

LA INVENCION DE PROBLEMAS Y EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

THE INVENTION OF PROBLEMS AND THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL COMPETENCE

JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ-BRAVO

*Facultad de Ciencias Sociales y de la Educación
Universidad Camilo José Cela*

SANTIAGO CASTILLO ARREDONDO

*Facultad de Educación
Universidad Nacional de Educación a Distancia*

JUAN JESÚS BARBARÁN SÁNCHEZ

*Facultad de Matemáticas
Universidad de Granada*

e-mail: jafernandez@ucjc.edu

RESUMEN

El presente artículo estudia la relación que existe entre el grado de implicación de los alumnos en la invención de problemas matemáticos y el desarrollo de su competencia matemática. Nos preguntamos si la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla la competencia matemática en alumnos de 1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria. El diseño –pretest-postest– es cuasi-experimental comparativo de dos grupos, sobre un total de cuatro grupos de alumnos. La muestra estuvo compuesta por 85 alumnos de un centro educativo de la Ciudad Autónoma de Ceuta. Se elaboraron seis cuadernos de trabajo con 17 situaciones problemáticas cada uno. El programa se aplicó durante un total de 62

ABSTRACT

The current article studies the relation between the degree of involvement of pupils in the invention of mathematical problems and, the development of their mathematical competence. We ask ourselves if the invention-reconstruction of problematic situations develops mathematical competence in students of 1st and 2nd grades of Compulsory Secondary Education. The design –pretest-postest– is a quasi-experimental comparison of two groups, out of a total of four groups of pupils. The study sample was made up of 85 pupils from an education centre in the Autonomous City of Ceuta. Six workbooks, with 17 problematic situations in each one, were made. The programme was used during 62 sessions of

sesiones de 50 minutos cada una. Los resultados muestran que la invención-reconstrucción de problemas desarrolla la competencia matemática.

PALABRAS CLAVE

Competencia matemática, Resolución de problemas matemáticos, Educación Secundaria Obligatoria, Didáctica de la Matemática, Invención.

50 minutes each. The results show that the invention-reconstruction of problems develops mathematical competence.

KEY WORDS

Mathematical competence, Mathematical problem solving, Compulsory Secondary Education, Teaching of Mathematics, Invention.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas constituye una importante reflexión educativa a partir de 1980. En los congresos internacionales de educación matemática, particularmente en Adelaida (ICME-4, 1984) y Budapest (ICME-5, 1988), tienen especial repercusión las ideas de Shoenfeld (1985) y se convirtió en una corriente esencial para poner en práctica tratamientos didácticos enfocados a procesos específicos de resolución. En esta década, la resolución de problemas fue objetivo principal de la enseñanza de la matemática, según la recomendación del documento *An agenda for action* publicado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM). Desde entonces, la preocupación en las escuelas, instituciones e investigación porque la resolución de problemas fuese una actividad del pensamiento, ha generado una inquietud de búsqueda por entender las dificultades que tienen los escolares en este tema que, cada vez más, se identifica como “fracaso escolar”. Los datos que se recogen, antes de realizar la investigación, revelan una incorrecta aplicación de los conocimientos a las situaciones problemáticas y una elección de estrategias procesales en las que, generalmente, interviene el azar y no el razonamiento; la impetuosa necesidad de llegar a un resultado es lo que más le importa al alumno. La iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de situaciones, son escasas y están subrayadas por una reiteración de movimientos apoyados en la imitación de intenciones vacías –muchas veces no comprendida–, y, por lo tanto, desnaturalizada en los procesos y resultados. La participación, la autoestima y la seguridad del alumno, así como el gusto por la tarea mencionada, intervienen habitualmente de forma negativa.

La invención

Se empieza a tomar en serio la *invención* a partir de la encuesta de “L’Enseignement Mathématique” sobre el método de trabajo de los matemáticos [Publicada por H. Fehr con la colaboración de T. Flournoy y E. Claparède (París y Ginebra, 1908)], que estimuló y provocó la conferencia sobre “Invención matemática” Poincaré (1909) , y los trabajos posteriores de Hadamard (1947), pretendiendo que se entienda la invención de situaciones problemáticas, como método capaz de desarrollar la actividad mental en la resolución de problemas, garantizando la autonomía de las sucesivas construcciones.

En el ámbito educativo estas ideas sobre la invención de problemas se desarrollan por el pedagogo alemán Kerschensteiner¹, con gran aceptación por parte de la comunidad educativa. El hecho de que estas ideas, según Aizpún (1972), tengan escasa aplicación en la clase de matemáticas, demuestra que el reconocimiento de la teoría no implica el asentamiento en la práctica².

La competencia matemática

El estudio del desarrollo de la competencia matemática en alumnos de la ESO es un aspecto que tiene un interés creciente dentro de la Educación Matemática. La competencia matemática ha sido definida por numerosos autores (Escamilla, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008). En sus inicios, existió una discusión entre los investigadores que trabajaban con la noción de competencia matemática basada en establecer su relación o contraposición con la noción de comprensión. En este sentido, Godino (2002) considera que la competencia se centra en un componente práctico, *saber*

¹ Georg Kerschensteiner, nació y murió en Munich (1854 – 1932) Pedagogo alemán que fijó una estrecha relación entre la teoría y la práctica educativas. Sus trabajos tuvieron mucha resonancia en la primera mitad del siglo XX.

² “Y la experiencia dice que estos mismos enunciados (los derivados de la interpretación infantil a partir de expresiones matemáticas) son muchas veces punto de arranque de otras cuestiones importantes, como deben ser auténticamente los verdaderos. [...] En una segunda etapa, ya dirigida, no partiremos de igualdad alguna, sino que pediremos enunciados tales que para responder a la pregunta planteada hayan de realizarse operaciones fijadas; por ejemplo, pediremos enunciados que exijan una adición y una multiplicación; que exijan dos adiciones; una sustracción y una multiplicación, etc. [...] Tradicionalmente, es sólo el Maestro quien plantea los problemas, y se le suele aconsejar que lo haga utilizando estrictamente los datos precisos. El adulto que estudia Matemáticas sabe que así aparecen también los que se le ofrecen a él y este convenio tiene como base más lo que suele llamarse elegancia de planteo que otra cosa. Pero ni en el mundo de la investigación ni en el de las aplicaciones, ni aun siquiera en el de las relaciones humanas, surgen los problemas con tal limpieza conceptual de enunciado, sino que es el propio investigador quien ha de seleccionar los datos prescindiendo de los superfluos o eliminando los contradictorios.” AIZPÚN (1972, pp. 127-129).

hacer, mientras que la comprensión lo hace en un componente teórico, *saber qué hacer y por qué*. Entre los estudios llevados a cabo sobre la competencia matemática destaca el proyecto KOM (*Kompetencer og matematikloering*) llevado a cabo en Dinamarca entre los años 2000 y 2002, basado en una propuesta elaborada por Niss (1999), y por medio del cual se caracterizó el currículo de matemáticas en términos de competencias desde la escuela hasta la universidad. Posteriormente, ha habido otros países que han incluido las competencias básicas en sus currículos, como es el caso de Portugal (Abrantes, 2001), Paraguay, Colombia, Perú, Canadá y España a través de la LOE (Ley Orgánica 2/2006, de Educación). Algunas investigaciones relacionadas con la competencia matemática de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria son las llevadas a cabo por Marcos (2009) y Roig y Llinares (2006).

Existe una íntima relación entre la competencia matemática y la resolución de problemas (Goñi, 2008). Sin embargo, para Lester y Charles (2003) no están claras las relaciones entre el desarrollo de conceptos y el de las competencias en resolución de problemas. Törner, Schoenfeld y Reiss (2007) seleccionaron a un grupo de expertos³ para hacer una revisión de las investigaciones en resolución de problemas llevadas a cabo en sus países. En España destacamos las investigaciones llevadas a cabo por Aizpún (1972), de Guzmán (1984), Fernández Bravo (2002) y Puig y Cerdán (1988).

Pretendemos comprobar si la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas (elaborado por Fernández Bravo, 2010) desarrolla en alumnos de 1º y 2º de ESO la capacidad de pensar y razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, utilizar símbolos y formalismos matemáticos y comunicarse con y sobre las matemáticas.

MÉTODO

Diseño

El diseño de esta investigación fue un diseño cuasi-experimental comparativo de dos grupos, sobre un total de cuatro grupos de alumnos de ESO; desde 1º de ESO hasta 2º de ESO. Al pertenecer los sujetos de cada curso a dos estados de control se subraya en el diseño la característica: Pretest-Postest. Ambos grupos (experimental y control) fueron evaluados antes y después de la aplicación del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas.

³ Integrado por: Michèle Artigue, Hugh Burkhardt, Norma M. Chang, Jinfa Cai, Michiel Doorman, Victoria Hand, Catherine Kessel, Mariana Levin, Luis Moreno Armella, João Pedro da Ponte, Bharath Sriraman, Julianna Szendrej y Stefan Ufer.

Tabla 1. *Esquema del diseño Pretest-Posttest empleado en la investigación*

GRUPOS	PRETEST	INTERVENCIÓN	POSTEST
EXPERIMENTAL (GE)	T1	X	T3
CONTROL (GC)	T2		T4

Muestra

El contexto del estudio es un centro de titularidad pública de la ciudad autónoma de Ceuta. Nos planteamos mejorar el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos de 1º y 2º de ESO, basándonos en: los resultados notablemente mejorables en la prueba de diagnóstico realizada por el Ministerio de Educación a los alumnos del citado centro; en la evolución desfavorable del porcentaje de aprobados en Matemáticas de 1º y 2º de ESO; y, en el diálogo con profesores y en la observación de los alumnos de 1º y 2º de ESO tanto en el aula como fuera de ella.

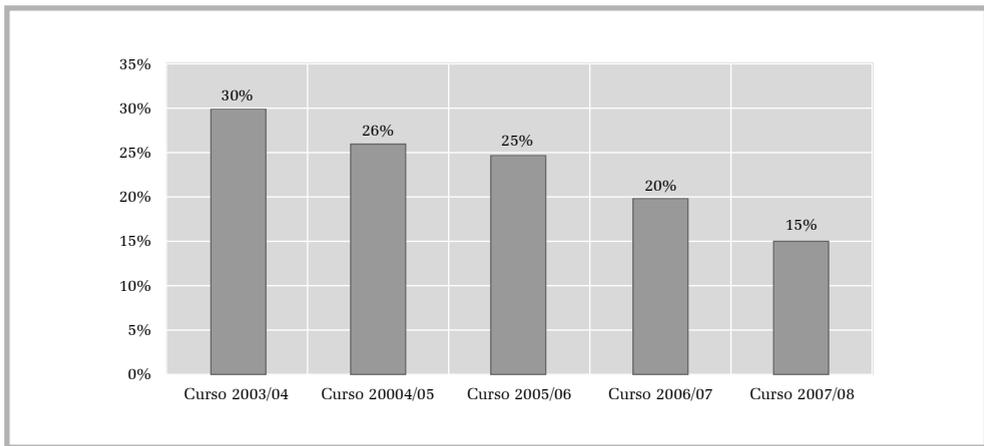


Figura 1. Evolución del porcentaje de aprobados en Matemáticas de 1º y 2º de ESO en el centro educativo donde se desarrolló la investigación

De un total de 145 alumnos de 1º y 2º de ESO de un centro educativo de la ciudad autónoma de Ceuta, se seleccionaron 85 alumnos, 39 de 1º de ESO y 46 de 2º de ESO. Se eligieron al azar dos grupos como experimentales (un 1º y un 2º de ESO) y dos como grupos control (un 1º y un 2º de ESO). Los grupos experimentales y de control formaron grupos naturales ya que no se escogieron los alumnos.

Tabla 2. Descripción de la muestra utilizada en la investigación

IES "ALMINA" DE CEUTA		
CURSO	EXPERIMENTAL (GE)	CONTROL (GC)
1º ESO	19 sujetos	20 sujetos
2º ESO	21 sujetos	25 sujetos

Población: 145 alumnos Muestra: 85 alumnos
Error estandar <0.015 Fiabilidad: 95%

Hipótesis

Hipótesis fundamental del estudio: Si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 1º y 2º de ESO, entonces se desarrollará la competencia matemática de estos alumnos.

Variables e instrumentos

La variable independiente de este estudio fue el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas.

Para evaluar si el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla la competencia matemática se utilizaron las variables dependientes: pensar y razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, argumentar matemáticamente, comunicarse con y sobre las matemáticas, y, utilizar símbolos y formalismos matemáticos.

Basándonos en el diálogo con expertos en investigación educativa y con otros profesores del centro donde se llevó a cabo la experiencia, las variables intervinientes que iban a poder estar sistemáticamente relacionadas con la variable independiente, y que podían afectar en forma diferencial a los valores de las variables dependientes, fueron las siguientes: la ocupación de los padres, la situación familiar, el nivel de estudios de los padres y la dificultad para las matemáticas.

Para evaluar las variables dependientes se diseñó un instrumento al que llamamos prueba para medir el desarrollo de la competencia matemática (PRUCOMAT). Esta prueba fue validada por el método de triangulación de expertos y posteriormente experimentada con éxito como prueba piloto con 379 alumnos, 206 de 1º de ESO y 173 de 2º de ESO de dos centros educativos de la ciudad autónoma de Ceuta distintos al centro donde se llevó a cabo la investigación.

Para medir las variables intervinientes se elaboró un cuestionario que fue rellenado por los padres de los alumnos antes de poner en práctica el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas.

Material

Se confeccionaron seis cuadernos de trabajo para el alumno con 17 situaciones problemáticas cada uno. Cada cuaderno de trabajo se centró exclusivamente en uno de los metamodelos descritos en Fernández Bravo (2010).

Procedimiento

En la fase pretest, que tuvo lugar en el mes de septiembre de 2009, los alumnos de 1º y 2º de ESO cumplimentaron, de forma simultánea y en su aula habitual, la prueba para medir el desarrollo de la competencia matemática (PRUCOMAT). Ningún profesor participante en esta investigación corrigió las pruebas de sus alumnos. Dicha corrección se llevó a cabo de forma consensuada entre todos los miembros del equipo investigador.

La fase de intervención se llevó a cabo mediante la aplicación del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas a los dos grupos experimentales en dos sesiones semanales de 50 minutos de duración cada una, dentro del horario lectivo y en el aula correspondiente. El número total de sesiones en las que se aplicó el programa en cada grupo fue 62. El horario fijado para estas sesiones coincidió en todos los cursos. El equipo investigador se había formado anteriormente mediante seminarios de grupo para la aplicación práctica del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Este equipo estuvo formado por cuatro profesores que fueron los que impartieron docencia a los dos grupos experimentales y a los dos grupos control junto con el investigador principal que no participó en la labor docente. Con una periodicidad quincenal se llevaron a cabo reuniones en las que participaron los dos profesores de las aulas experimentales y el investigador principal; en ellas, se compartieron las experiencias particulares de cada aula y se analizó la actuación del profesor como posible repercusión, positiva o negativa, en las observaciones expuestas; la organización del aula, el enfoque práctico, la relación personal e interacción. Como nos enseñan Castillo y Cabrerizo (2006).

La fase postest se llevó a cabo en el mes de junio de 2010. A los alumnos se les aplicó la prueba para medir el desarrollo de la competencia matemática (PRUCOMAT) el mismo día de la semana y a la misma hora que en la fase pretest. La corrección de las pruebas siguió el mismo procedimiento que en la fase pretest.

RESULTADOS

En primer lugar, se estudió mediante un análisis de la varianza si existían diferencias estadísticamente significativas ($p < 0,05$) en las variables dependientes evaluadas en la fase pretest, obteniéndose respuesta negativa para todas ellas.

Con la finalidad de comparar los cambios producidos por la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en los grupos experimentales se realizó un análisis de varianza múltiple en relación con todas las variables evaluadas, investigando, también, la repercusión del citado programa en los valores de las variables intervinientes. Se estudió la existencia o no de diferencias significativas respecto a la ocupación de los padres, la situación familiar, el nivel de estudios de los padres y la dificultad para las matemáticas, obteniéndose respuesta negativa en todos los casos.

Tabla 3. *Resultados del ANOVA realizado comparando los grupos experimental y control de 1º de ESO*

VARIABLE	F	P
Pensar y razonar matemáticamente	34,643	,000
Plantear y resolver problemas matemáticos	1.800,474	,000
Argumentar matemáticamente	6.482,398	,000
Utilizar símbolos y formalismos matemáticos	672,778	,000
Comunicarse con y sobre las matemáticas	918,506	,000

Tabla 4. *Resultados del ANOVA realizado comparando los grupos experimental y control de 2º de ESO*

VARIABLE	F	P
Pensar y razonar matemáticamente	33,349	,000
Plantear y resolver problemas matemáticos	626,704	,000
Argumentar matemáticamente	11.145,311	,000
Utilizar símbolos y formalismos matemáticos	2.059,933	,000
Comunicarse con y sobre las matemáticas	1.262,090	,000

Tanto en 1º como en 2º de ESO, la razón F indicó que los cambios pretest-postest fueron estadísticamente significativos al 100% en todas las variables dependientes estudiadas. Los cambios producidos en los grupos experimentales de la fase postest fueron significativos respecto a todos y cada uno de los otros grupos. No se presentaron diferencias significativas (postest-pretest) entre los grupos control de 1º y 2º de ESO.

Como complemento a la interpretación de los resultados que obtuvieron los alumnos en PRUCOMAT, se introdujo la noción de *nivel de desarrollo de la competencia matemática* (NICOMAT) que es el grado en que el alumno desarrolla dicha competencia tras la aplicación del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas (para ello se hizo un análisis comparativo de los resultados obtenidos por el alumno en PRUCOMAT de las fases pretest y postest). Se distinguieron los siguientes:

- NICOMAT 0: El alumno no mejora en el desarrollo de ninguna capacidad de las medidas en PRUCOMAT.
- NICOMAT 1: El alumno mejora en el desarrollo de una capacidad de las medidas en PRUCOMAT.
- NICOMAT 2: El alumno mejora en el desarrollo de dos capacidades de las medidas en PRUCOMAT.
- NICOMAT 3: El alumno mejora en el desarrollo de tres capacidades de las medidas en PRUCOMAT.
- NICOMAT 4: El alumno mejora en el desarrollo de cuatro capacidades de las medidas en PRUCOMAT.
- NICOMAT 5: El alumno mejora en el desarrollo de cinco capacidades de las medidas en PRUCOMAT.

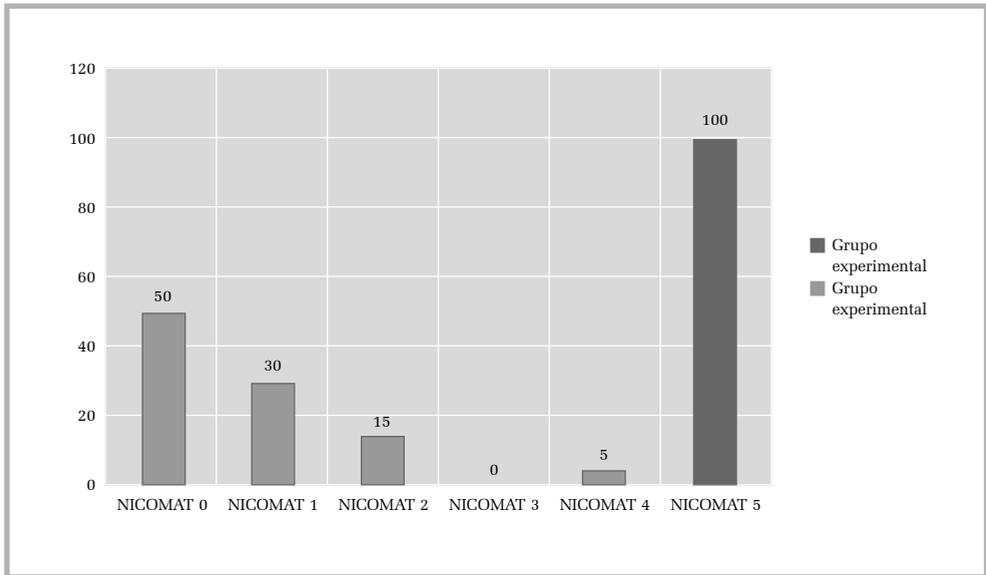


Figura 2. Resultados de NICOMAT: 1º ESO

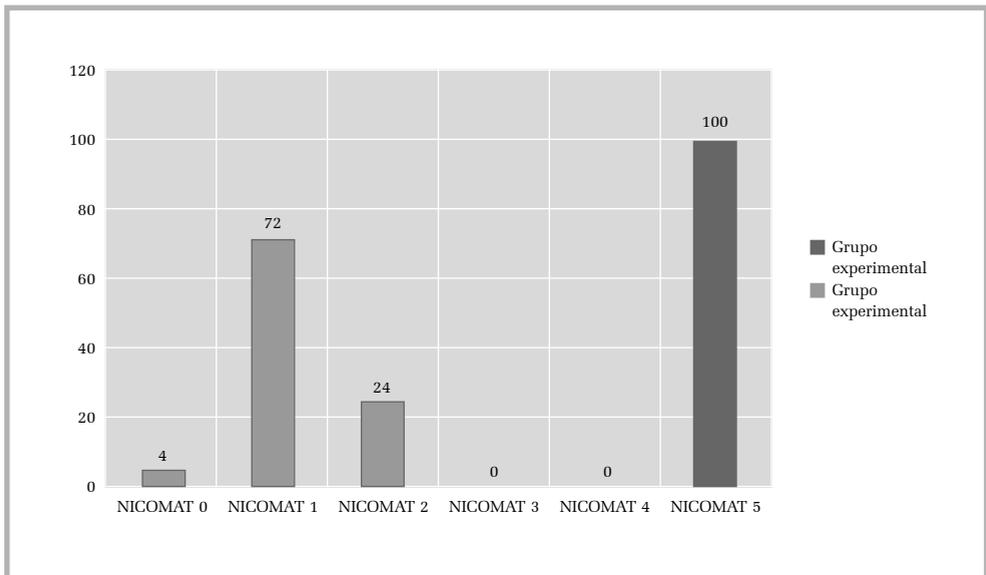


Figura 3. Resultados de NICOMAT: 2º ESO

Se observó que la totalidad de los alumnos de los grupos experimentales de 1º y 2º de ESO mejoraron en el desarrollo de las cinco capacidades evaluadas en PRUCOMAT. Los resultados de los grupos control de 1º y 2º de ESO fueron considerablemente mejorables. Esto evidencia que el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolló de manera muy considerable la competencia matemática en alumnos de 1º y 2º de ESO. Se pretendió ver hasta qué punto podían ser explicados los cambios que se habían producido, por la aplicación del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en cada variable, por los cambios que se habían producido en las otras variables. Para cuantificar la relación se calculó: el coeficiente de correlación múltiple y el coeficiente de determinación corregido o ajustado. La prueba de significación del coeficiente de correlación se realizó considerando la hipótesis alternativa como bilateral (es decir, el coeficiente de correlación poblacional es distinto de cero). Para analizar las condiciones de aplicación de la regresión, se realizó un análisis de los residuos, observando la exigencia de normalidad de estos.

Tabla 5. *Análisis de regresión lineal múltiple: 1º ESO*

	COEFICIENTE DE CORRELACIÓN MÚLTIPLE	COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN CORREGIDO	F	VARIABLES QUE NO INTERVIENEN EN ECUACIÓN	CURVA
PRM	.885	.770	.000	0	Normal
PRPM	.996	.991	.000	0	Normal
AM	.996	.992	.000	0	Normal
USFM	.995	.989	.000	0	Normal
CM	.996	.992	.000	0	Normal

Tabla 6. *Análisis de regresión lineal múltiple: 2º ESO*

	COEFICIENTE DE CORRELACIÓN MÚLTIPLE	COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN CORREGIDO	F	VARIABLES QUE NO INTERVIENEN EN ECUACIÓN	CURVA
PRM	.906	.812	.000	0	Normal
PRPM	.986	.971	.000	0	Normal
AM	.998	.996	.000	0	Normal
USFM	.998	.996	.000	0	Normal
CM	.997	.994	.000	0	Normal

Tanto en 1º como en 2º de ESO, se observó que los cambios producidos en esas variables se podían explicar por los cambios que se habían producido en todas y cada una de las demás variables, con una fiabilidad media del 95%. La significación F indica que el acierto por azar es cero, y la distribución es normal. Por tanto, las predicciones que se pudieran establecer para los alumnos de 1º y 2º de ESO del centro educativo considerado tendrían un alto grado de fiabilidad.

DISCUSIÓN

El fin principal de este estudio consistió en comprobar si la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas desarrolla la competencia matemática en alumnos de 1º y 2º de ESO. Con esta investigación, se ha aportado evidencia empírica de la importancia de la actividad de inventar y reconstruir situaciones problemáticas, para favorecer el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de 1º y 2º de ESO.

Los resultados de la investigación señalan un incremento significativo de la competencia matemática en los alumnos de los grupos experimentales. Esperamos que este incremento pueda ser confirmado estadísticamente mediante futuros estudios una vez ampliada la muestra con centros de titularidad privada, concertada y de un entorno no urbano. De estos resultados, se puede concluir que si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 1º y 2º de ESO, entonces se desarrolla la competencia matemática de estos alumnos. De lo anterior deducimos que se prueba la hipótesis del estudio.

De estos resultados, se puede concluir lo siguiente:

- *Cuánto más incompleta se presente una situación problemática, capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad que tiene de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Las situaciones que se presentan de forma completa y terminada debilitan el aprendizaje, al ignorarse la dinámica de relaciones intelectuales que han intervenido en el proceso de su construcción.*
- *La invención de situaciones problemáticas permite al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos. La concienciación del error es, para el alumno, reflexión, y para el profesor, disminución de la ignorancia que posee sobre lo que sus alumnos desconocen. Tal conocimiento adquiere un significado que da utilidad*

al medio en el que se desenvuelven las relaciones de enseñanza-aprendizaje. El diagnóstico, la detección, corrección y superación de los errores, como parte legítima de los procesos de mejora en el rendimiento de la resolución de problemas matemáticos, ha surgido en un marco conceptual consistente, basado en la aplicación de los modelos utilizados en el Programa de Intervención.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aizpún, A. (1972). *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Barcelona: Vicens Vives.
- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.
- Castillo Arredondo, S y Cabrerizo Diago, J. (2006). *Formación del Profesorado en Educación Superior. Didáctica y Currículo* (Volumen 1); *Desarrollo curricular y evaluación* (Volumen 2). Madrid: McGraw Hill.
- De Guzmán, M. (1984). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor.
- Escamilla, A. (2008). *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros*. Barcelona: Editorial Graó.
- Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayéutica.
- Fernández Bravo, J. A. (2002). Investigación sobre resolución de problemas matemáticos. *Educación y Futuro*, 6, 45-64.
- Godino, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, 9-19.
- Goñi, J. (2008). *3²-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- Lester, F. y Charles, R. (Eds.) (2003). *Teaching mathematics through problem solving: PreK – 6*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Marcos, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27, 2, 241-256.

- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, 21-29.
- Poincaré, H. (1946). *El valor de la ciencia*. Buenos Aires: Espasa Calpe.
- Puig, L.; F. Cerdán. (1988): *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Roig, A. y Llinares, S. (2006). Dimensiones de la competencia matemática al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria. Caracterización y análisis. En J. V. Aymerich, y S. Macario Vives (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp.283-291). Castellón de la Plana: Publicaciones de la Universidad Jaime I.
- Shoenfeld, A. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. Madrid: MEC.
- Törner, G., Schoenfeld, A. y Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 5-6, 353.