du - y) \end{aligned} \quad (5.56c)$$

mit  $k_{\text{Acker}}^T(\hat{x}, \hat{\theta})$  über fortwährende Verwendung der ACKERMANN-Formel derart, dass die Pole stabil bei  $\lambda_{\text{design}}$  liegen. Die Korrekturverstärkung zeigt zudem deutlich die für Verbundbeobachter typische Rückwirkung der Zustandsrekonstruktion auf die Parameterrekonstruktion. Damit wird der Stabilitätsbeweis in der Regel komplizierter, wenn nicht unmöglich. Im Gegensatz dazu haben adaptive Beobachter oft den Vorteil, dass getrennte Stabilitätsbetrachtungen zwischen Parametern und Zuständen möglich sind.

Ein weiterer Sonderfall des Verbundbeobachters stellt der Parameterbeobachter dar. Bei ihm sind alle Zustände bekannt und die Parameter unbekannt. Insofern kann der Parameterbeobachter auch als Identifizierer betrachtet werden. Die einfachere Struktur des Parameterbeobachters bringt beim Stabilitätsbeweis einige Vorteile. Im nächsten Abschnitt wird deshalb erklärt, wie das Stabilitätsproblem durch Einsatz einer LYAPUNOV-Funktion gelöst werden kann.

### 5.3.1 Parameterbeobachter als Spezialfall

Unter einem Parameterbeobachter wird ein Beobachter für ein System verstanden, dessen Zustände bekannt sind und der für die Parameterrekonstruktion entworfen wird. Für das in  $x$  und  $\theta$  affine System der Modellklasse

$$\dot{x} = Ax + F\theta + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5.57a)$$

$$y = x \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ vollständig messbar} \quad (5.57b)$$

lautet der Parameterbeobachter

$$\dot{\xi} = -K(F\xi + (A + FK)y + bu), \quad \xi(0) = \hat{\theta}_0 - Ky_0 \quad (5.58a)$$

$$\hat{\theta} = \xi + Ky. \quad (5.58b)$$

Die Grundlage für den hier vorgestellten Beobachter aus [104] bildet ein reduzierter Beobachter nach CUMMING aus Abschnitt 3.2.2, bei dem in Gleichung (3.38) für  $\zeta_1 = x$ ,  $\zeta_2 = \theta$ ,  $\bar{A}_{11} = A$ ,  $\bar{A}_{12} = F$  verwendet und die Matrizen  $\bar{A}_{21}$ ,  $\bar{A}_{22}$  und  $T$  auf Null gesetzt werden. Ferner wird ein System ohne Durchgriff vorausgesetzt. Ausgehend von der Modellklasse (5.57) schlägt [104] eine Erweiterung auf die

Modellklasse

$$\dot{x} = F(x, u)\theta + g(x, u), \quad x(0) = x_0 \quad (5.59a)$$

$$y = x \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ vollständig messbar} \quad (5.59b)$$

vor und entwickelt den Parameterbeobachter

$$\dot{\xi} = -\Phi(y) \left( F(y, u)\hat{\theta} + g(y, u) \right), \quad \xi(0) = \hat{\theta}_0 - \phi(y_0) \quad (5.60a)$$

$$\hat{\theta} = \phi(x) + \xi \quad (5.60b)$$

mit  $\phi$  als beliebiger nichtlinearer Funktion<sup>6</sup> und  $\Phi(x) = \left. \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^T} \right|_{x=y}$ . Um Parameterkonvergenz sicherzustellen, ist die Transformation  $\phi(x)$  konstruktiv mit Hilfe einer LYAPUNOV-Funktion zu entwerfen. Für die einfache LYAPUNOV-Funktion  $V(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}\|_2^2$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\theta}) &= \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= \tilde{\theta}^T \dot{\hat{\theta}} \quad \text{wegen } \dot{\theta} = 0_p \\ &= \tilde{\theta}^T \left( \Phi(x)\dot{x} + \dot{\xi} \right) \\ &= -\tilde{\theta}^T \underbrace{\Phi(x)F(y, u)\tilde{\theta}}_{:=L(t)} \leq \tilde{\theta}^T L_{\inf} \tilde{\theta} < 0 \quad \forall t \geq 0, \forall \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^l \setminus \{0_l\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

eine Bedingung an die JACOBI-Matrix von  $\phi(x)$ . Die strenge Bedingung nach positiver Definitheit von  $L_{\inf}$  lässt sich vielfach auf positive Semidefinitheit abschwächen, ohne dass dabei die globale Konvergenz verloren gehen muss. So ist eine endliche Anzahl semidefiniter  $L(t_i)$  in der Regel unproblematisch. Auch kann das LASALLE-Theorem (z. B. [184, Kap. 4.2]) herangezogen werden, um bei Semidefinitheit unter Zusatzannahmen auf globale Stabilität zu schließen.

Da  $\Phi(x)$  so gewählt werden kann, dass  $L(t)$  positiv semidefinit ist, ist die Bedingung für fortwährende Anregung (Persistent Excitation) erfüllt [162].

Die Definitheit an  $L(t)$  kann erreicht werden, wenn

$$\Phi(x) = F^T(y, u)W \Big|_{y=x}, \quad W \succ 0_{l \times l} \quad (5.62)$$

gewählt wird.

Ein Beispiel zur Anwendung des Verfahrens findet sich in [104]. Hier wird darauf

<sup>6</sup>In seiner Arbeit beschreibt FRIEDLAND den Fall, dass die Zustandstransformation  $\phi(x)$  auf  $\phi(x, u)$  erweitert wird. Da dann für den Beobachter aber  $\dot{u}$  benötigt wird, reduzieren sich die Anwendungen auf Zustandsregler, bei denen  $\dot{u}$  durch Ableiten des Reglergesetzes  $u = k(x)$  und Substitution der Systemdifferenzialgleichung ersetzt werden kann.

verzichtet, weil im Abschnitt 5.4 das Vorgehen im Rahmen eines vergleichenden Beispiels erläutert wird, in dem dieser Ansatz mit adaptiven Beobachtern und Verbundbeobachtern verglichen wird. Ausgehend vom Parameterbeobachter wird im nächsten Abschnitt die Annahme abgeschwächt, dass alle Zustandsgrößen messbar sind. Somit müssen sowohl Zustände als auch Parameter rekonstruiert werden, wodurch ein Verbundbeobachter entsteht.

### 5.3.2 Verbundbeobachter nach FRIEDLAND

Die nachfolgenden Betrachtungen beziehen sich auf die Modellklasse

$$\dot{x} = A(\theta)x + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5.63a)$$

$$y = c^T x \quad (5.63b)$$

mit der affinen Funktion  $A(\theta)$ . Wegen der Identität  $A(\theta)x = A_0x + F(x)\theta$  entsteht eine zu

$$\dot{x} = F(x)\theta + A_0x + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5.64a)$$

$$y = c^T x \quad (5.64b)$$

ähnliche Struktur. Ohne größere Probleme kann der Fall einbezogen werden, dass  $b$  kein konstanter Vektor, sondern auch eine affine Funktion  $b(\theta_b)$  in unbekanntem Parametern  $\theta_b$  ist. Dann ändert sich lediglich der Term  $F(x)\theta$  in  $F(x, u)\theta_{\text{ext}}$ . Alternativ kann die Behandlung von  $b(\theta_b)$  separat erfolgen, da  $u$  vollständig messbar ist. Der Einfachheit halber wird sich aber auf (5.64) beschränkt.

In Modifikation zu (5.60) bezeichnet

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{\theta})\hat{x} + bu - k(c^T \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \quad (5.65a)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = -\Phi(\hat{x})(F(\hat{x})\hat{\theta} + A_0\hat{x} + bu), \quad \hat{\xi}(0) = \hat{\theta}_0 - \phi(\hat{x}_0) \quad (5.65b)$$

$$\hat{\theta} = \phi(\hat{x}) + \xi \quad (5.65c)$$

den sogenannten Verbundbeobachter nach FRIEDLAND. Losgelöst von einer strengen Konvergenzbetrachtung (siehe [104]) muss  $A(\hat{\theta}) - kc^T$  für alle  $\hat{\theta}$  HURWITZ-stabil sein und die Transformation  $\phi(x)$  entsprechend der Empfehlung des vorherigen Abschnitts gewählt werden. Formal ist die geforderte HURWITZ-Stabilität nicht hinreichend, da  $A(\hat{\theta})$  zeitvariant ist. Wenn allerdings die zeitlichen Änderungen von  $\hat{\theta}$  relativ langsam eingestellt werden, greifen Theoreme [120], die bei zeitvarianten Systemen mit langsam veränderlichen Parametern aus der punktwisen HURWITZ-Stabilität global asymptotische Stabilität schließen lassen. Alternativ kann statt des LUENBERGER-Korrekturterms auch ein KALMAN-BUCY-Beobachter für  $\hat{x}$  oder ein zeitvarianter LUENBERGER-Korrekturterm verwendet werden, um der Zeitvarianz durch  $A(\hat{\theta})$  gerecht zu werden.

## 5.4 Vergleichendes Beispiel zu adaptiven und Verbundbeobachtern

Im Folgenden wird an einem Beispiel der prinzipielle Entwurf von adaptiven und Verbundbeobachtern gezeigt. Es stellt dabei eine Fortsetzung des Beispiels 5.3 dar. Hier werden die Simulationsergebnisse aller vorgestellten Verfahren von adaptiven und Verbundbeobachtern gezeigt und diskutiert.

In vielen Fällen kann es in der Praxis vorkommen, dass weniger als  $n + m$  unbekannte Parameter zu schätzen sind. Wenn es nur wenige unbekannte Größen gibt, kann es mitunter aufwändig sein, das System auf eine der Normalformen der vorangegangenen Abschnitte zu transformieren. Das ist insbesondere auch dann nicht sinnvoll, wenn entweder nach der Transformation keine physikalische Interpretierbarkeit der Parameter gegeben ist oder wenn ein Parameter durch Transformation in mehreren Parametern der Normalform auftaucht, diese dann als unabhängig betrachtet werden und die algebraische Zwangsbedingung nicht berücksichtigt wird. Insbesondere bei letzterem Fall ist ein angepasstes Identifikationsverfahren in Verbindung mit zeitvariantem Beobachterentwurf sinnvoll. Beispiel 5.3 zeigte die prinzipielle Vorgehensweise auf und wird im Beispiel 5.4 verwendet, um die Unterschiede zwischen einem um ein Identifikationsverfahren erweiterten herkömmlichen zeitvarianten LUENBERGER- und KALMAN-BUCY-Beobachteransatz, einem normalformbasierten adaptiven Beobachter nach KUDVA und den vorgestellten Verbundbeobachtern aufzuzeigen. Die Ersatzsignale werden mit Zustandsvariablenfiltern realisiert, die die Werte  $\lambda_0 = 6$  und  $\lambda_1 = 5$  haben. Auf die aus Vollständigkeitsgründen eigentlich notwendige Nennung der Parameterdifferenzialgleichung und deren Startwerte bei den adaptiven Beobachteransätzen wird im Folgenden verzichtet und auf Beispiel 5.3 verwiesen.

### Beispiel 5.7. Vergleich von adaptiven Beobachtern und Verbundbeobachtern

Für die Simulation wird ein Verlauf von  $a$  wie folgt angenommen

$$a = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [0, 20] \cup [40, 60] \\ 4 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.66)$$

In der Simulation wird ohne Fallunterscheidung mit  $a = 3 + \operatorname{sgn}(\sin(\frac{\pi}{20}t))$  gearbeitet. Das System hat den Anfangswert  $x^T = [5, 4]$ . Als Anfangswert  $\hat{x}_{1,0}$  kann wegen der speziellen Struktur der korrekte Anfangswert  $y(0)$  gewählt werden. In den Simulationen wird aber der Wert  $\hat{x}_{1,0} = 10$  verwendet, um die Leistungsfähigkeit der Ansätze besser zu demonstrieren. Darüber hinaus wird mit  $\hat{x}_{2,0} = 20$  gearbeitet.

### 1. Adaptiver Beobachter mit zeitvariantem LUENBERGER-Ansatz

Der zeitvariante LUENBERGER-Ansatz basiert auf der Idee, dass die Pole der Beobachterdifferentialgleichung konstant gewählt werden. Die Verstärkungsfaktoren werden also in Abhängigkeit von  $\hat{a}$  mittels ACKERMANN-Formel so bestimmt, dass das Gesamtsystem mit Polen bei  $-2$  und  $-3$  zeitinvariant ist. Der Beobachter lautet

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\hat{a} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - k(\hat{a}) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} - y \right) \quad (5.67a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \quad (5.67b)$$

mit  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$  zuzüglich Gl. (5.24).

### 2. Adaptiver Beobachter mit BNF-Transformation

Die Ähnlichkeitstransformation  $T(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$  transformiert das System (5.18) auf

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \quad \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -(3+a) & 1 \\ -(3a-1) & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \bar{x}(0) = T^{-1}x_0 \quad (5.68a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}. \quad (5.68b)$$

Hier wird ersichtlich, dass der unbekannte Parameter  $a$  durch Transformation an zwei Stellen auftaucht. Dadurch wird die Notwendigkeit des angepassten Identifikationsverfahrens deutlich, damit nicht mit zwei unbekanntem Parametern gearbeitet wird, die als unabhängig voneinander angenommen werden, es aber nicht sind. Der Beobachter nach KUDVA lautet somit

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xi - \begin{bmatrix} 3 + \hat{a} \\ 3\hat{a} - 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + k \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} - y \right) \quad (5.69a)$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\hat{a} & 1 \end{bmatrix} \xi \quad (5.69b)$$

mit  $\xi(0) = T^{-1}(\hat{a}_0)\hat{x}_0$  zuzüglich Gl. (5.24) und mit Wahl von  $k = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ .

### 3. Adaptiver KALMAN-BUCY-Beobachter

Der adaptive KALMAN-BUCY-Beobachter unterscheidet sich vom adaptiven Beobachter mit zeitvariantem LUENBERGER-Ansatz wie in Kapitel 3

beschrieben nur durch die Wahl des Verstärkungsvektors  $k$ . Der Beobachteransatz lautet somit

$$\Sigma_{\text{obs}} : \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\hat{a} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - rP \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ([1 \ 0] \hat{x} - y) \quad (5.70a)$$

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\hat{a} \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\hat{a} \end{bmatrix} + Q - rP \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] P \quad (5.70b)$$

mit  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$  und  $P(0) = P_0$  zuzüglich Gl. (5.24) und mit Wahl der Designparameter von  $r = 6\frac{2}{3}$ ,  $Q = 7 \cdot I_2$ ,  $P_0 = 0_{2 \times 2}$ .

#### 4. Erweiterter LUENBERGER-Verbundbeobachter

Der unbekannte Parameter  $a$  wird als dritte Zustandskomponente  $x_3$  eingeführt

$$\Sigma_{\text{sys}} : \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2x_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{:=f(x)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.71a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x. \quad (5.71b)$$

Die formale TAYLOR-Linearisierung bzgl. der Beobachtertrajektorie ergibt

$$\Delta \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -\hat{x}_3 & -\hat{x}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{:=A(\hat{x}(t))} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u, \quad \Delta x(0) = \Delta x_0 \quad (5.72a)$$

$$\Delta y = [1 \ 0 \ 0] \Delta x. \quad (5.72b)$$

Der Beobachter lautet dann

$$\Sigma_{\text{obs}} : \dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2\hat{x}_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{:=f(\hat{x})} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u - k(\hat{x}_3) ([1 \ 0 \ 0] \hat{x} - y), \quad (5.73a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \hat{x} \quad (5.73b)$$

mit  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ , wobei  $k(\hat{x}_3)$  mittels ACKERMANN-Formel für  $A(\hat{x}(t))$  und  $c$  bestimmt wird und die Pole auf  $-5$ ,  $-6$  und  $-7$  gelegt werden.

### 5. Erweiterter KALMAN-BUCY-Verbundbeobachter

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 - \hat{x}_2\hat{x}_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u - rP \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ([1 \ 0 \ 0] \hat{x} - y), \quad (5.74a)$$

$$\dot{P} = A(\hat{x}(t))P + PA(\hat{x}(t))^T + Q - rP \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] P, \quad (5.74b)$$

mit  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ ,  $P(0) = 0_{3 \times 3}$  und Wahl von  $Q = 7 \cdot I_3$  und  $r = 6\frac{2}{3}$ .

### 6. Entwurf eines Verbundbeobachters nach FRIEDLAND

Das System

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.75a)$$

$$y = [1 \ 0] x \quad (5.75b)$$

lautet umgeschrieben

$$\Sigma_{\text{sys}} : \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -x_2 \end{bmatrix}}_{:=F(x)} a + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=A_0} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = x_0 \quad (5.76a)$$

$$y = [1 \ 0] x. \quad (5.76b)$$

Mit der Wahl von

$$\Phi(x) = F^T(x)k_a = [0 \ -k_a x_2] \quad (5.77)$$

ergibt sich

$$\phi(x) = -\frac{1}{2}k_a x_2^2. \quad (5.78)$$

Der Beobachteransatz lautet somit

$$\Sigma_{\text{obs}} : \quad \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}k_a \hat{x}_2^2 - \xi \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - k_x ([1 \ 0] \hat{x} - y), \quad (5.79a)$$

$$\dot{\xi} = [0 \ k_a \hat{x}_2] \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{x}_2 \end{bmatrix} (\frac{1}{2}k_a \hat{x}_2^2 + \xi) + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \right), \quad (5.79b)$$

$$\hat{a} = -\frac{1}{2}k_a \hat{x}_2^2 + \xi \quad (5.79c)$$

mit  $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$  und  $\xi(0) = \hat{\theta}_0 + \frac{1}{2}k_a\hat{x}_{2,0}^2$ . In der konkreten Realisierung können die Matrizenoperationen in (5.79b) vorab ausgewertet werden. Die Simulationsergebnisse sind in den Bildern 5.15 gezeigt und werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

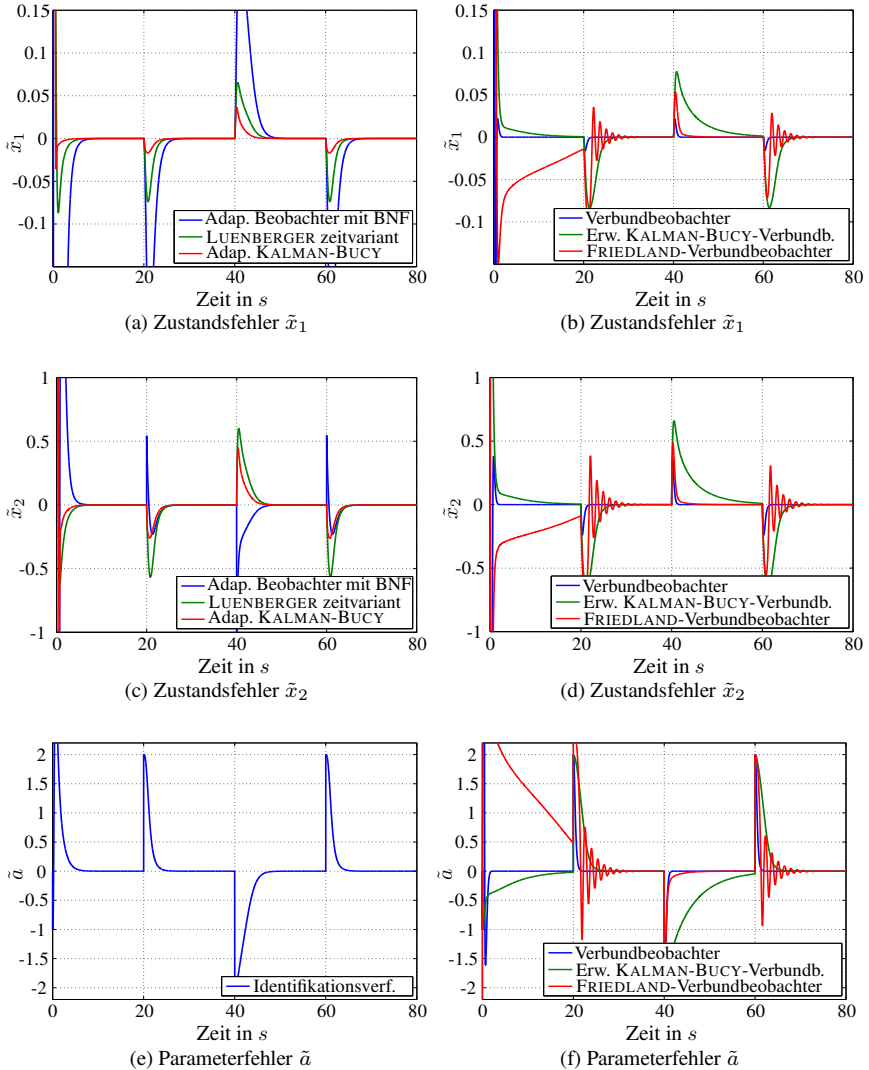
In den Bildern 5.15 werden die Simulationsergebnisse dargestellt. Allen adaptiven Ansätzen liegt das gleiche Identifikationsverfahren zugrunde (mit Berücksichtigung der Anfangswerte). Sämtliche Verfahren zeigen sowohl in Zuständen als auch im unbekanntem Parameter ein gutes Einschwingverhalten, dabei weist der Verbundbeobachter das beste Konvergenzverhalten auf. Auffällig ist, dass je nach Richtung des Sprungs des Parameters das Verfahren nach FRIEDLAND ein anderes Konvergenzverhalten aufweist und insbesondere in einem Fall kein exponentielles Einschwingen hat, sondern Schwingungen deutlich sichtbar sind. Die Gründe hierfür konnten trotz einiger Überlegungen nicht abschließend geklärt werden. Wenig nachvollziehbar ist auch, warum der Erweiterte KALMAN-BUCY-Verbundbeobachter ein verhältnismäßig langsames transientes Verhalten gegenüber dem adaptiven KALMAN-BUCY-Beobachter erkennen lässt, obwohl die Designparameter gleich gewählt sind.  $\square$

Das fünfte Kapitel beschäftigte sich mit Beobachtern mit unbekanntem Parameter. Zur gleichzeitigen Rekonstruktion von Parametern und Zuständen bieten sich adaptive Beobachter und Verbundbeobachter an.

In Abschnitt 5.1 wurde auf die Parameteridentifikationsverfahren eingegangen, die die Grundlage für die adaptiven Beobachter in Abschnitt 5.2 bilden. Dabei behandelte Abschnitt 5.1 die Ableitungsbildung von Signalen, die für die Parameteridentifikation notwendig ist. Darüber hinaus wurden die gängigen Identifikationsansätze vorgestellt, miteinander verglichen und um die Berücksichtigung unbekannter Anfangswerte erweitert. Ferner wurden etliche Hinweise für die Wahl der Designparameter und die Formulierung des Identifikationsansatzes gegeben.

Abschnitt 5.2 verglich die bekannten adaptiven Beobachteransätze für lineare Systeme. Dabei stellt nach Ansicht des Autors der Ansatz nach KREISSELMEIER die beste Wahl dar. Er besitzt die besten Konvergenzeigenschaften und die rekonstruierten Parameter müssen nicht zwischen Beobachter und Übertragungsfunktion umgerechnet werden, wie es bei dem Ansatz von NARENDRA und LÜDERS der Fall ist. Die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte erwies sich im Entwurf aufgrund der besseren Konvergenzrate als vorteilhaft. Auf die dadurch auftretenden asymptotischen numerischen Probleme wurde hingewiesen und ein Lösungsweg aufgezeigt.





**Bild 5.15:** Simulationsergebnisse für adaptive Beobachter und Verbundbeobachter

Abschnitt 5.3 beschäftigte sich mit Verbundbeobachtern, die Parameter als neue Zustandsgrößen auffassen und somit die Zustandsdifferenzialgleichung erweitern. Die dann selbst für lineare Systeme entstehenden nichtlinearen (multiplikativen) Kopplungen zwischen Parametern (neuen Zuständen) und den Systemzuständen müssen mit Entwurfsmethoden für Beobachter nichtlinearer Systemen behandelt werden.

Abschnitt 5.4 verglich anhand eines Beispiels die adaptiven Beobachter mit den Verbundbeobachtern.

# 6 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, das Potenzial von Erweiterungsmöglichkeiten für Beobachter zu sondieren und Lösungen für die Fälle aufzuzeigen, in denen die üblichen Voraussetzungen wie Beobachtbarkeit, bekannte Parameter und vollständige Messbarkeit von Ein- und Ausgangssignalen verletzt sind. Um dieses Ziel zu erreichen, wurden folgende Teilziele formuliert:

- Die Vielzahl an Publikationen wird aggregiert und als Überblick präsentiert. Eine Vereinheitlichung von Schreibweisen und Begriffen wird erarbeitet. Die gängigen Ansätze werden systematisiert und kategorisiert einschließlich der nur in der Spezialliteratur bekannten, sich aber als vorteilhaft erweisenden Entwurfsverfahren.
- Die Wesensunterschiede unterschiedlicher, mitunter konkurrierender Definitionen und Sätze werden gegenübergestellt und anhand von Beispielen und Gegenbeispielen verdeutlicht.
- Die bestehenden Verfahren und Algorithmen werden erweitert, umformuliert und modifiziert mit dem Ziel, ihre Leistungsfähigkeit zu steigern oder sie durch Umformulierung mathematisch neu zu interpretieren. Dabei werden Unstimmigkeiten in der Literatur verbessert und Lücken in der Theorie herausgestellt.
- Die bekannten und mitunter modifizierten Entwurfsverfahren werden anhand von eigens entwickelten Beispielen und Simulationsergebnissen verglichen. Zusätzlich wird auf wichtige Aussagen aus der Literatur sowie auf Besonderheiten, Grenzen und Schwierigkeiten bei der Implementierung hingewiesen.

Um die genannten Ziele zu erreichen, wurde die Arbeit in folgende Kapitel unterteilt. Kapitel 2 führte in die Grundlagen der Beobachtertheorie ein. Im dritten Kapitel wurden verschiedene Entwurfsverfahren vorgestellt. Das vierte Kapitel widmete sich den Beobachtern bei unbekanntem Signalen. Das fünfte Kapitel handelte von Beobachtern mit unbekanntem Parameter. Nachfolgend wird auf den Inhalt der einzelnen Kapitel näher eingegangen und es werden die wesentlichen Ergebnisse vorgestellt.

Den Schwerpunkt des zweiten Kapitels bilden Begriffsbestimmung, Abgrenzung, Einordnung und Motivation. Im Laufe der Entwicklung erkannte Unstimmigkeiten auf den theoretischen Gebieten werden erläutert und zusammengeführt. Viel Aufwand wird in die Konstruktion möglichst einfacher Beispiele gesteckt, auch wenn die Beispiele nicht immer direkten physikalischen Ursprung, sondern eher akademischen Lehrcharakter haben. Deshalb wird die Arbeit mit einer möglichst eindeutigen Begriffsdefinition begonnen. Insbesondere sind folgende wichtige Aussagen des Grundlagenkapitels hervorzuheben:

1. Die Definitionen des Beobachterbegriffs von SONTAG und ZEITZ werden dahingehend vereinheitlicht, dass in einem Input-to-State-Stability-basierten Stabilitätsbeweis gezeigt wird, dass die von SONTAG aufgestellte Definition die von ZEITZ einschließt. Gleichzeitig wird an den Beispielen (2.4) und (2.5) gezeigt, dass die Umkehrung nicht gilt.
2. Das Konzept der Beobachtbarkeit wird diskutiert und eine Übersicht über gängige Kriterien zu deren Überprüfung angegeben. Ferner wird eine umfangreiche Zusammenstellung artverwandter Konzepte vorgestellt.
3. Da in vielen Darstellungen eine Definition der Beobachter fehlt, wird auch nicht streng zwischen Beobachtern, Trackern und Filtern unterschieden. So wird das KALMAN-Filter beispielsweise oft als Beobachter bezeichnet und eingesetzt, obwohl es auf einem stochastischen Konzept basiert. Der Konvergenz- und Ableitungsbegriff der Analysis und damit auch die gewöhnliche Differenzialgleichungsformulierung sind deshalb unzulässig und durch die entsprechenden stochastischen Pendanten zu ersetzen. Ausgehend von der von IBRIR gewählten Bezeichnung des Ableitungs-Trackers und dem von ILCHMANN eingeführten Tracking-Konzept für Regelungen wird erstmals der Begriff des Trackers für Beobachterproblemstellungen mit ungenauer Modellierung verwendet.
4. Der Begriff der Abbildungsbeobachtbarkeit wird als Pendant zum functional observer eingeführt und stellt gleichzeitig eine Erweiterung der Bedeutung dar. Als functional observer werden Beobachter für Linearkombinationen von Zustandsgrößen bezeichnet, während sich Abbildungsbeobachter auf beliebige Abbildungen von Zustandsgrößen beziehen, die ihrerseits beobachtbar sind, selbst wenn die vollständige Beobachtbarkeit des Systems nicht mehr gegeben ist.
5. Die in der Literatur oft synonym verwendeten Begriffe des nichteinstellbaren und trivialen Beobachters werden voneinander abgegrenzt und um den Begriff des semi-trivialen Beobachters erweitert.

Das dritte Kapitel widmet sich den wichtigsten Entwurfsverfahren. Die Verfahren für lineare zeitinvariante und zeitvariante Systeme werden dabei weitgehend als bekannt vorausgesetzt, sodass speziell die Aspekte der nicht vollständigen Beobachtbarkeit und des Entwurfs reduzierter Beobachter betrachtet werden können. Während im Falle der nicht vollständigen Beobachtbarkeit der Entwurf für den beobachtbaren Systemteil erfolgt, wird beim reduzierten Beobachter die Systemausgangsgleichung zur Reduktion der Beobachterdifferenzialgleichung eingesetzt. Beide Konzepte finden sich im Entwurf bei Systemen mit unbekanntem Eingängen und bei Abbildungsbeobachtern wieder. Die Ergebnisse in folgenden Punkten zusammengefasst.

1. In herkömmlichen Entwurfsverfahren wird die naheliegende Forderung nach vollständiger Zustandsbeobachtbarkeit vorausgesetzt, die für die Existenz eines Beobachters aber nicht notwendig, sondern nur hinreichend ist. Sie kann durch die schwächere Forderung nach Detektierbarkeit ersetzt werden, was dann eine Modifikation der Entwurfsverfahren erfordert. Der spezielle Aspekt wird für die Klasse der LTI- und LTV-Systeme in der Beweisführung berücksichtigt und an Beispielsystemen demonstriert.
2. Während bei einem LUENBERGER-Beobachter offensichtlich ist, dass ein Verstärkungsvektor  $k = 0_n$  (trivialer Beobachter) die Eigenwerte nicht ändert, wird die Umkehrung bewiesen, wonach die Forderung gleicher Eigenwerte von Beobachter und System auf einen trivialen Beobachter führt.
3. Die Herleitungsmöglichkeiten für den KALMAN-BUCY-Beobachter werden gegenübergestellt. In der vorliegenden Arbeit wird eine Herleitung über eine zeitabhängige LYAPUNOV-Funktion erarbeitet, da die LYAPUNOV-Theorie dem Ingenieur weitaus vertrauter ist als der für die anderen Herleitungen benötigte Apparat. Im Fall von LTI-Systemen kann der KALMAN-BUCY-Beobachter durch einen stationären KALMAN-BUCY-Beobachter ersetzt werden. Er verliert zwar seine Optimalitätseigenschaft, ist dafür aber einfacher zu realisieren.
4. Bei den reduzierten Beobachtern werden die beiden bekannten Zugänge von BURMEISTER und CUMMING gegenübergestellt und für Systeme mit Durchgriff erweitert. Zudem wird der Beweis für den Ansatz von CUMMING modifiziert. Ferner wird der in der Praxis auftretende größere Einfluss von Messstörungen auf die rekonstruierten Zustände bei reduzierten Beobachtern anhand von Formeln begründet.
5. Die bei den reduzierten Beobachtern gewonnenen Erkenntnisse werden bei den Abbildungsbeobachtern angewendet. Zunächst werden Kriterien zur

Überprüfung der Abbildungsbeobachtbarkeit vorgestellt. Ist sie gegeben, wird durch geeignete Transformation das Problem in eine bekannte Problemstellung zurückgeführt.

Das Kapitel 3 wird um einen Abschnitt mit Entwurfsverfahren für nichtlineare Systeme erweitert, die später bei den Verbundbeobachtern Anwendung finden. Obwohl der Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation auf Beobachter für lineare Systeme liegt, müssen auch die Beobachterverfahren für nichtlineare Systeme diskutiert werden. Das wird mit der Tatsache begründet, dass bei unbekanntem Parametern in linearen Systemen eine multiplikative und damit nichtlineare Verknüpfung zwischen Parametern und Zuständen auftritt. Die Thesen 6 – 9 fassen die Ergebnisse hierzu zusammen.

6. Viele der nichtlinearen Beobachterentwürfe basieren auf einer Rückführung der Entwurfsproblematik auf lineare Systeme. Hierfür bieten sich TAYLOR- und transformationsbasierte Verfahren an. Beide werden vorgestellt und in einem Komplexbeispiel untersucht. Eine doppelseitige tabellarische Übersicht ermöglicht das schnelle Erkennen der grundlegenden Unterschiede zwischen den Entwurfsverfahren.
7. Für den Arbeitspunktbeobachter wird anhand von Beispielen verdeutlicht, wie schwierig Konvergenzaussagen zu treffen sind. So kann ein Beobachter divergieren, obwohl seine Anfangswerte im Einzugsbereich (für Systemanfangswerte) des zu beobachtenden Systems liegen, oder er kann konvergieren, wenn seine Anfangswerte außerhalb des Einzugsbereichs liegen.
8. Der kaum bekannte Pseudolinearisierungs-Tracker wird näher betrachtet. Er basiert auf einer Transformation von Ausgang und Zustand eines Systems in neue Koordinaten mit dem Ziel, dass das gleiche LTI-System für alle Ruhelagen entsteht. Im Falle des hier betrachteten Beispiels erweist er sich als vorteilhaft, da er mit vergleichsweise wenig Aufwand entworfen werden kann. Im Vergleich zu arbeitspunktbasierenden Konzepten hat er den Vorteil, dass er eine ganze Ruhelagenmannigfaltigkeit berücksichtigt und oft einfacher als der Erweiterte LUENBERGER-Beobachter nach ZEITZ oder der Beobachter mit Erweiterter Linearisierung entworfen werden kann.
9. Der ebenfalls wenig bekannte optimierungsbasierte Beobachter wird vorgestellt. Der Ansatz zeichnet sich durch eine einfache Korrekturtermberechnung aus, wobei der Korrekturterm nur mittels Gradientenbildung des Beobachterfehlers berechnet wird und ohne umfangreiche Matrizenrechnung auskommt. Allerdings ist mitunter die Modellklasse, auf die der Ansatz angewendet werden kann, eingeschränkt und viele Fragen sind noch offen,

insbesondere die der Praktikabilität der Ableitungsbildung des Beobachterfehlers.

Das vierte Kapitel widmet sich der Frage, wie mit unbekanntem Signalen umgegangen werden kann, die auf die Systemdifferenzial- und/oder die Ausgangsgleichung wirken. Unterschieden wird zwischen Beobachtern, bei denen die Zustandsrekonstruktion erfolgen soll, selbst wenn nicht alle Signale messbar sind (Beobachter mit unbekanntem Signalen), und Beobachter für unbekanntes Signale (auch Störgrößenbeobachter genannt), die das Störsignal durch ein Signalmodell rekonstruieren und anschließend eliminieren. Als wichtige Aussagen des vierten Kapitels sind herauszuheben:

1. Die in der Literatur bisher bekannte Herangehensweise, Systeme mit unbekanntem Signalen in Systemdifferenzial- und Ausgangsgleichung ganzheitlich zu behandeln, wird durch ein zweistufiges Verfahren ersetzt. Durch eine geeignete Transformation gelingt es für Systeme, die der Klasse der UIO-Beobachter genügen, die unbekanntes Signale in der Ausgangsgleichung für die neuen Messgrößen so zu gestalten, sodass sie keinen Einfluss mehr auf die Systemdifferenzialgleichung haben. Somit können alle weiteren Betrachtungen auf den Fall reduziert werden, dass nur unbekanntes Eingänge auf das System wirken.
2. Die bisher veröffentlichten Arbeiten zu Beobachtern bei unbekanntem Signalen sind durch einen umfänglichen Gebrauch matrixalgebraischer Umformulierungen gekennzeichnet, die deren systemtheoretische Natur in den Hintergrund treten lassen. Durch Verwendung spezieller schiefer Projektionen gelingt nicht nur eine kompakte Darstellung, sondern eine geometrische Interpretation der Entwurfsverfahren.
3. Bei Störgrößenbeobachtern wird häufig die Kritik geäußert, dass bei unexakter Modellierung des Signaltyps (da unbekannt bzw. unvorhersagbar) das Ziel der Beobachtbarkeit nicht zu erreichen sei. Diesem Einwand wird mit simulativen Untersuchungen begegnet, an denen belegt wird, dass in vielen Fällen eine signifikante Robustheit des Signalbeobachters gegenüber modellfremden Signalen auftritt.
4. Mittels Deskriptorsystemdarstellung wird die Ableitungsbildung als Beobachteransatz umformuliert, sodass Beobachter auch zur Rekonstruktion von Ableitungen herangezogen werden können. Ein Beispiel aus dem Automobilbereich veranschaulicht, dass andere Ableitungen als die Zeitableitung mit einem zeitvarianten Beobachteransatz rekonstruiert werden können.

5. Anwendung finden die Störgrößenbeobachter z. B. in der Regelung mit Störgrößenaufschaltung. Die drei Konzepte

- modellfreie Regelung,
- nichtlinearitätskompensierende Zustandsregelung und
- aktive Störunterdrückungsregelung

gehen noch einen Schritt weiter, indem sie zusätzliche Teile des Systems als Störsignal auffassen. In der vorliegenden Arbeit wird erstmals gezeigt, dass die drei genannten Konzepte auf den gleichen Grundideen basieren und sich letztendlich nur hinsichtlich der eingesetzten Beobachter bzw. Identifizierer unterscheiden.

Dem Problem der unbekannt Parameter kann durch ein zweistufiges Verfahren aus Voridentifikation und Beobachterentwurf begegnet werden. Diverse Driften, Alterung oder Einflüsse verringern die Qualität des identifizierten Modells, sodass es sich als Vorteil erweist, die Identifikation und den Beobachterentwurf zeitgleich auszuführen. Folgende Ergebnisse des fünften Kapitels sind herauszustellen:

1. Zur zeitgleichen Lösung des Identifikations- und Beobachterproblems bieten sich adaptive Beobachter und Verbundbeobachter an. Während beim adaptiven Beobachter keine Rückwirkung der Zustandsrekonstruktion auf die Parameterrekonstruktion erfolgt, da hierfür nur Ein- und Ausgangssignale verwendet werden, wird beim Verbundbeobachter der Zustandsvektor um die Parameter erweitert.
2. Ein adaptiver Beobachter besteht aus einem Identifizierer und einem Beobachter. Die in der Arbeit verwendeten Identifizierer basieren auf Differenzialgleichungen und nicht – wie sonst oft üblich – auf zeitdiskreten Zugängen.
3. Da sich die Parameteridentifikation für adaptive Beobachter auf die Differenzialgleichung bezieht, muss das Problem der Ableitungsbildung gelöst werden. Sowohl aus numerischer als auch aus praktischer Sicht (Rauschverstärkung) werden nicht die Ableitungen direkt, sondern Ersatzsignale für die Ableitungen verwendet. Sie lassen sich durch spezielle Tiefpassfilterung erzeugen. Die Bildung der Ersatzsignale unterscheidet sich letztendlich nur durch Wahl der Tiefpassfilter und deren Anordnung. Zustandsvariablenfilter, POISSON-Filterketten und die parallelen Filter von NARENDRA und LÜDERS werden vorgestellt, in Zustandsraumdarstellung formuliert und an einem Beispiel diskutiert.



4. Unabhängig von der Wahl der Ersatzsignalbildung unterscheiden sich die Identifikationsverfahren bezüglich des zugrunde gelegten Gütekriteriums. In einer Übersicht werden die Gütekriterien und die daraus resultierenden Parameterdifferenzialgleichungen angegeben. Besonderer Wert wird auf das Erscheinen der Anfangswerte der Parameterdifferenzialgleichung im Gütekriterium gelegt, da dies in der Literatur oft übersehen wird.
5. Der Vergleich der Identifikationsverfahren in mehreren Beispielen zeigt, dass das integrale Least-Squares-Verfahren mit Vergessenheitsfaktor gegenüber dem instantanen Gradientenabstiegsverfahren zu bevorzugen ist. Hierfür spricht nicht nur die schnellere Konvergenz, sondern auch die bessere Einstellbarkeit. Hinweise zur Wahl der sogenannten Startmatrix  $P_0$  werden ebenfalls gegeben und am Beispiel belegt.
6. Die im Rahmen der adaptiven Beobachter formulierten Identifikationsansätze berücksichtigen lediglich Anfangswerte, die identisch Null sind. Das hat den Vorteil, dass weniger Parameter rekonstruiert werden müssen und damit weniger Differenzialgleichungen zu lösen sind. Der Vorteil wird aber durch eine langsamere Parameterkonvergenz und damit letztendlich langsamere Zustandsrekonstruktion erkauft. In der Arbeit wird gezeigt, wie durch aggregierte Anfangswerte der Nachteil umgangen werden kann. Auf die dann auftretenden asymptotischen numerischen Probleme wird hingewiesen, wobei sie sich aber durch einen Umschaltmechanismus nach Einschwingen der Tiefpassfilter für die Ersatzsignale lösen lassen.
7. Es wird unterschieden zwischen normalformbasierten adaptiven Beobachtern und solchen, die nicht auf einer Normalform basieren. Für letztere wird ein Vorgehen entwickelt, das einen zeitvarianten Beobachterentwurf mit einem unter Umständen modifizierten Identifikationsansatz verbindet.
8. Es wird gezeigt, dass der adaptive Beobachter von KREISSELMEIER zur Klasse der nichteinstellbaren Beobachter gehört, da die Zustandsrekonstruktion direkt aus den Ersatzsignalen erfolgt. Der für adaptive Beobachter typische Beobacherteil entfällt hier. Der adaptive Beobachter nach KUDVA hat die klassische Struktur und baut auf Beobachternormalform auf, erzielt aber eine schlechtere Konvergenz als der Ansatz von KREISSELMEIER.
9. Der Beobachter nach KREISSELMEIER stellt nach Ansicht des Autors die beste Wahl für den adaptiven Beobachter dar. Er besitzt die besten Konvergenzeigenschaften und die rekonstruierten Parameter müssen nicht wie bei dem Ansatz von NARENDRA und LÜDERS zwischen Beobachter und

Übertragungsfunktion umgerechnet werden. Die Berücksichtigung der aggregierten Anfangswerte erweisen sich im Entwurf aufgrund der besseren Konvergenzrate als vorteilhaft.

10. Verbundbeobachter fassen die Parameter als neue Zustandsgrößen auf und erweitern somit die Zustandsdifferenzialgleichung. Die dann selbst für lineare Systeme nichtlinearen (multiplikativen) Kopplungen zwischen Parametern (neuen Zuständen) und den Systemzuständen müssen mit Entwurfsmethoden für Beobachter nichtlinearer Systemen behandelt werden. Stabilitätsaussagen und Nachweise sind für Verbundbeobachter fast ausschließlich lokaler Natur. In der praktischen Anwendung sind die Einzugsbereiche aufgrund der moderaten nichtlinearen multiplikativen Kopplungen in der Regel relativ groß. Insgesamt sind Stabilitätsbeweise für Verbundbeobachter komplizierter und umfangreicher als für adaptive Beobachter, da eine Rückwirkung der Zustandsrekonstruktion auf die Parameterrekonstruktion besteht.
11. Die vielversprechenden Methoden aus Kapitel 3 werden für ein Beispiel implementiert, sodass ein Vergleich zwischen Verbundbeobachtern und adaptiven Beobachtern gezogen werden kann. Es zeigt sich ein nahezu gleichwertiges Verhalten.

Die erhaltenen Ergebnisse motivieren zur Fortführung der Forschung bei Beobachtern mit unbekanntem Parametern und unbekanntem Signalen. Erste Erfahrungen des Autors, die in der Zeit der Fertigstellung der Arbeit beim Weltmarktführer der Umformtechnik gemacht wurden, bestätigen beim Einsatz bei Servopressen die in der Arbeit propagierten Potenziale der Beobachterverfahren und Anwendungsmöglichkeiten der Theorie. Hierbei werden folgende Richtungen vorgeschlagen:

- Für die Stabilität des erweiterten KALMAN-BUCY-Beobachters sind weitere wissenschaftliche Untersuchungen erforderlich. Diese Sicht stützt ein Forschungsantrag der niederländischen Forschungsgesellschaft TNO aus dem Jahr 2011 [252].
- Bei den Entwurfsverfahren Pseudolinearisierung und optimierungsbasierter Beobachter für die Klasse der nichtlinearen Systeme erscheinen nach Ansicht des Autors die Möglichkeiten noch nicht ausgeschöpft. Hier kann der vermehrte praktische Einsatz der Methode helfen, sie weiter zu etablieren.
- Bei den Konzepten modellfreie Regelung, nichtlinearitätskompensierende Zustandsregelung und aktive Störunterdrückungsregelung fehlt eine konsistente Theorie, mit der die Ideen untermauert werden können. Außerdem sind keine Kriterien dafür bekannt, wann ein klassischer Ansatz der adaptiven

oder robusten Regelung oder ein ADRC- bzw. modellfreier Regelungsansatz auszuwählen sind. Ferner sind Fragen bezüglich des Stabilitätsverhaltens des Reglers und des Konvergenzverhaltens des erweiterten Zustandsbeobachters offen.

- Die Identifikationsverfahren für Parameter sind in der Literatur seit mehreren Jahrzehnten bekannt. Leider existieren kaum Arbeiten, die die Implementierung aus praktischer Perspektive betrachten. Hier sind weitere Arbeiten notwendig, um die Vielzahl der Einstellparameter zu systematisieren und für den Ingenieur zugänglich zu machen.
- Mit den Zugängen von BASTIN und GEVERS [20] und von MARINO und TOMEI [215] existieren adaptive Beobachter für nichtlineare Systemklassen. Sie sind aber nur für spezielle Systemklassen gültig. Der Autor sieht hier – wie auch bei den Verbundbeobachtern – noch Verbesserungsmöglichkeiten. Ebenso ist die Übertragung der Zugänge auf weitere Systemklassen möglich.

Die Arbeit verdeutlicht die große Aktualität des bereits in der Einleitung erwähnten Zitats von LUENBERGER „Almost any system is an observer“ von 1971. Die Beobachtertheorie wird für Systeme mit unbekanntem Signalen oder unbekanntem Parametern durch zahlreiche praktische Probleme und viele Detailverbesserungen weiterentwickelt. Dadurch wird ein Einsatzspektrum geschaffen, das vielseitiger als der bisherige Stand der Forschung ist. 50 Jahre nach der ersten Veröffentlichung zur Beobachtertheorie bietet die Thematik auch in Zukunft viel Potenzial für theoretische und praxisorientierte Forschung.



# Anhang

## Matlab-Befehle

### Transformation für KALMAN-Zerlegung

Der Matlab-Befehl `minreal` liefert ein Minimalsystem von  $\Sigma$ , welches die Dimension  $n_{\min}$  hat, und eine orthogonale Transformationsmatrix  $T$ , mit der über  $\bar{\Sigma} = (TAT^T, TB, CT^T, D)$  die KALMAN-Zerlegung berechnet werden kann, deren Zustandsraumdarstellung durch

$$\bar{\Sigma}_{\text{sys}} : \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{bs} \\ \dot{\bar{x}}_{nbs} \\ \dot{\bar{x}}_{nbns} \\ \dot{\bar{x}}_{bns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & 0 & \bar{A}_{14} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{bs} \\ \bar{x}_{nbs} \\ \bar{x}_{nbns} \\ \bar{x}_{bns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$
$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{bs}(0) \\ \bar{x}_{nbs}(0) \\ \bar{x}_{nbns}(0) \\ \bar{x}_{bns}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{bs,0} \\ \bar{x}_{nbs,0} \\ \bar{x}_{nbns,0} \\ \bar{x}_{bns,0} \end{bmatrix}$$
$$y = [\bar{C}_1 \ 0 \ 0 \ \bar{C}_4] \begin{bmatrix} \bar{x}_{bs} \\ \bar{x}_{nbs} \\ \bar{x}_{nbns} \\ \bar{x}_{bns} \end{bmatrix}$$

mit  $\bar{x}_{bs} \in \mathbb{R}^{n_{\min}}$ ,  $\bar{x}_{nbs} \in \mathbb{R}^{n_s - n_{\min}}$ ,  $\bar{x}_{nbns} \in \mathbb{R}^{n_b - n_{\min}}$  und  $\bar{x}_{bns} \in \mathbb{R}^{n - n_{\min} - n_{nbs} - n_{bns}}$  gegeben ist. Hierbei ist  $n_s$  der Rang der Steuerbarkeits- und  $n_b$  der der Beobachtbarkeitsmatrix.

Um eine Umordnung der beobachtbaren und nichtbeobachtbaren Teilsysteme zu vermeiden, empfiehlt sich im Fall des Beobachterentwurfs den `minreal`-Befehl auf das System  $\Sigma = (A, I_n, C, 0_{p \times n})$  anzuwenden. Durch die Wahl  $B = I_n$  entstehen keine nichtsteuerbaren Teilsysteme. In den Beispielen 2.6 und 4.1 wird die beschriebene KALMAN-Zerlegungstechnik zum Entwurf eines Beobachters bei unbekanntem Eingang benötigt. Bedingt durch die zur Unterdrückung des unbekanntes Eingangs erforderlichen Projektionen treten im transformierten Zustandsraum nämlich häufig detektierbare, aber nichtbeobachtbare Systeme auf.

**Bestimmung der Verstärkungsmatrix  $K$** 

In Matlab gibt es zur Berechnung der Polvorgabe neben dem Befehl `acker`, der auf SISO-Systeme beschränkt ist und für schwach steuerbare bzw. beobachtbare Systeme i. S. v. EISING [75] ab einer Größenordnung von 5 numerische Probleme bereitet, noch den Befehl `place`, der sich für Mehrgrößensysteme eignet und darüber hinaus eine größere numerische Stabilität aufweist. Ist das System nichtbeobachtbar, versagen die genannten Matlab-Befehle. Im Falle von detektierbaren Systemen sind deshalb die Matrizen  $\tilde{A}_{11}^T$  und  $\tilde{C}_1^T$  zu verwenden.

**Ähnlichkeitstransformationen**

Matlab-Befehl: `ss2ss(sys, T)`

Basisvektoren des Nichtbeobachtbarkeitsraums:  $N = \text{null}(\text{obsv}(A, C))'$

Bildraum der Beobachtbarkeitsmatrix: `orth(obsv(A, C)')`.

**LYAPUNOV-Gleichungen**

Der entsprechende Matlab-Befehl lautet  $T := \text{lyap}(F, -A, HC)$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J. : Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum. In: *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung* 7 (1972), S. 297–300
- [2] ACKERMANN, J. : *Abtastregelung*. Springer, 1988
- [3] ACKERMANN, J. : *Positionsregelung reibungsbehafteter elastischer Industrieroboter*. Fortschrittbe. VDI: Reihe 8: Mess-, Steuerungs- u. Regelungstechnik, Nr. 180, VDI Verlag, 1989
- [4] ACKERMANN, J. ; MUELLER, P. : Dynamical behaviour of nonlinear multibody systems due to Coulomb friction and backlash. In: *IFAC/IFIP/IMACS Symposium on Theory of Robots*, 1986, S. 193–198
- [5] AGUIRRE, L. : Controllability and observability of linear systems: some noninvariant aspects. In: *IEEE Trans. on Education* 38 (1995), Nr. 1, S. 33–39
- [6] ALAMIR, M. : Nonlinear moving horizon observers: Theory and real-time implementation. In: *Nonlinear Observers and Applications* ; BESANÇON, G. (Hrsg.). Springer, 2007
- [7] ALDEEN, M. ; TRINH, H. : Reduced-order linear functional observer for linear systems. In: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-* Bd. 146 IET, 1999, S. 399–405
- [8] ALVAREZ, J. : Nonlinear state estimation with robust convergence. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), Nr. 1, S. 59–71
- [9] ANDRIEU, V. ; PRALY, L. : A unifying point of view on output feedback designs for global asymptotic stabilization. In: *Automatica* 45 (2009), Nr. 8, S. 1789–1798
- [10] ANTSAKLIS, P. J. ; MICHEL, A. N. : Controllability and Observability: Fundamental Results. In: *A Linear Systems Primer*, Birkhäuser Boston, 2007, S. 195–236
- [11] AOKI, M. : On observability of stochastic discrete-time dynamic systems. In: *Journal of the Franklin Institute* 286 (1968), Nr. 1, S. 36–58
- [12] ÅSTRÖM, K. ; HANG, C. ; PERSSON, P. ; HO, W. : Towards intelligent PID control. In: *Automatica* 28 (1992), Nr. 1, S. 1–9
- [13] BACK, J. ; SEO, J. : Immersion technique for nonlinear observer design. In: *American Control Conference* Bd. 4, 2002, S. 2645 – 2646
- [14] BACK, J. ; YU, K. ; SEO, J. : Dynamic observer error linearization. In: *Automatica* 42 (2006), Nr. 12, S. 2195–2200
- [15] BANASZUK, A. ; SLUIS, W. : On nonlinear observers with approximately linear error dynamics. In: *American Control Conference, Proceedings of the 1997* Bd. 5, 1997, S. 3460–3464
- [16] BANDEMER, H. : *Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung: Handbuch zur Theorie*. Bd. 1. Akademie-Verlag, 1977
- [17] BARTELS, R. ; STEWART, G. : Solution of the matrix equation  $AX + XB = C$ . In: *Communications of the ACM* 15 (1972), Nr. 9, S. 820–826
- [18] BASILE, G. ; MARRO, G. : On the observability of linear, time-invariant systems with unknown inputs. In: *Journal of optimization theory and applications* 3 (1969), Nr. 6, S. 410–415
- [19] BASS, R. ; GURA, I. : High order system design via state space considerations. In: *Proceedings of the 1965 Joint Automatic Control Conference*, 1965, S. 311–318
- [20] BASTIN, G. ; GEVERS, M. : Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 33 (1988), Nr. 7, S. 650–658

- [21] BAUMANN, W. ; RUGH, W. : Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 1, S. 40–46
- [22] BEALE, S. ; SHAFAI, B. : Robust control system design with a proportional integral observer. In: *Int. Journal of Control* 50 (1989), Nr. 1, S. 97–111
- [23] BELEVITCH, V. : *Classical network theory*. Holden-Day, 1968
- [24] BELLMAN, R. ; ÅSTRÖM, K. : On structural identifiability. In: *Mathematical biosciences* 7 (1970), Nr. 3, S. 329–339
- [25] BEN-ISRAEL, A. ; GREVILLE, T. : *Generalized inverses: theory and applications*. Jon Wiley & Sons, 1974
- [26] BERNHARD, D. :  *$H_\infty$ -Methode für lineare Deskriptorsysteme mit nicht-properem Übertragungsverhalten*, Universität Wuppertal, Dissertation, 2008
- [27] BESANÇON, G. : Further results on high gain observers for nonlinear systems. In: *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on* Bd. 3, 1999, S. 2904 – 2909
- [28] BESANÇON, G. : A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems. In: *New Directions in Nonlinear Observer Design* ; NIJMEIJER, H. (Hrsg.) ; FOSSEN, T. (Hrsg.). Springer, 1999
- [29] BESANÇON, G. : An Overview on Observer Tools for Nonlinear Systems. In: *Nonlinear observers and applications* ; BESANÇON, G. (Hrsg.). Springer Verlag, 2007
- [30] BESANCON, G. ; DE LEÓN-MORALES, J. ; HUERTA-GUEVARA, O. : On adaptive observers for state affine systems. In: *Int. Journal of Control* 79 (2006), Nr. 06, S. 581–591
- [31] BESTLE, D. ; ZEITZ, M. : Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. In: *Int. Journal of Control* 38 (1983), Nr. 2, S. 419–432
- [32] BHATTACHARYYA, S. : The structure of robust observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 21 (1976), Nr. 4, S. 581–588
- [33] BILLINGSLEY, P. : *Convergence of probability measures*. Wiley-Interscience, 1999
- [34] BINDEL, R. ; NITSCHKE, R. ; ROTHFUSS, R. ; ZEITZ, M. : Flachheitsbasierte Regelung eines hydraulischen Antriebs mit zwei Ventilen für einen Großmanipulator. In: *at-Automatisierungstechnik* 48 (2000), Nr. 3, S. 124–131
- [35] BIRK, J. : *Rechnergestützte Analyse und Synthese nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1992
- [36] BIRK, J. ; ZEITZ, M. : Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems. In: *Int. Journal of Control* 47 (1988), Nr. 6, S. 1823–1836
- [37] BORNARD, G. ; CELLE-COUCENNE, F. ; GILLES, G. : Observability and observers. In: *Nonlinear Systems: Modeling and Estimation 1* (1995), S. 173–216
- [38] BOUTAYEB, M. ; RAFARALAHY, H. ; DAROUACH, M. : Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 42 (1997), Nr. 4, S. 581–586
- [39] BOUYER, P. ; D’SOUZA, D. ; MADHUSUDAN, P. ; PETIT, A. : Timed control with partial observability. In: *Computer Aided Verification* ; HUNT, W. A. Jr. (Hrsg.) ; SOMENZI, F. (Hrsg.). Springer, 2003
- [40] BREMER, H. : *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner, 1988
- [41] BRETTHAUER, G. : *Identifikation rückgekoppelter Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich: Einheitliche Darstellung und Vergleich der Verfahren*, TU Dresden, Habilitation, 1983
- [42] BRYSON, A. ; JOHANSEN, D. : Linear filtering for time-varying systems using measurements containing colored noise. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 10 (1965), Nr. 1, S. 4–10
- [43] BURMEISTER, H.-L. : *Theorie der automatischen Steuerung, 6. Lehrbrief, Zustandsgleichungen linearer Systeme*. Zentralstelle für das Hochschulfernstudium des Ministeriums für Hoch- und Fachschulwesen, 1984



- [44] BUSAWON, K. ; KABORE, P. : On the design of integral and proportional integral observers. In: *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000* Bd. 6 IEEE, 2002, S. 3725–3729
- [45] CARNEVALE, D. ; ASTOLFI, A. : A minimal dimension observer for global frequency estimation. In: *American Control Conference, 2008* IEEE, 2008, S. 5236–5241
- [46] CARROLL, R. ; LINDORFF, D. : An adaptive observer for single-input single-output linear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 18 (1973), Nr. 5, S. 428–435
- [47] CASTALDI, P. ; GERI, W. ; MONTANARI, M. ; TILLI, A. : A new adaptive approach for on-line parameter and state estimation of induction motors. In: *Control Conference Practice* 13 (2005), Nr. 1, S. 81–94
- [48] CHAMPETIER, C. ; MOUYON, P. ; MAGNI, J. : Pseudolinearization of nonlinear systems by dynamic precompensation. In: *Decision and Control, 1985 24th IEEE Conference on* Bd. 24 IEEE, 1985, S. 1371–1372
- [49] CHAMPETIER, C. ; MOUYON, P. ; REBOULET, C. : Pseudolinearization of multi-input nonlinear systems. In: *Decision and Control, 1984. The 23rd IEEE Conference on* Bd. 23 IEEE, 1984, S. 96–97
- [50] CHANG, Y. W.-T. H. P.-L. S.-K.: Design of general structured observers for linear systems with unknown inputs. In: *Journal of the Franklin Institute* 334 (1997), Nr. 2, S. 213–232
- [51] CHAVES, M. : A parameter-robust observer as an application of ISS techniques. In: *Proceedings of the Fifteenth Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, University of Notre Dame, August 12-16, 2002* (2002)
- [52] CHEN, H.-F. : On stochastic observability and controllability. In: *Automatica* 16 (1980), Nr. 2, S. 179–190
- [53] CHEN, M. : Generalized Bass–Gura formula for the control of linear time-varying systems. In: *Journal on Control Systems and Technology* 3 (1995), Nr. 3, S. 163–169
- [54] CHEN, T. ; MORRIS, J. ; MARTIN, E. : Particle filters for state and parameter estimation in batch processes. In: *Journal of Process Control* 15 (2005), Nr. 6, S. 665–673
- [55] CHOI, S. ; D’ANDRÉA-NOVEL, B. ; FLIESS, M. ; MOUNIER, H. ; VILLAGRA, J. : Model-free control of automotive engine and brake for Stop-and-Go scenarios. In: *European Control Conference (ECC’09)*. Budapest, Hongrie, 2009
- [56] CICCARELLA, G. ; DALLA MORA, M. ; GERMANI, A. : A Luenberger-like observer for nonlinear systems. In: *Int. Journal of Control* 57 (1993), Nr. 3, S. 537–556
- [57] COBB, D. : Controllability, observability, and duality in singular systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 29 (1984), Nr. 12, S. 1076–1082
- [58] CUMMING, S. : Design of observers of reduced dynamics. In: *Electronics Letters* 5 (1969), Nr. 10, S. 213–214
- [59] DAMM, T. : On detectability of stochastic systems. In: *Automatica* 43 (2007), Nr. 5, S. 928–933
- [60] DAROUACH, M. : Existence and design of functional observers for linear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 45 (2000), Nr. 5, S. 940–943
- [61] DAROUACH, M. ; BOUTAYEB, M. : Design of observers for descriptor systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), Nr. 7, S. 1323–1327
- [62] DAROUACH, M. ; ZASADZINSKI, M. ; HAYAR, M. : Reduced-order observer design for descriptor systems with unknown inputs. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 7, S. 1068–1072
- [63] DAROUACH, M. ; ZASADZINSKI, M. ; XU, S. : Full-order observers for linear systems with unknown inputs. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 3, S. 606–609
- [64] DAVILA, J. ; FRIDMAN, L. ; LEVANT, A. : Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 11, S. 1785–1789

- [65] DELLEPAUT, C. ; BASTIN, G. ; GEVERS, M. : Stabilization of nonlinear systems by means of state estimate feedback. In: *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on IEEE*, 1989, S. 1042–1046
- [66] DELLON, F. ; SARACHIK, P. : Optimal control of unstable linear plants with inaccessible states. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 13 (1968), Nr. 5, S. 491–495
- [67] DING, F. ; CHEN, T. ; QIU, L. : Bias compensation based recursive least-squares identification algorithm for MISO systems. In: *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Trans. on* 53 (2006), Nr. 5, S. 349–353
- [68] DRAKUNOV, S. ; UTKIN, V. : Sliding mode observers. Tutorial. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 4, 1995, S. 3376–3378
- [69] DU, T. ; BRDYS, M. : Implementation of extended Luenberger observers for joint state and parameter estimation of PWM induction motor drive. In: *Power Electronics and Applications, 1993., Fifth European Conference on IET*, 1993, S. 439–444
- [70] DU, T. ; VAS, P. ; STRONACH, F. : Design and application of extended observers for joint state and parameter estimation in high-performance AC drives. In: *Electric Power Applications, IEE Proceedings-* Bd. 142 IET, 1995, S. 71–78
- [71] EDWARDS, C. : A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction. In: *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004, S. 5279 – 5284, Vol.5
- [72] EDWARDS, C. ; SPURGEON, S. : *Sliding mode control: Theory and applications*. CRC, 1998
- [73] EDWARDS, C. ; SPURGEON, S. ; PATTON, R. : Sliding mode observers for fault detection and isolation. In: *Automatica* 36 (2000), Nr. 4, S. 541–553
- [74] EDWARDS, C. ; TAN, C. : Sensor fault tolerant control using sliding mode observers. In: *Control Eng. Practice* 14 (2006), Nr. 8, S. 897–908
- [75] EISING, R. : Between controllable and uncontrollable. In: *Systems & Control Letters* 4 (1984), Nr. 5, S. 263–264
- [76] ELMAS, C. u. a. : Application of a full-order extended Luenberger observer for a position sensorless operation of a switched reluctance motor drive. In: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-* Bd. 143 IET, 1996, S. 401–408
- [77] ENGEL, R. ; KREISSELMEIER, G. : A continuous-time observer which converges in finite time. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 7, S. 1202–1204
- [78] EYKHOFF, P. : *System Identification: Parameter and State Estimation*. Wiley-Interscience, 1974
- [79] FERNANDO, T. ; JENNINGS, L. ; TRINH, H. : Functional observability. In: *Information and Automation for Sustainability (ICIAFs), 2010 5th Int. Conference on IEEE*, 2010, S. 421–423
- [80] FERNANDO, T. ; TRINH, H. ; JENNINGS, L. : Functional observability and the design of minimum order linear functional observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 55 (2010), Nr. 5, S. 1268–1273
- [81] FILIPPOV, A. : Differential equations with discontinuous right-hand side. In: *Matematicheskii Sbornik* 51 (1960), S. 99–128
- [82] FITZGERALD, R. : Divergence of the Kalman filter. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 16 (1971), Nr. 6, S. 736–747
- [83] FLIESS, M. : Feedback control of linear and nonlinear systems. In: *Finite-dimensional observation-spaces for non-linear systems* ; HINRICHSSEN, D. (Hrsg.) ; ISIDORI, A. (Hrsg.). Springer, 1982
- [84] FLIESS, M. : Analyse non standard du bruit. In: *Comptes Rendus Mathematique* 342 (2006), Nr. 10, S. 797–802
- [85] FLIESS, M. ; JOIN, C. : Intelligent PID controllers. In: *16th Mediterranean Conference on Control and Automation IEEE*, 2008, S. 326–331

- [86] FLIESS, M. ; JOIN, C. : Model-free control and intelligent PID controllers: towards a possible trivialization of nonlinear control? In: *15th IFAC Symposium on System Identification*, 2009, S. 1531 – 1550
- [87] FLIESS, M. ; MARQUEZ, R. ; DELALEAU, E. ; SIRA-RAMÍREZ, H. : Correcteurs proportionnels-intégraux généralisés. In: *ESAIM. COCV 7* (2002), S. 23–41
- [88] FLIESS, M. ; RUDOLPH, J. : Local tracking observers for flat systems. In: *CESA'96 IMACS MultiConference: computational Eng. in systems applications*, 1996, S. 213–217
- [89] FLIESS, M. ; RUDOLPH, J. : Local tracking observers for flat systems. In: RUDOLPH, J. (Hrsg.): *Fortbildungskurs Flachheitsbasierte Regelung; Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, TU Dresden; 07.-10.10.1997*, 1997, S. 201–214
- [90] FLIESS, M. ; SIRA-RAMIREZ, H. : Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. In: *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data* ; GARNIER, H. (Hrsg.) ; WANG, L. (Hrsg.). Springer, 2008
- [91] FLIESS, M. ; JOIN, C. ; MBOUP, M. ; SIRA-RAMIREZ, H. : Vers une commande multivariable sans modèle. In: *Conférence internationale francophone d'automatique (CIFA 2006)*, 2006
- [92] FLIESS, M. ; JOIN, C. ; SIRA-RAMIREZ, H. : Complex Continuous Nonlinear Systems: Their Black Box Identification And Their Control. In: *Proc. 14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2006)*. Newcastle, Australia, 2006, S. 416 – 421
- [93] FLIESS, M. ; JOIN, C. ; SIRA-RAMIREZ, H. : Non-linear estimation is easy. In: *Int. J. Modelling Identification and Control* 4 (2008), Nr. 1, S. 12–27
- [94] FLIESS, M. ; KUPKA, I. : A Finiteness Criterion for Nonlinear Input–Output Differential Systems. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 21 (1983), Nr. 5, S. 721–728
- [95] FLIESS, M. ; SIRA-RAMIREZ, H. : Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. In: WANG, H. G. . L. (Hrsg.): *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. Springer, 2008, S. 362–391
- [96] FÖLLINGER, O. : Entwurf zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. In: *Regelungstechnik* 26 (1978), S. 189–196
- [97] FÖLLINGER, O. ; DÖRRSCHEIDT, F. ; KLITTICH, M. : *Regelungstechnik*. Hüthig, 1994
- [98] FORTMANN, T. ; WILLIAMSON, D. : Design of low-order observers for linear feedback control laws. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 17 (1972), Nr. 3, S. 301–308
- [99] FRADKOV, A. ; MIROSHNIK, I. ; NIKIFOROV, V. : *Nonlinear and adaptive control of complex systems*. Bd. 491. Kluwer Academic Pub, 1999
- [100] FRADKOV, A. ; POGROMSKY, A. : *Introduction to control of oscillations and chaos*. Bd. 35. World Scientific Pub Co Inc, 1998
- [101] FRANKLIN, G. ; POWELL, J. ; EMAMI-NAEINI, A. ; POWELL, J. : *Feedback control of dynamic systems*. Bd. 2. Addison-Wesley Reading, MA, 1994
- [102] FREUND, E. : *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer-Verlag, 1971
- [103] FREY, T. ; BOSSERT, M. : *Signal- und Systemtheorie*. Vieweg Teubner, 2008
- [104] FRIEDLAND, B. : A nonlinear observer for estimating parameters in dynamic systems. In: *Automatica* 33 (1997), Nr. 8, S. 1525–1530
- [105] FUHRMANN, P. : Observer theory. In: *Linear Algebra and its Applications* 428 (2008), S. 44–136
- [106] FUHRMANN, P. ; HELMKE, U. : On the parametrization of conditioned invariant subspaces and observer theory. In: *Linear Algebra and its Applications* 332 (2001), S. 265–353
- [107] GAO, Z. : Scaling and bandwidth-parameterization based controller tuning. In: *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Bd. 6, 2003, S. 4989–4996
- [108] GAO, Z. : Active disturbance rejection control: a paradigm shift in feedback control system design. In: *American Control Conference IEEE*, 2006, S. 2399 – 2405

- [109] GAO, Z. ; DING, S. : PMID observer design for unknown input generalized dynamical systems. In: *16th IFAC World Congress*, 2005, S. 208
- [110] GAO, Z. ; HUANG, Y. ; HAN, J. : An alternative paradigm for control system design. In: *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on* Bd. 5 IEEE, 2001, S. 4578–4585
- [111] GAUTHIER, J. ; HAMMOURI, H. ; KUPKA, I. : Observers for nonlinear systems. In: *30th IEEE Conference Decision and Control*, 1991, S. 1483–1489
- [112] GAUTHIER, J. ; HAMMOURI, H. ; OTHMAN, S. : A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 6, S. 875–880
- [113] GAUTHIER, J. ; KUPKA, I. : *Deterministic observation theory and applications*. Cambridge University Press, 2001
- [114] GÉDOUIN, P.-A. ; JOIN, C. ; DELALEAU, E. ; BOURGEOT, J.-M. ; ARBAB-CHIRANI, S. ; CALLOCH, S. : Model-free control of shape memory alloys antagonistic actuators. In: *17th IFAC World Congress*, 2008, S. 4458 – 4463
- [115] GELB, A. : *Applied optimal estimation*. MIT Press, 1984
- [116] GLUMINEAU, A. ; MOOG, C. ; PLESTAN, F. : New algebraic-geometric conditions for the linearization by input-output injection. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 4, S. 598–603
- [117] GOODWIN, G. ; GRAEBE, S. ; SALGADO, M. : *Control system design*. Bd. 240. Prentice Hall New Jersey, 2001
- [118] GOPINATH, B. : On the Control of Linear Multiple Input-Output Systems. In: *The Bell System Technical Journal* 50 (1971), Nr. 3, S. 1063–1081
- [119] GRIP, H. ; IMSLAND, L. ; JOHANSEN, T. ; FOSSEN, T. ; KALKKUH, J. ; SUISSA, A. : Nonlinear vehicle side-slip estimation with friction adaptation. In: *Automatica* 44 (2008), Nr. 3, S. 611–622
- [120] GRÖLL, L. : *Methodik zur Integration von Vorwissen in die Modellbildung*. KIT Scientific Publishing, Karlsruhe, 2014
- [121] GRÖLL, L. ; IRLE, P. : An observer-based approach for the projection onto a 2d-curve under movement. In: *Robotics and Autonomous Systems* 59 (2011), Nr. 3–4, S. 256–261
- [122] GRÖLL, L. : *Modellbildung für kontinuierliche Systeme mittels direkter Identifikation*, TU Dresden, Dissertation, 1994
- [123] GRÖLL, L. : Integration von Vorwissen über Eigenschaften von Funktionen bei der Modellbildung. In: *at-Automatisierungstechnik* 60 (2012), Nr. 7, S. 405–416
- [124] GUAY, M. : Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 10, S. 1730–1735
- [125] GUIDORZI, R. ; MARRO, G. : On Wonham stability condition in the synthesis of unknown inputs. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 16 (1971), Nr. 5, S. 499–500
- [126] GUPTA, R. ; FAIRMAN, F. ; HINAMOTO, T. : A direct procedure for the design of single functional observers. In: *IEEE Trans. on Circuits and Systems* 28 (1981), Nr. 4, S. 294–300
- [127] HAHN, W. ; BAARTZ, A. : *Stability of motion*. Springer, 1967 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)
- [128] HAMMOURI, H. : Uniform observability and observer synthesis. In: *Nonlinear Observers and Applications* ; BESANÇON, G. (Hrsg.). Springer, 2007
- [129] HAMMOURI, H. ; CELLE, F. : Some results about nonlinear systems equivalence for the observer synthesis. In: *New Trends in Systems Theory: Proceedings of the 1990 Università Di Genova-the Ohio State University Joint Conference* Birkhauser, 1991, S. 332–339
- [130] HAMMOURI, H. ; LÉON, M. de : On systems equivalence and observer synthesis. In: *New Trends in Systems Theory, volume 7 of Progress in Systems and Control Theory* ; CONTE, G. (Hrsg.) ; PERDON, A. M. (Hrsg.) ; WYMAN, B. (Hrsg.). Birkhäuser, 1991

- [131] HAMMOURI, H. ; TMAR, Z. : Unknown input observer for state affine systems: A necessary and sufficient condition. In: *Automatica* 46 (2010), Nr. 2, S. 271–278
- [132] HAN, J. : Auto-disturbance rejection control and its applications. In: *Control and Decision* 13 (1998), Nr. 1, S. 19–23
- [133] HAN, J. : From PID to active disturbance rejection control. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* 56 (2009), Nr. 3, S. 900–906
- [134] HANNAN, M. : On the Observed Robustness of Disturbance-Observers: A Technical Explanation and Simulation Validation. In: *System Theory, 2008. SSST 2008. 40th Southeastern Symposium on*, 2008, S. 25–30
- [135] HANSEN, P. : Oblique projections and standard-form transformations for discrete inverse problems. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 20 (2011), Nr. 2, S. 250–258
- [136] HARTMANN, W. : *Über die globale Existenz nichtlinearer Beobachter zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme*, RWU Berlin, Dissertation, 1996
- [137] HASELTINE, E. ; RAWLINGS, J. : Critical evaluation of extended Kalman filtering and moving-horizon estimation. In: *Industrial & Eng. chemistry research* 44 (2005), Nr. 8, S. 2451–2460
- [138] HASENJÄGER, E. : Digitale Zustandsregelung für Parabolantennen unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten. In: *Fortschrittber. VDI: Reihe 8: Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik, VDI Verlag* 1 (1985)
- [139] HASKARA, I. : On sliding mode observers via equivalent control approach. In: *Int. Journal of control* 71 (1998), Nr. 6, S. 1051–1067
- [140] HAUSER, J. ; SASTRY, S. ; KOKOTOVIC, P. : Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 3, S. 392–398
- [141] HAUTUS, M. : Controllability and observability conditions of linear autonomous systems. In: *Ned. Akad. Wetenschappen, Proc. Ser. A* 72 (1969), S. 443–448
- [142] HAYKIN, S. S. : *Neural networks and learning machines*. Bd. 3. Pearson Education Upper Saddle River, 2009
- [143] HERMANN, R. ; KRENER, A. : Nonlinear controllability and observability. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 22 (1977), Nr. 5, S. 728–740
- [144] HEUSER, H. : *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. 13. 2004
- [145] HINRICHSSEN, D. ; PLISCHKE, E. ; PRITCHARD, A. : Liapunov and Riccati equations for practical stability. In: *Proc. 6th European Control Conference, Porto, Portugal*, 2001, S. 2883 – 2888
- [146] HOFMANN, L. ; LION, P. ; BEST, J. : Theoretical and Experimental Research on Parameter Tracking Systems / NASA Contractor Report CR-452. April 1966. – Forschungsbericht
- [147] HONG, Y. ; HUANG, J. ; XU, Y. : On an output feedback finite-time stabilization problem. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 46 (2001), Nr. 2, S. 305–309
- [148] HORN, R. ; JOHNSON, C. : *Matrix analysis*. Cambridge Univ. Press, 1985
- [149] HOU, M. : Amplitude and frequency estimator of a sinusoid. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 6, S. 855–858
- [150] HOU, M. : Estimation of Sinusoidal Frequencies and Amplitudes Using Adaptive Identifier and Observer. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 52 (2007), Nr. 3, S. 493–499
- [151] HOU, M. ; PATTON, R. J. : Input Observability and Input Reconstruction. In: *Automatica* 34 (1998), Nr. 6, S. 789–794
- [152] HOU, M. ; PUGH, A. ; MÜLLER, P. : Disturbance decoupled functional observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 2, S. 382–386
- [153] HU, R. ; MÜLLER, P. : Independent joint control: estimation and compensation of coupling and friction effects in robot position control. In: *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 15

- (1996), Nr. 1, S. 41–51
- [154] IBRIR, S. : Linear time-derivative trackers. In: *Automatica* 40 (2004), S. 397–405
- [155] ILCHMANN, A. : Non-identifier-based adaptive control of dynamical systems: a survey. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 8 (1991), Nr. 4, S. 321–366
- [156] ILCHMANN, A. : *Non-identifier-based high-gain adaptive control*. Springer, 1993
- [157] ILCHMANN, A. ; RYAN, E. : Universal  $\lambda$ -tracking for nonlinearly-perturbed systems in the presence of noise. In: *Automatica* 30 (1994), Nr. 2, S. 337–346
- [158] ILCHMANN, A. ; RYAN, E. : High-gain control without identification: a survey. In: *GAMM-Mitteilungen* 31 (2008), Nr. 1, S. 115–125
- [159] ILCHMANN, A. ; RYAN, E. ; SANGWIN, C. : Tracking with prescribed transient behaviour. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 7 (2002), S. 471–493
- [160] IMSLAND, L. ; JOHANSEN, T. ; FOSSEN, T. ; FJÆR GRIP, H. ; KALKKUH, J. ; SUISSA, A. : Vehicle velocity estimation using nonlinear observers. In: *Automatica* 42 (2006), Nr. 12, S. 2091–2103
- [161] IMSLAND, L. ; JOHANSEN, T. ; GRIP, H. ; FOSSEN, T. : On non-linear unknown input observers—applied to lateral vehicle velocity estimation on banked roads. In: *Int. Journal of Control* 80 (2007), Nr. 11, S. 1741–1750
- [162] IOANNOU, P. ; FIDAN, B. : *Adaptive control tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006
- [163] IOANNOU, P. ; SUN, J. : *Robust adaptive control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1996
- [164] IRLE, P. ; GRÖLL, L. : Observer-based determination of motion parameters using a series of lidar data. In: *Far East Journal of Dynamical Systems* (2015), Nr. 27, S. 45 – 62
- [165] IRLE, P. ; GRÖLL, L. ; WERLING, M. : Zwei Zugänge zur Projektion auf 2d-Kurven für die Bahnregelung autonomer Fahrzeuge. In: *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 8, S. 403–410
- [166] ISERMANN, R. : Parameterschätzung dynamischer Systeme (Teil 1). In: *at-Automatisierungstechnik* 36 (1988), Nr. 6, S. 241–247
- [167] ISERMANN, R. : *Identifikation dynamischer Systeme*. Springer-Verlag, 1992
- [168] ISIDORI, A. : *Nonlinear Control Systems*. 3. Auflage. Springer Verlag, 1995
- [169] JANG, S. ; JOSEPH, B. ; MUKAI, H. : Comparison of two approaches to on-line parameter and state estimation of nonlinear systems. In: *Industrial & Eng. Chemistry Process Design and Development* 25 (1986), Nr. 3, S. 809–814
- [170] JÄNICH, K. : *Lineare Algebra*. Springer-Verlag, 2013
- [171] JAZWINSKI, A. : *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, 1970
- [172] JENNINGS, L. ; FERNANDO, T. ; TRINH, H. : Existence Conditions for Functional Observability From an Eigenspace Perspective. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 56 (2011), Nr. 12, S. 2957–2961
- [173] JO, N. ; SEO, J. : A state observer for nonlinear systems and its application to ball and beam system. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 45 (2000), Nr. 5, S. 968–973
- [174] JOHANSSON, R. ; ROBERTSSON, A. : Observer-based strict positive real (SPR) feedback control system design. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 9, S. 1557–1564
- [175] JOIN, C. ; MASSE, J. ; FLIESS, M. : Commande sans modèle pour l'alimentation de moteurs : résultats préliminaires et comparaisons. In: *2èmes Journées Identification et Modélisation Expérimentale - JIME'2006*, 2006
- [176] JØRGENSEN, J. ; KRISTENSEN, M. ; THOMSEN, P. ; MADSEN, H. : A Critical Discussion of the Continuous-Discrete Extended Kalman Filter. In: *European Congress of Chemical Eng.-6*, 2007

- [177] JOUAN, P. : Immersion of nonlinear systems into linear systems modulo output injection. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 41 (2003), Nr. 6, S. 1756–1778
- [178] KAILATH, T. : *Linear systems*. Bd. 101. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980
- [179] KALMAN, R. : On the general theory of control systems. In: *Proceedings of the First World Congress of the Int. Federation of Automatic Control*, 1960, S. 481–493
- [180] KALMAN, R. ; HO, Y. ; NARENDRA, K. : Controllability of linear dynamical systems. In: *Contributions to differential equations* 1 (1963), Nr. 2, S. 189–213
- [181] KALMAN, R. E. ; BUCY, R. S. : New results in linear filtering and prediction theory. In: *Journal of Basic Eng.* 83 (1961), Nr. 3, S. 95–108
- [182] KANG, W. ; KRENER, A. : Mathematical theory on systems and networks. Proceedings of the MTSN '98 Symposium, Padova, Italy. 1998, Kapitel Nonlinear observer design, a backstepping approach, S. 245 – 248
- [183] KASPER, H. ; SCHÜRBA, W. ; LORENZ, H. : *Die Klotoide als Trassierungselement*. Dümmler, 1968
- [184] KHALIL, H. : *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002
- [185] KOENIG, D. : Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: application to state and fault estimation. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 50 (2005), Nr. 2, S. 212–217
- [186] KOKOTOVIĆ, P. : The joy of feedback: nonlinear and adaptive. In: *Control Systems Magazine, IEEE* 12 (1992), Nr. 3, S. 7–17
- [187] KREISSELMEIER, G. : Adaptive observers with exponential rate of convergence. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 22 (1977), S. 2–8
- [188] KRENER, A. ; ISIDORI, A. : Linearization by output injection and nonlinear observers. In: *Systems & Control Letters* 3 (1983), Nr. 1, S. 47–52
- [189] KRENER, A. ; RESPONDEK, W. : Nonlinear observers with linearizable error dynamics. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 23 (1985), S. 197–216
- [190] KRENER, A. ; XIAO, M. : Observers for linearly unobservable nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 46 (2002), Nr. 4, S. 281–288
- [191] KRICHMAN, M. ; SONTAG, E. ; WANG, Y. : Input-Output-to-State Stability. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 39 (2001), S. 1874–1928
- [192] KRSTIĆ, M. ; KOKOTOVIĆ, P. ; KANELLAKOPOULOS, I. : *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Son, 1995
- [193] KUCERA, V. : A contribution to matrix quadratic equations. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 17 (1972), Nr. 3, S. 344–347
- [194] KUDVA, P. ; NARENDRA, K. S. : Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method. In: *Int. Journal of Control* 18 (1973), Nr. 6, S. 1201–1210
- [195] KUDVA, P. ; VISWANADHAM, N. ; RAMAKRISHNA, A. : Observers for linear systems with unknown inputs. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 25 (1980), Nr. 1, S. 113–115
- [196] LAWRENCE, D. : On a nonlinear observer with pseudo-linearized error dynamics. In: *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on IEEE*, 1992, S. 751–756
- [197] LAWRENCE, D. ; RUGH, W. : Input-output pseudolinearization for nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 39 (1994), Nr. 11, S. 2207–2218
- [198] LEON, J. de ; SOULEIMAN, I. ; GLUMINEAU, A. ; SCHREIER, G. : On nonlinear equivalence and backstepping observer. In: *Kybernetika* 37 (2001), Nr. 5, S. 521–546
- [199] LEVIN, J. ; PÉREZ-ARANCIBIA, N. O. ; IOANNOU, P. A. : Adaptive notch filter using real-time parameter estimation. In: *Control Systems Technology, IEEE Trans. on* 19 (2011), Nr. 3, S. 673–681

- [200] LI, G. : A stable and efficient adaptive notch filter for direct frequency estimation. In: *Signal Processing, IEEE Trans. on* 45 (1997), Nr. 8, S. 2001–2009
- [201] LI, X. ; ZHANG, Q. ; SU, H. : An adaptive observer for joint estimation of states and parameters in both state and output equations. In: *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 25 (2011), Nr. 9, S. 831–842
- [202] LIU, F. ; FARZA, M. ; M' SAAD, M. : Non-linear observers for state and unknown inputs estimation. In: *Int. Journal of Modelling, Identification and Control* 2 (2007), Nr. 1, S. 33–48
- [203] LIU, Y. ; YAN, Z. ; ZHOU, Z. ; CAI, L. ; WU, J. : An auto-disturbance rejection control scheme for hybrid power compensators. In: *Power Eng. Society General Meeting, 2003, IEEE Bd. 3, 2003*
- [204] LIYING, S. ; ZHAOLIN, C. : State and input estimation for descriptor systems with unknown inputs. In: *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004, 2004, S. 3480–3481*
- [205] LOHMANN, B. : Zur Störgrößenaufschaltung im Zustandsraum. In: *Tagungsband GMA Fachausschuss 1.4 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“, Thun, 1999, S. 203–215*
- [206] LUDERS, G. ; NARENDRA, K. : An adaptive observer and identifier for a linear system. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 18 (1973), Nr. 5, S. 496–499
- [207] LUDERS, G. ; NARENDRA, K. : A new canonical form for an adaptive observer. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 19 (1974), Nr. 2, S. 117–119
- [208] LUDYK, G. : *Theoretische Regelungstechnik. 2. Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelungssysteme.* Springer, 1995
- [209] LUENBERGER, D. : Observers for multivariable systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 11 (1966), Nr. 2, S. 190–197
- [210] LUENBERGER, D. : An introduction to observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 16 (1971), Nr. 6, S. 596–602
- [211] LUENBERGER, D. : Observing the State of a Linear System. In: *IEEE Trans. on Military Electronics* 8 (1964), Nr. 2, S. 74–80
- [212] LUNZE, J. : *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung.* Springer, 2008
- [213] LUO, B. ; HANCOCK, E. R. : Iterative procrustes alignment with the EM algorithm. In: *Image and Vision Computing* 20 (2002), Nr. 5, S. 377 – 396
- [214] MARINO, R. ; SANTOSUOSSO, G. ; TOMEI, P. : Robust adaptive observers for nonlinear systems with bounded disturbances. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 46 (2001), Nr. 6, S. 967–972
- [215] MARINO, R. ; TOMEI, P. : Global adaptive observers for nonlinear systems via filtered transformations. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 37 (1992), Nr. 8, S. 1239–1245
- [216] MARINO, R. ; TOMEI, P. : Adaptive observers with arbitrary exponential rate of convergence for nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), Nr. 7, S. 1300–1304
- [217] MARINO, R. ; TOMEI, P. : Global estimation of n unknown frequencies. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 8, S. 1324–1328
- [218] MARINO, R. ; TOMEI, P. ; VERRELLI, C. : *Induction Motor Control Design.* Springer Verlag, 2010
- [219] MAYNE, D. ; MURDOCH, P. : Modal control of linear time invariant systems. In: *Int. Journal of Control* 11 (1970), Nr. 2, S. 223–227
- [220] MBOUP, M. ; JOIN, C. ; FLIESS, M. : A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control. In: *Control & Automation, 2007. MED'07. Mediterranean Conference on IEEE, 2007, S. 1–6*
- [221] MBOUP, M. : Parameter estimation via differential algebra and operational calculus / ALIEN - INRIA Futurs - INRIA - Polytechnique. 2007. – Rapport de recherche
- [222] MENDIS, M. : *Functional Observer For Glucose Regulation,* University of Southern Queensland, Bachelor-Arbeit, 2008



- [223] MENHOLD, P. : *Finite and asymptotic time state estimation for linear and nonlinear systems*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2004
- [224] MENOLD, P. ; FINDEISEN, R. ; ALLGÖWER, F. : Finite time convergent observers for linear time-varying systems. In: *Proceedings of the 11th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2003
- [225] MENOLD, P. ; FINDEISEN, R. ; ALLGÖWER, F. : Finite time convergent observers for nonlinear systems. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2003 Bd. 6 IEEE, 2004, S. 5673–5678
- [226] MEYER, C. D. : *Matrix analysis and applied linear algebra*. Siam, 2000
- [227] MICHALSKA, H. ; MAYNE, D. : Moving horizon observers. In: *IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design NOLCOS'92*, 1992, S. 576–581
- [228] MICHALSKA, H. ; MAYNE, D. : Moving horizon observers and observer-based control. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), Nr. 6, S. 995–1006
- [229] MINORSKY, N. : Directional stability of automatically steered bodies. In: *Journal of the American Society of Naval Engineers* 34 (1922), Nr. 2, S. 280–309
- [230] MOHEIMANI, S. ; SAVKIN, A. ; PETERSEN, I. : Robust observability for a class of time-varying discrete-time uncertain systems. In: *Systems & Control Letters* 27 (1996), Nr. 5, S. 261–266
- [231] MONTANARI, M. ; PERESADA, S. ; ROSSI, C. ; TILLI, A. : Speed sensorless control of induction motors based on a reduced-order adaptive observer. In: *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 15 (2007), Nr. 6, S. 1049–1064
- [232] MOORE, J. ; LEDWICH, G. : Minimal order observers for estimating linear functions of a state vector. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 20 (1975), Nr. 5, S. 623–632
- [233] MORENO, J. : Unknown input observers for SISO nonlinear systems. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 1, 2000, S. 790–801
- [234] MORENO, J. : Quasi-unknown input observers for linear systems. In: *Proceedings of the 2001 IEEE Int. Conference on Control Applications*, 2001, S. 732–737
- [235] MORENO, J. ; DOCHAIN, D. : Global observability and detectability analysis of uncertain reaction systems and observer design. In: *Int. Journal of Control* 81 (2008), Nr. 7, S. 1062–1070
- [236] MORIN, P. ; SAMSON, C. : Motion Control of Wheeled Mobile Robots. In: SICILIANO, B. (Hrsg.) ; KHATIB, O. (Hrsg.): *Springer Handbook of Robotics*. Springer, 2008
- [237] MUKHOPADHYAY, S. ; RAO, P. : Integral equation approach to joint state and parameter estimation in continuous-time MIMO systems. In: *Control Theory and Applications, IEE Proceedings* Bd. 138 IET, 1991, S. 93–102
- [238] MÜLLER, P. : Control of nonlinear systems by applying disturbance rejection control techniques. In: *Int. Conference on Control CONTROL* 88., IET, 1988, S. 734–737
- [239] MÜLLER, P. : Schätzung und Kompensation von Nichtlinearitäten mit Störgrößenbeobachtern. In: *Entwurf nichtlinearer Regelungen* ; ENGELL, S. (Hrsg.) ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.). R. Oldenbourg Verlag, 1995
- [240] MÜLLER, P. : Nonlinearity estimation and compensation by linear observers: theory and applications. In: *Control of Oscillations and Chaos, 2000. Proceedings. 2000 2nd Int. Conference* Bd. 1, 2000, S. 16–21
- [241] MÜLLER, P. ; ACKERMANN, J. : Nichtlineare Regelung von elastischen Robotern. In: *VDI-Berichte* (1986), Nr. 598, S. 321–333
- [242] MÜLLER, P. ; LÜCKEL, J. : Zur Theorie der Störgrößenaufschaltung in linearen Mehrgrößenregelungssystemen. In: *Regelungstechnik* 25 (1977), S. 54–59
- [243] MÜLLER, P. ; WEBER, H. : Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems. In: *Automatica* 8 (1972), Nr. 3, S. 237–246

- [244] MUTSAERS, M. ; WEILAND, S. ; ENGELAAR, R. : Reduced-order observer design using a Lagrangian method. In: *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, 2009, S. 5384–5389
- [245] NAGRATH, I. : *Control systems Eng.* New Age Int., 2005
- [246] NAKADE, P. ; GALGATE, G. : Design of Linear Functional Observer for MIMO LTI systems. In: *Int. Journal of Computer Applications IJCA* 1 (2010), Nr. 6, S. 121–129
- [247] NARENDRA, K. ; ANNASWAMY, A. : *Stable adaptive systems*. Prentice-Hall, Inc., 1989
- [248] NEWMANN, M. : Design algorithms for minimal-order Luenberger observers. In: *Electronics Letters* 5 (1969), S. 390–392
- [249] NI, M. : Existence condition on solutions to the algebraic Riccati equation. In: *Acta Automatica Sinica* 34 (2008), Nr. 1, S. 85–87
- [250] NICOSIA, S. ; TOMEI, A. ; TORNAMBÈ, A. : An approximate observer for a class of nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 13 (1989), Nr. 1, S. 43–51
- [251] NICOSIA, S. ; TOMEI, P. ; TORNAMBÈ, A. : A nonlinear observer for elastic robots. In: *IEEE Journal of Robotics and Automation* 4 (1988), Nr. 1, S. 45–52
- [252] NINESIGMA: *Request 67392: Method to improve the stability and convergence of an Extended Kalman Filter Algorithm.* [https://wayback.archive.org/web/20150110130546/https://www.myninesigma.com/\\_layouts/RFPs/NineSigma\\_RFP\\_67392.pdf](https://wayback.archive.org/web/20150110130546/https://www.myninesigma.com/_layouts/RFPs/NineSigma_RFP_67392.pdf). Version: 2011
- [253] O'REILLY, J. : Minimal-order observers for discrete-time linear systems with unmeasurable disturbances. In: *Int. Journal of Control* 29 (1979), Nr. 3, S. 429–434
- [254] O'REILLY, J. : *Observers for linear systems*. Academic Press, 1983
- [255] PEI, S.-C. ; TSENG, C.-C. : Real time cascade adaptive notch filter scheme for sinusoidal parameter estimation. In: *Signal processing* 39 (1994), Nr. 1, S. 117–130
- [256] PIIPPO, A. ; HINKKANEN, M. ; LUOMI, J. : Analysis of an adaptive observer for sensorless control of interior permanent magnet synchronous motors. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* 55 (2008), Nr. 2, S. 570–576
- [257] POPOV, V. : Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. In: *Rev. Roumaine Sci. Tech Electrotech Engers* 9 (1964), Nr. 4, S. 629–690
- [258] PRICE, M. ; COOK, G. : Identification/Observation using an extended Luenberger observer. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* IE-29 (1982), Nr. 4, S. 279–287
- [259] RADKE, A. ; GAO, Z. : A survey of state and disturbance observers for practitioners. In: *American Control Conference, 2006*, 2006
- [260] RAFF, T. ; MENOLD, P. ; EBENBAUER, C. ; ALLGÖWER, F. : A finite time functional observer for linear systems. In: *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on IEEE*, 2005, S. 7198–7203
- [261] RAGHAVAN, S. ; HEDRICK, J. : Observer design for a class of nonlinear systems. In: *Int. Journal of Control* 59 (1994), Nr. 2, S. 515–528
- [262] RAJAMANI, R. : Observers for Lipschitz nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 43 (1998), Nr. 3, S. 397–401
- [263] RAJAMANI, R. ; HEDRICK, J. : Adaptive observers for active automotive suspensions: Theory and experiment. In: *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 3 (1995), Nr. 1, S. 86–93
- [264] RAO, D. ; KUNG, S.-Y. : Adaptive notch filtering for the retrieval of sinusoids in noise. In: *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Trans. on* 32 (1984), Nr. 4, S. 791–802
- [265] REBOULET, C. ; CHAMPETIER, C. : A new method for linearizing non-linear systems: the pseudolinearization. In: *Int. Journal of Control* 40 (1984), Nr. 4, S. 631–638
- [266] REIF, K. ; SONNEMANN, F. ; UNBEHAUEN, R. : An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. In: *Automatica* 34 (1998), Nr. 9, S. 1119–1123

- [267] REIF, K. ; UNBEHAUEN, R. : The extended Kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Signal Processing* 47 (1999), Nr. 8, S. 2324–2328
- [268] REINSCHKE, K. : Eingangsbeobachtbarkeit und -rekonstruktion für LTI-Übertragungssysteme in polynomialer Darstellung. In: *at-Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 1, S. 20–27
- [269] RÖBENACK, K. : *Beobachterentwurf für nichtlineare Zustandsysteme mit Hilfe des Automatischen Differenzierens*, TU Dresden, Diplomarbeit, 2002
- [270] RÖBENACK, K. : Computation of the observer gain for extended Luenberger observers using automatic differentiation. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 21 (2004), Nr. 1, S. 33–47
- [271] RÖBENACK, K. : Entwurfsmethodik für einen approximativen Normalform-Beobachter. In: *PAMM* 4 (2004), Nr. 1, S. 137–138
- [272] RÖBENACK, K. : *Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit Hilfe des Automatischen Differenzierens*. Shaker, 2005
- [273] RÖBENACK, K. : Entwurf nichtlinearer Beobachter mit linearer und näherungsweise linearer Fehlerdynamik. In: *at-Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 9, S. 489–497
- [274] RÖBENACK, K. ; LYNCH, A. : An efficient method for observer design with approximately linear error dynamics. In: *Int. Journal of Control* 77 (2004), Nr. 7, S. 607–612
- [275] ROCHA-CÓZATL, E. ; MORENO, J. ; ZEITZ, M. : Constructive design of unknown input nonlinear observers by dissipativity and LMIs. In: *Proceedings of 16th IFAC World Congress*, 2005, S. 670 – 675
- [276] ROTHFUSS, R. ; RUDOLPH, J. ; ZEITZ, M. : Flachheit: ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. In: *at-Automatisierungstechnik* 45 (1997), Nr. 11, S. 517–525
- [277] RUDOLPH, J. ; WOITTENNEK, F. : Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdim. Systemen. In: *at-Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 9, S. 457–467
- [278] RUGH, W. : *Linear system theory*. Prentice-Hall, 1996
- [279] RUMP, S. : III-Conditioned matrices are componentwise near to singularity. In: *SIAM review* 41 (1999), Nr. 1, S. 102–112
- [280] SAHA, D. C. ; RAO, G. P. : Identification of continuous dynamical systems - The Poisson Moment Functional (PMF) approach. In: *LNCIS-Series* 56 (1983)
- [281] SASTRY, S. ; BODSON, M. : *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*. Prentice-Hall, Inc., 1989
- [282] SCHAFFNER, J. ; ZEITZ, M. : Entwurf nichtlinearer Beobachter. In: *Entwurf nichtlinearer Regelungen* ; ENGELL, S. (Hrsg.) ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.). Oldenbourg-Verlag, 1995
- [283] SCHAFT, A. Van d. : On nonlinear observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 12, S. 1254–1256
- [284] SCHUMACHER, J. : On the minimal stable observer problem. In: *Int. Journal of Control* 32 (1980), Nr. 1, S. 17–30
- [285] SELISTEANU, D. ; IONETE, C. ; PETRE, E. : On Exponential And Asymptotic Estimation Of State Variables In Bioprocesses. In: *Annals of Dunarea de Jos, University of Galati, Fascicle III, 2000* (2001), S. 47–52
- [286] SEVINC, A. : A full adaptive observer for DC servo motors. In: *Turk J Elec Engin* 11 (2003), Nr. 2, S. 117–130
- [287] SHAFAI, B. ; PI, C. ; NORK, S. ; LINDER, S. : Proportional integral adaptive observer for parameter and disturbance estimations. In: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on* Bd. 4 IEEE, 2002, S. 4694–4699
- [288] SHEN, Y. ; HUANG, Y. : Uniformly observable and globally Lipschitzian nonlinear systems admit global finite-time observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 11, S. 2621–2625

- [289] SHEN, Y. ; XIA, X. : Semi-global finite-time observers for nonlinear systems. In: *Automatica* 44 (2008), Nr. 12, S. 3152–3156
- [290] SHIMIZU, K. : Nonlinear state observers by gradient descent method. In: *Control Applications. Proceedings of the 2000 IEEE Int. Conference on*, 2000, S. 616–622
- [291] SINGH, S. ; SCHY, A. : Output feedback non-linear decoupled control synthesis and observer design for manoeuvring aircraft. In: *Int. Journal of Control* 31 (1980), Nr. 4, S. 781–806
- [292] SLOTINE, J. ; HEDRICK, J. ; MISAWA, E. : Nonlinear state estimation using sliding observers. In: *25th IEEE Conference on Decision and Control* Bd. 25, 1986, S. 332 – 339
- [293] SLOTINE, J. ; HEDRICK, J. ; MISAWA, E. : On sliding observers for nonlinear systems. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 109 (1987), Nr. 3, S. 245 – 252
- [294] SÖFFKER, D. ; BAJKOWSKI, J. ; MÜLLER, P. : Detection of cracks in turborotors – a new observer based method. In: *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 115 (1993), S. 518–524
- [295] SÖFFKER, D. ; YU, T.-J. ; MÜLLER, P. : State estimation of dynamical systems with nonlinearities by using proportional-integral observer. In: *Int. Jour. of Systems Science* 26 (1995), Nr. 9, S. 1571–1582
- [296] SONG, Y. ; GRIZZLE, J. : The extended Kalman filter as a local asymptotic observer for discrete-time nonlinear systems. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* 5 (1995), Nr. 1, S. 59–78
- [297] SONTAG, E. : State-space and I/O stability for nonlinear systems. In: FRANCIS, B. (Hrsg.) ; TANNENBAUM, A. (Hrsg.): *Feedback Control, Nonlinear Systems, and Complexity* Bd. 202. Springer Berlin Heidelberg, 1995, S. 215–235
- [298] SONTAG, E. : Input to state stability: Basic concepts and results. In: *Nonlinear and Optimal Control Theory 1932* (2008), S. 163–220
- [299] SONTAG, E. : *Mathematical Control Theory*. Springer, 1998
- [300] SONTAG, E. : A remark on the converging-input converging-state property. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 2, S. 313–314
- [301] STALEY, R. ; YUE, P. : On system parameter identifiability. In: *Information Sciences* 2 (1970), Nr. 2, S. 127–138
- [302] STÉPHANT, J. ; CHARARA, A. ; MEIZEL, D. : Virtual sensor: Application to vehicle sideslip angle and transversal forces. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* 51 (2004), Nr. 2, S. 278–289
- [303] STOICA, P. ; SÖDERSTRÖM, T. : Bias correction in least-squares identification. In: *Int. Journal of Control* 35 (1982), Nr. 3, S. 449–457
- [304] STORVIK, G. : Particle filters for state-space models with the presence of unknown static parameters. In: *Signal Processing, IEEE Trans. on* 50 (2002), Nr. 2, S. 281–289
- [305] STRELLER, D. ; DIETMAYER, K. : Multiple hypothesis classification with laser range finders. In: *The 7th Int. IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, 2004. Proceedings*, 2004, S. 195–200
- [306] SU, W. ; SUN, X. ; LI, F. : Vector control of induction motors with active disturbance rejection control. In: *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)* 44 (2004), Nr. 10, S. 1329–1332
- [307] SUN, B. ; GAO, Z. : A DSP-based active disturbance rejection control design for a 1-kW H-bridge DC-DC power converter. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* 52 (2005), Nr. 5, S. 1271–1277
- [308] SUN, D. : Comments on Active Disturbance Rejection Control. In: *IEEE Trans. on Indus. Elect.* 54 (2007), Nr. 6, S. 3428–3429
- [309] SUNDARESWARAN, K. ; MCLANE, P. ; BAYOUMI, M. : Observers for linear systems with arbitrary plant disturbances. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 22 (1977), Nr. 5, S. 870–871

- [310] TAN, C. ; EDWARDS, C. : Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 10, S. 1815–1821
- [311] TAN, C. ; EDWARDS, C. : Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults. In: *Int. Jour. of Robust & Nonlinear Control* 13 (2003), Nr. 5, S. 443–463
- [312] TAO, G. : *Adaptive Control Design and Analysis*. John Wiley & Sons, 2003
- [313] TEEL, A. ; PRALY, L. : Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 33 (1995), Nr. 5, S. 1443–1488
- [314] THAU, F. : Observing the state of non-linear dynamic systems. In: *Int. Journal of Control* 17 (1973), Nr. 3, S. 471–479
- [315] ȚICLEA, A. : *Techniques d’immersion pour l’estimation non linéaire application aux systèmes de puissance*, Institute National Polytechnique de Grenoble, Dissertation, 2006
- [316] ȚICLEA, A. ; BESANÇON, G. : Immersion-based observer design. In: *Nonlinear observers and applications*; BESANÇON, G. (Hrsg.). Springer Verlag, 2007
- [317] TSUI, C. : A new algorithm for the design of multifunctional observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 89–93
- [318] UNBEHAUEN, U. ; RAO, G. : *Identification of continuous systems*. Elsevier Science Publishers B.V., 1987
- [319] VALÁŠEK, M. ; OLGAC, N. : Efficient eigenvalue assignments for general linear MIMO systems. In: *Automatica* 31 (1995), Nr. 11, S. 1605–1617
- [320] VALÁŠEK, M. ; OLGAC, N. : Efficient pole placement technique for linear time-variant SISO systems. In: *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* 142 (1995), Nr. 5, S. 451–458
- [321] VILLAGRA, J. ; D’ANDREA-NOVEL, B. ; CHOI, S. ; FLIESS, M. ; MOUNIER, H. : Robust stop-and-go control strategy: an algebraic approach for non-linear estimation and control. In: *Int. Journal of Vehicle Autonomous Systems* 7 (2009), Nr. 3, S. 270–291
- [322] VINOGRAD, R. : The inadequacy of the method of characteristic exponents for the study of nonlinear differential equations. In: *Mat. Sbornik* 41(83) (1957), S. 431–438
- [323] WALCOTT, B. ; CORLESS, M. ; ZAK, S. : Comparative study of non-linear state-observation techniques. In: *Int. Journal of Control* 45 (1987), Nr. 6, S. 2109–2132
- [324] WANG, H. ; DALEY, S. : Actuator fault diagnosis: an adaptive observer-based technique. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 7, S. 1073–1078
- [325] WANG, S. ; DAIVSON, E. : Observing partial states for systems with unmeasurable disturbances. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 23 (1978), S. 481–483
- [326] WANG, S. ; DAIVSON, E. ; DORATO, P. : Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 20 (1975), Nr. 5, S. 716–717
- [327] WANG, W. ; GAO, Z. : A comparison study of advanced state observer design techniques. In: *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003* Bd. 6 IEEE, 2003, S. 4754–4759
- [328] WEIHRICH, G. : Mehrgrößen-Zustandsregelung unter Einwirkung von Stör- und Führungssignalen. In: *Regelungstechnik* 25 (1977), S. 166–172
- [329] WOJCIECHOWSKI, B. : *Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems*, Schlesische Technische Universität (Politechnika Śląska), Gliwice, Polen, Dissertation, 1978
- [330] XIA, X. ; GAO, W. : On exponential observers for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 11 (1988), Nr. 4, S. 319–325
- [331] XIA, X. ; ZEITZ, M. : On nonlinear continuous observers. In: *Int. Journal of Control* 66 (1997), Nr. 6, S. 943–954
- [332] XIA, X. ; GAO, W. : Nonlinear observer design by observer error linearization. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 27 (1989), Nr. 1, S. 199–216

- [333] XIONG, Y. ; SAIF, M. : Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 46 (2001), Nr. 12, S. 2012–2017
- [334] YAN, X. ; EDWARDS, C. : Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer. In: *Automatica* 43 (2007), Nr. 9, S. 1605–1614
- [335] YANG, B. ; LIN, W. : Homogeneous observers, iterative design, and global stabilization of high-order nonlinear systems by smooth output feedback. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 7, S. 1069–1080
- [336] YIP, E. ; SINCOVEC, R. : Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 26 (1981), Nr. 3, S. 702–707
- [337] YOSHIKAWA, T. ; OHTA, A. ; KANAOKA, K. : State estimation and parameter identification of flexible manipulators based on visual sensor and virtual joint model. In: *Robotics and Automation, 2001. IEEE Int. Conference on* Bd. 3, 2001, S. 2840–2845
- [338] YOUNG, P. : An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. In: *Automatica* 6 (1970), Nr. 2, S. 271–287
- [339] YU, T. ; TONG, J. : Auto disturbance rejection control of microturbine system. In: *Power and Energy Society General Meeting-Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century* IEEE, 2008, S. 1–6
- [340] ZAK, S. : On the stabilization and observation of nonlinear/uncertain dynamic systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 35 (1990), Nr. 5, S. 604–607
- [341] ZEITZ, M. : The extended Luenberger observer for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 9 (1987), Nr. 2, S. 149–156
- [342] ZEITZ, M. : Nichtlineare stetige Beobachter. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 78 (1998), S. 1137–1140
- [343] ZHANG, F. : *Matrix theory: basic results and techniques*. Springer Verlag, 1999
- [344] ZHANG, Q. : Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (MIMO) linear time-varying systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 3, S. 525–529
- [345] ZHANG, Q. ; XU, A. : Global adaptive observer for a class of nonlinear systems. In: *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th Conference on* Bd. 4 IEEE, 2001, S. 3360–3365
- [346] ZHENG, Q. : *On Active Disturbance Rejection Control: Stability Analysis and Applications in Disturbance Decoupling Control*, Cleveland State University, Dissertation, 2009
- [347] ZHENG, Q. ; DONG, L. ; LEE, D. ; GAO, Z. : Active disturbance rejection control for MEMS gyroscopes. In: *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 17 (2009), Nr. 6, S. 1432–1438
- [348] ZHENG, Q. ; GAO, L. ; GAO, Z. : On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics. In: *46th IEEE Conference on Decision and Control* IEEE, 2007, S. 3501–3506
- [349] ZHU, R. ; CHAI, T. ; SHAO, C. : Robust nonlinear adaptive observer design using dynamic recurrent neural networks. In: *American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997* Bd. 2 IEEE, 1997, S. 1096–1100
- [350] ZHU, Y. ; PAGILLA, P. : Adaptive estimation of time-varying parameters in linearly parameterized systems. In: *Jour. of Dyn. Systems, Measurement, and Control* 128 (2006), Nr. 3, S. 691–695
- [351] ZIMMER, G. : A new algorithm for approximating the state of nonlinear systems. In: *Int. Journal of Systems science* 24 (1993), Nr. 4, S. 777–788
- [352] ZIMMER, G. : State observation by on-line minimization. In: *Int. Journal of Control* 60 (1994), Nr. 4, S. 595–606
- [353] ZIMMER, G. : *Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme*, Technische Universität Berlin, Habilitation, 1997