

Zentrale Grenzwertsätze im Random Connection Model

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Franz Nestmann, M.Sc.
geboren in Breisach am Rhein

Tag der mündlichen Prüfung: 6. Februar 2019

Referent: Prof. Dr. Günter Last

Korreferent: Prof. Dr. Daniel Hug

VERÖFFENTLICHUNGEN

Der Inhalt der Kapitel 3 und 4 (ausgenommen Abschnitt 4.4) ist Thema der folgenden Publikation:

Last, G., Nestmann, F. und Schulte, M. (2018). The random connection model and functions of edge-marked Poisson processes: second order properties and normal approximation. arXiv:1808.01203v1.

DANKSAGUNG

Diese Dissertation entstand zwischen 2015 und 2018, während ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Stochastik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) beschäftigt war. Dabei konnte ich immer auf die Hilfe und Unterstützung vieler mir sehr wichtiger Menschen zählen, denen ich an dieser Stelle meinen besonderen Dank aussprechen möchte.

Allen voran danke ich ganz herzlich meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Günter Last, der mich für die stochastische Geometrie begeisterte. Ich lernte sehr viel durch sein umfangreiches Fachwissen und er ließ mir stets ein offenes Ohr. Von Beginn an gab er mir bei der gemeinsamen Arbeit immer die Gelegenheit, mich einzubringen. Gleichzeitig genoss ich eine große Freiheit, die ich sehr zu schätzen weiß und nicht als selbstverständlich empfinde.

Herrn Prof. Dr. Daniel Hug danke ich für seine Bereitschaft der Korreferent dieser Arbeit zu sein. Ich habe stark von seinem detailreichen Feedback profitiert und freue mich sehr über sein Interesse an meiner Dissertation.

Ein besonderer Dank gebührt Herrn Dr. Matthias Schulte, der mich in großem Maße unterstützte. Viele Ergebnisse unserer Zusammenarbeit beruhen auf seinem mathematischen Sachverstand oder wurden durch fachliche Diskussionen mit ihm inspiriert.

Ich schätze mich glücklich, meine Arbeit in der freundlichen und produktiven Atmosphäre des Instituts für Stochastik geschrieben zu haben, für welche ich allen aktuellen und ehemaligen Mitgliedern des Instituts danke. Es ist nichts alltägliches in einem solch angenehmen Umfeld zu arbeiten, wozu auch ganz besonders Frau Michaela Regelin und Frau Tatjana Dominic im Sekretariat beitragen. Ich freue mich sehr, viele meiner (ehemaligen) Kolleginnen und Kollegen zu meinen Freunden zählen zu dürfen. Dabei danke ich speziell Herrn Dr. Bruno Ebner, der mich seit meiner Zeit als Student kennt und auf dessen Rat ich immer zählen konnte.

Meiner Familie und meinen Freunden bin ich dankbar für den starken Rückhalt und das Vertrauen, das sie mir entgegenbrachten. Besonders meine Eltern standen allzeit bedingungslos hinter mir und haben mich auf meinem Weg begleitet, wofür ich große Dankbarkeit empfinde.

Meiner Frau Sophia Nestmann gebührt weitaus mehr Dankbarkeit als ich hier mit Worten zum Ausdruck bringen kann. Sie wurde in ihrer Unterstützung niemals müde und ich bin stolz und glücklich sie an meiner Seite zu wissen.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	13
2.1. Wahrscheinlichkeitstheorie und Punktprozesse	14
2.2. Normalapproximation von Poisson-Funktionalen	18
2.3. Graphentheorie	21
2.4. Konvexe Körper und die Formel von Steiner	23
3. Das allgemeine Modell	25
3.1. Definition des allgemeinen Modells	25
3.2. Formeln für erste und zweite Momente	27
3.3. Eine alternative Modellbeschreibung und Differenzenoperatoren	30
3.4. Varianzungleichungen	36
3.5. Normalapproximation	44
4. Das klassische RCM	53
4.1. Asymptotische Kovarianzen	54
4.2. Zentrale Grenzwertsätze für die Komponentenzahl	65
4.3. Gesamtkomponentenzahl	81
4.4. Knotengrade	90
5. Das markierte RCM	97
5.1. Asymptotische Kovarianzen	101
5.2. Zentrale Grenzwertsätze für die Komponentenzahl	121
5.3. Gesamtkomponentenzahl	135
A. Ein Lemma über Poisson-Prozesse	145

KAPITEL 1

EINLEITUNG

In der Mathematik besteht ein Graph aus einer Menge von Knoten und einer Menge von Kanten, wobei jede der Kanten eine Verbindung zwischen zwei Knoten repräsentiert. So einfach diese Beschreibung auch ist, sie ist doch flexibel genug, sodass wir quer durch alle Wissenschaften und generell in der uns umgebenden Welt eine Vielzahl von Strukturen finden, die sich durch Graphen modellieren lassen. Je nach Situation variieren dabei die Interpretationen der Knoten und Kanten. Ein Historiker, der einen Stammbaum untersucht, hat einen Graphen vor sich, genauso wie ein Biologe, der sich mit der Übertragung einer bestimmten Krankheit innerhalb einer Population von Individuen beschäftigt. Im Beispiel des Stammbaums beschreiben die Kanten eine direkte Abstammung, wohingegen eine Kante im zweiten Beispiel für eine Übertragung der Krankheit steht. Durch das Erstarken der Computertechnologie und der Rechenleistung in den letzten Jahrzehnten sind wir in der Lage immer größere und komplexere Graphen zu untersuchen. Uns begegnen solche Beispiele, wenn wir uns von unserem Navigationsgerät ans Ziel führen lassen, oder während wir im Internet den Verlinkungen zwischen Webseiten folgen. Dabei sind im ersten Fall die Knoten und Kanten durch Kreuzungen und Straßen und im zweiten Fall durch Webseiten und Verlinkungen gegeben. Doch bei der Komplexität mancher Netzwerke stoßen auch moderne Computer an ihre Leistungsgrenze. Etwa umfasst das menschliche Gehirn im Durchschnitt 89 Milliarden Neuronen (Knoten), die durch 100 Billionen Synapsen (Kanten) miteinander verbunden sind. Um Strukturen dieses Ausmaßes zu analysieren sind deterministische Methoden oft nicht ausreichend. Eine Alternative bieten Modelle zufälliger Graphen, deren statistische Eigenschaften untersucht werden können, nachdem sie der jeweiligen Fragestellung angepasst wurden.

Zwei grundlegende und bereits lang studierte mathematische Modelle zufälliger Graphen sind der *Erdős-Rényi-Graph* und der *Gilbert-Graph*. Das zuerst genannte Modell geht auf

die Arbeiten [14, 15] aus dem Jahr 1959 zurück. Der darin vorgestellte Graph besitzt die Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl ist. Der Zufall kommt bei den Kanten ins Spiel. So ist jedes Paar von Punkten mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ durch eine Kante verbunden, unabhängig von allen anderen (möglichen) Kanten. Damit ist dieser Graph zwar zufällig, hat jedoch keine geometrischen Eigenschaften, da seine Knoten keine räumliche Komponenten besitzen.

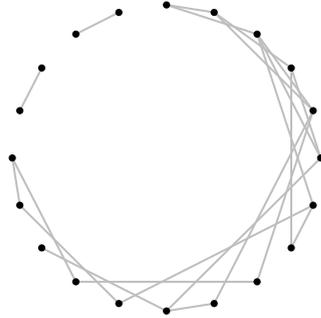


Abbildung 1.1.: Erdős-Rényi-Graph mit 20 Punkten und Verbindungswahrscheinlichkeit 0.1.

Die Ecken des Gilbert-Graphen, welcher im Jahr 1961 in [16] erstmalig auftaucht, sind hingegen (zufällige) Punkte in \mathbb{R}^d (mit $d \in \mathbb{N}$), die durch einen Punktprozess ζ erzeugt werden. In diesem Modell sind zwei Punkte $x, y \in \zeta$ immer dann durch eine Kante verbunden, wenn ihre räumliche (euklidische) Distanz $|x - y|$ eine vorgegebene Schranke $r > 0$ nicht übersteigt. Bei gegebenem ζ sind folglich die Kanten des Gilbert-Graphen deterministisch. Der Gilbert-Graph wird in der englischsprachigen Literatur auch *Random Geometric Graph* genannt, wobei besonders auf das Buch [37] verwiesen werden muss, das eine Vielzahl wichtiger Resultate zu diesem Modell bereitstellt. Der Gilbert-Graph kann visualisiert werden, indem um jeden Punkt von ζ eine Kugel mit Radius $r/2$ gezeichnet wird. Wann immer sich zwei Kugeln schneiden, werden die zugehörigen Zentren durch eine Kante verbunden, siehe Abbildung 1.2.

Im Fokus der vorliegenden Arbeit steht das *Random Connection Model (RCM)*, welches in der Lage ist, die räumlichen Aspekte des Gilbert-Graphen mit den zufälligen Kanten des Erdős-Rényi-Graphen zu kombinieren. Die Knoten des RCMs werden, wie die Knoten des Gilbert-Graphen, durch einen Punktprozess ζ in \mathbb{R}^d erzeugt. Bei gegebenem ζ werden je zwei Punkte $x, y \in \zeta$, $x \neq y$, unabhängig von allen anderen Punktpaaren, mit Wahrscheinlichkeit $\varphi(x, y)$ durch eine Kante verbunden. Dabei ist $\varphi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ eine messbare und symmetrische Funktion, die wir im Folgenden auch *Verbindungsfunktion* nennen werden. Durch entsprechende Wahlen der Verteilung von ζ und der Verbindungsfunktion φ lassen sich Modelle mit höchst unterschiedlichen Eigenschaften erzeugen. Besteht etwa ζ aus einer festen Anzahl von Punkten in \mathbb{R}^d und wird $\varphi(x, y) := p \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, gewählt, so erhalten wir den Erdős-Rényi-Graphen, insofern wir die räumlichen Positionen der Punkte außer Acht lassen. Auch das Modell des Gilbert-Graphen wird vom RCM umfasst, indem die Verbindungsfunktion $\varphi(x, y) := \mathbb{1}\{|x - y| \leq r\}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, verwendet wird. An dieser Stelle sei jedoch festgehalten, dass die

hier präsentierten Ergebnisse zwar für den Gilbert-Graphen, aber nicht für den Erdős-Rényi-Graphen gelten, da in letzterem auch beliebig lange Verbindungen (mit gleich bleibender) Wahrscheinlichkeit möglich sind.

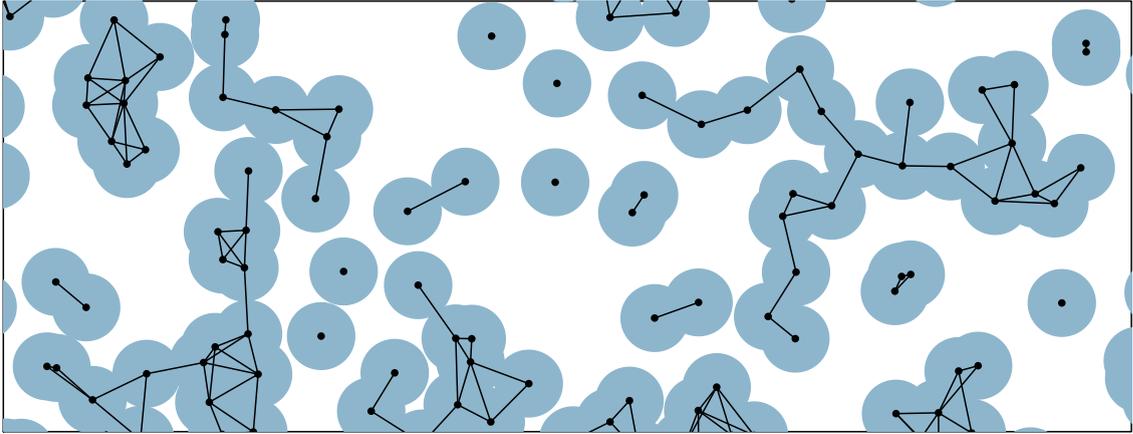


Abbildung 1.2.: Ausschnitt eines Gilbert-Graphen in \mathbb{R}^2 .

Um mit der großen Flexibilität des RCMs arbeiten zu können, setzen wir stets voraus, dass der den Knoten zugrundeliegende Punktprozess ζ ein Poisson-Prozess ist. Dadurch überträgt sich die Unabhängigkeit, welche dem Poisson-Prozess innewohnt, auf unser Modell, was für uns von großer struktureller Bedeutung ist. Außerdem erlaubt der Poisson-Prozess, im Unterschied zu Prozessen mit einer festen und endlichen Anzahl von Punkten, stationäre RCMs auf \mathbb{R}^d zu definieren. Ein RCM, das auf einem stationären Poisson-Prozess basiert, taucht in der Literatur erstmalig im Jahr 1991 in [38] auf. Darin wurde zum einen die Existenz einer kritischen Intensität für das Auftreten von Perkolations gezeigt und zum anderen Eigenschaften der Zusammenhangskomponenten des Modells untersucht. Weitere Aussagen zu Perkolations, auch auf Grundlage allgemeinerer stationärer Punktprozesse, sind in [5, 32, 33] zu finden. In der Literatur zu Perkolations tauchen auch Gittermodelle in \mathbb{Z}^d auf, deren Kanten zufällig und unabhängig sind, wobei die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten durch eine Verbindungsfunktion gegeben sind. Das RCM kann als eine stetige Version dieser diskreten Modelle betrachtet werden. Entsprechende Referenzen sind [7, 8, 19]. Aussagen über Konnektivität, isolierte Knoten, Kantenlängen und Knotengrade des RCMs bieten [10, 17, 22, 30, 31, 39, 40], wobei in diesen Quellen teilweise mit endlichen Poisson-Prozessen gearbeitet wird. Es gibt auch Verallgemeinerungen des RCMs auf den Torus. Beispielsweise untersucht [11] den Durchmesser eines solchen Modells.

Die hier genannten Fragestellungen spielen auch in anderen (zufälligen) Netzwerken eine große Rolle und sind dabei oft durch konkrete Anwendungen, etwa in der Telekommunikation, motiviert. Einen sehr guten Überblick über relevante Modelle und Themen an dieser Schnittstelle zwischen Mathematik und Anwendung gewähren die Bücher [13, 20]. Auch in die Statistik haben Methoden, basierend auf zufälligen Graphen, Einzug gehalten, siehe beispielsweise [18]. Dort kommen sie insbesondere bei der Klassifikation großer Datenmengen und der Analyse

von Clustern zum Einsatz, vergleiche [1, 34]. Schließlich verweisen wir noch auf das Buch [35], welches eine große Übersicht über Beispiele und Anwendungen bietet. Darin werden (zufällige) Netzwerke auch im Kontext verschiedener anwendungsbezogener Disziplinen beleuchtet, wie etwa der Biologie, der Soziologie und den Informationswissenschaften.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zum einen mit einem (klassischen) RCM in \mathbb{R}^d und zum anderen mit einem markierten RCM, dessen Punkte aus einer Ortskoordinate in \mathbb{R}^d und einer zufälligen Marke in $[0, \infty)$ bestehen. Für die Präsentation ausgewählter Ergebnisse beider Modelle betrachten wir zunächst ein allgemeines RCM in einem Borelraum \mathbf{X} . Die Knoten des Modells entstammen dabei einem Poisson-Prozess η in \mathbf{X} mit einem diffusen und σ -endlichen Intensitätsmaß λ . Weiterhin sei $\varphi: \mathbf{X}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine messbare und symmetrische Verbindungsfunktion. Sind die Punkte von η vorgegeben, so wird jedes Paar von Punkten $x, y \in \eta$, $x \neq y$, mit Wahrscheinlichkeit $\varphi(x, y)$ durch eine Kante verbunden, unabhängig von allen anderen Punktpaaren. Der resultierende (ungerichtete) zufällige Graph mit Knotenmenge η ist das *allgemeine RCM* und wird mit $\Gamma_\varphi(\eta)$ bezeichnet. Die maximalen zusammenhängenden (induzierten) Teilgraphen des RCMs nennen wir (*Zusammenhangs-*)*Komponenten*. Dieser allgemeine Rahmen lässt sich sowohl auf ein klassisches (unmarkiertes) als auch auf ein markiertes RCM spezialisieren.

Im unmarkierten Fall arbeiten wir mit $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$ und einem stationären Poisson-Prozess η in \mathbb{R}^d . Folglich ist sein Intensitätsmaß durch $\lambda = \beta \lambda_d$ gegeben, wobei λ_d das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d bezeichnet und $\beta > 0$ gelte. Weiter nehmen wir an, dass für $x, y \in \mathbb{R}^d$ die Verbindungswahrscheinlichkeit $\varphi(x, y)$ lediglich von $x - y$ abhängt und somit $\varphi(x, y) = \varphi(0, x - y)$ gilt. Daher schreiben wir abkürzend $\varphi(x)$ anstelle von $\varphi(0, x)$. Generell gelte die Voraussetzung

$$0 < \int \varphi(x) dx < \infty.$$

Dabei stellt die Positivität des obigen Integrals sicher, dass in $\Gamma_\varphi(\eta)$ überhaupt Kanten auftreten, und die Endlichkeit gewährleistet, dass die Punkte des Modells im Mittel nur endlich viele Nachbarn besitzen. Für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ identifizieren wir jede Komponente von $\Gamma_\varphi(\eta)$, die aus k Knoten besteht, mit ihrem lexikographisch kleinsten Punkt. Den zugehörigen stationären Punktprozess bezeichnen wir mit $\eta_{\varphi, k}$ und für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ sei $\eta_{\varphi, k}(A)$ die Anzahl von Punkten aus $\eta_{\varphi, k}$, die in A liegen. Abbildung 1.3 zeigt zur Illustration einen Ausschnitt eines RCMs in \mathbb{R}^2 , in dem alle Komponenten der Größe vier farbig markiert sind.

Im Folgenden umfasse die Menge \mathcal{K}^d alle kompakten und konvexen Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$, deren Inneres nicht leer ist. Die Elemente von \mathcal{K}^d werden auch *konvexe Körper* genannt. Für einen konvexen Körper $A \in \mathcal{K}^d$ sei $r(A)$ der Inradius von A . Die folgenden asymptotischen Resultate gelten stets für Folgen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von konvexen Körpern mit $r(A_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Dieses asymptotische Regime bezeichnen wir abkürzend mit $r(A) \rightarrow \infty$. Es ist mit dem thermodynamischen Regime in Resultaten zum Gilbert-Graphen vergleichbar (siehe [37, Seite 9]), wobei bei letzterem die Intensität des Prozesses ansteigt und gleichzeitig die maximale Distanz für eine Verbindung sinkt. Schließlich sei N eine auf \mathbb{R} standardnormalverteilte

Zufallsvariable und \xrightarrow{d} bezeichne Konvergenz in Verteilung. Das erste Resultat ist ein zentraler Grenzwertsatz für die Anzahl der Komponenten der Größe k .

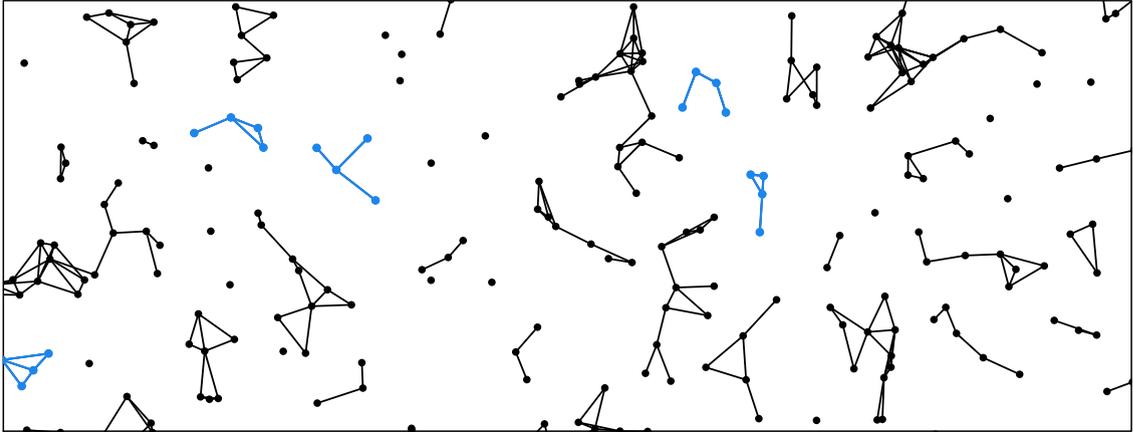


Abbildung 1.3.: Ausschnitt eines RCMs in \mathbb{R}^2 , wobei alle Komponenten der Größe vier farbig markiert sind.

Theorem 1.0.1. *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\frac{\eta_{\varphi,k}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,k}(A)}{\sqrt{\text{Var}(\eta_{\varphi,k}(A))}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Unter der Annahme, dass die Verbindungsfunktion lediglich vom Abstand der beteiligten Punkte abhängt und in diesem monoton fällt, ist ein Beweis von Theorem 1.0.1 in [4] zu finden. Dabei muss jedoch für $k \geq 2$ zusätzlich gefordert werden, dass der Träger der Verbindungsfunktion beschränkt ist. Im Fall der isolierten Knoten, $k = 1$, formuliert auch [42] einen entsprechenden Grenzwertsatz. Der in [42] geführte Beweis weist jedoch Fehler auf, was in [4] festgestellt und korrigiert wurde. Auch in [40] wird ein zentraler Grenzwertsatz für die Anzahl der Komponenten der Größe k gezeigt, allerdings für eine unterschiedliche Klasse von Verbindungsfunktionen.

Wir präsentieren ebenfalls eine multivariate Version des zentralen Grenzwertsatzes aus Theorem 1.0.1. Dazu zeigen wir die Existenz der asymptotischen Kovarianzen

$$\sigma_{\varphi,\varphi}^{(i,j)} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\eta_{\varphi,i}(A), \eta_{\varphi,j}(A))}{\lambda_d(A)}, \quad i, j \in \mathbb{N},$$

und weisen nach, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die (asymptotische) Kovarianzmatrix $(\sigma_{\varphi,\varphi}^{(i,j)})_{1 \leq i, j \leq k}$ positiv definit ist. Wir erhalten damit folgenden multivariaten zentralen Grenzwertsatz.

Theorem 1.0.2. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden und N_{Σ} ein m -dimensionaler zentrierter Zufallsvektor mit Normalverteilung und Kovarianzmatrix $\Sigma =$*

$(\sigma_{\varphi, \varphi}^{(k_i, k_i)})_{1 \leq i, j \leq m}$. Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}}(\eta_{\varphi, k_1}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, k_1}(A), \dots, \eta_{\varphi, k_m}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, k_m}(A)) \xrightarrow{d} N_{\Sigma} \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Durch eine Verschärfung der Voraussetzungen an die Verbindungsfunktion sind wir in der Lage auch einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz für die Anzahl von k -Komponenten zu beweisen. Dazu sei $\tilde{\varphi}: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ eine messbare Funktion mit

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \tilde{\varphi}(s) \leq \tilde{\varphi}(t), \quad 0 \leq s \leq t, \quad \text{und} \quad \int \tilde{\varphi}(|x|)^{1/3} dx < \infty. \quad (1.0.1)$$

Für zwei reelle Zufallsvariablen X und Y bezeichne

$$d_K(X, Y) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(Y \leq t)|$$

die *Kolmogorov-Distanz* zwischen den Verteilungen von X und Y .

Theorem 1.0.3. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte (1.0.1). Dann existieren positive Konstanten $\tau > 0$ und $C > 0$, welche von β , φ , $\tilde{\varphi}$ und k abhängen, so dass*

$$d_K\left(\frac{\eta_{\varphi, k}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, k}(A)}{\sqrt{\text{Var}(\eta_{\varphi, k}(A))}}, N\right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Wir betrachten nicht nur endliche Komponenten einer bestimmten Größe, sondern auch Komponenten einer bestimmten Form. Dabei zählen wir alle Komponenten des RCMs $\Gamma_{\varphi}(\eta)$, die isomorph zu einem vorgegebenen zusammenhängenden Graphen G sind. Den entsprechenden Punktprozess der lexikographischen Minima dieser Komponenten bezeichnen wir mit $\eta_{\varphi, G}$. Die Theoreme 1.0.1 und 1.0.3 gelten in entsprechender Form auch für diesen Prozess, genauso wie eine Variante von Theorem 1.0.2, bei welcher mehrere Graphen gezählt werden. Ein vergleichbarer multivariater zentraler Grenzwertsatz für den Gilbert-Graphen kann in [37, Theorem 3.11] gefunden werden. Darüber hinaus behalten die univariaten zentralen Grenzwertsätze aus Theorem 1.0.1 und 1.0.3 ebenfalls ihre Gültigkeit, wenn das betrachtete Funktional eine nicht triviale Linearkombination von Anzahlen verschiedener Graphen ist.

Neben der Anzahl von Graphen einer bestimmten Größe oder Form, interessieren wir uns auch für die Gesamtzahl aller endlichen Komponenten in einem gegebenen Beobachtungsfenster. Es sei $\bar{\eta}_{\varphi}$ der Punktprozess der lexikographischen Minima aller endlichen Zusammenhangskomponenten und $\bar{\eta}_{\varphi}(A)$ die Anzahl derselben in einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^d$. Während bereits [38, Theorem 2] ein starkes Gesetz der großen Zahlen für dieses Funktional bereitstellt, sind wir in der Lage die Existenz und Positivität der asymptotischen Varianz, sowie einen zentralen Grenzwertsatz zu zeigen.

Theorem 1.0.4. *Der Grenzwert*

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\bar{\eta}_\varphi(A))}{\lambda_d(A)}$$

existiert, liegt in $(0, \infty)$ und es gilt

$$\frac{\bar{\eta}_\varphi(A) - \mathbb{E}\bar{\eta}_\varphi(A)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{\eta}_\varphi(A))}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Dieser Grenzwertsatz basiert auf den genannten multivariaten Ergebnissen (siehe Theorem 1.0.2) und approximativen Argumenten beim Umgang mit den beteiligten Varianzen. Einen vergleichbaren zentralen Grenzwertsatz für die Gesamtzahl aller endlichen Zusammenhangskomponenten des Gilbert-Graphen ist in [37, Theorem 13.27] zu finden. Dessen Beweis verwendet jedoch einen unterschiedlichen Ansatz, bei welchem Ergebnisse der Perkolationstheorie zum Einsatz kommen.

In dem hier vorgestellten klassischen RCM hängen die durch φ gegebenen Verbindungswahrscheinlichkeiten lediglich von der Differenz der Positionen der Punkte ab. Als Voraussetzung für quantitative zentrale Grenzwertsätze (vergleiche Theorem 1.0.3) muss verschärfend angenommen werden, dass φ durch eine Verbindungsfunktion dominiert wird, welche nur vom Abstand der Punkte abhängt und in diesem monoton fällt (siehe (1.0.1)). Um die Flexibilität des Modells zu erhöhen, verallgemeinern wir das RCM, indem wir die Punkte zufällig und unabhängig markieren. Dazu wählen wir $\mathbf{X} := \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ und η als einen Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß $\lambda := \beta \lambda_d \otimes \mathbb{V}$, wobei \mathbb{V} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)$ ist und $\beta > 0$ gilt. Damit ist η hier die unabhängige Markierung eines stationären Poisson-Prozesses in \mathbb{R}^d mit Marken in $[0, \infty)$ und Markenverteilung \mathbb{V} . Die Wahrscheinlichkeit für eine Verbindung zwischen zwei Punkten hängt in diesem Modell nicht nur von der räumlichen Distanz (in \mathbb{R}^d) der Knoten ab, sondern auch von ihren jeweiligen Marken in $[0, \infty)$. Mit der Absicht vergleichbare Ergebnisse wie im unmarkierten RCM zu beweisen, sind mit Blick auf (1.0.1) einige Voraussetzungen an den Einfluss der Marken auf die Verbindungswahrscheinlichkeiten zu erwarten. Zur Definition der Verbindungsfunktion φ seien \mathbb{W} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} , W eine Zufallsvariable mit Verteilung \mathbb{W} , die unabhängig von η ist und $g: [0, \infty)^2 \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine messbare Funktion, welche in den ersten beiden Argumenten symmetrisch und monoton wachsend ist. Damit definieren wir

$$\varphi((x, r), (y, s)) := \mathbb{P}(|x - y| \leq g(r, s, W)), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty). \quad (1.0.2)$$

Mit dieser Wahl von φ sinkt die Verbindungswahrscheinlichkeit im Abstand der Knoten. Weiter sorgen die Eigenschaften von g dafür, dass größere Marken auch die Chancen auf Verbindungen erhöhen. Wie auch im klassischen Fall bezeichne $\Gamma_\varphi(\eta)$ das durch diese Verbindungsfunktion definierte *markierte* RCM. Um sicherzustellen, dass in diesem Modell überhaupt Kanten

auftreten, setzen wir im Folgenden stets die Bedingung

$$\iint g(r, s, w) \mathbb{V}^2(d(r, s)) \mathbb{W}(dw) > 0$$

stillschweigend voraus. Zur Betonung des Zusammenhangs zwischen der Verbindungsfunktion φ und der Funktion g , schreiben wir zukünftig g_φ anstelle von g .

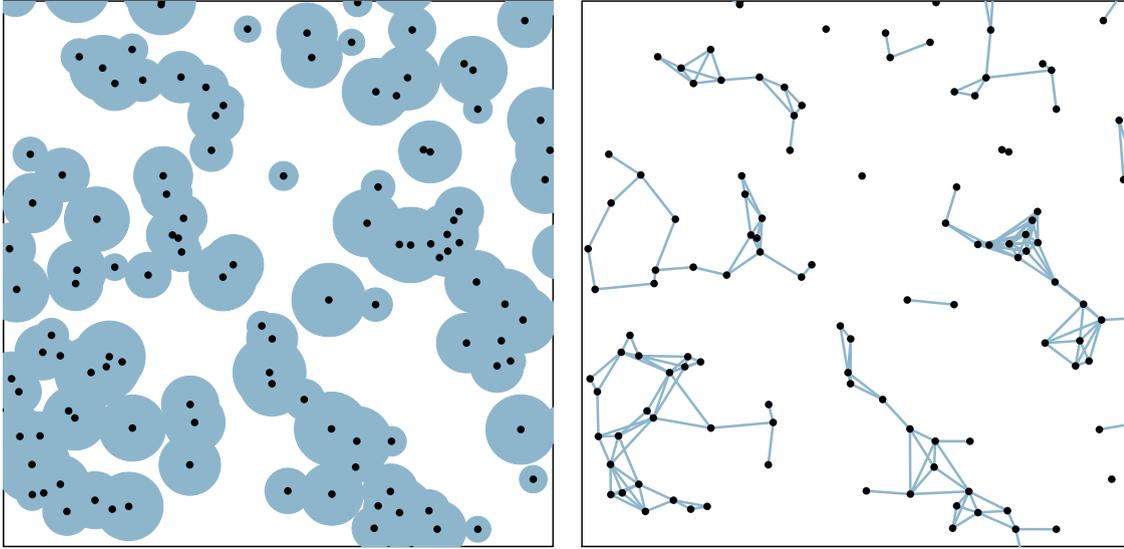


Abbildung 1.4.: Links: Boolesches Modell als zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^2 . Rechts: Zugehöriger zufälliger Graph.

Das wohl bekannteste Beispiel eines Modells aus der Literatur, welches in den hier vorgestellten Rahmen passt, ist das *Booleschen Modell* (siehe etwa [33]). Dieses ist zunächst als eine spezielle zufällige abgeschlossene Menge in \mathbb{R}^d definiert. Zu deren Erzeugung interpretieren wir die räumlichen Komponenten der Punkte aus η als Zentren abgeschlossener Kugeln und ihre Marken als deren Radien. Die Vereinigung aller Kugeln bildet das (sphärische) Boolesche Modell. Einen zufälligen Graphen erhalten wir, indem wir die Punkte aus η genau dann durch eine Kante verbinden, wenn sich ihre Kugeln schneiden, siehe auch Abbildung 1.4. Der bereits diskutierte Gilbert-Graph kann als Spezialfall des Booleschen Modells betrachtet werden, bei welchem die Radien aller Kugeln konstant und identisch sind. Mit Blick auf das Boolesche Modell als zufällige abgeschlossene Menge, verweisen wir noch auf [21], worin insbesondere zentrale Grenzwertsätze für geometrische Funktionale des Booleschen Modells gezeigt werden. In der vorliegenden Arbeit identifizieren wir das Boolesche Modell jedoch ausschließlich mit dem hier beschriebenen zufälligen Graphen. Im Rahmen des markierten RCMs erhalten wir das Boolesche Modell (als zufälligen Graphen) durch die Wahl $g_\varphi(r, s, w) := r + s$, $r, s \in [0, \infty)$, $w \in \mathbb{R}$. Allerdings nutzt das Boolesche Modell die Möglichkeiten des markierten RCMs nicht in vollem Umfang aus. Denn bei vorgegebenen markierten Punkten sind die Kanten des Modells deterministisch, was auch direkt an der Funktion g_φ abgelesen werden kann, die nicht von ihrem letzten Argument abhängt.

Das in [9] vorgestellte markierte RCM weist auch bei gegebenen markierten Punkten zufällige Kanten auf. Die dabei verwendete Verbindungsfunktion lautet

$$\varphi((x, r), (y, s)) := 1 - \exp\left(-\alpha_1 \frac{rs}{|x - y|^{\alpha_2}}\right), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty),$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ fixierte Modellparameter sind. Durch geeignetes Wählen der Funktion g_φ und der Verteilung \mathbb{W} ist es auch hier möglich, die Verbindungsfunktion in der Form (1.0.2) darzustellen (siehe Beispiel 5.0.1). Dieses Modell ist ebenfalls Gegenstand der Arbeit [3], die sich hauptsächlich mit der Simulation dieses RCMs auf dem Torus beschäftigt. Außerdem kann das Modell als eine stetige Version des Perkulationsmodells in \mathbb{Z}^d aus [7] angesehen werden, das dieselbe Verbindungsfunktion für die (markierten) Gitterpunkte verwendet.

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktion g_φ lassen sich alle bereits genannten Ergebnisse des klassischen RCMs (die Theoreme 1.0.1 bis 1.0.4) auch im markierten RCM mit der allgemeinen Verbindungsfunktion aus (1.0.2) zeigen. Dabei sind Bedingungen der Form

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\vartheta d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty \tag{1.0.3}$$

erforderlich, wobei $\vartheta \in \mathbb{N}$ je nach Situation variiert. Der multivariate zentrale Grenzwertsatz aus Theorem 1.0.2 gilt im markierten Modell, falls (1.0.3) mit $\vartheta = \max\{\max\{k_i : 1 \leq i \leq m\}, 9\}$ erfüllt ist. An der Abhängigkeit dieser Voraussetzung von den Größen der gezählten Graphen k_i , $1 \leq i \leq m$, ist die erhöhte Komplexität des Modells zu erahnen. Aus diesem Grund lassen sich die Ergebnisse des klassischen RCMs auch nicht als Spezialfälle der Ergebnisse des markierten Modells formulieren. Eine Version des quantitativen univariaten Grenzwertsatzes aus Theorem 1.0.3 lässt sich im markierten RCM unter der Voraussetzung (1.0.3) mit $\vartheta = 9$ zeigen. Hier ist es möglich durch eine alternative Varianzabschätzung (siehe Theorem 5.1.9) eine Abhängigkeit zwischen der Voraussetzung (1.0.3) und der Größe des gezählten Graphen zu vermeiden. Schließlich behält auch der zentrale Grenzwertsatz für die Gesamtzahl aller endlichen Zusammenhangskomponenten (Theorem 1.0.4) im markierten Modell seine Gültigkeit, allerdings nur, falls

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^\vartheta \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

für jedes $\vartheta \in \mathbb{N}$ gilt.

Im Unterschied zum Gilbert-Graphen sind die Kanten im (un)markierten RCM nicht nur zufällig, sondern können, je nach Wahl der Verbindungsfunktion, auch beliebig lang sein. Insbesondere deswegen ist es uns nicht möglich die Methoden, die bei den Resultaten aus der Literatur zum Gilbert-Graphen zu finden sind, auf das RCM direkt anzuwenden. Stattdessen zeigen wir Varianzabschätzungen und Ergebnisse zur Normalapproximation zunächst in einem allgemeineren Rahmen. Dazu sei abermals \mathbf{X} ein Borelraum und η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit einem diffusen und σ -endlichen Intensitätsmaß λ . Sind die Punkte aus η gegeben, so markieren wir jedes mögliche Paar von verschiedenen Punkten aus η zufällig mit Elementen eines weiteren Borelraums \mathbf{M} , wobei die Markierung unabhängig von allen anderen Punktpaaren stattfindet.

Der resultierende Punktprozess ξ ist damit eine paarweise Markierung der Punkte aus η . Mit geeigneten Wahlen von \mathbf{M} und der Verteilung der Marken kann das allgemeine RCM aus ξ gewonnen werden. Die Anzahl der Komponenten einer bestimmten Größe in einem gegebenen Beobachtungsfenster ist dann eine Funktion von ξ . Allgemein führen wir für Funktionen von ξ Differenzenoperatoren ein und zeigen Varianzabschätzungen, dabei insbesondere eine *Poincaré-Ungleichung* und einen quantitativen (univariaten) zentralen Grenzwertsatz. Hierzu verallgemeinern wir Resultate über Poisson-Funktionale aus [27] und [29]. Dies geschieht unter anderem mit Hilfe einer Approximation von ξ durch einen Poisson-Prozess, auf welchen bisherige Resultate angewendet werden können.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. In Kapitel 2 werden die wichtigsten benötigten Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie der Punktprozesse eingeführt und die verwendete Notation fixiert. Weiterhin sind dort einige Notationen und Konzepte aus der Graphentheorie und die Formel von Steiner zu finden.

Die paarweise Markierung ξ von Poisson-Punkten in einem Borelraum \mathbf{X} wird in Kapitel 3 behandelt. Genauer stellt Abschnitt 3.2 Formeln für erste und zweite Momente zur Verfügung. In den beiden darauf folgenden Abschnitten definieren wir Differenzenoperatoren und beweisen Varianzabschätzungen, wobei insbesondere die Poincaré-Ungleichung zu nennen ist. Abschnitt 3.5 liefert schließlich unter einigen Integrierbarkeitsvoraussetzungen einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz für Funktionen von ξ .

In Kapitel 4 untersuchen wir das klassische (unmarkierte) RCM, basierend auf einem stationären Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d . Wir verwenden die allgemeinen Resultate aus Kapitel 3, um in Abschnitt 4.1 Formeln und Abschätzungen asymptotischer Varianzen zu zeigen. Diese fließen dann insbesondere in die (quantitativen) zentralen Grenzwertsätze für das Zählen von bestimmten endlichen Komponenten aus Abschnitt 4.2 ein. Darüber hinaus wird für den Beweis der zentralen Grenzwertsätze das allgemeine Resultat aus Abschnitt 3.5 benötigt. In Abschnitt 4.3 präsentieren wir einen zentralen Grenzwertsatz für die Zahl aller endlichen Komponenten. Schließlich betrachten wir in Abschnitt 4.4 noch die Anzahl von Knoten mit einem vorgegebenen Grad und verwenden unsere bisherigen Methoden, um auch hier Varianzabschätzungen und einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz zu zeigen.

Kapitel 5 ist dem markierten RCM gewidmet, welches auf einem unabhängig markierten stationären Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d beruht. Dabei orientiert sich der Aufbau dieses Kapitels an den ersten drei Abschnitten von Kapitel 4. In den ersten beiden Abschnitten von Kapitel 5 betrachten wir, wie im klassischen Modell, die Anzahl von bestimmten endlichen Komponenten. Für diese zeigen wir abermals Formeln und Abschätzungen asymptotischer Varianzen und damit zentrale Grenzwertsätze. Zusätzlich präsentieren wir eine alternative Abschätzung einer asymptotischen Varianz, die es uns ermöglicht, einen zentralen Grenzwertsatz für bestimmte Zählgrößen unter abgeschwächten Voraussetzungen zu beweisen. Auch im markierten Modell ist es möglich einen zentralen Grenzwertsatz für die Anzahl aller endlichen Komponenten zu zeigen, was Gegenstand von Abschnitt 5.3 ist. Insgesamt beruht Kapitel 5 auf den allgemeinen Methoden aus Kapitel 3 und den Ideen von Kapitel 4, wobei jedoch die größere Allgemeinheit des markierten Modells eine direkte Anwendung der bisherigen Argumente verhindert. So muss

etwa beim Beweis der Positivität der asymptotischen Varianz eine andere Herangehensweise gewählt werden.

Abschließend ist im Anhang ein Lemma über Poisson-Prozesse zu finden, welches bei der Varianzabschätzung in Abschnitt 5.1 zum Einsatz kommt.

KAPITEL 2

GRUNDLAGEN

Im Folgenden bezeichnen \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{R} die natürlichen, die ganzen und die reellen Zahlen. Weiterhin umfasse $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ alle natürlichen Zahlen und die Null. Abkürzend definieren wir für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Mengen

$$[k] := \{n \in \mathbb{N} : n \leq k\} \quad \text{und} \quad [k]_0 := [k] \cup \{0\}.$$

Mit diesen Definitionen gilt insbesondere $[k] = \emptyset$ für $k = 0$ und $[k] = \mathbb{N}$ für $k = \infty$. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist, das heißt

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}.$$

Die Zahl $d \in \mathbb{N}$ sei beliebig, aber fortan fest gewählt. Damit sei \mathbb{R}^d der d -dimensionale Euklidische Raum, ausgestattet mit der Euklidischen Norm $|\cdot|$, also

$$|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Außerdem bezeichne $|\cdot|_\infty$ die Maximumsnorm auf \mathbb{R}^d , definiert durch

$$|x|_\infty := \max\{|x_i| : i \in [d]\}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise interpretieren wir die Elemente in \mathbb{R}^d als Zeilenvektoren und bezeichnen den zu $x \in \mathbb{R}^d$ transponierten Vektor mit x' .

Für eine beliebige Menge A sei $\mathbb{1}_A$, bzw. $\mathbb{1}A$ der Indikator auf A , das heißt

$$\mathbb{1}A(x) := \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

und $|A| := \text{card}(A)$ die Kardinalität der Menge A . Den (topologische) Rand einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit ∂A . Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge und $x \in \mathbb{R}^d$, so sei

$$d(x, A) := \min\{|y - x| : y \in A\}$$

die Euklidische Distanz zwischen x und A .

Weiter schreiben wir \mathcal{B}_d für die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^d , die von den offenen Mengen erzeugt wird, und λ_d für das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$.

Für einen gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ und einen Radius $r > 0$ sei

$$B^d(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq r\}$$

die abgeschlossene Kugel um x mit Radius r (bezüglich der Euklidischen Norm). Das Lebesgue-Maß der Einheitskugel kürzen wir mit $\kappa_d := \lambda_d(B^d(0, 1))$ ab.

Die Supremumsnorm für reellwertige Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

Für eine abzählbare Menge I und $k \in \mathbb{N}$ verwenden wir die Schreibweise $\sum_{i_1, \dots, i_k \in I}^\neq$ für die Summation über alle k -Tupel von paarweise verschiedenen Elementen aus I , also die Summation über alle $(i_1, \dots, i_k) \in I^k$ mit $i_m \neq i_n$ für $m \neq n$.

2.1. WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND PUNKTPROZESSE

Gegeben sei im Folgenden stets ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} . Der Wahrscheinlichkeitsraum werde als hinreichend groß angenommen, sodass alle auftretenden Zufallselemente auf ihm definiert werden können. Wir verwenden die Schreibweisen $\mathbb{E}[\cdot]$, $\text{Var}(\cdot)$ und $\text{Cov}(\cdot, \cdot)$ für den Erwartungswert, die Varianz und die Kovarianz. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Sub- σ -Algebra, so bezeichnen $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}]$ und $\mathbb{P}(\cdot | \mathcal{F})$ den bedingten Erwartungswert und die bedingte Wahrscheinlichkeit unter der Bedingung \mathcal{F} . Außerdem schreiben wir $\stackrel{d}{=}$ und \xrightarrow{d} für Gleichheit beziehungsweise Konvergenz in Verteilung. Für $p \in \mathbb{N}$ enthalte $L^p(\mathbb{P})$ alle Zufallvariablen $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Weiter bezeichnen wir die Norm $X \mapsto (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ auf $L^p(\mathbb{P})$ im Text als L^p -Norm.

Nachfolgendes Lemma liefert eine einfache und doch sehr nützliche Abschätzung für den Erwartungswert eines Produkts von Zufallsvariablen. Es kann leicht mit vollständiger Induktion und der Ungleichung von Hölder bewiesen werden.

Lemma 2.1.1. *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und X_1, \dots, X_k reelle Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|X_i^k| < \infty$ für $i \in [k]$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}|X_1 \cdots X_k| \leq (\mathbb{E}|X_1^k| \cdots \mathbb{E}|X_k^k|)^{1/k}.$$

Im Folgenden führen wir einige Sprechweisen für Punktprozesse ein und nennen die für uns wichtigsten Resultate aus diesem Bereich. Dabei verzichten wir auf die größtmögliche Allgemeinheit und beschränken uns auf den Kontext der späteren Kapitel. Wir verweisen dabei generell auf [28], wobei die Verweise an bestimmten Stellen noch präzisiert werden.

Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ ein *Borelraum*, das heißt $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ ist ein messbarer Raum und es existiert eine messbare Bijektion T zwischen \mathbf{X} und einer messbaren Teilmenge von $(0, 1]$, welche eine messbare Inverse besitzt. Weiter sei $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ die Menge aller Teilmengen von \mathbf{X} , die höchstens abzählbar unendlich viele Elemente enthalten. Für ein $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X})$ und eine Menge $B \in \mathcal{X}$ schreiben wir $\mu(B) := \text{card}(B \cap \mu)$. Wir definieren $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ als die kleinste σ -Algebra auf \mathbf{X} , so dass für jede Menge $B \in \mathcal{X}$ die Abbildung

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) \ni \mu \mapsto \mu(B) \tag{2.1.1}$$

messbar ist. Damit enthält $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ insbesondere alle Mengen der Form

$$\{\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X}) : \mu(B) = k\}, \quad B \in \mathcal{X}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

In analoger Weise definieren wir die Mengen $\mathbf{N}(\mathbf{Y})$ und $\mathcal{N}(\mathbf{Y})$ für einen beliebigen messbaren Raum $(\mathbf{Y}, \mathcal{Y})$.

Ein *Punktprozess* in \mathbf{X} ist ein Zufallselement ζ in $\mathbf{N}(\mathbf{X})$. Damit ist $\zeta(B)$ für jedes $B \in \mathcal{X}$ eine Zufallsvariable in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Nach unserer Definition von $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ ist ζ außerdem ein *einfacher* Punktprozess, das heißt es gilt $\zeta(\{x\}) \leq 1$ für alle $x \in \mathbf{X}$ \mathbb{P} -fast sicher. Das *Intensitätsmaß* eines Punktprozesses ζ ist definiert als das Maß $\mathcal{X} \ni B \mapsto \mathbb{E}[\zeta(B)]$ auf $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$. Weiter heißt ein Maß ν auf \mathbf{X} *diffus* oder *atomfrei*, falls $\nu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.

Für messbare Funktionen $u: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ definieren wir $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ und $u^-(x) := \max\{-u(x), 0\}$, jeweils für $x \in \mathbf{X}$. Damit sei für $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X})$

$$\sum_{x \in \mu} u(x) := \sum_{x \in \mu} u^+(x) - \sum_{x \in \mu} u^-(x),$$

insofern obiger Ausdruck nicht die Form $\infty - \infty$ hat. Ist Letzteres der Fall, so sei $\sum_{x \in \mu} u(x) := 0$. Mit diesen Definitionen können wir die *Formel von Campbell* formulieren, die ein wichtiges Werkzeug im Umgang mit Punktprozessen ist, siehe beispielsweise [28, Proposition 2.7].

Theorem 2.1.2. *Es seien $u: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine messbare Funktion und ζ ein Punktprozess auf \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Dann ist $\sum_{x \in \zeta} u(x)$ eine Zufallsvariable. Weiter gilt*

$$\mathbb{E} \sum_{x \in \zeta} u(x) = \int u(x) \lambda(dx),$$

falls $u \geq 0$ oder $\int |u(x)| \lambda(dx) < \infty$.

Es seien ζ ein Punktprozess auf \mathbf{X} , $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ und $I \subset [k]$. Wir definieren den Punktprozess

$$\zeta_{(x_i)_{i \in I}} := \zeta \cup \{x_i : i \in I\}.$$

Dieser enthält neben den Punkten aus ζ auch die (deterministischen) Punkte $(x_i)_{i \in I}$.

Einen besonderen Stellenwert unter den Punktprozessen, besonders in der vorliegenden Arbeit, nimmt der *Poisson-Prozess* ein. Für dessen Definition führen wir an dieser Stelle auch die *Poisson-Verteilung* einer Zufallsvariablen ein. Eine Zufallsvariable X hat eine *Poisson-Verteilung* $\text{Po}(\gamma)$ mit Parameter $\gamma \geq 0$, falls

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\gamma} \frac{\gamma^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Für $\gamma = 0$ gilt $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, wobei wir die Festlegung $0^0 := 1$ verwenden. Wir lassen auch die Wahl $\gamma = \infty$ zu. In diesem Fall gelte $\mathbb{P}(X = \infty) = 1$.

Definition 2.1.3. *Es sei λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf \mathbf{X} . Ein Punktprozess η in \mathbf{X} heißt Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß λ , falls er die beiden folgenden Eigenschaften besitzt.*

- (i) *Für jedes $B \in \mathcal{X}$ ist $\eta(B)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(B)$.*
- (ii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Auswahl von paarweise disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{X}$ sind die Zufallsvariablen $\eta(B_1), \dots, \eta(B_n)$ stochastisch unabhängig.*

Mit Proposition 6.9 aus [28] und Theorem 3.6 aus [28] erhalten wir die Existenz eines solchen Poisson-Prozesses, wobei die genannte Proposition die Einfachheit des Prozesses sicherstellt und das Theorem die eigentliche Existenz. Weiterhin gewährleistet die σ -Endlichkeit in obiger Definition, dass Poisson-Prozesse mit dem selben Intensitätsmaß in Verteilung übereinstimmen, siehe hierzu beispielsweise Proposition 3.2 in [28]. Im Folgenden sei λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf \mathbf{X} und η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Da \mathbf{X} ein Borelraum ist und λ ein σ -endliches Maß, folgt mit Korollar 6.5 in [28] die Existenz einer Folge von Zufallselementen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbf{X} und einer $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariable κ , so dass \mathbb{P} -fast sicher

$$\eta = \{X_n : n \in [\kappa]\} \tag{2.1.2}$$

gilt. Dabei ist κ \mathbb{P} -fast sicher die Kardinalität von η , also $\kappa = \eta(\mathbf{X})$.

Von besonderem Interesse sind für uns (unabhängig) markierte Poisson-Prozesse. Markierungen können auch generell für Punktprozesse eingeführt werden, worauf wir an dieser Stelle jedoch verzichten. Wir betrachten daher weiterhin den Poisson-Prozess η mit der Darstellung aus (2.1.2). Bei der folgenden Definition orientieren wir uns an Kapitel 5 in [28]. Es seien $(\mathbf{Y}, \mathcal{Y})$ ein messbarer Raum und $K: \mathbf{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ ein Übergangskern von \mathbf{X} nach \mathbf{Y} . Das heißt, für jedes $x \in \mathbf{X}$ ist die Abbildung $K(x, \cdot): \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbf{Y} und für jedes $C \in \mathcal{Y}$ ist die Abbildung $K(\cdot, C): \mathbf{X} \rightarrow [0, 1]$ messbar. Weiter sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallselementen in \mathbf{Y} , sodass die bedingte Verteilung von $(Y_n)_{n \in [\kappa]}$, bei gegebenem

κ und gegebenen $(X_n)_{n \in [\kappa]}$, das Produktmaß $\otimes_{n=1}^{\kappa} K(X_n, \cdot)$ ist. Damit sind die Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in [\kappa]}$ insbesondere unabhängig. Wir nennen den Punktprozess

$$\xi := \{(X_n, Y_n) : n \in [\kappa]\}$$

eine K -Markierung von η . Existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathbf{Y} mit $K(x, \cdot) = \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbf{X}$, so wird ξ eine *unabhängige \mathbb{Q} -Markierung* von η genannt. In diesem Fall hängt die Verteilung der Marke nicht vom Punkt ab. Ist ξ eine K -Markierung von η , so liefert Theorem 5.6 in [28], dass ξ ein Poisson-Prozess auf $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes K$ ist, wobei

$$(\lambda \otimes K)(C) := \iint \mathbf{1}\{(x, y) \in C\} K(x, dy) \lambda(dx), \quad C \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}.$$

Die nachfolgende Formel ist bei Rechnungen mit Poisson-Prozessen häufig sehr nützlich. Da sie in [28] lediglich als Übungsaufgabe (Exercise 3.6) formuliert ist, führen wir an dieser Stelle einen kurzen Beweis. Dieser verwendet das *Laplace-Funktional* eines Punktprozesses, siehe [28, Definition 2.8] und [28, Theorem 3.9], das eine konkrete Formel für das Laplace-Funktional von Poisson-Prozessen liefert. Da das Laplace-Funktional im Folgenden ansonsten nicht vorkommt, verzichten wir an dieser Stelle auf eine Definition.

Lemma 2.1.4. *Es sei λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf \mathbf{X} und η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Dann gilt für alle messbaren Funktionen $u: \mathbf{X} \rightarrow [0, 1]$*

$$\mathbb{E} \prod_{x \in \eta} u(x) = \exp \left(- \int (1 - u(x)) \lambda(dx) \right).$$

Beweis. Es sei $u: \mathbf{X} \rightarrow [0, 1]$ eine messbare Funktion. Wir definieren $f := -\log(u)$, wobei $\log(0) := -\infty$. Mit Theorem 3.9 in [28] folgt

$$\mathbb{E} \exp \left(- \sum_{x \in \eta} f(x) \right) = \exp \left(- \int (1 - e^{f(x)}) \lambda(dx) \right) = \exp \left(- \int (1 - u(x)) \lambda(dx) \right).$$

Weiterhin gilt

$$\mathbb{E} \exp \left(- \sum_{x \in \eta} f(x) \right) = \mathbb{E} \exp \left(\sum_{x \in \eta} \log(u(x)) \right) = \mathbb{E} \prod_{x \in \eta} u(x),$$

womit die Behauptung folgt. □

Ein sehr wichtiges Werkzeug im Umgang mit Poisson-Prozessen ist die (*multivariate*) *Mecke-Gleichung* (vergleiche Theorem 4.4 in [28]).

Theorem 2.1.5. *Es sei λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf \mathbf{X} und η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede messbare Funktion*

$f: \mathbf{X}^k \times \mathbf{N}(\mathbf{X}) \rightarrow [0, \infty]$

$$\mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} f(x_1, \dots, x_k, \eta) = \int \mathbb{E} f(x_1, \dots, x_k, \eta_{x_1, \dots, x_k}) \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)).$$

Bevor wir uns mit der Normalapproximation von Funktionalen eines Poisson-Prozesses beschäftigen, führen wir noch den Begriff der *Stationarität* ein (vergleiche beispielsweise Kapitel 8 in [28]). Dazu gelte vorübergehend $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$. Für $y \in \mathbb{R}^d$ definieren wir die *Verschiebung* $\theta_y: \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$\theta_y \mu(B) := \mu(B + y), \quad \mu \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d), \quad B \subset \mathbb{R}^d \text{ messbar,}$$

wobei $B + y := \{x + y : x \in B\}$. Ein Punktprozess ζ in \mathbb{R}^d wird *stationär* genannt, falls $\theta_x \zeta \stackrel{d}{=} \zeta$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt. Falls ζ stationär ist und

$$\gamma := \mathbb{E} \zeta([0, 1]^d) < \infty$$

gilt, so ist das Intensitätsmaß von ζ durch $\gamma \lambda_d$ gegeben (siehe [28, Proposition 8.2]). Dabei geht entscheidend ein, dass aus der Stationarität von ζ die Translationsinvarianz des Intensitätsmaßes folgt und, dass das Lebesgue-Maß das einzige translationsinvariante Maß auf \mathbb{R}^d ist, unter welchem der Einheitswürfel $[0, 1]^d$ das Maß eins besitzt. Die Größe γ wird in diesem Zusammenhang die *Intensität* von ζ genannt. Außerdem kann es \mathbb{P} -fast sicher nicht vorkommen, dass ein stationärer Punktprozess ζ in \mathbb{R}^d aus einer positiven und endlichen Anzahl von Punkten besteht. Es gilt

$$\mathbb{P}(0 < \zeta(\mathbb{R}^d) < \infty) = 0,$$

siehe [28, Proposition 8.4]. Ist η ein Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d , dessen Intensitätsmaß ein positives Vielfaches des Lebesgue-Maßes ist, so ist η stationär (siehe [28, Proposition 8.3]).

2.2. NORMALAPPROXIMATION VON POISSON-FUNKTIONALEN

Der vorliegende Abschnitt präsentiert einige bekannte Resultate im Zusammenhang mit Normalapproximation von Poisson-Funktionalen. Diese werden wir in späteren Abschnitten auf Funktionale eines paarweise markierten Poisson-Prozesses verallgemeinern, welche wir dann wiederum auf Funktionale des klassischen und des markierten RCMs anwenden werden.

Zunächst definieren wir zwei Distanzbegriffe für die Verteilungen von Zufallsvariablen, welche für die Formulierung von Aussagen über Normalapproximation benötigt werden. Dazu seien X und Y Zufallsvariablen in \mathbb{R} . Die *Wasserstein-Distanz* $d_1(X, Y)$ ist definiert durch

$$d_1(X, Y) := \sup_{h \in \text{Lip}(1)} |\mathbb{E} h(X) - \mathbb{E} h(Y)|,$$

wobei $\text{Lip}(1)$ die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, deren Lipschitz-Konstante höchstens 1 beträgt. Mit Verwendung der Dreiecksungleichung, der

Lipschitz-Eigenschaft und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$d_1(X, Y) \leq \mathbb{E}|X - Y| \leq \sqrt{\mathbb{E}|X - Y|^2}. \quad (2.2.1)$$

Somit kann die Wasserstein-Distanz sowohl durch die L^1 -Norm auf $L^1(\mathbb{P})$ als auch durch die L^2 -Norm auf $L^2(\mathbb{P})$ abgeschätzt werden. Wir werden außerdem die *Kolmogorov-Distanz* $d_K(X, Y)$ benötigen, die durch

$$d_K(X, Y) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(Y \leq t)|.$$

definiert ist. Damit ist die Kolmogorov-Distanz zwischen zwei Zufallsvariablen gleich der Supremumsnorm der Differenz ihrer Verteilungsfunktionen. Besitzt eine der beiden beteiligten Zufallsvariablen eine Lebesgue-Dichte, die durch eine Konstante $c > 0$ beschränkt ist, so gilt folgende nützliche Ungleichung

$$d_K(X, Y) \leq \sqrt{2cd_1(X, Y)},$$

die beispielsweise in [41, Proposition 1.2] gefunden werden kann. Außerdem halten wir fest, dass sowohl die Konvergenz der Kolmogorov-Distanz als auch die Konvergenz der Wasserstein-Distanz Konvergenz in Verteilung impliziert.

Es seien N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf \mathbf{X} und η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Weiter sei L_η der Raum aller Zufallsvariablen F in \mathbb{R} , für die eine messbare Abbildung $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $F = f(\eta)$ \mathbb{P} -fast sicher gilt (siehe [28, Seite 211]). Eine solche Zufallsvariable $F \in L_\eta$ wird auch *Poisson-Funktional* und die zugehörige Funktion f *Repräsentant* von F genannt.

Für $F \in L_\eta$ mit Repräsentant f , $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ definieren wir den *Differenzenoperator k -ter Ordnung* durch

$$D_{x_1, \dots, x_k}^k F := \sum_{I \subset [k]} (-1)^{k-|I|} f(\eta_{(x_i)_{i \in I}}). \quad (2.2.2)$$

Diese Definition ist \mathbb{P} -fast sicher eindeutig, da aufgrund der Mecke-Gleichung (Theorem 2.1.5) für zwei verschiedene Repräsentanten f_1 und f_2 von F und für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$f_1(\eta_{x_1, \dots, x_m}) = f_2(\eta_{x_1, \dots, x_m}) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

für λ^m -fast alle $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{X}^m$ gilt. Für die Differenzenoperatoren erster und zweiter Ordnung gelten insbesondere

$$D_{x_1} F := D_{x_1}^1 F = f(\eta_{x_1}) - f(\eta) \quad \text{und} \quad D_{x_1, x_2}^2 F = f(\eta_{x_1, x_2}) - f(\eta_{x_1}) - f(\eta_{x_2}) + f(\eta).$$

Auch eine iterative Definition der Differenzenoperatoren ist möglich, siehe hierzu [28, Seite 187]. Die Differenzenoperatoren sind in der stochastischen Analysis von großer Bedeutung (siehe

beispielsweise [27, 28, 36]). Mit ihrer Einführung sind wir in der Lage die *Ungleichung von Poincaré* für Poisson-Funktionale zu formulieren, welche wir in Theorem 3.4.1 auf paarweise Markierungen von Poisson-Prozessen verallgemeinern. Die Poincaré-Ungleichung liefert eine obere Schranke für die Varianz von Poisson-Funktionalen, deren zweites Moment endlich ist.

Theorem 2.2.1. *Es sei $F \in L_\eta$ ein Poisson-Funktional mit $\mathbb{E}F^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\text{Var } F \leq \int \mathbb{E}(D_x F)^2 \lambda(dx).$$

Ein Beweis der Poincaré-Ungleichung kann beispielsweise in [28, Theorem 18.7] gefunden werden, wobei die obige Form der Ungleichung ursprünglich auf [45] zurückgeht. Vorläufer der Ungleichung bietet die Arbeit [6].

Um eine obere Schranke für die Wasserstein-Distanz zwischen einer standardnormalverteilten Zufallsvariable und einem Poisson-Funktional $F \in L_\eta$ angeben zu können, benötigen wir die folgenden Ausdrücke, in welchen Differenzenoperatoren der ersten und zweiten Ordnung auftauchen. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(D_{x_1} F)^2 (D_{x_2} F)^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(D_{x_1, x_3}^2 F)^2 (D_{x_2, x_3}^2 F)^2 \right]^{1/2} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}, \\ \alpha_2 &:= \left[\int \mathbb{E}(D_{x_1, x_3}^2 F)^2 (D_{x_2, x_3}^2 F)^2 \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}, \\ \alpha_3 &:= \int \mathbb{E}|D_x F|^3 \lambda(dx). \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung der Kolmogorov-Distanz sind noch die drei folgenden zusätzlichen Ausdrücke erforderlich, nämlich

$$\begin{aligned} \alpha_4 &:= \frac{1}{2} [\mathbb{E}F^4]^{1/4} \int \left[\mathbb{E}(D_x F)^4 \right]^{3/4} \lambda(dx), \\ \alpha_5 &:= \left[\int \mathbb{E}(D_x F)^4 \lambda(dx) \right]^{1/2}, \\ \alpha_6 &:= \left[\int 6 \left[\mathbb{E}(D_{x_1} F)^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(D_{x_1, x_2}^2 F)^4 \right]^{1/2} + 3 \mathbb{E}(D_{x_1, x_2}^2 F)^4 \lambda^2(d(x_1, x_2)) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Theorem 2.2.2. *Es sei $F \in L_\eta$ ein Poisson-Funktional mit $\mathbb{E}F^2 < \infty$, $\mathbb{E}F = 0$, $\text{Var } F = 1$ und*

$$\mathbb{E} \int (D_x F)^2 \lambda(dx) < \infty.$$

Dann gelten

$$d_1(F, N) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

und

$$d_K(F, N) \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6.$$

Dieses Resultat ist in [27, Theorem 1.1 und Theorem 1.2] zu finden und kann auch in [28] nachgelesen werden.

2.3. GRAPHENTHEORIE

In diesem Abschnitt werden die später benötigten Notationen und Konzepte aus der Graphentheorie eingeführt. Dabei definieren wir die auftretenden Begriffe nicht in der größt möglichen Allgemeinheit, sondern passen sie an den Kontext der restlichen Arbeit an. Für einen Überblick aller hier definierten Begriff und allgemein zur Graphentheorie verweisen wir auf [12].

Ein (*ungerichteter*) *Graph* $G = (V, E)$ ist gegeben durch eine abzählbare Menge V und eine Menge E mit

$$E \subset \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\}. \quad (2.3.1)$$

Somit ist E eine Teilmenge aller zweielementigen Mengen von V . Die Elemente von V werden *Knoten*, *Ecken* oder *Punkte* genannt und die Elemente von E *Kanten*. In unserem Kontext wird die *Knotenmenge* V meist eine abzählbare Teilmenge von \mathbb{R}^d sein. Wir bezeichnen mit

$$|G| := |V| = \text{card}(V)$$

die *Größe* oder *Ordnung* von G , also die Anzahl der Knoten in G , wobei $|G| = \infty$ zugelassen ist. Gilt $|G| < \infty$, so heißt der Graph G *endlich*.

Zwei Knoten $x, y \in V$, $x \neq y$, werden *benachbart* genannt, wenn $\{x, y\} \in E$ gilt. Alternative Sprechweisen sind: „ x und y sind Nachbarn (in G)“ und „ x und y sind (im Graphen G) durch eine Kante verbunden“. In diesem Fall schreiben wir auch $x \leftrightarrow y$ in G . Gilt hingegen $\{x, y\} \notin E$, so verwenden wir die Schreibweise $x \not\leftrightarrow y$ in G . Aufgrund von (2.3.1) ist eine Kante zwischen einer Ecke $x \in V$ und der Ecke selbst ausgeschlossen.

Für einen Knoten $x \in V$ sei

$$\text{deg}(x, G) := \sum_{y \in V} \mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } G\}$$

der (*Knoten-*)*Grad* von x , also die Anzahl aller Nachbarn von x . Knoten ohne Nachbarn, das sind Knoten mit Grad Null, werden *isoliert* genannt. Ist die Knotenmenge V endlich, so gilt

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in V} \text{deg}(x, G) = |E|, \quad (2.3.2)$$

da beim Summieren über alle Knotengrade jede Kante genau zweimal gezählt wird. Weiter sei

$$\text{maxdeg}(G) := \sup\{\text{deg}(x) : x \in V\}$$

der *maximale Knotengrad* von G .

Ein *Teilgraph* von G ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit $V' \subset V$ und $E' \subset E$. Besteht E' aus allen Kanten $\{x, y\} \in E$ mit $x, y \in V'$, so wird G' ein *induzierter* Teilgraph genannt. Für $k \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_k \in V$ sei

$$G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, G) := (\{x_1, \dots, x_k\}, \{\{x_i, x_j\} : i, j \in [k]\} \cap E)$$

der von x_1, \dots, x_k in G induzierte Teilgraph. Seine Knotenmenge ist durch $\{x_1, \dots, x_k\}$ gegeben und er umfasst alle Kanten zwischen diesen Knoten, die auch im Graphen G vorkommen.

Ein *Pfad* ist ein Graph $P = (V, E)$ mit

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \quad \text{und} \quad E = \{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und x_0, x_1, \dots, x_k paarweise verschiedene Punkte sind. Die Zahl k ist gleich der Anzahl der Kanten in P und wird die *Länge* des Pfades genannt. Die Punkte x_0 und x_k werden auch als die *Endpunkte* des Pfades P bezeichnet. Im Falle $k = 0$ enthält der Pfad lediglich einen Endpunkt und keine Kante. Weiterhin ist ein *Kreis* ein Graph $K = (V, E)$ mit

$$V = \{x_1, \dots, x_k\} \quad \text{und} \quad E = \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_k, x_1\}\},$$

wobei $k \geq 3$ gilt und x_1, \dots, x_k paarweise verschiedene Punkte sind. Die Größe k entspricht hierbei sowohl der Anzahl von Knoten, als auch der Anzahl von Kanten, also $k = |V| = |E|$, und wird die *Länge* des Kreises genannt.

Es seien $k \in \mathbb{N}_0$, $G = (V, E)$ ein Graph und $x, y \in V$ zwei Knoten. Wir schreiben $x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} y$ in G , falls G einen Pfad als Teilgraphen enthält, welcher höchstens die Länge k hat und dessen Endpunkte x und y sind. Gilt außerdem $V \subset \mathbb{R}^d$ und ist A eine Teilmenge von \mathbb{R}^d , so schreiben wir $x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A$ in G , falls ein Knoten $y \in V \cap A$ existiert mit $x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} y$ in G . Liegt x selbst in A , so gilt $x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A$ in G trivialerweise für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

Ein Graph $G = (V, E)$ wird *zusammenhängend* genannt, falls $V \neq \emptyset$ gilt und alle Knoten aus V durch einen Pfad in G verbunden sind. Ein zusammenhängender Graph, welcher keinen Kreis enthält, heißt *Baum*. Die Knoten eines Baumes mit Grad eins werden auch *Blätter* genannt. Wird ein Blatt eines Baumes entfernt, so ist der entstehende Graph ebenfalls ein Baum. Per Induktion lässt sich leicht zeigen, dass jeder zusammenhängender Graph mit $k \in \mathbb{N}$ Knoten genau dann ein Baum ist, wenn er $k - 1$ Kanten besitzt. Hieraus und mit (2.3.2) folgt direkt, dass jeder endliche Baum, der aus mindestens zwei Ecken besteht, auch mindestens ein Blatt besitzt. Außerdem enthält jeder zusammenhängende Graph einen Baum als Teilgraphen, welcher alle Knoten des ursprünglichen Graphen umfasst. Ein solcher Baum heißt *Spannbaum*.

Ist $G' = (V', E')$ ein zusammenhängender induzierter Teilgraph eines Graphen $G = (V, E)$ und enthält E keine Kanten zwischen Knoten aus V' und $V \setminus V'$, so wird G' eine *Komponente* von G genannt. Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, so nennen wir auch die Knotenmenge V' selbst Komponente von G .

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, falls eine Bijektion $T: V \rightarrow V'$ existiert, sodass für alle $x, y \in V$ mit $x \neq y$ genau dann $\{x, y\} \in E$ gilt, wenn $\{T(x), T(y)\} \in E'$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $G \simeq G'$. Durch diesen Begriff von Isomorphie erhalten wir eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Graphen. Für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ bestehe die Menge \mathbf{G}_k aus jeweils genau einem Vertreter jeder Äquivalenzklasse von zusammenhängenden Graphen mit Knotenmenge $[k]$. Weiter sei $\mathbf{G} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}_i$. Damit umfasst \mathbf{G} -bis auf Isomorphie- alle endlichen und zusammenhängenden Graphen.

2.4. KONVEXE KÖRPER UND DIE FORMEL VON STEINER

Es bezeichne \mathcal{K}^d die Menge aller kompakten und konvexen Teilmengen von \mathbb{R}^d , deren Inneres nicht leer ist. Die Elemente von \mathcal{K}^d werden *konvexe Körper* genannt. Für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ sei

$$r(K) := \sup\{r > 0 : B^d(x, r) \subset K, x \in K\}$$

der *Inradius* von K . Um bei der Formulierung kommender Grenzwertaussagen die Übersichtlichkeit zu erhöhen, verwenden wir die abkürzende Schreibweise $r(K) \rightarrow \infty$. Diese bedeutet, dass die jeweilige Aussage für jede beliebige Folge konvexer Körper $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $r(K_n) \rightarrow \infty$ (für $n \rightarrow \infty$) gilt.

Für beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

die *Minkowski-Summe* der Mengen A und B . Weiter heißt für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ und $\varepsilon > 0$ die Minkowski Summe

$$K + B^d(0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K) \leq \varepsilon\}$$

der *Parallelkörper* von K zur Distanz ε . Nach der *Steiner-Formel* (siehe beispielsweise [43, Seite 208] oder [44, Seite 600]) ist das Lebesgue-Maß eines Parallelkörpers von K ein Polynom in ε , das den Grad d besitzt. Die übliche Form der Steiner-Formel lautet

$$\lambda_d(K + B^d(0, \varepsilon)) = \sum_{i=0}^d \varepsilon^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K),$$

wobei die Größen $V_0(K), \dots, V_d(K)$ die *inneren Volumina* von K genannt werden. Durch die Steiner-Formel können die inneren Volumina für alle konvexen Körper \mathcal{K}^d definiert werden, wodurch man die Funktionale V_0, \dots, V_d auf \mathcal{K}^d erhält. Dabei stimmt V_d mit dem Lebesgue-Maß λ_d auf \mathcal{K}^d überein. Für $K \in \mathcal{K}^d$ gilt außerdem $V_0(K) = 1$ und $2V_{d-1}(K)$ entspricht der Oberfläche von K , die durch das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß des Randes von K gegeben ist, vergleiche etwa [44, Seite 601].

KAPITEL 3

DAS ALLGEMEINE MODELL

Dieses Kapitel dient der Einführung des RCMs in einem allgemeinen Borelraum. Dazu definieren wir zunächst eine paarweise Markierung eines Poisson-Prozesses, durch welche (bei geeigneter Wahl der Markenverteilung) das RCM erzeugt werden kann. Abschnitt 3.2 liefert Formeln für erste und zweite Momente von Komponentenzahlen in diesem allgemeinen RCM. In Abschnitt 3.3 führen wir insbesondere Differenzenoperatoren für Zufallsvariablen ein, welche bezüglich der paarweisen Markierung messbar sind. Diese helfen uns in den letzten beiden Abschnitten Varianzabschätzungen und einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz für solche Zufallsvariablen zu zeigen. Dabei kommen entsprechende Resultate über Poisson-Funktionalen aus [27] und [29] zum Einsatz.

3.1. DEFINITION DES ALLGEMEINEN MODELLS

Es seien $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ ein Borelraum und λ ein diffuses und σ -endliches Maß auf $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$. Weiterhin bezeichne \prec eine (zweistellige) transitive Relation auf \mathbf{X} , sodass $\{(x, y) \in \mathbf{X}^2 : x \prec y\}$ eine messbare Menge ist und $x \prec x$ für alle $x \in \mathbf{X}$ falsch ist. Außerdem setzen wir

$$\lambda([x]) = 0, \quad x \in \mathbf{X}, \tag{3.1.1}$$

voraus, wobei die Menge $[x] := \mathbf{X} \setminus \{y \in \mathbf{X} : y \prec x \text{ oder } x \prec y\}$ all diejenigen Elemente aus \mathbf{X} umfasst, welche bezüglich der Relation \prec in keiner Beziehung mit x stehen. Mit den hier getroffenen Voraussetzungen folgt direkt $x \in [x]$ für alle $x \in \mathbf{X}$.

Bemerkung 3.1.1. Die Forderungen, dass λ diffus ist und die Existenz einer Relation mit der Eigenschaft (3.1.1), sind keine Einschränkungen der Allgemeinheit.

Sei beispielsweise $(\mathbf{X}', \mathcal{X}')$ ein beliebiger Borelraum mit einem σ -endlichen Maß λ' . Wir definieren $\mathbf{X} := \mathbf{X}' \times [0, 1]$, $\mathcal{X} := \mathcal{X}' \otimes \mathcal{B}_1$ und $\lambda := \lambda' \otimes \lambda_1|_{[0,1]}$. In diesem Fall überträgt sich die Atomfreiheit von $\lambda_1|_{[0,1]}$ auf λ und durch

$$(x', s) \prec (y', t) \quad :\iff \quad s < t$$

kann für λ -fast alle $(x', s), (y', t) \in \mathbf{X}$ eine Relation definiert werden, welche die Eigenschaft (3.1.1) besitzt.

Im Folgenden sei η ein Poisson-Prozess in \mathbf{X} mit Intensitätsmaß λ . Damit gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$\eta = \{X_n : n \in [\kappa]\}$$

mit einer Folge von Zufallselementen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbf{X} und einer $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariablen κ , vergleiche (2.1.2). Die Punkte von η werden als Knotenmenge des RCMs dienen. Um später zufällige Kanten zwischen diesen Punkten erzeugen zu können, werden alle Paare von Punkten unabhängig voneinander markiert. Zur Einführung dieser paarweisen Markierung sei zunächst

$$\mathbf{X}^{[2]} := \{e \in \mathbf{N}(\mathbf{X}) : e(\mathbf{X}) = 2\}$$

der Raum aller Punktpaare von \mathbf{X} . Analog definieren wir $A^{[2]}$ für beliebige messbare Mengen $A \subset \mathbf{X}$. Wird die σ -Algebra $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ auf messbare Teilmengen von $\mathbf{X}^{[2]}$ beschränkt, so ist dieser Raum ebenfalls ein Borelraum (siehe [25, Lemma 1.7]). Es sei $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$ ein weiterer Borelraum, \mathbb{M} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$ und $(Z_{m,n})_{m,n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger und \mathbb{M} -verteilter Zufallsvariablen in \mathbf{M} . Zusätzlich sei die Folge $(Z_{m,n})_{m,n \geq 1}$ auch unabhängig vom Poisson-Prozess η . Wir definieren den Punktprozess ξ in $\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}$ durch

$$\xi := \{(\{X_m, X_n\}, Z_{m,n}) : X_m \prec X_n, m, n \in [\kappa]\}. \quad (3.1.2)$$

Der Punktprozess ξ ist somit eine unabhängige Markierung aller Paare von Punkten aus η . Dabei kann jedes Punktpaar als potentielle Kante des RCMs gesehen werden. Ist der Prozess ξ gegeben, so lassen sich die Punkte von η aus diesem rekonstruieren (siehe Bemerkung 3.3.2).

Weiter sei $\varphi: \mathbf{X}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine messbare und symmetrische Funktion. Im Folgenden wird φ *Verbindungsfunktion* (*Connection Function*) genannt. Für die Definition des RCMs wählen wir speziell $\mathbf{M} := [0, 1]$ und $\mathbb{M} := \lambda_1|_{[0,1]}$. Als zugehörige σ -Algebra \mathcal{M} verwenden wir die Borelsche σ -Algebra \mathcal{B}_1 auf $[0, 1]$. Wir definieren den Punktprozess χ auf $\mathbf{X}^{[2]}$ durch

$$\chi := \{\{X_m, X_n\} : X_m \prec X_n, Z_{m,n} \leq \varphi(X_m, X_n), m, n \in [\kappa]\}.$$

Jedes Punktpaar aus χ repräsentiert eine Kante des RCMs. Das RCM, als zufälliger Graph, ist dann folglich gegeben durch das Paar $\Gamma_\varphi(\eta) := (\eta, \chi)$.

Sind die Punkte aus η gegeben, so ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass zwei Punkte $X_m, X_n \in \eta$, $X_m \prec X_n$, $m, n \in [\kappa]$, durch eine Kante verbunden sind, gleich $\varphi(X_m, X_n)$.

Analog definieren wir den zufälligen Graphen $\Gamma_\varphi(\mu)$ für beliebige Punktfolgen $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X})$.

In Abhängigkeit von der gewählten Verbindungsfunktion φ sei

$$\mathbf{G}_\varphi := \{G \in \mathbf{G} : G \text{ tritt als Komponente in } \Gamma_\varphi(\eta) \text{ mit positiver Wahrscheinlichkeit auf}\}$$

und weiter für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{G}_{k,\varphi} := \mathbf{G}_k \cap \mathbf{G}_\varphi.$$

Außerdem definieren wir für $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{G}_\varphi^{m,\neq} := \{(G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^m : G_1, \dots, G_m \text{ sind paarweise verschieden}\}.$$

Je nach gewählter Verbindungsfunktion φ kann $\mathbf{G}_\varphi \neq \mathbf{G}$ gelten, wie das folgende Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 3.1.2. Es seien $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$, $\lambda = \lambda_2$, $r > 0$ und $G = ([7], \{\{1, i\} : i \in \{2, \dots, 7\}\})$ ein Graph. Die Verbindungsfunktion φ sei gegeben durch $\varphi(x, y) = \mathbb{1}\{|x - y| \leq r\}$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall enthält das RCM $\Gamma_\varphi(\eta)$ \mathbb{P} -fast sicher keine Komponenten, die isomorph zum Graphen G sind.

3.2. FORMELN FÜR ERSTE UND ZWEITE MOMENTE

Im vorliegenden Abschnitt führen wir für das RCM $\Gamma_\varphi(\eta)$ Zählgrößen für die Anzahl von Komponenten einer bestimmten Größe oder Form ein. Weiterhin beweisen wir hier Formeln für die Erwartungswerte und Kovarianzen dieser Komponentenzahlen.

Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathbf{G}_k$. Wir definieren den Punktprozess $\eta_{\varphi,G}$ in \mathbf{X} durch

$$\eta_{\varphi,G} := \{x_1 \in \eta : \text{es gibt Punkte } x_2, \dots, x_k \in \eta \text{ mit } x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k, \text{ sodass } G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \text{ eine zu } G \text{ isomorphe Komponente in } \Gamma_\varphi(\eta) \text{ ist}\}. \quad (3.2.1)$$

Für eine messbare Menge $A \subset \mathbf{X}$ ist somit $\eta_{\varphi,G}(A)$ gleich der Anzahl von Komponenten in $\Gamma_\varphi(\eta)$, die zu G isomorph sind und deren kleinster Punkt (bezüglich der Relation \prec) in A liegt. Weiterhin sei

$$\eta_{\varphi,k} := \bigcup_{G \in \mathbf{G}_k} \eta_{\varphi,G}$$

der Punktprozess aller Komponenten der Größe k (k -Komponenten) von $\Gamma_\varphi(\eta)$. Um das Intensitätsmaß von $\eta_{\varphi,G}$ angeben zu können, definieren wir die Funktion

$$p_{\varphi,G}(x_1, \dots, x_k) := \mathbb{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{P}(\Gamma_\varphi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G), \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}. \quad (3.2.2)$$

Außerdem führen wir für spätere Zwecke die folgende Abkürzung ein

$$p_{\varphi,k}(x_1, \dots, x_k) := \mathbb{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \text{ ist zusammenhängend}), \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}.$$

Für die Verbindungsfunktion φ (und auch alle anderen auftretenden Verbindungsfunktionen) schreiben wir abkürzend $\bar{\varphi} := 1 - \varphi$.

Der Gegenstand der folgenden Proposition ist eine Formel für das Intensitätsmaß von $\eta_{\varphi,G}$.

Proposition 3.2.1. *Es seien $k \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbf{G}_k$ und $A \in \mathcal{X}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A) &= \int \mathbb{1}\{x_1 \in A\} p_{\varphi,G}(x_1, \dots, x_k) \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) - 1 \right) \lambda(dy) \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)). \quad (3.2.3) \end{aligned}$$

Im Fall $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$ ist in [38, Proposition 1] eine Formel für die erwartete Anzahl von k -Komponenten zu finden, welche mit (3.2.3) vergleichbar ist. Werden isolierte Knoten gezählt ($k = 1$), so liefern auch [42, Lemma 4] und [4, Lemma 3.2] entsprechende Ergebnisse. Schließlich werden in [37, Proposition 3.3] asymptotische Erwartungswerte des Gilbert-Graphen untersucht.

Beweis von Proposition 3.2.1. Es seien $x_1, \dots, x_k \in \eta$ paarweise verschiedene Punkte aus η . Der induzierte Teilgraph $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_{\varphi}(\eta))$ ist in $\Gamma_{\varphi}(\eta)$ genau dann eine zum Graphen G isomorphe Komponente, wenn $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_{\varphi}(\eta)) \simeq G$ gilt und keiner der Punkte x_1, \dots, x_k mit einem Punkt aus $\eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ durch eine Kante in $\Gamma_{\varphi}(\eta)$ verbunden ist. Gegeben η , sind diese beiden Ereignisse unabhängig und haben die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G)$ und

$$\prod_{y \in \eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y).$$

Unter Verwendung der Mecke-Formel (Theorem 2.1.5) und Lemma 2.1.4 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A) &= \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} \mathbb{1}\{x_1 \in A\} \mathbb{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G) \right. \\ &\quad \times \left. \prod_{y \in \eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) \right] \\ &= \int \mathbb{1}\{x_1 \in A\} \mathbb{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\prod_{y \in \eta} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)) \\ &= \int \mathbb{1}\{x_1 \in A\} p_{\varphi,G}(x_1, \dots, x_k) \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) - 1 \right) \lambda(dy) \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Besteht der zu zählende Graph G lediglich aus einem einzelnen Knoten, so liefert obiges Resultat eine einfache Formel für den Erwartungswert der isolierten Knoten in $\Gamma_\varphi(\eta)$.

Korollar 3.2.2. *Für $A \in \mathcal{X}$ gilt*

$$\mathbb{E}\eta_{\varphi,1}(A) = \int \mathbf{1}\{x \in A\} \exp \left[- \int \varphi(x, y) \lambda(dy) \right] \lambda(dx).$$

Neben φ sei $\psi: \mathbf{X}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine weitere Verbindungsfunktion und $\Gamma_\psi(\eta)$ das zugehörige RCM. Dabei werden bei der Definition von $\Gamma_\psi(\eta)$ dieselben Marken $(Z_{m,n})_{m,n \geq 1}$ wie bei $\Gamma_\varphi(\eta)$ zur paarweisen Markierung der Punkte aus η verwendet. Dies hat eine Kopplung der beiden Modelle zur Folge. Gilt etwa punktweise $\psi \leq \varphi$, so ist automatisch jede Kante in $\Gamma_\psi(\eta)$ auch eine Kante in $\Gamma_\varphi(\eta)$.

Die nachfolgende Proposition bereitet spätere Kovarianzformeln für Komponentenzahlen in den beiden Modellen vor.

Proposition 3.2.3. *Es seien $k, l \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbf{G}_k$ und $H \in \mathbf{G}_l$. Weiterhin seien $\psi: \mathbf{X}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine Verbindungsfunktion mit $\psi \leq \varphi$ und $A, A' \in \mathcal{X}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\eta_{\psi,H}(A') &= \int \mathbf{1}\{x_1 \in A, x_{k+1} \in A'\} p_{\varphi,G}(x_1, \dots, x_k) p_{\psi,H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \\ &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}(x_i, x_j) \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j, y) - 1 \right) \lambda(dy) \right] \lambda^{k+l}(d(x_1, \dots, x_{k+l})) \\ &+ \mathbf{1}\{k = l\} \int \mathbf{1}\{x_1 \in A \cap A'\} \mathbb{P}(\Gamma_\varphi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G, \Gamma_\psi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq H) \\ &\times \mathbf{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) - 1 \right) \lambda(dy) \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)). \end{aligned}$$

Beweis. Es seien $x_1, \dots, x_k \in \eta$ und $x_{k+1}, \dots, x_{k+l} \in \eta$ jeweils paarweise verschiedene Punkte in η . Bei gegebenem η betrachten wir das Ereignis, dass $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\varphi(\eta))$ in $\Gamma_\varphi(\eta)$ eine zu G isomorphe Komponente ist und dass $G_{\text{ind}}(\{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}, \Gamma_\psi(\eta))$ in $\Gamma_\psi(\eta)$ eine zu H isomorphe Komponente ist. Bezüglich dieses Ereignisses unterscheiden wir zwei Fälle.

Im ersten Fall sei $\{x_1, \dots, x_k\} \cap \{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\} = \emptyset$ angenommen. Damit folgen:

- $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \simeq G$ und $G_{\text{ind}}(\{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}, \Gamma_\psi(\eta)) \simeq H$,
- in $\Gamma_\varphi(\eta)$ gibt es keine Kanten zwischen $\{x_1, \dots, x_k\}$ und $\eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$,
- in $\Gamma_\psi(\eta)$ gibt es keine Kanten zwischen $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}$ und $\eta \setminus \{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}$.

Ist η vorgegeben, so besitzt dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\Gamma_\varphi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G) \mathbb{P}(\Gamma_\psi(\{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\}) \simeq H) \\ &\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}(x_i, x_j) \prod_{y \in \eta \setminus \{x_1, \dots, x_{k+l}\}} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j, y). \end{aligned}$$

Hierbei geht ein, dass wenn zwei Punkte in $\Gamma_\varphi(\eta)$ keine gemeinsame Kante besitzen, sie auch im Modell $\Gamma_\psi(\eta)$ nicht verbunden sind.

Im zweiten Fall gelte $\{x_1, \dots, x_k\} \cap \{x_{k+1}, \dots, x_{k+l}\} \neq \emptyset$. Damit ergeben sich:

- $k = l$,
- $\{x_1, \dots, x_k\} = \{x_{k+1}, \dots, x_{2k}\}$,
- $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \simeq G$ und $G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\psi(\eta)) \simeq H$,
- in $\Gamma_\varphi(\eta)$ gibt es keine Kanten zwischen $\{x_1, \dots, x_k\}$ und $\eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$.

Ist η gegeben, so hat dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{1}\{k = l\} \mathbb{P}(\Gamma_\varphi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G, \Gamma_\psi(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq H) \prod_{y \in \eta \setminus \{x_1, \dots, x_k\}} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i, y).$$

Es ist zu beachten, dass auch im ersten Fall $G = H$ nicht ausgeschlossen ist.

Analog zum Beweis von Proposition 3.2.1 liefern die multivariate Mecke-Formel (Theorem 2.1.5) und Lemma 2.1.4 die Behauptung. \square

3.3. EINE ALTERNATIVE MODELLBESCHREIBUNG UND DIFFERENZENOPERATOREN

In diesem Abschnitt wird eine (verteilungsgleiche) Version von ξ definiert, welche eine messbare Funktion einer unabhängigen Markierung von η ist. Dies wird es uns insbesondere ermöglichen existierende zentrale Grenzwertsätze für Poisson-Funktionale auf die von uns betrachteten Zählgrößen anzuwenden.

Es sei $\mathbf{Y} := \mathbf{M}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ der Raum aller Doppelfolgen $(u_{i,j})_{i,j \geq 1}$ mit Folgengliedern in \mathbf{M} und $\mathbb{Q} := \mathbb{M}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Somit ist \mathbb{Q} die Verteilung einer Doppelfolge von unabhängigen \mathbb{M} -verteilten Zufallsvariablen in \mathbf{M} . Wir definieren η^* als unabhängige \mathbb{Q} -Markierung von η . Damit ist η^* ein Poisson-Prozess in $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ und Intensitätsmaß $\lambda \otimes \mathbb{Q}$, siehe [28, Theorem 6.5].

Für das weitere Vorgehen benötigen wir eine Partition von \mathbf{X} in hinreichend kleine Mengen, deren Existenz durch das folgende Lemma gesichert ist.

Lemma 3.3.1. *Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann existiert eine messbare Partition $(B_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ von \mathbf{X} mit $\lambda(B_k^\varepsilon) \leq \varepsilon/k$ für $k \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Da \mathbf{X} ein Borelraum ist, können wir \mathbf{X} mit einer Borel-messbaren Menge $I \subset (0, 1]$ identifizieren. Außerdem, da λ insbesondere ein σ -endliches Maß ist, existiert eine messbare Partition $(C_k)_{k \geq 1}$ von \mathbf{X} (beziehungsweise von I), sodass $\lambda(C_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir definieren das endliche und diffuse Maß ν_1 auf $(0, 1]$ durch $\nu_1(B) := \lambda(C_1 \cap B)$ für Borel-messbare Mengen $B \subset (0, 1]$. Es seien $t_0^1 := 0$ und

$$t_1^1 := \sup\{t \in (0, 1] : \nu_1((0, t]) \leq \varepsilon\}.$$

Für $k \geq 2$ und unter der Annahme $t_{k-1}^1 < 1$ definieren wir rekursiv die Zahl

$$t_k^1 := \sup\{t \in (t_{k-1}^1, 1] : \nu_1((t_{k-1}^1, t]) \leq \varepsilon/k\}.$$

Wegen $\lambda(C_1) < \infty$ und der Divergenz der harmonischen Reihe bricht obige Rekursion nach endlich vielen Schritten ab. Somit existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ und Zahlen $0 = t_0^1 < t_1^1 < \dots < t_{m_1}^1 = 1$ mit $\nu_1((t_{i-1}^1, t_i^1]) \leq \varepsilon/i$ für $i \in [m_1]$. Dies liefert die ersten m Mengen der gesuchten Zerlegung, also $B_i^\varepsilon := C_1 \cap (t_{i-1}^1, t_i^1]$ für $i \in [m]$.

Im nächsten Schritt definieren wir das endliche und diffuse Maß ν_2 auf $(0, 1]$ durch $\nu_2(B) := \lambda(C_2 \cap B)$ für Borel-messbare Mengen $B \subset (0, 1]$. Analog zur vorangegangenen Argumentation existiert ein $m_2 \in \mathbb{N}$ und Zahlen $0 = t_0^2 < t_1^2 < \dots < t_{m_2}^2 = 1$ mit $\nu_2((t_{i-1}^2, t_i^2]) \leq \varepsilon/(m_1 + i)$ für $i \in [m_2]$. Damit können weitere m_2 Mengen der gesuchten Zerlegung definiert werden, nämlich $B_{m_1+i}^\varepsilon := C_2 \cap (t_{i-1}^2, t_i^2]$ für $i \in [m_2]$.

Analog kann für die gesamte gesuchte Zerlegung vorgegangen werden. \square

Für $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $(B_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$ die Partition aus Lemma 3.3.1 und für $x \in \mathbf{X}$ bezeichne $B^\varepsilon(x)$ das eindeutige Element aus $(B_k^\varepsilon)_{k \geq 1}$, das x enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$B^{\varepsilon_1}(x) \subset B^{\varepsilon_2}(x) \tag{3.3.1}$$

für alle $x \in \mathbf{X}$ und $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1$ annehmen, was wie folgt begründet werden kann. Zunächst ist es möglich durch eine Anpassung der Argumentation im Beweis von Lemma 3.3.1 $B^{1/(n+1)}(x) \subset B^{1/n}(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$ und $n \geq 2$ zu erreichen. Dazu konstruieren wir die Partition $(B_k^{1/2})_{k \geq 1}$ wie im Beweis von Lemma 3.3.1 beschrieben. Anschließend erzeugen wir rekursiv für $n \geq 2$ die Partition $(B_k^{1/(n+1)})_{k \geq 1}$ ebenfalls mit der Methode des Beweises von Lemma 3.3.1, verwenden dabei jedoch die Partition $(C_k)_{k \geq 1} = (B_k^{1/n})_{k \geq 1}$. Es sei $(B_k^1)_{k \geq 1} := (B_k^{1/2})_{k \geq 1}$. Für allgemeine $\varepsilon \in (0, 1)$ setzen wir $B_k^\varepsilon := B_k^{1/n}$ für $k \in \mathbb{N}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $1/(n+1) < \varepsilon \leq 1/n$ gilt. Dies gewährleistet die Eigenschaft (3.3.1).

Für $\varepsilon \in (0, 1)$ definieren wir die messbare Abbildung

$$T_\varepsilon : \mathbf{N}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}), \tag{3.3.2}$$

wie folgt. Es seien $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ und $(x, u), (y, v) \in \mu$ mit $y \prec x$ und $u = (u_{i,j})_{i,j \geq 1}$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl mit der Eigenschaft $y \in B_k^\varepsilon$. Wir setzen $|\mu \cap (B_k^\varepsilon \times \mathbf{Y})| < \infty$ voraus und ordnen die Punkte in $\mu \cap (B_k^\varepsilon \times \mathbf{Y})$ aufsteigend hinsichtlich der Relation \prec . Ist y der l -te dieser Punkte, so sei das Punktpaar $\{x, y\}$ mit $U_\varepsilon(\mu, x, y) := u_{k,l}$ markiert. Die Menge $T_\varepsilon(\mu)$ bestehe aus der Vereinigung aller markierter Paare, die auf diese Weise erzeugt werden können. Wir definieren den Punktprozess

$$\xi_\varepsilon^* := T_\varepsilon(\eta^*) = \{(\{x, y\}, U_\varepsilon(\eta^*, x, y)) : (x, y) \in \eta^2, y \prec x\}$$

in $\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}$. Da $\lambda(B_k^\varepsilon) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt, erhalten wir \mathbb{P} -fast sicher

$|\eta^* \cap (B_k^\varepsilon \times \mathbf{Y})| < \infty$. Somit umfasst der Prozess ξ_ε^* mit Wahrscheinlichkeit eins alle Punktpaare aus η . Aufgrund der Unabhängigkeit der Markierung η^* gilt weiterhin $\xi_\varepsilon^* \stackrel{d}{=} \xi$ für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$, also insgesamt

$$\xi_\varepsilon^* = T_\varepsilon(\eta^*) \stackrel{d}{=} \xi. \quad (3.3.3)$$

Im Folgenden betrachten wir den in (3.1.2) eingeführten Prozess ξ und definieren L_ξ als den Raum aller Zufallsvariablen F in \mathbb{R} , für welche eine messbare Abbildung (ein *Repräsentant*) $f : \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $F = f(\xi)$ \mathbb{P} -fast sicher gilt. Die im Weiteren aufgeführten Ergebnisse sind unabhängig von der konkreten Wahl des Repräsentanten.

Um Resultate wie die Gleichung von Mecke in unserem Modellrahmen formulieren und beweisen zu können, ist es notwendig eine endliche Anzahl von deterministischen Punkten aus \mathbf{X} dem Prozess ξ in geeigneter Weise hinzufügen zu können. Zu diesem Zweck erweitern wir die Doppelfolge $(Z_{m,n})_{m,n \geq 1}$, die vor (3.1.2) eingeführt wurde, zu einer Doppelfolge $(Z_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ von unabhängigen \mathbb{M} -verteilten Zufallsvariablen in \mathbf{M} , welche unabhängig vom Poisson-Prozess η sind. Es seien $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ und $I \subset [k]$. Wir definieren den Punktprozess $\xi_{(x_i)_{i \in I}}$ in $\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}$ durch

$$\xi_{(x_i)_{i \in I}} := \{(\{X_m, X_n\}, Z_{m,n}) : X_m \prec X_n, m, n \in [\kappa] \cup \{-i : i \in I\}\},$$

wobei $X_{-i} := x_i$ für $i \in I$ gilt und $X_i, i \in [\kappa]$, die Punkte von η sind. Im Falle $I = \emptyset$ gilt $\xi_{(x_i)_{i \in I}} = \xi$ und für $I = [k]$ schreiben wir ξ_{x_1, \dots, x_k} anstelle von $\xi_{(x_i)_{i \in [k]}}$. Sind die Punkte $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ und die Menge $I \subset [k]$ gegeben, so kann der Punktprozess $\xi_{(x_i)_{i \in I}}$ auf messbare Weise aus ξ_{x_1, \dots, x_k} gewonnen werden, indem entsprechende Punktpaare und Markierungen entfernt werden. Wir definieren für spätere Zwecke außerdem die abkürzende Schreibweise $Z_{x_1, \dots, x_k} := (Z_{-i, -j})_{i, j \in [k]}$.

Bemerkung 3.3.2. Die Verteilung des Vektors $(\eta, \xi_{x_1, \dots, x_k}, Z_{x_1, \dots, x_k})$ hängt messbar von $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ ab.

Zur Begründung sei

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k} &:= \{(\{X_m, X_n\}, Z_{m,n}) : X_m \prec X_n, m, n \in [\kappa] \cup \{-i : i \in [k]\}, \\ &\quad |\{X_m, X_n\} \cap \{x_1, \dots, x_k\}| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Damit umfasst $\widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k}$ kein markiertes Punktpaar von Punkten aus $\{x_1, \dots, x_k\}$ und ist folglich unabhängig von Z_{x_1, \dots, x_k} . Die Punkte aus η lassen sich messbar aus $\widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k}$ und x_1, \dots, x_k gewinnen, da \mathbb{P} -fast sicher

$$\eta = \left(\bigcup_{(\{y_1, y_2\}, z) \in \widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k}} \{y_1, y_2\} \right) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$$

gilt. Auch der Prozess ξ_{x_1, \dots, x_k} ergibt sich auf messbare Weise aus $\widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k}$, den Punkten

x_1, \dots, x_k und Z_{x_1, \dots, x_k} , nämlich durch

$$\xi_{x_1, \dots, x_k} = \widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k} \cup \{(\{x_m, x_n\}, Z_{-m, -n}) : x_m \prec x_n, m, n \in [k]\}.$$

Insgesamt hängt der Vektor $(\eta, \xi_{x_1, \dots, x_k}, Z_{x_1, \dots, x_k})$ messbar von $\widehat{\xi}_{x_1, \dots, x_k}$, den Punkten x_1, \dots, x_k und Z_{x_1, \dots, x_k} ab.

Die multivariate Mecke-Gleichung aus Theorem 2.1.5 kann wie folgt in unserem Rahmen verallgemeinert werden.

Theorem 3.3.3. *Es sei $k \in \mathbb{N}$. Für messbare Funktionen $g : \mathbf{X}^k \times \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow [0, \infty)$ gilt*

$$\mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} g(x_1, \dots, x_k, \xi) = \int \mathbb{E} g(x_1, \dots, x_k, \xi_{x_1, \dots, x_k}) \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)).$$

Beweis. Da λ ein σ -endliches Maß auf \mathbf{X} ist, existiert eine messbare Partition $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von \mathbf{X} mit $\lambda(C_k) < \infty$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren die messbare Abbildung

$$S : \mathbf{N}(\mathbf{X}) \times \mathbf{Y}^2 \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M})$$

wie im Folgenden beschrieben. Dazu seien $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X})$ und $u := (u_{i_1, i_2, i_3, i_4})_{i_1, i_2, i_3, i_4 \in \mathbb{N}} \in \mathbf{Y}^2$. Weiter seien $x, y \in \mu$ mit $x \prec y$ und $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in C_m$ und $y \in C_n$ gelten. Wir nehmen außerdem $|\mu \cap (C_m \cup C_n)| < \infty$ an. Werden die Punkte in $\mu \cap C_m$ und $\mu \cap C_n$ hinsichtlich der Relation \prec der Größe nach aufsteigend geordnet, so sei x der k -te Punkt in $\mu \cap C_m$ und y der l -te Punkt in $\mu \cap C_n$. Unter diesen Voraussetzungen markieren wir das Punktpaar $\{x, y\}$ mit $u_{m, n, k, l}$. Die Menge $S(\mu, u)$ sei die Vereinigung aller markierter Punktpaare, die auf diese Weise erzeugt werden können.

Da $|\eta \cap C_k| < \infty$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, können \mathbb{P} -fast sicher alle möglichen Punktpaare aus η durch die Abbildung S markiert werden. Bedingt auf die Punkte aus η gilt daher

$$S(\eta_{x_1, \dots, x_l}, \widehat{Z}) \stackrel{d}{=} \xi_{x_1, \dots, x_l}, \quad l \in \mathbb{N}_0, x_1, \dots, x_l \in \mathbf{X}. \quad (3.3.4)$$

Hierbei ist \widehat{Z} ein \mathbb{Q}^2 -verteiltes Zufallselement, welches unabhängig von η, ξ und $(Z_{i, j})_{i, j \in \mathbb{Z}}$ ist.

Mit der multivariaten Mecke-Formel für Poisson-Funktionale, siehe Theorem 2.1.5, und der Identität (3.3.4) mit $l = 0$ und $l = k$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} g(x_1, \dots, x_k, \xi) &= \mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} \mathbb{E}[g(x_1, \dots, x_k, \xi) | \eta] \\ &= \mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_k \in \eta}^{\neq} \int g(x_1, \dots, x_k, S(\eta, u)) \mathbb{Q}^2(du) \\ &= \int \mathbb{E} \int g(x_1, \dots, x_k, S(\eta_{x_1, \dots, x_k}, u)) \mathbb{Q}^2(du) \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)) \\ &= \int \mathbb{E} g(x_1, \dots, x_k, \xi_{x_1, \dots, x_k}) \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

In Analogie zu den Differenzenoperatoren von Poisson-Funktionalen (siehe (2.2.2)) führen wir hier Differenzenoperatoren für Zufallselemente aus L_ξ ein. Sei dazu $F \in L_\xi$ mit Repräsentant $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ definieren wir den *Differenzenoperator k -ter Ordnung* durch

$$\Delta_{x_1, \dots, x_k}^k F := \sum_{I \subset [k]} (-1)^{k-|I|} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}).$$

Insbesondere gelten für die Differenzenoperatoren erster und zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta_{x_1} F &:= \Delta_{x_1}^1 F = f(\xi_{x_1}) - f(\xi), \\ \Delta_{x_1, x_2}^2 &= f(\xi_{x_1, x_2}) - f(\xi_{x_1}) - f(\xi_{x_2}) + f(\xi). \end{aligned}$$

Die hier eingeführten Differenzenoperatoren sind \mathbb{P} -fast sicher eindeutig, da für zwei verschiedene Repräsentanten f_1 und f_2 von F aus der Mecke-Gleichung (siehe Theorem 3.3.3) folgt, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$f_1(\xi_{x_1, \dots, x_k}) = f_2(\xi_{x_1, \dots, x_k}) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

für λ^k -fast alle $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{X}^k$ gilt.

Folgendes Lemma ist nützlich beim Rechnen mit Differenzenoperatoren. Die Aussage ist von rein kombinatorischer Natur und gilt in analoger Formulierung auch für Differenzenoperatoren von Poisson-Funktionalen. Sie taucht im Beweis von Theorem 5.2 aus [27] auf, wird dort jedoch nur sehr knapp begründet, weswegen hier ein ausführlicherer Beweis geführt wird.

Lemma 3.3.4. *Es seien $F \in L_\xi$ mit Repräsentant $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$. Dann gilt \mathbb{P} -fast sicher*

$$f(\xi_{x_1, \dots, x_k}) - f(\xi) = \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \Delta_{(x_j)_{j \in J}}^{|J|} F.$$

Beweis. Alle folgenden Gleichungen in denen das Funktional F oder der Repräsentant f auftauchen gelten \mathbb{P} -fast sicher. Mit der Definition der Differenzenoperatoren folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \Delta_{(x_j)_{j \in J}}^{|J|} F &= \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \sum_{I \subset J} (-1)^{|J|-|I|} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}) \\ &= \sum_{I \subset [k]} (-1)^{|I|} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}) \sum_{I \subset J \subset [k], J \neq \emptyset} (-1)^{|J|}. \end{aligned}$$

In obiger Summe machen wir eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Indexmenge $I \subset [k]$. Für $I = [k]$ gilt

$$(-1)^{|I|} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}) \sum_{I \subset J \subset [k], J \neq \emptyset} (-1)^{|J|} = f(\xi_{x_1, \dots, x_k}).$$

Wegen

$$\sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} (-1)^{|J|} = \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} - 1 = -1$$

gilt im Fall $I = \emptyset$

$$(-1)^{|I|} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}) \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} (-1)^{|J|} = -f(\xi).$$

Abschließend erhalten wir für $1 \leq |I| < k$

$$\begin{aligned} \sum_{I \subset J \subset [k], J \neq \emptyset} (-1)^{|J|} &= \sum_{j=|I|}^k (-1)^j \binom{k-|I|}{j-|I|} = \sum_{j=0}^{k-|I|} (-1)^{j+|I|} \binom{k-|I|}{j} \\ &= (-1)^{|I|} \sum_{j=0}^{k-|I|} (-1)^j \binom{k-|I|}{j-|I|} = (-1)^{|I|} (1-1)^{k-|I|} = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt die Behauptung. \square

Es sei $F \in L_\xi$ mit Repräsentant $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$. Für $\varepsilon \in (0, 1)$ definieren wir $F_\varepsilon^* := f(T_\varepsilon(\eta^*))$ mit der Abbildung T_ε aus (3.3.2). Für $k \in \mathbb{N}$, $I \subset [k]$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ und $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{Y}$ verwenden wir die Abkürzung

$$F_{\varepsilon, (x_i, y_i)_{i \in I}}^* := f(T_\varepsilon(\eta^* \cup \{(x_i, y_i) : i \in I\})). \quad (3.3.5)$$

Im Fall $I = \emptyset$ gilt $F_{\varepsilon, (x_i, y_i)_{i \in I}}^* = F_\varepsilon^*$. Außerdem sei

$$D_{(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)}^k F_\varepsilon^* := \sum_{I \subset [k]} (-1)^{k-|I|} F_{\varepsilon, (x_i, y_i)_{i \in I}}^*. \quad (3.3.6)$$

Dies ist der übliche Differenzenoperator für den Poisson-Prozess η^* und das Funktional $f \circ T_\varepsilon$, vergleiche (2.2.2). Indem wir den Zusammenhang zwischen den Operatoren D und Δ untersuchen, ist es uns in den beiden kommenden Abschnitten möglich bestehende Resultate über Funktionale des Poisson-Prozesses η^* auf Funktionale des Prozesses von markierten Punktpaaren ξ zu verallgemeinern.

Es sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger \mathbb{Q} -verteilter Zufallselemente in \mathbf{Y} , welche ebenfalls unabhängig von allen anderen auftretenden Zufallselementen ist. Weiterhin seien $\varepsilon \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{X}$ und $m_{11}, \dots, m_{kk} \in \mathbf{M}$. Außerdem setzen wir $x_1 \in B_{n_1}^\varepsilon, \dots, x_k \in B_{n_k}^\varepsilon$ für paarweise verschiedene $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ voraus. Aufgrund der Definitionen (3.3.5) und (3.3.6) gilt für $I \subset [k]$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta(B_{n_i}^\varepsilon) = 0, i \in [k]\} F_{\varepsilon, (x_i, Y_i)_{i \in I}}^* \mid (Y_j)_{n_i, 1} = m_{ij}, i, j \in [k]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta(B_{n_i}^\varepsilon) = 0, i \in [k]\} f(\xi_{(x_i)_{i \in I}}) \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [k]], \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

und damit

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta(B_{n_i}^\varepsilon) = 0, i \in [k]\} D_{(x_1, Y_1), \dots, (x_k, Y_k)}^k F_\varepsilon^* \mid (Y_j)_{n_i, 1} = m_{ij}, i, j \in [k]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta(B_{n_i}^\varepsilon) = 0, i \in [k]\} \Delta_{x_1, \dots, x_k}^k F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [k]]. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Dabei sind die Bedingungen $(Y_j)_{n_i, 1} = m_{ij}$, $i, j \in [k]$, und $Z_{-i, -j} = m_{ij}$, $i, j \in [k]$, gerade so

gewählt, dass im Falle $\eta(B_{n_i}^\varepsilon) = 0$, $i \in [k]$, die Marken der Paare, bestehend aus den Punkten x_1, \dots, x_k , in beiden Modellen identisch sind.

Da unter den hier getroffenen Voraussetzungen insbesondere $B^\varepsilon(x_1), \dots, B^\varepsilon(x_k)$ paarweise verschieden sind, folgt mit der Definition von η^*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left(F_{\varepsilon, (x_i, Y_i)_{i \in I}}^*\right)_{I \subset [k]} \in \cdot \mid \eta\right) &= \mathbb{P}\left(\left(f(\xi_{(x_i)_{i \in I}})\right)_{I \subset [k]} \in \cdot \mid \eta\right) \\ &\text{\mathbb{P-fast sicher auf } \{\eta(B^\varepsilon(x_i)) = 0, i \in [k]\}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Wird die Funktion f als beschränkt angenommen und ist $g: \mathbb{R}^{2^k} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare und beschränkte Funktion, so liefert (3.3.9)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\mathbb{1}\{\eta(B^\varepsilon(x_i)) = 0, i \in [k]\}g\left(\left(D_{(x_i, Y_i)_{i \in I}}^{|I|} F_\varepsilon^*\right)_{I \subset [k]}\right) \\ = \mathbb{E}\mathbb{1}\{\eta(B^\varepsilon(x_i)) = 0, i \in [k]\}g\left(\left(\Delta_{(x_i)_{i \in I}}^{|I|} F\right)_{I \subset [k]}\right). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Die vorangegangenen Gleichungen (3.3.7), (3.3.8), (3.3.9) und (3.3.10) benötigen alle die Voraussetzung, dass die Partitions Mengen $B^\varepsilon(x_1), \dots, B^\varepsilon(x_k)$ paarweise verschieden sind. Da jedoch für alle $x \in \mathbf{X}$ die Größe $\lambda(B^\varepsilon(x))$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null konvergiert und wegen der Monotonie-Eigenschaft der Partition, siehe (3.3.1), folgt für λ^k -fast alle $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{X}^k$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}\{B^\varepsilon(x_1), \dots, B^\varepsilon(x_k) \text{ sind paarweise verschieden}\} = 1. \quad (3.3.11)$$

3.4. VARIANZUNGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt zeigen wir für quadratisch-integrierbare Funktionale aus L_ξ eine *Poincaré-Ungleichung* (Theorem 3.4.1) und eine *Fock-Raum-Ungleichung* (Theorem 3.4.4), welche später bei konkreten Varianzabschätzungen zum Einsatz kommen werden. Wir verwenden dabei die Konstruktionen und Schreibweisen aus Abschnitt 3.3.

Theorem 3.4.1. *Es sei $F \in L_\xi$ mit $\mathbb{E}F^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\text{Var } F \leq \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^2 \lambda(dx). \quad (3.4.1)$$

Beweis. Wir setzen in diesem Beweis generell $\int \mathbb{E}(\Delta_x F)^2 \lambda(dx) < \infty$ voraus, da andernfalls die zu zeigende Ungleichung trivial ist. Es sei $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Repräsentant von F , für welchen zunächst $\|f\|_\infty < \infty$ gelte. Weiter sei $\varepsilon \in (0, 1)$ und, wie in Abschnitt 3.3, $F_\varepsilon^* := f(T_\varepsilon(\eta^*))$ (siehe auch (3.3.2)). Mit Gleichung (3.3.3) erhalten wir $F_\varepsilon^* \stackrel{d}{=} F$. Die Poincaré-Ungleichung für Poisson-Funktionale (siehe Theorem 2.2.1), angewandt auf F_ε^* , liefert

$$\text{Var } F \leq \iint \mathbb{E}(D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^2 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx). \quad (3.4.2)$$

Mit Gleichung (3.3.10) (für $k = 1$) folgt für die rechte Seite von (3.4.2)

$$\begin{aligned} & \iint \mathbb{E}(D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^2 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx) \\ &= \int \mathbb{E} \mathbb{1}\{\eta(B^\varepsilon(x)) = 0\} (\Delta_x F)^2 \lambda(dx) + \iint \mathbb{E} \mathbb{1}\{\eta(B^\varepsilon(x)) > 0\} (D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^2 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx). \end{aligned}$$

Wegen

$$|D_{(x,y)} F_\varepsilon^*| = |F_{\varepsilon,(x,y)}^* - F_\varepsilon^*| \leq 2\|f\|_\infty, \quad (x, y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y},$$

folgt weiter mit (3.4.2)

$$\text{Var } F \leq \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^2 \lambda(dx) + 4\|f\|_\infty^2 \int \mathbb{P}(\eta(B^\varepsilon(x)) > 0) \lambda(dx). \quad (3.4.3)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \mathbb{P}(\eta(B^\varepsilon(x)) > 0) \lambda(dx) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k^\varepsilon} \mathbb{P}(\eta(B_k^\varepsilon) > 0) \lambda(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k^\varepsilon) (1 - \exp(-\lambda(B_k^\varepsilon))) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k^\varepsilon)^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die erste Abschätzung beruht auf der Ungleichung $\exp(t) \geq 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$, und die zweite auf der Eigenschaft $\lambda(B_k^\varepsilon) \leq \varepsilon/k$, $k \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, verschwindet der letzte Ausdruck für $\varepsilon \rightarrow 0$. Damit folgt (3.4.1) aus (3.4.3) mit $\varepsilon \rightarrow 0$.

Im nächsten Schritt zeigen wir die Poincaré-Ungleichung für unbeschränkte Repräsentanten. Es sei also $\|f\|_\infty = \infty$ angenommen. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_n := \mathbb{1}\{f > n\}n + \mathbb{1}\{-n \leq f \leq n\}f - \mathbb{1}\{f < -n\}n.$$

Damit gilt $f_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ punktweise. Weiterhin seien $F_n := f_n(\xi)$, $n \in \mathbb{N}$. Mit dieser Definitionen erhalten wir $|F_n| \leq |F|$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Größe von $f(\xi_x)$ und $f(\xi)$ liefert $|\Delta_x F_n| \leq |\Delta_x F|$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $x \in \mathbf{X}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beispielsweise gilt für $f(\xi_x) > n$ und $-n \leq f(\xi) \leq n$

$$|f_n(\xi_x) - f_n(\xi)| = n - f(\xi) < f(\xi_x) - f(\xi) = |f(\xi_x) - f(\xi)|.$$

In den restlichen Fällen kann entsprechend argumentiert werden. Da für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion f_n beschränkt ist, gilt nach dem ersten Teil des Beweises die Ungleichung (3.4.1) für F_n . Es folgt

$$\text{Var } F_n \leq \int \mathbb{E}(\Delta_x F_n)^2 \lambda(dx) \leq \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^2 \lambda(dx)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Abschließend erhalten wir mit majorisierter Konvergenz $\text{Var } F_n \rightarrow \text{Var } F$ für $n \rightarrow \infty$, was den Beweis beendet. \square

Um eine exakte Varianzdarstellung der hier betrachteten Funktionale formulieren zu können,

benötigen wir eine alternative Konstruktion der paarweisen Markierung. Zu diesem Zweck sei im Folgenden $\hat{\eta}$ ein Poisson-Prozess in $\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y}$ mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \lambda_1|_{[0,1]} \otimes \mathbb{Q}$. Für einen Punkt aus $\hat{\eta}$ interpretieren wir dessen erste Komponente als Ort in \mathbf{X} , seine zweite als Geburtszeit in $[0, 1]$ und seine dritte als Doppelfolge von Marken in \mathbf{M} . Aus dieser Doppelfolge werden wir die Marken für eine paarweise Markierung der Punkte auswählen. Für ein gegebenes $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y})$ und $s, t \in [0, 1]$ mit $s < t$ bezeichne $\mu_{[s,t]}$ die Einschränkung von μ auf Punkte mit Geburtszeit in $[s, t]$, also $\mu_{[s,t]} := \mu \cap (\mathbf{X} \times [s, t] \times \mathbf{Y})$. Weiter schreiben wir für $t \in [0, 1]$ und $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y})$ abkürzend $\mu_t := \mu_{[0,t]}$.

Um eine paarweise Markierung zu konstruieren sei $\varepsilon \in (0, 1)$ beliebig, aber fortan fest gewählt und $(B_k^\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}}$ eine messbare Partition von \mathbf{X} mit $\lambda(B_k^\varepsilon) \leq \varepsilon/k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dabei stellt Lemma 3.3.1 die Existenz einer solchen Partition sicher. Die paarweise Markierung wird durch die messbare Abbildung

$$T: \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \quad (3.4.4)$$

erzeugt, die wir im Folgenden beschreiben. Dazu seien $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y})$ und $(x_1, t_1, (u_{i,j}^{(1)}))$, $(x_2, t_2, (u_{i,j}^{(2)}))$ Punkte aus μ mit $t_1 < t_2$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_1 \in B_n^\varepsilon$ gilt. Im Falle $|\mu \cap B_n^\varepsilon \times [0, 1] \times \mathbf{Y}| = \infty$ erhält das Punktpaar $\{x_1, x_2\}$ keine Markierung. Andernfalls ordnen wir die Elemente in $\mu \cap B_n^\varepsilon \times [0, 1] \times \mathbf{Y}$ hinsichtlich ihrer Geburtszeit, sodass insbesondere der erste Punkt der älteste ist. Ist $(x_1, t_1, (u_{i,j}^{(1)}))$ der m -te dieser geordneten Punkte, so markieren wir das Punktpaar $\{x_1, x_2\}$ mit der Marke $u_{n,m}^{(2)}$. Die Vereinigung aller markierten Punktpaare, die auf diese Weise erzeugt werden können, ist $T(\mu)$.

Da $|\hat{\eta} \cap B_k^\varepsilon \times [0, 1] \times \mathbf{Y}| < \infty$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, umfasst $T(\hat{\eta})$ auch \mathbb{P} -fast sicher alle möglichen Punktpaare aus $\hat{\eta}$.

Für $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y})$ und $(x, t, M) \in \mu$ bezeichne $T(\mu) \setminus \{x\}$ alle markierten Paare aus $T(\mu)$, in denen der Punkt x nicht vertreten ist.

Theorem 3.4.2. *Es seien $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung und $F := f(T(\hat{\eta}))$. Außerdem sei $\mathbb{E}F^2 < \infty$ angenommen. Dann gilt*

$$\text{Var } F = \int \int_0^1 \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t]^2 \right] \mathbb{Q}(dM) dt \lambda(dx).$$

Beweis. Wir verwenden Theorem A.1 aus dem Anhang von [26], dessen Beweis auf einer Darstellung des *Kabanov-Skorohod-Integrals* aus [29] beruht. Damit erhalten wir

$$\text{Var } F = \int \int_0^1 \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta})) | \hat{\eta}_t]^2 \right] \mathbb{Q}(dM) dt \lambda(dx). \quad (3.4.5)$$

Für $t \in [0, 1]$ bezeichne $\mathbb{P}_{[t,1]}$ die Verteilung des Poisson-Prozesses $\hat{\eta}_{[t,1]}$. Es seien $(x, t, M) \in \mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y}$, ζ ein Poisson-Prozess mit Verteilung $\mathbb{P}_{[t,1]}$ und $\mu \in \mathbf{N}(\mathbf{X} \times [0, t] \times \mathbf{Y})$. In diesem Fall besitzen nach der Konstruktion im Vorfeld des Theorems die paarweisen Markierungen

$T(\mu \cup \zeta)$ und $T(\mu \cup \zeta \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}$ die selbe Verteilung. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta})) | \hat{\eta}_t] \\ &= \int f(T(\hat{\eta}_t \cup \zeta \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta}_t \cup \zeta)) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\zeta) \\ &\stackrel{d}{=} \int f(T(\hat{\eta}_t \cup \zeta \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta}_t \cup \zeta \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\zeta) \\ &= \mathbb{E}[f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t]. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.4.5) beendet dies den Beweis \square

Bemerkung 3.4.3. Unter Verwendung des vorangegangenen Theorems 3.4.2 kann ein alternativer und kürzerer Beweis der Poincaré-Ungleichung (Theorem 3.4.1) geführt werden.

Sei hierzu $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Repräsentant von F . Für einen gegebenen Punkt $(x, t, M) \in \mathbf{X} \times [0, 1] \times \mathbf{Y}$ besitzt nach Konstruktion

$$f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\})$$

die selbe Verteilung wie $\Delta_x(F)$. Somit folgt mit Theorem 3.4.2 und der Ungleichung von Jensen

$$\begin{aligned} \text{Var } F &\leq \int \int_0^1 \int \mathbb{E}(f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}))^2 \mathbb{Q}(dM) dt \lambda(dx) \\ &= \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^2 \lambda(dx). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Ungleichung von Poincaré.

Das folgende Theorem liefert eine untere Schranke für die Varianz von Zufallselementen aus L_ξ , deren zweites Moment existiert, und kann als *Fock-Raum-Ungleichung* verstanden werden. Für die Fock-Raum-Darstellung von Poisson-Funktionalen verweisen wir auf Abschnitt 18.2 in [28] und dort insbesondere auf Theorem 18.6, das im Beweis der nachfolgenden Aussagen auch zum Einsatz kommt.

Theorem 3.4.4. *Es sei $F \in L_\xi$ mit $\mathbb{E}F^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\text{Var } F \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{x_1, \dots, x_n}]^2] \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)).$$

Beweis. Es seien $\varepsilon \in (0, 1)$, $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Repräsentant von F und $F_\varepsilon^* = f(T_\varepsilon(\eta^*))$. Wegen (3.3.3) gilt $F_\varepsilon^* \stackrel{d}{=} F$. Damit liefert die Fock-Raum-Darstellung für Funktionale des Poisson-Prozesses η^* , siehe [28, Theorem 18.6],

$$\text{Var } F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \iint \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)).$$

Es sei $A \subset \mathbf{X}$ eine messbare Menge mit $\lambda(A) < \infty$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{A^n} \int \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & \geq \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}}^{\neq} \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \int \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Für $y = (u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}} \in \mathbf{Y}$, $l \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots, m_l \in \mathbf{M}$ definieren wir $y_{m_1, \dots, m_l}^{k_1, \dots, k_l} \in \mathbf{Y}$ als die Folge $(v_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ mit $v_{k_1,1} = m_1, \dots, v_{k_l,1} = m_l$ und $v_{i,j} = u_{i,j}$ für alle anderen $i, j \in \mathbb{N}$. Abkürzend verwenden wir für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{m} := (m_{11}, \dots, m_{nn}) \in \mathbf{M}^{n^2}$ und $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ die Schreibweisen $y_{\mathbf{m}_i}^{k_i} := y_{m_{i1}, \dots, m_{in}}^{k_i}$, $i \in [n]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene k_1, \dots, k_n liefert die Ungleichung von Jensen

$$\begin{aligned} & \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \int \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & = \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \iint \mathbb{E}[D_{(x_1, (y_1)^{\mathbf{k}_{m_1}}), \dots, (x_n, (y_n)^{\mathbf{k}_{m_n}})}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \\ & \quad \times \mathbb{M}^{n^2}(d(m_{11}, \dots, m_{nn})) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & \geq \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \int \left(\int \mathbb{E}[D_{(x_1, (y_1)^{\mathbf{k}_{m_1}}), \dots, (x_n, (y_n)^{\mathbf{k}_{m_n}})}^n F_\varepsilon^*] \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \right)^2 \\ & \quad \times \mathbb{M}^{n^2}(d(m_{11}, \dots, m_{nn})) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Zunächst sei f als beschränkt angenommen, also $\|f\|_\infty < \infty$. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit paarweise verschiedenen k_i , $i \in [n]$. Weiter seien $x_1 \in B_{k_1}^\varepsilon, \dots, x_n \in B_{k_n}^\varepsilon$ und $\mathbf{m} = (m_{11}, \dots, m_{nn}) \in \mathbf{M}^{n^2}$. Gleichung (3.3.8) und die Dreiecksungleichung liefern

$$\begin{aligned} & \left| \int \mathbb{E}[D_{(x_1, (y_1)^{\mathbf{k}_{m_1}}), \dots, (x_n, (y_n)^{\mathbf{k}_{m_n}})}^n F_\varepsilon^*] \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) - \mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [n]] \right| \\ & \leq \left| \int \mathbb{E}[\mathbb{1}\{\eta(B_{k_i}^\varepsilon) > 0 \text{ für ein } i \in [n]\} D_{(x_1, (y_1)^{\mathbf{k}_{m_1}}), \dots, (x_n, (y_n)^{\mathbf{k}_{m_n}})}^n F_\varepsilon^*] \mathbb{Q}^n(d(y_1, \dots, y_n)) \right| \\ & \quad + |\mathbb{E}[\mathbb{1}\{\eta(B_{k_i}^\varepsilon) > 0 \text{ für ein } i \in [n]\} \Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [n]]| \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die \mathbb{P} -fast sicheren Abschätzungen

$$\begin{aligned} & |\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F| \leq 2^n \|f\|_\infty, \\ & \left| D_{(x_1, (y_1)^{\mathbf{k}_{m_1}}), \dots, (x_n, (y_n)^{\mathbf{k}_{m_n}})}^n F_\varepsilon^* \right| \leq 2^n \|f\|_\infty, \quad y_1, \dots, y_n \in \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Damit kann die rechte Seite von (3.4.7) nach oben gegen

$$2^{n+1} \|f\|_\infty \mathbb{P}(\eta(B_{k_i}^\varepsilon) > 0 \text{ für ein } i \in [n])$$

abgeschätzt werden. Durch Umstellen der Ungleichung

$$(\gamma a + (\gamma - 1)b)^2 \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \gamma > 1,$$

erhalten wir

$$(a + b)^2 \geq \frac{b^2}{\gamma} - \frac{a^2}{\gamma - 1}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \gamma > 1.$$

Mit dieser elementaren Ungleichung und den vorangegangenen Argumenten folgt für $\gamma > 1$, dass die rechte Seite von (3.4.6) insgesamt nach unten durch

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}}^{\neq} \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \int \left[\frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [n]]^2 \right. \\ & \left. - \frac{4^{n+1}}{\gamma - 1} \|f\|_\infty^2 \mathbb{P}(\eta(B_{k_i}^\varepsilon) > 0 \text{ für ein } i \in [n])^2 \right] \mathbb{M}^{n^2}(\mathrm{d}(m_{11}, \dots, m_{nn})) \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

beschränkt ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}}^{\neq} \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \mathbb{P}(\eta(B_{k_i}^\varepsilon) > 0 \text{ für ein } i \in [n])^2 \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}}^{\neq} \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} (1 - \mathbb{P}(\eta(B_{k_i}^\varepsilon) = 0 \text{ für alle } i \in [n]))^2 \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & \leq \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}}^{\neq} \int_{\times_{i=1}^n B_{k_i}^\varepsilon \cap A} \left(1 - \prod_{i=1}^n \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_i}\right) \right)^2 \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & \leq (1 - \exp(-n\varepsilon))^2 \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_k^\varepsilon \cap A} 1 \lambda(\mathrm{d}x) \right)^n \\ & = \lambda(A)^n (1 - \exp(-n\varepsilon))^2. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass η ein Poisson-Prozess ist und $\lambda(B_k^\varepsilon) \leq \varepsilon/k \leq \varepsilon$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ und anschließend $\gamma \rightarrow 1$ folgt aus (3.4.8), unter Verwendung von (3.4.9),

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A^n} \int \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(\mathrm{d}(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & \geq \int_{A^n} \int \mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [n]]^2 \mathbb{M}^{n^2}(\mathrm{d}(m_{11}, \dots, m_{nn})) \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Abschließend erhalten wir mit $A \uparrow \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \mathbb{E}[D_{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)}^n F_\varepsilon^*]^2 \mathbb{Q}^n(\mathrm{d}(y_1, \dots, y_n)) \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & \geq \iint \mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{-i, -j} = m_{ij}, i, j \in [n]]^2 \mathbb{M}^{n^2}(\mathrm{d}(m_{11}, \dots, m_{nn})) \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)) \\ & = \int \mathbb{E}[\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{x_1, \dots, x_n}]^2 \lambda^n(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

was den Beweis für beschränkte Repräsentanten f beendet.

Es sei nun $f: \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ als unbeschränkt angenommen. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$f_k := \mathbf{1}\{|f| \leq k\}f$ und $F_k := f_k(\xi)$. Mit majorisierter Konvergenz folgt $\text{Var } F_k \rightarrow \text{Var } F$ für $k \rightarrow \infty$. Der erste Teil des Beweises für beschränkte Repräsentanten und eine mehrfache Anwendung des Lemmas von Fatou liefern

$$\begin{aligned} \text{Var } F &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var } F_k \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F_k \mid Z_{x_1, \dots, x_n}]^2 \right] \lambda^n(d(x_1, \dots, x_k)) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \mathbb{E} \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F_k \mid Z_{x_1, \dots, x_n}]^2 \right] \lambda^n(d(x_1, \dots, x_k)). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Der Limes Inferior ist hier notwendig, da die Konvergenz der rechten Seite nicht angenommen werden kann. Nach der Definition der Differenzenoperatoren gilt für $k, n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}$

$$|\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F_k| \leq \sum_{I \subset [n]} |f_k(\xi_{(x_i)_{i \in I}})| \leq \sum_{I \subset [n]} |f(\xi_{(x_i)_{i \in I}})| \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}|f(\xi)|$ ist nach Voraussetzung endlich. Für $I = \{1, \dots, l\}$ mit $l \in [n]$ und $A \in \mathcal{X}$ mit $\lambda(A) < \infty$ gilt unter Verwendung der Mecke-Gleichung aus Theorem 3.3.3 und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{A^n} \mathbb{E}|f(\xi_{(x_i)_{i \in I}})| \lambda^n(d(x_1, \dots, x_k)) &= \lambda(A)^{n-l} \mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_l \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_l \in A\} |f(\xi)| \\ &= \lambda(A)^{n-l} \mathbb{E}|f(\xi)| \prod_{i=1}^l (\eta(A) - i + 1) \\ &\leq \lambda(A)^{n-l} \sqrt{\mathbb{E}f(\xi)^2} \sqrt{\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^l (\eta(A) - i + 1) \right)^2}. \end{aligned}$$

Diese obere Schranke ist endlich, da das zweite Moment von F existiert und $\eta(A)$ eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda(A) < \infty$ besitzt. Offensichtlich gilt diese Abschätzung auch für jede Teilmenge $I \subset [n]$ mit Kardinalität $l \leq n$. Damit erhalten wir für λ^n -fast alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^n$

$$\mathbb{E} \sum_{I \subset [n]} |f(\xi_{(x_i)_{i \in I}})| < \infty.$$

Außerdem gilt nach Konstruktion für λ^n -fast alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^n$

$$\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F_k \rightarrow \Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher, für } k \rightarrow \infty.$$

Mit majorisierter Konvergenz folgt für λ^n -fast alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X}^n$

$$\mathbb{E} [\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F_k \mid Z_{x_1, \dots, x_n}] \rightarrow \mathbb{E} [\Delta_{x_1, \dots, x_n}^n F \mid Z_{x_1, \dots, x_n}] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher, für } k \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit (3.4.10) folgt die Behauptung. □

Wir verwenden das vorangegangene Theorem 3.4.4, um folgende untere Schranke für die Varianz zu zeigen.

Theorem 3.4.5. *Es sei $F \in L_\xi$ mit $\mathbb{E}F^2 < \infty$ und f ein Repräsentant von F . Weiter seien $k \in \mathbb{N}$, $I_1, I_2 \subset [k]$ mit $I_1 \cup I_2 = [k]$, $U \subset \mathbf{X}^k \times \mathbf{M}^{k^2}$ eine messbare Menge und $c > 0$ so, dass*

$$|\mathbb{E}[f(\xi_{(x_i)_{i \in I_1}}) - f(\xi_{(x_i)_{i \in I_2}}) | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i, j \in [k]}]| \geq c \quad (3.4.11)$$

für alle $(x_1, \dots, x_k, (m_{ij})_{i, j \in [k]}) \in U$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Var } F &\geq \frac{c^2}{4^{k+1}k!} \min_{\emptyset \neq J \subset [k]} \inf \{ \lambda^{|J|} \otimes \mathbb{M}^{|J|^2}(\Pi_J(V)) : V \subset U \text{ messbar,} \\ &\quad \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(V) \geq \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(U)/2^{k+1} \}, \end{aligned}$$

wobei für $\emptyset \neq J \subset [k]$ und $V \subset \mathbf{X}^k \times \mathbf{M}^{k^2}$ messbar

$$\begin{aligned} \Pi_J(V) := \{ &((x_i)_{i \in J}, (m_{ij})_{i, j \in J}) \in (\mathbb{R}^d)^{|J|} \times \mathbf{M}^{|J|^2} : \text{es gibt ein } ((y_i)_{i \in [k]}, (\tilde{m}_{ij})_{i, j \in [k]}) \in V, \\ &\text{sodass } (x_i)_{i \in J} = (y_i)_{i \in J} \text{ und } (m_{ij})_{i, j \in J} = (\tilde{m}_{ij})_{i, j \in J} \}. \end{aligned}$$

Beweis. Der folgende Beweis verwendet die selben Argumente, wie der Beweis von Theorem 5.2 in [27].

Zunächst gelte $I_1 = [k]$ und $I_2 = \emptyset$. Mit Lemma 3.3.4, der Voraussetzung (3.4.11) und der Dreiecksungleichung erhalten wir für $(x_1, \dots, x_k, (m_{ij})_{i, j \in [k]}) \in U$

$$\begin{aligned} c &\leq |\mathbb{E}[f(\xi_{(x_i)_{i \in [k]}}) - f(\xi) | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i, j \in [k]}]| \\ &= \left| \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \mathbb{E} \left[\Delta_{(x_j)_{j \in J}}^{|J|} F | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i, j \in [k]} \right] \right| \\ &\leq \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \left| \mathbb{E} \left[\Delta_{(x_j)_{j \in J}}^{|J|} F | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i, j \in [k]} \right] \right|. \end{aligned}$$

Folglich existieren eine Menge $\emptyset \neq I_0 \subset [k]$ und eine messbare Menge $V \subset U$ mit

$$\left| \mathbb{E} \left[\Delta_{(x_j)_{j \in I_0}}^{|I_0|} F | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i, j \in [k]} \right] \right| \geq \frac{c}{2^k}$$

für $\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}$ -fast alle $(x_1, \dots, x_k, (m_{ij})_{i, j \in [k]}) \in V$ und

$$\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(V) \geq \frac{\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(U)}{2^k}.$$

Damit liefert Theorem 3.4.4

$$\text{Var } F \geq \frac{c^2}{4^k k!} \min_{\emptyset \neq J \subset [k]} \inf \{ \lambda^{|J|} \otimes \mathbb{M}^{|J|^2}(\Pi_J(V)) : V \subset U, \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(V) \geq \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(U)/2^k \}. \quad (3.4.12)$$

Im Weiteren seien die Mengen $I_1, I_2 \subset [k]$ mit $I_1 \cup I_2 = [k]$ beliebig. Mit der Dreiecks-

ungleichung und Voraussetzung (3.4.11) folgt die Existenz einer messbaren Menge $\tilde{U} \subset U$ mit

$$|\mathbb{E}[f(\xi_{(x_i)_{i \in I_1}}) - f(\xi) | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i,j \in [k]}]| \geq \frac{c}{2}$$

für $\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}$ -fast alle $(x_1, \dots, x_k, (m_{ij})_{i,j \in [k]}) \in \tilde{U}$ und

$$|\mathbb{E}[f(\xi_{(x_i)_{i \in I_2}}) - f(\xi) | Z_{x_1, \dots, x_k} = (m_{ij})_{i,j \in [k]}]| \geq \frac{c}{2}$$

für $\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}$ -fast alle $(x_1, \dots, x_k, (m_{ij})_{i,j \in [k]}) \in U \setminus \tilde{U}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(\tilde{U}) \geq \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(U)/2$. Mit (3.4.12) folgt

$$\begin{aligned} \text{Var } F &\geq \frac{(c/2)^2}{4^k k!} \min_{\emptyset \neq J \subset [k]} \inf \{ \lambda^{|J|} \otimes \mathbb{M}^{|J|^2}(\Pi_J(V)) : V \subset \tilde{U}, \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(V) \geq \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(\tilde{U})/2^k \} \\ &\geq \frac{c^2}{4^{k+1} k!} \min_{\emptyset \neq J \subset [k]} \inf \{ \lambda^{|J|} \otimes \mathbb{M}^{|J|^2}(\Pi_J(V)) : V \subset U, \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(V) \geq \lambda^k \otimes \mathbb{M}^{k^2}(U)/2^{k+1} \}, \end{aligned}$$

was den Beweis beendet. \square

3.5. NORMALAPPROXIMATION

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Verallgemeinerung von Theorem 2.2.2 über Normalapproximation von Poisson-Funktionalen auf Funktionale eines paarweise markierten Poisson-Prozesses. Dazu verwenden wir die Konstruktionen und Bezeichnungen der vorangegangenen Abschnitte.

In der folgenden Definition werden die Größen eingeführt, welche im anschließenden Theorem dazu dienen Schranken für die Wasserstein-Distanz d_1 und die Kolmogorov-Distanz d_K zwischen einer normalverteilten Zufallsvariable und einem Funktional aus L_ξ angeben zu können.

Definition 3.5.1. Für $F \in L_\xi$ seien

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} F)^2 (\Delta_{x_2} F)^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F)^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 F)^2 \right]^{1/2} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}, \\ \gamma_2 &:= \left[\int \mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F)^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 F)^2 \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}, \\ \gamma_3 &:= \int \mathbb{E} |\Delta_x F|^3 \lambda(dx), \\ \gamma_4 &:= \frac{1}{2} [\mathbb{E} F^4]^{1/4} \int \left[\mathbb{E}(\Delta_x F)^4 \right]^{3/4} \lambda(dx), \\ \gamma_5 &:= \left[\int \mathbb{E}(\Delta_x F)^4 \lambda(dx) \right]^{1/2}, \\ \gamma_6 &:= \left[\int \left[6 \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} F)^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_2}^2 F)^4 \right]^{1/2} + 3 \mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_2}^2 F)^4 \right] \lambda^2(d(x_1, x_2)) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Das folgende Resultat zur Normalapproximation von Funktionalen eines paarweise markierten Poisson-Prozesses bildet das Fundament der zentralen Grenzwertsätze im RCM.

Theorem 3.5.2. *Es sei $F \in L_\xi$ mit $\mathbb{E}F = 0$, $\text{Var}(F) = 1$ und $\mathbb{E}F^4 < \infty$. Weiter seien angenommen $\gamma_5, \gamma_6 < \infty$,*

$$\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} F)^4 \right]^{\frac{1}{4}} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2} F)^4 \right]^{\frac{1}{4}} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F)^4 \right]^{\frac{1}{4}} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2, x_3}^2 F)^4 \right]^{\frac{1}{4}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) < \infty \quad (3.5.1)$$

und

$$\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2, x_3}^2 F)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) < \infty. \quad (3.5.2)$$

Dann gelten

$$d_1(F, N) \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \quad \text{und} \quad d_K(F, N) \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6.$$

Für den Beweis von Theorem 3.5.2 benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.5.3. *Es seien Y_n , $n \in \mathbb{N}$ und Y Zufallsvariablen in $L^2(\mathbb{P})$ mit $Y_n \rightarrow Y$ in $L^2(\mathbb{P})$ für $n \rightarrow \infty$ und N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Dann gelten*

$$d_1(Y, N) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_1(Y_n, N) \quad \text{und} \quad d_K(Y, N) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d_K(Y_n, N).$$

Beweis. Die Dreiecksungleichung, die Monotonie des Erwartungswerts, die Lipschitz-Eigenschaft und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefern für die Wasserstein-Distanz für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_1(Y, N) &\leq d_1(Y, Y_n) + d_1(Y_n, N) \\ &= \sup_{h \in \text{Lip}(1)} |\mathbb{E}h(Y) - \mathbb{E}h(Y_n)| + d_1(Y_n, N) \\ &\leq \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \mathbb{E}|h(Y) - h(Y_n)| + d_1(Y_n, N) \\ &\leq \mathbb{E}|Y - Y_n| + d_1(Y_n, N) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}|Y - Y_n|^2} + d_1(Y_n, N). \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $Y_n \rightarrow Y$ in $L^2(\mathbb{P})$, für $n \rightarrow \infty$, folgt die Aussage für die Wasserstein-Distanz.

Um die Aussage für die Kolmogorov-Distanz zu zeigen, sei $\varepsilon_n := \mathbb{E}|Y - Y_n|^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen der vorausgesetzten L^2 -Konvergenz gilt $\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Es sei $t \in \mathbb{R}$. Wir schätzen im Folgenden die Differenz $\mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t)$ nach unten und oben ab. Bei der Abschätzung nach oben erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t) \\ &= \mathbb{P}(\{|Y - Y_n| < \varepsilon_n^{1/3}\} \cap \{Y \leq t\} \cup \{|Y - Y_n| \geq \varepsilon_n^{1/3}\} \cap \{Y \leq t\}) - \mathbb{P}(N \leq t) \\ &\leq \mathbb{P}(Y_n \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(|Y - Y_n| \geq \varepsilon_n^{1/3}) - \mathbb{P}(N \leq t) \\ &= \mathbb{P}(Y_n \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) - \mathbb{P}(N \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(|Y - Y_n| \geq \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(N \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) - \mathbb{P}(N \leq t) \end{aligned}$$

$$\leq d_K(Y_n, N) + \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^{2/3}} + \frac{\varepsilon_n^{1/3}}{\sqrt{2\pi}},$$

wobei im letzten Schritt die Markov Ungleichung verwendet wurde. Anstelle $\mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t)$ nach unten abzuschätzen, schätzen wir $\mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(Y \leq t)$ nach oben ab. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(Y \leq t) \\ & \leq \mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(\{Y \leq t\} \cap \{|Y - Y_n| < \varepsilon_n^{1/3}\}) \\ & \leq \mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(\{Y_n \leq t + \varepsilon_n^{1/3}\} \cap \{|Y - Y_n| < \varepsilon_n^{1/3}\}) \\ & \leq \mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(Y_n \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(|Y - Y_n| \geq \varepsilon_n^{1/3}) \\ & = \mathbb{P}(N \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(N \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) - \mathbb{P}(Y_n \leq t + \varepsilon_n^{1/3}) + \mathbb{P}(|Y - Y_n| \geq \varepsilon_n^{1/3}) \\ & \leq d_K(Y_n, N) + \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^{2/3}}, \end{aligned}$$

wobei auch hier im letzten Schritt die Markov Ungleichung verwendet wurde. Insgesamt folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathbb{P}(Y \leq t) - \mathbb{P}(N \leq t)| \leq d_K(Y_n, N) + 2\varepsilon_n^{1/3}.$$

Die Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$ und das Bilden des Supremums über alle $t \in \mathbb{R}$ liefern die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 3.5.2. Zunächst seien $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$ und F als beschränkt angenommen. Weiter seien f ein Repräsentant von F mit $\|f\|_\infty < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Die Gleichung (3.3.3) liefert $F \stackrel{d}{=} f_\varepsilon^*(\eta^*)$ mit $f_\varepsilon^* := f \circ T_\varepsilon$ und der messbaren Abbildung T_ε aus (3.3.2). Im Folgenden ist es das Ziel die Theoreme 1.1 und 1.2 aus [27] auf das Poisson-Funktional $F_\varepsilon^* := f_\varepsilon^*(\eta^*)$ anzuwenden. Die dazu benötigte Integrierbarkeitsvoraussetzung

$$\iint \mathbb{E}(D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^2 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx) < \infty$$

ist wegen $\|f\|_\infty < \infty$ und $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$ trivialerweise erfüllt. Somit liefern die Theoreme 1.1 und 1.2 aus [27]

$$d_1(F_\varepsilon^*, N) \leq \sum_{i=1}^3 \gamma_i^*(\varepsilon) \quad \text{und} \quad d_K(F_\varepsilon^*, N) \leq \sum_{i=1}^6 \gamma_i^*(\varepsilon),$$

wobei

$$\begin{aligned} \gamma_1^*(\varepsilon) &:= 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(D_{(x_1, y_1)} F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2, y_2)} F_\varepsilon^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \times \left. \left[\mathbb{E}(D_{(x_1, y_1), (x_3, y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2, y_2), (x_3, y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{Q}^3(d(y_1, y_2, y_3)) \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_2^*(\varepsilon) &:= \left[\int \mathbb{E}(D_{(x_1, y_1), (x_3, y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2, y_2), (x_3, y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 \mathbb{Q}^3(d(y_1, y_2, y_3)) \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_3^*(\varepsilon) &:= \int \mathbb{E} |D_{(x,y)} F_\varepsilon^*|^3 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4^*(\varepsilon) &:= \frac{1}{2} [\mathbb{E} F_\varepsilon^*]^{\frac{1}{4}} \int \left[\mathbb{E} (D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{3}{4}} \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx), \\
\gamma_5^*(\varepsilon) &:= \left[\int \mathbb{E} (D_{(x,y)} F_\varepsilon^*)^4 \mathbb{Q}(dy) \lambda(dx) \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\gamma_6^*(\varepsilon) &:= \left[\int \left[6 \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,y_1)} F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}^2 F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3 \mathbb{E} (D_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}^2 F_\varepsilon^*)^4 \right] \mathbb{Q}^2(d(y_1, y_2)) \lambda^2(d(x_1, x_2)) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert $\gamma_i^*(\varepsilon) \leq \tilde{\gamma}_i(\varepsilon)$ für $i \in [6]$, wobei

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_1(\varepsilon) &:= 2 \left[\int \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1)} F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2,Y_2)} F_\varepsilon^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1),(x_3,Y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2,Y_2),(x_3,Y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\gamma}_2(\varepsilon) &:= \left[\int \mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1),(x_3,Y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 (D_{(x_2,Y_2),(x_3,Y_3)}^2 F_\varepsilon^*)^2 \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\gamma}_3(\varepsilon) &:= \int \mathbb{E} |D_{(x,Y)} F_\varepsilon^*|^3 \lambda(dx), \\
\tilde{\gamma}_4(\varepsilon) &:= \frac{1}{2} [\mathbb{E} F_\varepsilon^*]^{\frac{1}{4}} \int \left[\mathbb{E} (D_{(x,Y)} F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{3}{4}} \lambda(dx), \\
\tilde{\gamma}_5(\varepsilon) &:= \left[\int \mathbb{E} (D_{(x,Y)} F_\varepsilon^*)^4 \lambda(dx) \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\tilde{\gamma}_6(\varepsilon) &:= \left[\int \left[6 \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1)} F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1),(x_2,Y_2)}^2 F_\varepsilon^*)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3 \mathbb{E} (D_{(x_1,Y_1),(x_2,Y_2)}^2 F_\varepsilon^*)^4 \right] \lambda^2(d(x_1, x_2)) \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Es folgen

$$d_1(F_\varepsilon^*, N) \leq \sum_{i=1}^3 \tilde{\gamma}_i(\varepsilon) \quad \text{und} \quad d_K(F_\varepsilon^*, N) \leq \sum_{i=1}^6 \tilde{\gamma}_i(\varepsilon).$$

Damit bleibt für $i \in [6]$

$$\tilde{\gamma}_i(\varepsilon) \rightarrow \gamma_i \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

zu zeigen. Dazu sei $i \in [6]$. Wegen (3.3.10), (3.3.11) und $\|f\|_\infty < \infty$ konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Integrand von $\tilde{\gamma}_i(\varepsilon)$ fast überall punktweise gegen den Integranden von γ_i . Da wegen $\|f\|_\infty < \infty$ der Integrand von γ_i außerdem beschränkt ist und $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$ vorausgesetzt wurde, liefert das Theorem von der majorisierten Konvergenz die gewünschte Konvergenz $\tilde{\gamma}_i(\varepsilon) \rightarrow \gamma_i$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Im nächsten Schritt gelte weiterhin $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$, jedoch ohne Voraussetzungen an das Funktional F . Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$F_n := \mathbf{1}\{F > n\}n + \mathbf{1}\{-n \leq F \leq n\}F - \mathbf{1}\{F < -n\}n$$

und f_n ein Repräsentant von F_n . Mit dieser Definition gilt \mathbb{P} -fast sicher $F_n \rightarrow F$ für $n \rightarrow \infty$. Für $i \in [6]$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\gamma_{i,n}$ definiert wie γ_i , wobei F durch $F_n - \mathbb{E}F_n$ ersetzt ist. Da die Differenzenoperatoren linear sind und auf konstanten Funktionalen verschwinden, gelten insbesondere $\Delta_x(F_n - \mathbb{E}F_n) = \Delta_x F_n$ und $\Delta_{x_1, x_2}^2(F_n - \mathbb{E}F_n) = \Delta_{x_1, x_2}^2 F_n$ für $x, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dies vereinfacht die Größen $\gamma_{i,n}$, $i \in [6]$, $n \in \mathbb{N}$. Beispielsweise gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_{1,n} = 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} F_n)^2 (\Delta_{x_2} F_n)^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F_n)^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 F_n)^2 \right]^{1/2} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}.$$

Für $x, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten

$$|\Delta_x F_n| \leq |f_n(\xi_x)| + |f_n(\xi)| \leq |f(\xi_x)| + |f(\xi)| = |\Delta_x F + F| + |F| \leq |\Delta_x F| + 2|F| \quad (3.5.3)$$

und

$$\begin{aligned} |\Delta_{x_1, x_2}^2 F_n| &\leq |f_n(\xi_{x_1, x_2})| + |f_n(\xi_{x_1})| + |f_n(\xi_{x_2})| + |f_n(\xi)| \\ &\leq |f(\xi_{x_1, x_2})| + |f(\xi_{x_1})| + |f(\xi_{x_2})| + |f(\xi)| \\ &= |\Delta_{x_1, x_2}^2 F + \Delta_{x_1} F + \Delta_{x_2} F + F| + |\Delta_{x_1} F + F| + |\Delta_{x_2} F + F| + |F| \\ &\leq |\Delta_{x_1, x_2}^2 F| + 2|\Delta_{x_1} F| + 2|\Delta_{x_2} F| + 4|F|. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Diese Abschätzungen, zusammen mit $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$, $\mathbb{E}F^4 < \infty$ und den Voraussetzungen $\gamma_5, \gamma_6 < \infty$ liefern integrierbare obere Schranken für die Integranden in $\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{6,n}$. Außerdem konvergieren die Integranden in $\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{6,n}$ für $n \rightarrow \infty$ λ -fast überall gegen die Integranden in $\gamma_1, \dots, \gamma_6$, wobei auch hier die Schranken (3.5.3) und (3.5.4) und majorisierte Konvergenz (für die Erwartungswerte) zum Einsatz kommen. Wegen $\mathbb{E}F^4 < \infty$ und $|F_n| \leq |F|$ \mathbb{P} -fast sicher (für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt $F_n \rightarrow F$ in $L^4(\mathbb{P})$ für $n \rightarrow \infty$, was $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(F_n - \mathbb{E}F_n)^4 = \mathbb{E}F^4$ und schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{i,n} = \gamma_i$$

nach sich zieht. Weiterhin erhalten wir $\text{Var} F_n \rightarrow \text{Var} F = 1$ für $n \rightarrow \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $\text{Var} F_n > 0$ definieren wir

$$\tilde{F}_n := \frac{F_n - \mathbb{E}F_n}{\sqrt{\text{Var} F_n}}.$$

Es gilt $\tilde{F}_n \rightarrow F$ in $L^4(\mathbb{P})$ für $n \rightarrow \infty$. Auf das Funktional \tilde{F}_n können die Abschätzungen für beschränkte Funktionale aus dem ersten Teil des Beweises angewandt werden. Schließlich liefert Lemma 3.5.3 die gewünschte Aussage im Fall $\lambda(\mathbf{X}) < \infty$.

Es bleibt der Fall $\lambda(\mathbf{X}) = \infty$ (ohne Voraussetzungen an F) zu betrachten. Sei hierzu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aufsteigender Mengen in \mathcal{X} mit $\lambda(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{X}$. Weiter sei \mathcal{A}_n , $n \in \mathbb{N}$, die kleinste σ -Algebra auf $\mathbf{N}(A_n^{[2]} \times \mathbf{M})$, so dass für jede messbare Menge $B \subset A_n^{[2]} \times \mathbf{M}$ die Abbildung

$$\mathbf{N}(A_n^{[2]} \times \mathbf{M}) \ni \mu \mapsto \mu(B)$$

messbar ist. Folglich ist die σ -Algebra, welche von $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ erzeugt wird, gleich der σ -Algebra

$\mathcal{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M})$, vergleiche (2.1.1).

Für $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine messbare Abbildung

$$T_n: \mathbf{N}(A_n^{[2]} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{N}\left((A_n^c)^{[2]} \times \mathbf{M}\right) \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{N}(\mathbf{X}^{[2]} \times \mathbf{M}),$$

so dass für $m \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_m \in A_n$ ein $\tilde{M} \in \mathbf{Y}$ existiert mit

$$\xi_{x_1, \dots, x_m} = T_n\left(\xi_{x_1, \dots, x_m} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M}), \xi \cap \left((A_n^c)^{[2]} \times \mathbf{M}\right), \tilde{M}\right).$$

Die Abbildung T_n versieht Punktpaare aus $\eta_{x_1, \dots, x_m} \cap A_n$ und $\eta \cap A_n^c$ dabei mit Marken aus \tilde{M} . Wir beschreiben ihre Wirkung indirekt, indem wir schildern, wie die Doppelfolge \tilde{M} aus ξ_{x_1, \dots, x_m} gewonnen werden kann. Es seien $i, j \in \mathbb{N}$. Zunächst werden die Punkte in $\eta_{x_1, \dots, x_m} \cap A_n$ und $\eta \cap A_n^c$ geordnet. Dies kann beispielsweise wie im Beweis von Theorem 3.3.3 geschehen. Unter der Annahme, dass $\eta_{x_1, \dots, x_m} \cap A_n$ mindestens i Punkte enthält, sei $\tilde{M}_{i,j}$ diejenige Marke aus \mathbf{M} , welche zum Punktpaar bestehend aus dem i -ten Punkt aus $\eta \cap A_n$ und dem j -ten Punkt aus $\eta \cap A_n^c$ gehört. Gilt $\eta(A_n) < i$, so sei $\tilde{M}_{i,j}$ ein zufälliges Element in \mathbf{M} mit Verteilung \mathbb{M} , das unabhängig von allen anderen auftretenden Zufallselementen ist. Damit hängt T_n weder von m noch von x_1, \dots, x_m ab. Nach Konstruktion des RCMs sind die Zufallselemente $\xi_{x_1, \dots, x_m} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})$, $\xi \cap \left((A_n^c)^{[2]} \times \mathbf{M}\right)$ und \tilde{M} stochastisch unabhängig, wobei \tilde{M} die Verteilung \mathbb{Q} besitzt. Damit folgt

$$\mathbb{E}[f(\xi_{x_1, \dots, x_m}) | \mathcal{A}_n] = f_n(\xi_{x_1, \dots, x_m} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M}))$$

mit

$$f_n(\mu) := \mathbb{E}\left[f\left(T_n\left(\mu, \xi' \cap \left((A_n^c)^{[2]} \times \mathbf{M}\right), Y\right)\right) \mid \mathcal{A}_n\right], \quad \mu \in \mathbf{N}(A_n^{[2]} \times \mathbf{M}),$$

wobei ξ' eine unabhängige Kopie von ξ ist und Y eine \mathbb{Q} -verteilte Zufallsvariable ist, welche unabhängig von ξ und ξ' ist. Wir definieren das Martingal

$$F_n := \mathbb{E}[F | \mathcal{A}_n], \quad n \in \mathbb{N},$$

für welches $F_n = f_n(\xi \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M}))$, $n \in \mathbb{N}$, gilt. Im Laufe des restlichen Beweises sei stets $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbf{X}$ gilt

$$\begin{aligned} f_n(\xi_x \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) - f_n(\xi \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) &= \mathbb{E}[f(\xi_x) | \mathcal{A}_n] - \mathbb{E}[f(\xi) | \mathcal{A}_n] \\ &= \mathbb{E}[f(\xi_x) - f(\xi) | \mathcal{A}_n] \\ &= \mathbb{E}[\Delta_x F | \mathcal{A}_n] \end{aligned}$$

und analog für $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} f_n(\xi_{x_1, x_2} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) - f_n(\xi_{x_1} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) - f_n(\xi_{x_2} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) + f_n(\xi \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M})) \\ = \mathbb{E}[f(\xi_{x_1, x_2}) | \mathcal{A}_n] - \mathbb{E}[f(\xi_{x_1}) | \mathcal{A}_n] - \mathbb{E}[f(\xi_{x_2}) | \mathcal{A}_n] + \mathbb{E}[f(\xi) | \mathcal{A}_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[f(\xi_{x_1, x_2}) - f(\xi_{x_1}) - f(\xi_{x_2}) + f(\xi) | \mathcal{A}_n] \\
&= \mathbb{E}[\Delta_{x_1, x_2}^2 F | \mathcal{A}_n].
\end{aligned}$$

Wir können F_n als ein Funktional von $\xi^{(n)}$ ansehen, wobei $\xi^{(n)}$ die paarweise Markierung (mit Markenverteilung \mathbb{M}) eines Poisson-Prozesses mit Intensitätsmaß $\lambda|_{A_n}$ ist. Für $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in A_n$ bezeichnen wir mit $\Delta_{x_1, \dots, x_m}^m F_n$ den m -ten Differenzenoperator dieses Funktionals. Dann gilt für $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_m \in A_n$

$$(\xi_{(x_i)_{i \in I}}^{(n)})_{I \subset [m]} \stackrel{d}{=} (\xi_{(x_i)_{i \in I}} \cap (A_n^{[2]} \times \mathbf{M}))_{I \subset [k]}.$$

Damit folgt für $x_1, x_2, x_3 \in A_n$

$$\left((\Delta_{x_i} F_n)_{i \in [3]}, (\Delta_{(x_i, x_j)}^2 F_n)_{i, j \in [3], i \neq j} \right) \stackrel{d}{=} \left((\mathbb{E}[\Delta_{x_i} F | \mathcal{A}_n])_{i \in [3]}, (\mathbb{E}[\Delta_{x_i, x_j}^2 F | \mathcal{A}_n])_{i, j \in [3], i \neq j} \right) \quad (3.5.5)$$

Die Ungleichung von Jensen liefert $\mathbb{E}F_n^4 \leq \mathbb{E}F^4$. Es folgt mit Korollar 7.22 und Theorem 7.23 in [24] $F_n \rightarrow F$ in $L^4(\mathbb{P})$, für $n \rightarrow \infty$. Für $i \in [6]$ sei $\gamma_{i,n}$ analog zu γ_i definiert, wobei F durch F_n ersetzt und stets bezüglich $\lambda|_{A_n}$ integriert wird. Weiterhin kann (3.5.5) verwendet werden, um $\gamma_{i,n}$ zu vereinfachen. Beispielsweise gilt damit für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,n} = 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(\mathbb{E}[\Delta_{x_1} F | \mathcal{A}_n])^2 (\mathbb{E}[\Delta_{x_2} F | \mathcal{A}_n])^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\mathbb{E}[\Delta_{x_1, x_3}^2 F | \mathcal{A}_n])^2 (\mathbb{E}[\Delta_{x_2, x_3}^2 F | \mathcal{A}_n])^2 \right]^{1/2} \right. \\
\left. \times (\lambda|_{A_n})^3 (d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Für die Größen $\gamma_{2,n}, \dots, \gamma_{6,n}$ kann analog argumentiert werden. Die Ungleichung von Jensen liefert für $x, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $p \in [1, \infty)$

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}[\Delta_x F | \mathcal{A}_n]|^p \leq \mathbb{E}|\Delta_x F|^p \quad \text{und} \quad \mathbb{E}|\mathbb{E}[\Delta_{x_1, x_2}^2 F | \mathcal{A}_n]|^p \leq \mathbb{E}|\Delta_{x_1, x_2}^2 F|^p, \quad (3.5.6)$$

womit wir integrierbare obere Schranken für die Integranden von $\gamma_{3,n}, \dots, \gamma_{6,n}$ erhalten. Für $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{X}$ folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und (3.5.6)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}[\Delta_{x_1} F | \mathcal{A}_n])^2 (\mathbb{E}[\Delta_{x_2} F | \mathcal{A}_n])^2 &\leq [\mathbb{E}(\Delta_{x_1} F)^4]^{1/2} [\mathbb{E}(\Delta_{x_2} F)^4]^{1/2}, \\
\mathbb{E}(\mathbb{E}[\Delta_{x_1, x_3}^2 F | \mathcal{A}_n])^2 (\mathbb{E}[\Delta_{x_2, x_3}^2 F | \mathcal{A}_n])^2 &\leq [\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 F)^4]^{1/2} [\mathbb{E}(\Delta_{x_2, x_3}^2 F)^4]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dies liefert, zusammen mit den Voraussetzungen (3.5.1) und (3.5.2), integrierbare obere Schranken für die Integranden von $\gamma_{1,n}$ und $\gamma_{2,n}$. Wiederum folgt mit Korollar 7.22 und Theorem 7.23 in [24] für λ -fast alle $x \in \mathbf{X}$

$$\mathbb{E}[\Delta_x F | \mathcal{A}_n] \rightarrow \Delta_x F \quad \text{in } L^4(\mathbb{P}), \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

und für λ^2 -fast alle $(x_1, x_2) \in \mathbf{X}^2$

$$\mathbb{E}[\Delta_{x_1, x_2}^2 F | \mathcal{A}_n] \rightarrow \Delta_{x_1, x_2}^2 F \quad \text{in } L^4(\mathbb{P}), \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Somit konvergieren die Integranden von $\gamma_{1,n}, \dots, \gamma_{6,n}$ für $n \rightarrow \infty$ λ -fast überall gegen die Integranden von $\gamma_1, \dots, \gamma_6$. Schließlich liefert majorisierte Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{i,n} = \gamma_i$ für $i \in [6]$. Außerdem gilt $\text{Var } F_n \rightarrow \text{Var } F$ für $n \rightarrow \infty$. Gilt $\text{Var } F_n > 0$ (in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$), so sei

$$\tilde{F}_n := \frac{F_n - \mathbb{E}F_n}{\sqrt{\text{Var } F_n}}.$$

Wegen $\lambda|_{\mathcal{A}_n}(\mathbf{X}) < \infty$ erhalten wir mit den bereits gezeigten Aussagen aus dem zweiten Teil des Beweises entsprechende Schranken für das Funktional \tilde{F}_n . Schließlich beendet eine Anwendung von Lemma 3.5.3 den Beweis. \square

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von [27, Lemma 4.2] und erlaubt uns das vierte Moment, welches in der Größe γ_4 auftritt, abzuschätzen.

Lemma 3.5.4. *Sei $F \in L_\xi$ mit $\mathbb{E}F = 0$, $\text{Var}(F) = 1$ und $\mathbb{E}F^4 < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}F^4 \leq \max \left\{ 256 \left[\int [\mathbb{E}(\Delta_x F)^4]^{1/2} \lambda(dx) \right]^2, 4 \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^4 \lambda(dx) + 2 \right\}.$$

Beweis. Der Beweis wird analog zum Beweis von [27, Lemma 4.2] geführt. Zunächst folgt mit der Definition des Differenzenoperators

$$\Delta_x(F^2) = 2F\Delta_x F + (\Delta_x F)^2, \quad x \in \mathbf{X}.$$

Die Ungleichung von Poincaré aus Theorem 3.4.1 (angewandt auf F^2), die obige Formel und die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefern weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}F^4 &= \text{Var } F^2 + (\mathbb{E}F^2)^2 \\ &= \text{Var } F^2 + 1 \\ &\leq \int \mathbb{E}(\Delta_x(F^2))^2 \lambda(dx) + 1 \\ &= \int \mathbb{E}(2F\Delta_x F + (\Delta_x F)^2)^2 \lambda(dx) + 1 \\ &\leq \int (8\mathbb{E}F^2(\Delta_x F)^2 + 2\mathbb{E}(\Delta_x F)^4) \lambda(dx) + 1 \\ &\leq 8(\mathbb{E}F^4)^{1/2} \int (\mathbb{E}(\Delta_x F)^4)^{1/2} \lambda(dx) + 2 \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^4 \lambda(dx) + 1 \\ &\leq \max \left\{ 16(\mathbb{E}F^4)^{1/2} \int (\mathbb{E}(\Delta_x F)^4)^{1/2} \lambda(dx), 4 \int \mathbb{E}(\Delta_x F)^4 \lambda(dx) + 2 \right\}, \end{aligned}$$

womit die gewünschte Ungleichung folgt. \square

KAPITEL 4

DAS KLASSISCHE RCM

Wir lösen uns vom allgemeinen Rahmen von Kapitel 3 und betrachten nun das klassische RCM $\Gamma_\varphi(\eta)$ in \mathbb{R}^d (für ein $d \in \mathbb{N}$). Dazu seien $\mathbf{X} = \mathbb{R}^d$ und η ein stationärer Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensität $\beta > 0$. Folglich ist das Intensitätsmaß von η durch $\lambda := \beta\lambda_d$ gegeben. Als Relation \prec wird die lexikographische Ordnung auf \mathbb{R}^d verwendet. Auch die Voraussetzungen an die (symmetrische) Verbindungsfunktion $\varphi: (\mathbb{R}^d)^2 \rightarrow [0, 1]$ werden verschärft. So nehmen wir an, dass φ invariant unter Translation ist, was

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, y - x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

bedeutet. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $\varphi := \varphi(0, \cdot)$. Somit betrachten wir φ fortan als Funktion von \mathbb{R}^d nach $[0, 1]$. Da die Verbindungsfunktion ursprünglich als symmetrisch angenommen wurde, gilt $\varphi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren $m_\varphi := \int \varphi(x) dx$ und nehmen im Folgenden stets

$$0 < m_\varphi < \infty \tag{4.0.1}$$

an. Unter Verwendung der Formel von Campbell (Theorem 2.1.2) erhalten wir für einen deterministischen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_x)$

$$\mathbb{E} \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = \mathbb{E} \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} = \mathbb{E} \sum_{y \in \eta} \varphi(y - x) = \beta \int \varphi(y - x) dy = \beta m_\varphi.$$

Somit entspricht m_φ (bis auf den Faktor β) der mittleren Anzahl von Nachbarn, die ein deterministischer Punkt besitzt, welcher dem Modell hinzugefügt wurde. Die Voraussetzung (4.0.1) stellt daher sicher, dass diese mittlere Anzahl positiv und endlich ist. Tatsächlich besitzt $\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x))$ eine Poisson-Verteilung, was Gegenstand der folgenden Proposition ist.

Proposition 4.0.1. *Es gelte (4.0.1). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{P}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = n) = \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!} e^{-\beta m_\varphi}.$$

Beweis. Für gegebenes $x \in \mathbb{R}^d$ konstruieren wir eine geeignete Markierung des Poisson-Prozesses η , um in Verteilung die Nachbarn von x in $\Gamma_\varphi(\eta_x)$ zu erhalten. Dazu sei $(\mathbf{Y}, \mathcal{Y})$ ein messbarer Raum, wobei $\mathbf{Y} := \{0, 1\}$ gelte und \mathcal{Y} die Potenzmenge von \mathbf{Y} sei. Weiterhin sei $K: \mathbb{R}^d \times \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$ ein Übergangskern mit

$$K(z, \emptyset) := 0, \quad K(z, \mathbf{Y}) := 1, \quad K(z, \{1\}) := \varphi(x - z), \quad K(z, \{0\}) := \bar{\varphi}(x - z)$$

für $z \in \mathbb{R}^d$. Werden die Punkte von η mit K markiert, so erhalten wir mit [28, Theorem 5.6] einen Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes K$, wobei

$$(\lambda \otimes K)(C) = \beta \iint \mathbf{1}\{(z, y) \in C\} K(z, dy) dz, \quad C \subset \mathbb{R}^d \times \mathbf{Y} \text{ messbar.}$$

Dabei sind die Punkte mit Marke 1 (in Verteilung) die Nachbarn von x in $\Gamma_\varphi(\eta_x)$. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = n) = \frac{1}{n!} \left(\beta \int \varphi(x - z) dz \right)^n \exp \left(- \beta \int \varphi(x - z) dz \right) = \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!} e^{-\beta m_\varphi},$$

was den Beweis beendet. \square

In den kommenden Abschnitten dieses Kapitels betrachten wir die Anzahlen endlicher Komponenten einer bestimmten Form oder Größe. Wir verwenden insbesondere unsere allgemeinen Resultate aus Kapitel 3, um in den Abschnitten 4.1 und 4.2 die asymptotischen (Ko-)Varianzen dieser Zählgrößen zu untersuchen und (quantitative) zentrale Grenzwertsätze zu zeigen. In Abschnitt 4.3 präsentieren wir außerdem einen zentralen Grenzwertsatz für die Gesamtzahl aller endlichen Komponenten. Abschließend beschäftigen wir uns in Abschnitt 4.4 mit der Anzahl aller Knoten eines bestimmten Grades. In Anlehnung an die Methoden und Ergebnisse aus den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels, zeigen wir auch für diese Zählgröße eine Varianzabschätzung und einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz.

4.1. ASYMPTOTISCHE KOVARIANZEN

Im ersten Resultat dieses Abschnitts betrachten wir zwei RCMs parallel, welche jeweils auf den Punkten aus η basieren, aber unterschiedliche Verbindungsfunktionen, φ und ψ , verwenden. Dabei gelte punktweise für die Verbindungsfunktionen $\psi \leq \varphi$, was dafür sorgt, dass die beiden Modelle gekoppelt sind, wie im Anschluss an Korollar 3.2.2 beschrieben. Das nachfolgende Theorem liefert eine Formel für die asymptotische Kovarianz zwischen den Funktionalen $\eta_{\varphi, G}$ und $\eta_{\psi, H}$ (siehe Definition in (3.2.1)), wobei G und H endliche und zusammenhängende Graphen sind.

Theorem 4.1.1. *Es seien $k, l \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbf{G}_k$ und $H \in \mathbf{G}_l$. Weiterhin gelte (4.0.1) und es sei ψ eine Verbindungsfunktion mit $\psi \leq \varphi$. Dann existiert der Grenzwert*

$$\sigma_{\varphi, \psi}(G, H) := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\eta_{\varphi, G}(A), \eta_{\psi, H}(A))}{\lambda_d(A)}$$

und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \beta^{k+l} \int p_{\varphi, G}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi, H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) q_{k, l, \varphi, \psi}(x_2, \dots, x_{k+l}) \, d(x_2, \dots, x_{k+l}) \\ & + \mathbb{1}\{k = l\} \beta^k \int \mathbb{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{x_1, \dots, x_k\}) \simeq H) \\ & \quad \times \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) dy \right] d(x_2, \dots, x_k), \end{aligned}$$

wobei $x_1 := 0$ und für $x_2, \dots, x_{k+l} \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} q_{k, l, \varphi, \psi}(x_2, \dots, x_{k+l}) & := \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}(x_i - x_j) \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - 1 \right) dy \right] \\ & - \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) dy + \beta \int \left(\prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - 1 \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Für den Gilbert-Graphen, das heißt $\varphi(x) = \psi(x) = \mathbb{1}\{|x| \leq r\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, für ein $r > 0$, sind Formeln für asymptotische Kovarianzen (in Entsprechung zu Theorem 4.1.1) in [37, Proposition 3.8] zu finden.

Beweis von Theorem 4.1.1. Für den Beweis gelte stets $x_1 := 0$. Weiter sei $A \in \mathcal{K}^d$. Mit der Definition in (3.2.2) und wegen der Translationsinvarianz von φ gilt für $y, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} p_{\varphi, G}(y_1, \dots, y_k) & = \mathbb{1}\{y_1 \prec \dots \prec y_k\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{y_1, \dots, y_k\}) \simeq G) \\ & = \mathbb{1}\{y_1 - y \prec \dots \prec y_k - y\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{y_1 - y, \dots, y_k - y\}) \simeq G) \\ & = p_{\varphi, G}(y_1 - y, \dots, y_k - y). \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Die obige Gleichung gilt in analoger Weise für $p_{\psi, H}$. Proposition 3.2.3, die vorangegangene Überlegung und die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes liefern

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta_{\varphi, G}(A) \eta_{\psi, H}(A) & = \beta^{k+l} \iint \mathbb{1}\{z \in A, z + x_{k+1} \in A\} p_{\varphi, G}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi, H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}(x_i - x_j) \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - 1 \right) dy \right] dz d(x_2, \dots, x_{k+l}) \\ & + \mathbb{1}\{k = l\} \beta^k \iint \mathbb{1}\{z \in A\} \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{0, x_2, \dots, x_k\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{0, x_2, \dots, x_k\}) \simeq G) \\ & \quad \times \mathbb{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) dy \right] dz d(x_2, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Analog liefert Proposition 3.2.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\mathbb{E}\eta_{\psi,H}(A) &= \beta^{k+l} \iint \mathbf{1}\{z \in A, z + x_{k+1} \in A\} p_{\varphi,G}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi,H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \\ &\quad \times \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) dy + \beta \int \left(\prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - 1 \right) dy \right] dz d(x_2, \dots, x_{k+l}). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\eta_{\varphi,G}(A), \eta_{\psi,H}(A)) &= \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\eta_{\psi,H}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\mathbb{E}\eta_{\psi,H}(A) \\ &= \beta^{k+l} \int \lambda_d(A \cap (A - x_{k+1})) p_{\varphi,G}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi,H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \\ &\quad \times q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l}) d(x_2, \dots, x_{k+l}) \\ &\quad + \mathbf{1}\{k = l\} \lambda_d(A) \beta^k \int \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{0, x_2, \dots, x_k\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{0, x_2, \dots, x_k\}) \simeq H) \\ &\quad \times \mathbf{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) dy \right] d(x_2, \dots, x_k). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathbf{I}_n := \{(i, j) \in [n]^2 : i < j\} \quad (4.1.3)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n &:= \{I \subset \mathbf{I}_n : |I| = n - 1 \text{ und für alle } i, j \in [n] \text{ mit } i \neq j \text{ existiert ein } \nu \in [n - 1] \\ &\quad \text{und paarweise verschiedene } l_0, \dots, l_{\nu} \in [n] \text{ mit } l_0 = i, l_{\nu} = j \\ &\quad \text{und } (l_{m-1}, l_m) \in I \text{ oder } (l_m, l_{m-1}) \in I \text{ für alle } m \in [\nu]\}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Aus Sicht der Graphentheorie enthält die Menge \mathcal{I}_n alle Kantenmengen von Bäumen mit den Knoten $[n]$. Der einzige technische Unterschied besteht darin, dass die Mengen aus \mathcal{I}_n aus Tupeln und nicht aus zweielementigen Mengen bestehen.

Da der Integrand des zweiten Summanden aus (4.1.2) durch die Wahrscheinlichkeit, dass der Graph $\Gamma_{\varphi}(\{0, x_2, \dots, x_k\})$ zusammenhängend ist, beschränkt ist, erhalten wir

$$\int \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \prod_{(i,j) \in I} \varphi(x_i - x_j) d(x_2, \dots, x_k) = |\mathcal{I}_k| m_{\varphi}^{k-1}$$

als obere Schranke für das entsprechende Integral. Um die obige Gleichheit einzusehen, kann für jeden Baum $([k], I)$, $I \in \mathcal{I}_k$, jeweils schrittweise über seine Blätter integriert werden. Damit ist die Endlichkeit des Integrals im zweiten Summanden aus (4.1.2) gezeigt.

Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\left| \frac{\lambda_d(A \cap (A - x))}{\lambda_d(A)} - 1 \right| = \frac{\lambda_d(A \setminus (A - x))}{\lambda_d(A)} \leq \frac{\lambda_d(\{y \in A : d(y, \partial A) \leq |x|\})}{\lambda_d(A)}.$$

Mit [21, (3.19)], der Steiner-Formel (siehe Abschnitt 2.4) und [21, Lemma 3.7] folgt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_d(\{y \in A : d(y, \partial A) \leq |x|\})}{\lambda_d(A)} &\leq \frac{\lambda_d(A + B^d(0, |x|)) - \lambda_d(A)}{\lambda_d(A)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{d-1} \kappa_{d-i} |x|^{d-i} \frac{V_i(A)}{\lambda_d(A)} \leq \sum_{i=0}^{d-1} \kappa_{d-i} |x|^{d-i} \frac{2^d d!}{r(A)^{d-i}}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen V_0, \dots, V_{d-1} die inneren Volumina, siehe Abschnitt 2.4. Insgesamt folgt

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\lambda_d(A \cap (A - x))}{\lambda_d(A)} = 1. \quad (4.1.5)$$

Die Grenzwertaussage (4.1.5) kann beispielsweise auch in [21] auf Seite 88 gefunden werden.

Wir zeigen abschließend die Integrierbarkeit der Funktion

$$h(x_2, \dots, x_{k+l}) := p_{\varphi, G}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi, H}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) |q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l})|, \quad x_2, \dots, x_{k+l} \in \mathbb{R}^d, \quad (4.1.6)$$

um im ersten Summanden der rechten Seite von (4.1.2) majorisierte Konvergenz verwenden zu können, was den Beweis beendet. Zur Vereinfachung setzen wir im Folgenden $\beta = 1$ voraus. Für $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$p_{\varphi, G}(y_1, \dots, y_k) \leq \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{y_1, \dots, y_k\}) \text{ ist zusammenhängend}) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}_k} \prod_{(i,j) \in I} \varphi(y_i - y_j)$$

und analog für $y_1, \dots, y_l \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} p_{\psi, H}(y_1, \dots, y_l) &\leq \mathbb{P}(\Gamma_{\psi}(\{y_1, \dots, y_l\}) \text{ ist zusammenhängend}) \\ &\leq \sum_{I \in \mathcal{I}_l} \prod_{(i,j) \in I} \psi(y_i - y_j) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}_l} \prod_{(i,j) \in I} \varphi(y_i - y_j). \end{aligned}$$

Für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $|b| \leq 1$ gilt die elementare Ungleichung

$$|ab - c| = |(a-1)b + b - c| \leq |b||a-1| + |b-c| \leq |a-1| + |b-c|.$$

Es seien $x_2, \dots, x_{k+l} \in \mathbb{R}^d$. Unter Anwendung der vorangegangenen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l})| &\leq \left| \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}(x_i - x_j) - 1 \right| \\ &+ \left| \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - 1 \right) dy \right] \right. \\ &\left. - \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(y - x_i) + \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(y - x_j) - 2 \right) dy \right] \right|. \quad (4.1.7) \end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \leq \sum_{i=1}^n a_i, \quad (4.1.8)$$

was sich leicht mit vollständiger Induktion begründen lässt. Mit Verwendung der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion $[0, \infty) \ni t \mapsto e^{-t}$ erhalten wir für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ die Ungleichung

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$$

Aus der Kombination der beiden vorangegangenen elementaren Ungleichungen und (4.1.7) folgt

$$\begin{aligned} |q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l})| &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi(x_i - x_j) \\ &+ \left| \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(x_j - y) - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(y - x_i) - \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(y - x_j) + 1 \right) dy \right| \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi(x_i - x_j) + \left| \int \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(y - x_i) \right) \left(1 - \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}(y - x_j) \right) dy \right|. \end{aligned}$$

Eine erneute Anwendung der Ungleichungen (4.1.8) und $\psi \leq \varphi$ liefern

$$|q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l})| \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi(x_i - x_j) + \int \left(\sum_{i=1}^k \varphi(y - x_i) \right) \left(\sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi(y - x_j) \right) dy.$$

Insgesamt folgt die Integrierbarkeit von h , falls für alle $i \in [k]$, $j \in [k+l] \setminus [k]$, $I \in \mathcal{I}_k$ und $J \in \mathcal{I}_l$ sowohl

$$\int \varphi(x_i - x_j) \prod_{(m,n) \in I \cup \{(j_1+k, j_2+k) : (j_1, j_2) \in J\}} \varphi(x_m - x_n) d(x_2, \dots, x_{k+l}) < \infty \quad (4.1.9)$$

als auch

$$\iint \varphi(y - x_i) \varphi(y - x_j) \prod_{(m,n) \in I \cup \{(j_1+k, j_2+k) : (j_1, j_2) \in J\}} \varphi(x_m - x_n) d(x_2, \dots, x_{k+l}) dy < \infty \quad (4.1.10)$$

gelten. Die Integranden der linken Seiten von (4.1.9) und (4.1.10) beschreiben jeweils eine Baumstruktur. Für jede dabei auftretende Integrationsvariable existiert ein Faktor der Form $\varphi(\dots)$, über welchen (in der richtigen Reihenfolge) integriert werden kann; beginnend mit den Blättern des Baumes. Damit folgt, dass die linke Seite von (4.1.9) gleich $m_\varphi^{k+l-1} < \infty$ und die linke Seite von (4.1.10) gleich $m_\varphi^{k+l} < \infty$ ist. Dies beendet den Beweis. \square

Bemerkung 4.1.2. Mit der Formel aus Proposition 3.2.1, der Gleichung (4.1.1) und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes erhalten wir die Stationarität des Prozesses $\eta_{\varphi,G}$ für $G \in \mathbf{G}$, wobei die Definition von Stationarität im Anschluss an Theorem 2.1.5 zu finden ist.

Für ein $k \in \mathbb{N}$ und eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist die Anzahl der k -Komponenten $\eta_{\varphi,k}(A)$ in A gleich der Summe über alle $\eta_{\varphi,G}(A)$, $G \in \mathbf{G}_k$, also

$$\eta_{\varphi,k}(A) = \sum_{G \in \mathbf{G}_k} \eta_{\varphi,G}(A).$$

Damit erhalten wir aus Theorem 4.1.1 und der Bilinearität der Kovarianzfunktion das nachfolgende Korollar.

Korollar 4.1.3. *Es gelte (4.0.1) und es sei ψ eine Verbindungsfunktion mit $\psi \leq \varphi$. Dann existiert für alle $k, l \in \mathbb{N}$ der Grenzwert*

$$\sigma_{\varphi,\psi}^{(k,l)} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\eta_{\varphi,k}(A), \eta_{\psi,l}(A))}{\lambda_d(A)}$$

und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \beta^{k+l} \int p_{\varphi,k}(0, x_2, \dots, x_k) p_{\psi,l}(x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) q_{k,l,\varphi,\psi}(x_2, \dots, x_{k+l}) \, d(x_2, \dots, x_{k+l}) \\ & + \mathbf{1}\{k=l\} \beta^k \int p_{\psi,k}(0, x_2, \dots, x_k) \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}(x_i - y) - 1 \right) \, dy \right] \, d(x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

mit $x_1 := 0$ und der in Theorem 4.1.1 definierten Funktion $q_{k,l,\varphi,\psi}$.

Im Spezialfall der isolierten Knoten ($k = l = 1$) und $\varphi = \psi$ wurde die Aussage von Korollar 4.1.3 auch in [4, Lemma 3.3] gezeigt. Das genannte Lemma stellt jedoch stärkere Voraussetzungen an die Verbindungsfunktion. Außerdem erhalten wir mit Hilfe von Theorem 4.1.1 und dem vorangegangenen Korollar 4.1.3 schwache Gesetze großer Zahlen.

Anstelle weiterhin nur Graphen einer bestimmten Form oder Größe zu zählen, betrachten wir im Folgenden eine Linearkombination von Anzahlen von Graphen. Dazu sei für $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m,\neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$

$$S_{\varphi,a,G}(A) := \sum_{i=1}^m a_i \eta_{\varphi,G_i}(A), \quad A \in \mathcal{B}_d \text{ beschränkt.} \quad (4.1.11)$$

Folglich ist $S_{\varphi,a,G}(A)$ die gewichtete Summe von denjenigen Komponenten aus $\Gamma_{\varphi}(\eta)$, die isomorph zu einem der Graphen G_1, \dots, G_m sind und deren lexikographisches Minimum in A liegt.

Der restliche Abschnitt dreht sich ganz um den Beweis des folgenden Theorems, das die Positivität der asymptotischen Varianz von $S_{\varphi,a,G}$ zum Gegenstand hat.

Theorem 4.1.4. *Es gelte (4.0.1). Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m,\neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$*

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var} S_{\varphi,a,G}(A)}{\lambda_d(A)} = \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j) > 0.$$

Nachfolgendes Korollar ist eine direkt Folgerung aus Theorem 4.1.4.

Korollar 4.1.5. *Es gelte (4.0.1).*

- (a) *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ ist die Matrix $(\sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j))_{i, j \in [m]}$ positiv definit.*
- (b) *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ ist die Matrix $(\sigma_{\varphi, \varphi}^{(k_i, k_j)})_{i, j \in [m]}$ positiv definit.*

Das folgende Korollar zu Theorem 4.1.4 stellt sicher, dass für $A \in \mathcal{K}^d$ die Varianz von $S_{\varphi, a, G}(A)$ nach unten gegen ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ abgeschätzt werden kann, insofern $r(A)$ hinreichend groß ist.

Korollar 4.1.6. *Es gelte (4.0.1). Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$ eine Konstante $\tau > 0$, welche von β , φ , a und G abhängt, sodass*

$$\frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A)}{\lambda_d(A)} \geq \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j) > 0$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Beweis. Angenommen, die Aussage des Korollars ist falsch. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A_n) \geq n$ und

$$\frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A_n)}{\lambda_d(A_n)} < \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j).$$

Damit folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A_n)}{\lambda_d(A_n)} \leq \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j),$$

was im Widerspruch zur Aussage von Theorem 4.1.4 steht. \square

Für den nachfolgenden Beweis von Theorem 4.1.4 verwenden wir die Beschreibung des RCMs und die Notationen, die in Abschnitt 3.4 (vor Theorem 3.4.2) eingeführt wurden.

Beweis von Theorem 4.1.4. Mit Theorem 4.1.1 erhalten wir direkt die Existenz des Grenzwerts, beziehungsweise genauer

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A)}{\lambda_d(A)} = \sum_{i, j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j).$$

Somit genügt es

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau))}{\lambda_d(B^d(0, \tau))} > 0$$

zu zeigen.

Dazu sei $f_\tau: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d)^{[2]} \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ für $\tau > 0$ ein Repräsentant von $S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau))$. Weiterhin sei $\hat{\eta}$ ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d \otimes \lambda_1|_{[0, 1]} \otimes \Lambda$, wobei $\Lambda := (\lambda_1|_{[0, 1]})^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Für $t \in [0, 1]$ bezeichne $\hat{\eta}_t$ die Einschränkung von $\hat{\eta}$ auf $\mathbb{R}^d \times [0, t] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Außerdem sei

$$T: \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}) \rightarrow \mathbf{N}((\mathbb{R}^d)^{[2]} \times [0, 1])$$

die Abbildung aus (3.4.4). In der hier geschilderten Situation besitzen $S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau))$ und $f_\tau(T(\hat{\eta}))$ die selbe Verteilung, was es uns ermöglicht die Darstellung der Varianz aus Theorem 3.4.2 zu verwenden. Für $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d)^{[2]} \times [0, 1])$ bezeichne $\tilde{\Gamma}_\varphi(\mu)$ das RCM, welches auf den Positionen der Punkte aus μ und der paarweisen Markierung $T(\mu)$ beruht.

Es seien $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$, G_{\max} ein Graph aus G mit $|G_{\max}| = k$ und a_{\max} der zu G_{\max} gehörende Eintrag des Vektors a . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a_{\max} < 0$ annehmen.

Für einen gegebenen Punkt $(x, t, M) \in \mathbb{R}^d \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ definieren wir folgendes Ereignis

$$\begin{aligned} B(x, t, M) := \{ & \text{es existieren paarweise verschiedene Punkte } (x_1, t_1, M_1), \dots, (x_k, t_k, M_k) \\ & \text{im Modell } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}) \text{ mit } x_1 \in B^d(0, \tau) \text{ und } x_1 \prec \dots \prec x_k, \\ & \text{welche in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}) \text{ ohne den Punkt } x \text{ eine zu } G_{\max} \\ & \text{isomorphe Komponente bilden und die in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}) \\ & \text{mit } x \text{ verbunden ist; ansonsten hat } x \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}) \\ & \text{keine weitere Nachbarn} \}. \end{aligned}$$

Außerdem sei $\tilde{B}(x, t, M) \subset B(x, t, M)$ das Ereignis, dass die Punkte x, x_1, \dots, x_k auch in $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})$ eine Komponente formen.

Mit Theorem 3.4.2 und einer Einschränkung des Integrationsbereichs erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \text{Var } S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau)) &= \text{Var } f_\tau(T(\hat{\eta})) \\ &\geq \beta \int_{B^d(0, 2\tau)} \int_0^1 \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}))] - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t \right]^2 \mathbb{1}_{B(x, t, M)} \Big] \\ &\quad \times \Lambda(dM) dt dx. \quad (4.1.12) \end{aligned}$$

Für $(x, t, M) \in \mathbb{R}^d \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ ist $B(x, t, M)$ nach Konstruktion bezüglich der σ -Algebra $\sigma(\hat{\eta}_t)$ messbar. Mit $\tilde{B}(x, t, M) \subset B(x, t, M)$ folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}))] - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t \mathbb{1}_{B(x, t, M)} \\ &= \mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}))] - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) \mathbb{1}_{\tilde{B}(x, t, M)} | \hat{\eta}_t \Big] \\ &\quad + \mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}))] - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) \mathbb{1}_{\tilde{B}(x, t, M)^c \cap B(x, t, M)} | \hat{\eta}_t \Big]. \end{aligned}$$

Unter dem Ereignis $\tilde{B}(x, t, M)$ führt das Entfernen von x aus $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})$ zu einer Komponente, die zu G_{\max} isomorph ist. Ansonsten ändert sich die Anzahl der gezählten Komponenten nicht. Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) \mathbb{1}_{\tilde{B}(x, t, M)} | \hat{\eta}_t] = |a_{\max}| \mathbb{P}(\tilde{B}(x, t, M) | \hat{\eta}_t).$$

Unter dem Ereignis $\tilde{B}(x, t, M)^c \cap B(x, t, M)$ kann, nach dem Entfernen von x , die Anzahl neuer Komponenten, die isomorph zu einem der Graphen aus G sind und die Punkte x_1, \dots, x_k nicht enthalten, durch

$$\deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - \deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}))$$

abgeschätzt werden. Der Beitrag dieser Komponenten (ohne x_1, \dots, x_k) auf die Differenz

$$f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\})$$

ist nach unten durch $-|a|_\infty$ begrenzt. Wegen $a_{\max} < 0$ ist ein eventueller Beitrag einer Komponente, die aus den Punkten x_1, \dots, x_k besteht, positiv. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) \mathbb{1}_{\tilde{B}(x, t, M)^c \cap B(x, t, M)} | \hat{\eta}_t] \\ & \geq -|a|_\infty \mathbb{E}[(\deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - \deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}))) \mathbb{1}_{B(x, t, M)} | \hat{\eta}_t]. \end{aligned}$$

Mit der Konvention $(x_0, t_0, M_0) := (x, t, M)$ gilt wegen $\tilde{B}(x, t, M) \subset B(x, t, M)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{B}(x, t, M) | \hat{\eta}_t) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tilde{B}(x, t, M)} | \hat{\eta}_t] \mathbb{1}_{B(x, t, M)} \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{(z, t', M') \in \hat{\eta}_{[t, 1)}} \prod_{j=0}^k \mathbb{1}\{(x_j, t_j, M_j) \not\leftrightarrow (z, t', M') \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})\} \middle| \hat{\eta}_t \right] \mathbb{1}_{B(x, t, M)}. \end{aligned}$$

Es sei $\eta_{[t, 1)}$ ein Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß $\beta(1-t)\lambda_d$, welcher unabhängig von $\hat{\eta}_t$ ist. Dann gilt mit Lemma 2.1.4

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{B}(x, t, M) | \hat{\eta}_t) &= \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta_{[t, 1)}} \prod_{j=0}^k \bar{\varphi}(x_j - z) \middle| \hat{\eta}_t \right] \mathbb{1}_{B(x, t, M)} \\ &= \exp \left(-\beta(1-t) \int \left(1 - \prod_{j=0}^k \bar{\varphi}(x_j - z) \right) dz \right) \mathbb{1}_{B(x, t, M)}. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung (4.1.8) folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{B}(x, t, M) | \hat{\eta}_t) &\geq \exp \left(-\beta(1-t) \int \sum_{j=0}^k \varphi(x_j - z) dz \right) \mathbb{1}_{B(x, t, M)} \\ &= \exp(-\beta(1-t)(k+1)m_\varphi) \mathbb{1}_{B(x, t, M)}. \end{aligned}$$

Analog zur vorangegangenen Argumentation erhalten wir mit der Gleichung von Mecke aus Theorem 3.3.3

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(\deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - \deg(x, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}))) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} | \hat{\eta}_t] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{(z, t', M') \in \hat{\eta}_{[t, 1)}} \mathbf{1}\{(x, t, M) \leftrightarrow (z, t', M') \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})\} \right) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \middle| \hat{\eta}_t \right] \\
&= \beta(1-t) \int \varphi(z-x) dz \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
&= \beta(1-t) m_\varphi \mathbf{1}_{B(x, t, M)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t] \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& \geq (|a_{\max}| \exp(-\beta(1-t)(k+1)m_\varphi) - |a|_\infty \beta(1-t)m_\varphi) \mathbf{1}_{B(x, t, M)}.
\end{aligned}$$

Wir wählen $s \in (0, 1)$ hinreichend groß, so dass

$$\mathbb{E}[f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - f_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t] \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \geq \frac{|a_{\max}|}{2} \mathbf{1}_{B(x, t, M)}$$

für alle $t \in [s, 1]$ gilt. Mit (4.1.12) erhalten wir

$$\text{Var } f_\tau(T(\hat{\eta})) \geq \frac{\beta |a_{\max}|^2}{4} \int_{B^d(0, 2\tau)} \int_s^1 \int \mathbb{P}(B(x, t, M)) \Lambda(dM) dt dx.$$

Für $t \in [s, 1]$ gilt

$$\begin{aligned}
I_{\tau, t} &:= \int_{B^d(0, 2\tau)} \int \mathbb{P}(B(x, t, M)) \Lambda(dM) dx \\
&= \int_{B^d(0, 2\tau)} \mathbb{E} \sum_{(x_1, t_1, M_1), \dots, (x_k, t_k, M_k) \in \hat{\eta}_t}^{\neq} \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau), x_1 \prec \dots \prec x_k\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t)) \text{ ist in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t) \text{ eine zu } G_{\text{max}} \text{ isomorphe Komponente}\} \\
& \quad \times \left(1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j) \right) \prod_{(z, t', M') \in \hat{\eta}_t, z \notin \{x_1, \dots, x_k\}} \bar{\varphi}(x - z) dx.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Formel von Mecke und Lemma 2.1.4 folgt

$$\begin{aligned}
I_{\tau, t} &= (\beta t)^k \int \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau), x \in B^d(0, 2\tau)\} p_{\varphi, G_{\text{max}}}(x_1, \dots, x_k) \\
& \quad \times \left(1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j) \right) \exp \left[\beta t \int \left(\bar{\varphi}(x - z) \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) - 1 \right) dz \right] d(x, x_1, \dots, x_k).
\end{aligned}$$

Damit gilt für $R \in (0, \tau]$

$$I_{\tau,t} \geq (\beta s)^k \int \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau), |x - x_1| \leq R\} p_{\varphi, G_{\max}}(x_1, \dots, x_k) \\ \times \left(1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j)\right) \exp \left[\beta \int \left(\bar{\varphi}(x - z) \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) - 1 \right) dz \right] d(x, x_1, \dots, x_k).$$

Für den Rest des Beweises gelte $x_1 := 0$. Mit (4.1.1) und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes erhalten wir

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{I_{\tau,t}}{\lambda_d(B^d(0, \tau))} \geq (\beta s)^k \int \mathbf{1}\{|x| \leq R\} p_{\varphi, G_{\max}}(0, x_2, \dots, x_k) \left(1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j)\right) \\ \times \exp \left[\beta \int \left(\bar{\varphi}(x - z) \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) - 1 \right) dz \right] d(x, x_2, \dots, x_k). \quad (4.1.13)$$

Um den Beweis zu beenden bleibt nur zu zeigen, dass die rechte Seite der vorangegangenen Ungleichung (für hinreichend großes $R > 0$) positiv ist.

Wegen $G_{\max} \in \mathbf{G}_{\varphi}$ gilt

$$\int p_{\varphi, G_{\max}}(0, x_2, \dots, x_k) \exp \left[\beta \int \left(\prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) - 1 \right) dz \right] d(x_2, \dots, x_k) > 0$$

und damit

$$\int p_{\varphi, G_{\max}}(0, x_2, \dots, x_k) d(x_2, \dots, x_k) > 0.$$

Die Ungleichung (4.1.8) liefert

$$1 - \bar{\varphi}(x - z) \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) \leq \varphi(x - z) + \sum_{j=1}^k \varphi(x_j - z), \quad x, z, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d,$$

und

$$1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j) \geq \varphi(x_1 - x) = \varphi(x), \quad x, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen der Voraussetzung $0 < m_{\varphi} < \infty$ erhalten wir damit

$$\int p_{\varphi, G_{\max}}(0, x_2, \dots, x_k) \left(1 - \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(x - x_j)\right) \\ \times \exp \left[\beta \int \left(\bar{\varphi}(x - z) \prod_{j=1}^k \bar{\varphi}(z - x_j) - 1 \right) dz \right] d(x, x_2, \dots, x_k) > 0.$$

Somit ist auch die rechte Seite von (4.1.13) für hinreichend großes $R > 0$ positiv, was den Beweis abschließt. \square

4.2. ZENTRALE GRENZWERTSÄTZE FÜR DIE KOMPONENTENZAHL

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns weiter mit den Komponentenzahlen aus Abschnitt 4.1 und stellen für diese Größen zentrale Grenzwertsätze vor. Dabei präsentieren wir sowohl univariate als auch multivariate zentrale Grenzwertsätze. Werden die Integrabilitätsvoraussetzungen an die Verbindungsfunktion erhöht, ist es uns außerdem möglich quantitative univariate Grenzwertsätze zu zeigen. Die Konvergenzgeschwindigkeit geben wir hierbei als Abschätzung für die Wasserstein-Distanz oder Kolmogorov-Distanz zwischen der normierten Zählgröße und einer standardnormalverteilten Zufallsvariable an. Für diesen Zweck bezeichne N für den gesamten Abschnitt eine standardnormalverteilte Zufallsvariable

Theorem 4.2.1. *Es gelte (4.0.1). Weiterhin seien $m \in \mathbb{N}$, $G_1, \dots, G_m \in \mathbf{G}$ paarweise verschieden und N_Σ ein m -dimensionaler zentrierter Zufallsvektor mit Normalverteilung und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j))_{i,j \in [m]}$ mit den Kovarianzen $\sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j)$, $i, j \in [m]$, aus Theorem 4.1.1. Dann gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}}(\eta_{\varphi,G_1}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,G_1}(A), \dots, \eta_{\varphi,G_m}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,G_m}(A)) \xrightarrow{d} N_\Sigma \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Eine Entsprechung des multivariaten zentralen Grenzwertsatzes aus Theorem 4.2.1 für den Gilbert-Graphen ist in [37, Theorem 3.11] zu finden. Mit Theorem 4.2.1 und Korollar 4.1.3 erhalten wir folgenden multivariaten zentralen Grenzwertsatz für die Anzahl von k -Komponenten als Korollar.

Korollar 4.2.2. *Es gelte (4.0.1). Weiterhin seien $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden und N_Σ ein m -dimensionaler zentrierter Zufallsvektor mit Normalverteilung und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{\varphi,\varphi}^{(k_i,k_j)})_{i,j \in [m]}$ mit den Kovarianzen $\sigma_{\varphi,\varphi}^{(k_i,k_j)}$, $i, j \in [m]$, aus Korollar 4.1.3. Dann gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}}(\eta_{\varphi,k_1}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,k_1}(A), \dots, \eta_{\varphi,k_m}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,k_m}(A)) \xrightarrow{d} N_\Sigma \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

In [4, Theorem 1.1 und Theorem 4.1] können univariate zentrale Grenzwertsätze für die Anzahl von k -Komponenten eines RCMs gefunden werden, dessen Verbindungsfunktion lediglich vom Abstand der Punkte abhängt und in diesem monoton fällt. Dabei muss im Fall $k \geq 2$ der Träger der Verbindungsfunktion als beschränkt angenommen werden. Weiterhin präsentiert [42] einen zentraler Grenzwertsatz für die Anzahl der isolierten Knoten, dessen Beweis sich jedoch als fehlerhaft erwies, was in [4] diskutiert wurde.

Das nächste Resultat ist ein univariater zentraler Grenzwertsatz für die Zählgröße $S_{\varphi,a,G}(A)$ mit $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $G \in \mathbf{G}_\varphi^{m,\neq}$ und $r(A) \rightarrow \infty$.

Theorem 4.2.3. *Es gelte (4.0.1). Weiterhin seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m,\neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Dann gilt*

$$\frac{S_{\varphi,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty,$$

wobei die Konvergenz auch in der Wasserstein-Distanz d_1 gilt.

Unter zusätzlichen Integrabilitätsvoraussetzungen an die Verbindungsfunktion können auch zentrale Grenzwertsätze mit Angabe der Konvergenzgeschwindigkeit gezeigt werden. Dazu nehmen wir an, dass eine messbare Funktion $\tilde{\varphi}: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ existiert mit

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \tilde{\varphi}(s) \leq \tilde{\varphi}(t), \quad 0 \leq s \leq t, \quad \text{und} \quad \int \tilde{\varphi}(|x|)^{1/3} dx < \infty. \quad (4.2.1)$$

Diese Eigenschaften implizieren die Voraussetzung $m_\varphi < \infty$ aus (4.0.1). Die weitere Voraussetzung $0 < m_\varphi$ aus (4.0.1) stellt sicher, dass im betrachteten Modell mit positiver Wahrscheinlichkeit überhaupt Kanten auftreten. Um den trivialen Fall eines RCMs ohne Kanten auszuschließen, setzen wir $0 < m_\varphi$ im Folgenden stets stillschweigend voraus.

Theorem 4.2.4. *Es gelte (4.2.1). Dann existieren für alle $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$ Konstanten $C > 0$ und $\tau > 0$, welche von $\beta, \varphi, \tilde{\varphi}, a$ und G abhängen, so dass*

$$d_K \left(\frac{S_{\varphi, a, G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var} S_{\varphi, a, G}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Das vorangegangene Theorem lässt sich durch geeignetes Wählen von $m \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ leicht auf das Zählen bestimmter Komponenten spezialisieren. Dies ist Inhalt des nachfolgenden Korollars.

Korollar 4.2.5. *Unter der Voraussetzung (4.2.1) gelten folgende Aussagen.*

(a) *Für jeden Graphen $G \in \mathbf{G}_\varphi$ existieren Konstanten $C > 0$ und $\tau > 0$, welche von $\beta, \varphi, \tilde{\varphi}$ und G abhängen, so dass*

$$d_K \left(\frac{\eta_{\varphi, G}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, G}(A)}{\sqrt{\text{Var} \eta_{\varphi, G}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

(b) *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $C > 0$ und $\tau > 0$, welche von $\beta, \varphi, \tilde{\varphi}$ und k abhängen, so dass*

$$d_K \left(\frac{\eta_{\varphi, k}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, k}(A)}{\sqrt{\text{Var} \eta_{\varphi, k}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Theorem 4.2.6. *Die Aussagen von Theorem 4.2.4 und Korollar 4.2.5 gelten in identischer Formulierung, wenn die Kolmogorov-Distanz d_K jeweils durch die Wasserstein-Distanz d_1 ersetzt wird.*

Der multivariate zentrale Grenzwertsatz aus Theorem 4.2.1 kann mit Hilfe von Theorem 4.2.3 und der Technik von Cramér-Wold leicht gezeigt werden. Der Beweis des Theorems 4.2.3 beruht auf dem quantitativen zentralen Grenzwertsatz aus Theorem 4.2.4 und einem Approximationsargument, welches es möglich macht auf die Voraussetzung (4.2.1) zu verzichten. Da die Beweise der Theoreme 4.2.1 und 4.2.3 recht übersichtlich sind, werden wir mit diesen beginnen. Erst im Abschluss zeigen wir die quantitativen zentralen Grenzwertsätze (Theorem 4.2.4 und Theorem 4.2.6), wobei das allgemeine Resultat zur Normalapproximation aus Theorem 3.5.2 entscheidend zum Einsatz kommt.

Beweis von Theorem 4.2.1. Die Theoreme 4.1.4 und 4.2.3 liefern für jeden Koeffizientenvektor $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i (\eta_{\varphi, G_i}(A) - \mathbb{E} \eta_{\varphi, G_i}(A))}{\lambda_d(A)} \xrightarrow{d} a N_{\Sigma} a' \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Da die vorangegangene Konvergenzaussage für $a = 0 \in \mathbb{R}^m$ trivialerweise gilt, folgt mit dem Theorem von Cramér-Wold (siehe beispielsweise [24, Korollar 5.5]) die Aussage. \square

Für den Beweis von Theorem 4.2.3 benötigen wir nachfolgendes Lemma.

Lemma 4.2.7. *Es gelte (4.0.1). Es sei $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Verbindungsfunktionen mit $\psi_n \leq \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \varphi$. Dann gelten für alle Graphen $G, H \in \mathbf{G}$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi, \psi_n}(G, H) = \sigma_{\varphi, \varphi}(G, H) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\psi_n, \psi_n}(G, H) = \sigma_{\varphi, \varphi}(G, H).$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ liefert Theorem 4.1.1 Formeln für $\sigma_{\varphi, \psi_n}(G, H)$ und $\sigma_{\psi_n, \psi_n}(G, H)$ in Form von Integralen. Die darin auftretenden Integranden besitzen integrierbare obere Schranken, was im Beweis von Theorem 4.1.1 gezeigt wird. Die vorausgesetzte punktweise Konvergenz der Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen φ hat die punktweise Konvergenz der Integranden aus den Formeln von $\sigma_{\varphi, \psi_n}(G, H)$ und $\sigma_{\psi_n, \psi_n}(G, H)$ gegen die Integranden aus der Formel für $\sigma_{\varphi, \varphi}(G, H)$ zur Folge. Somit liefert das Theorem von der majorisierten Konvergenz die gewünschte Aussage. \square

Beweis von Theorem 4.2.3. Vorgegeben seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Verbindungsfunktion $\psi_n: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\psi_n(x) := \mathbf{1}\{|x| \leq n\} \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Während des Beweises verwenden wir für $\chi = \varphi$ beziehungsweise $\chi = \psi_n$, $n \in \mathbb{N}$, die Abkürzung

$$\widehat{S}_{\chi, a, G}(A) := \frac{S_{\chi, a, G}(A) - \mathbb{E} S_{\chi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\chi, a, G}(A)}}, \quad A \in \mathcal{K}^d.$$

Da die Wasserstein-Distanz nach oben gegen die $L^1(\mathbb{P})$ -Norm und die $L^2(\mathbb{P})$ -Norm abgeschätzt

werden kann (siehe (2.2.1)), erhalten wir für $A \in \mathcal{K}^d$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& d_1(\widehat{S}_{\varphi,a,G}(A), N) \\
& \leq d_1\left(\widehat{S}_{\varphi,a,G}(A), \frac{S_{\psi_n,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\psi_n,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}\right) \\
& \quad + d_1\left(\frac{S_{\psi_n,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\psi_n,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}, \widehat{S}_{\psi_n,a,G}(A)\right) + d_1(\widehat{S}_{\psi_n,a,G}(A), N) \\
& \leq \frac{\sqrt{\text{Var}(S_{\varphi,a,G}(A) - S_{\psi_n,a,G}(A))}}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}} + \left| \frac{\sqrt{\text{Var } S_{\psi_n,a,G}(A)}}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}} - 1 \right| + d_1(\widehat{S}_{\psi_n,a,G}(A), N).
\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Voraussetzung (4.2.1) für die Verbindungsfunktion ψ_n offensichtlich erfüllt, da beispielsweise die Funktion $\tilde{\psi}_n(t) := \mathbf{1}\{t \leq n\}$, $t \geq 0$, die in (4.2.1) geforderten Eigenschaften besitzt. Somit folgt mit Theorem 4.2.4 für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$d_1(\widehat{S}_{\psi_n,a,G}(A), N) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r(A) \rightarrow \infty.$$

Folglich liefert eine Anwendung von Theorem 4.1.1 für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} d_1(\widehat{S}_{\varphi,a,G}(A), N) & \leq \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^m a_i a_j (\sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j) + \sigma_{\psi_n,\psi_n}(G_i, G_j) - 2\sigma_{\varphi,\psi_n}(G_i, G_j))}{\sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi,\varphi}(G_j, G_j)}} \\
& \quad + \left| \sqrt{\frac{\sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\psi_n,\psi_n}(G_i, G_j)}{\sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j)}} - 1 \right|.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der vorangegangenen Abschätzung wegen Lemma 4.2.7 für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, folgt

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} d_1(\widehat{S}_{\varphi,a,G}(A), N) = 0.$$

Dies beendet den Beweis. \square

Der restliche Abschnitt ist ganz den Beweisen der Theoreme 4.2.4 und 4.2.6 gewidmet, die mit insgesamt drei Lemmata vorbereitet werden.

Lemma 4.2.8. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m,\neq}$, $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Dann gelten für alle beschränkten Mengen $A \in \mathcal{B}_d$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ \mathbb{P} -fast sicher*

$$|\Delta_x S_{\varphi,a,G}(A)| \leq |a|_{\infty} (\deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) + 1) \mathbf{1}\{x \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\}, \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned}
|\Delta_{x,y}^2 S_{\varphi,a,G}(A)| & \leq |a|_{\infty} (2 \deg(y, \Gamma_{\varphi}(\eta_y)) + 3) \mathbf{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_{x,y})\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{x \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x) \text{ oder } y \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_y)\}. \quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

Beweis. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}_d$ eine beschränkte Menge. Abkürzend definieren wir $F := S_{\varphi,a,G}(A)$. Da die Differenzenoperatoren von der Wahl des jeweiligen Repräsentanten von

F abhängen, gelten alle hier angestellten Überlegungen nur \mathbb{P} -fast sicher.

Gilt $\Delta_x F \neq 0$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall ist die Komponente in $\Gamma_\varphi(\eta_x)$, die den Punkt x enthält, isomorph zu einem der Graphen aus G und hat ihr lexikographisches Minimum in A . Im zweiten Fall ist x mit einer Komponente aus $\Gamma_\varphi(\eta)$ verbunden, welche im Modell $\Gamma_\varphi(\eta)$ isomorph zu einem der Graphen aus G ist und ihr lexikographisches Minimum in A hat. Die beiden Fällen sind nicht notwendigerweise disjunkt, es gilt jedoch immer $x \xleftrightarrow{\leq k} A$ in $\Gamma_\varphi(\eta_x)$. Die Anzahl der im Modell $\Gamma_\varphi(\eta)$ durch F gezählten Komponenten, die im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_x)$ mit dem Punkt x durch eine Kante verbunden sind, kann durch $\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x))$ nach oben abgeschätzt werden. Da durch das Hinzufügen von x auch eine zusätzliche Komponente entstehen kann, welche von F gezählt wird, ergibt sich die Abschätzung (4.2.2).

Für den Differenzenoperator zweiter Ordnung gilt

$$|\Delta_{x,y}^2 F| = |f(\xi_{x,y}) - f(\xi_x) - f(\xi_y) + f(\xi)| = |\Delta_y F_x - \Delta_y F|,$$

wobei f ein Repräsentant von F ist und $\Delta_y F_x := f(\xi_{x,y}) - f(\xi_x)$. Es gibt drei Fälle, in denen $|\Delta_y F_x - \Delta_y F| > 0$ gilt. Erstens, falls x und y im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_{x,y})$ Knoten einer gemeinsamen Komponente sind, die isomorph zu einem der Graphen aus G ist und deren lexikographisches Minimum in A liegt. Zweitens, falls x im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_x)$ Ecke in einer Komponente ist, die isomorph zu einem der Graphen aus G ist, deren lexikographisches Minimum in A liegt und die im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_{x,y})$ durch eine Kante mit y verbunden ist. Und drittens, falls sich x und y im Modell $\Gamma_\varphi(\eta_{x,y})$ jeweils mit der selben Komponente aus $\Gamma_\varphi(\eta)$ verbinden, die im Modell $\Gamma_\varphi(\eta)$ isomorph zu einem der Graphen aus G ist und deren lexikographisches Minimum in A liegt. Die geschilderten drei Fälle sind zwar im Allgemeinen nicht disjunkt, allerdings tritt mindestens einer von ihnen ein, falls $|\Delta_y F_x - \Delta_y F| > 0$ gilt. Da in allen drei Fällen

$$x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})$$

gilt, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|\Delta_{x,y}^2 F| = \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} |\Delta_y F_x - \Delta_y F| \leq \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} (|\Delta_y F_x| + |\Delta_y F|).$$

Die bereits gezeigt Ungleichung (4.2.2) kann für die Abschätzung des Terms $|\Delta_y F|$ verwendet werden. Mit analogen Argumenten folgt, dass die Abschätzung ebenfalls beim Term $|\Delta_y F_x|$ zum Einsatz kommen kann. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} |\Delta_{x,y}^2 F| &\leq |a|_\infty \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} ((\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) + 1) \mathbf{1}\{y \xleftrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \\ &\quad + (\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 1) \mathbf{1}\{y \xleftrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_y)\}) \\ &\leq |a|_\infty \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \mathbf{1}\{y \xleftrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq |a|_\infty (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3) \mathbb{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \\ &\quad \times \mathbb{1}\{x \xleftrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x) \text{ oder } y \xleftrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_y)\}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Abschätzung (4.2.3) gezeigt. \square

Lemma 4.2.9. *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 4.2.4. Weiter seien $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$, welche nur von $\beta, \tilde{\varphi}, k$ und $|a|_\infty$ abhängen, so dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ die folgenden Ungleichungen erfüllt sind*

$$\mathbb{E}(\Delta_x S_{\varphi,a,G}(A))^4 \leq C_1 \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x,A)}{k}\right)^{2/3}, \quad (4.2.4)$$

$$\mathbb{E}(\Delta_x S_{\varphi,a,G}(A))^2 (\Delta_y S_{\varphi,a,G}(A))^2 \leq C_2 \sum_{v \in \{x,y\}} \tilde{\varphi}\left(\frac{d(v,A)}{k}\right)^{2/3}, \quad (4.2.5)$$

$$\mathbb{E}(\Delta_{x,y}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^4 \leq C_3 \sum_{v \in \{x,y\}} \tilde{\varphi}\left(\frac{d(v,A)}{2k}\right)^{2/3} \tilde{\varphi}\left(\frac{|x-y|}{k+1}\right)^{2/3}, \quad (4.2.6)$$

$$\mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^2 (\Delta_{y,z}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^2 \leq C_4 \sum_{v \in \{x,y,z\}} \tilde{\varphi}\left(\frac{d(v,A)}{2k}\right)^{2/3}, \quad (4.2.7)$$

$$\mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^2 (\Delta_{y,z}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^2 \leq C_5 \sum_{v \in \{x,z\}} \tilde{\varphi}\left(\frac{|v-y|}{2k+1}\right)^{2/3} \tilde{\varphi}\left(\frac{|x-z|}{2k+1}\right)^{2/3}. \quad (4.2.8)$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$\Phi_n(v_1, \dots, v_n) := \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{\varphi}(|v_i - v_{i+1}|)$$

und

$$\tilde{\Phi}_n(v_1, \dots, v_n; A) := \Phi_n(v_1, \dots, v_n) \mathbb{1}\{v_n \in A\},$$

wobei leere Produkte wie üblich als 1 definiert werden. Sind die Punkte v_1, \dots, v_n Knoten eines gegebenen Graphen H , so schreiben wir

$$\Theta_n(v_1, \dots, v_n, H) := \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}\{v_i \leftrightarrow v_{i+1} \text{ in } H\}$$

und

$$\tilde{\Theta}_n(v_1, \dots, v_n, H; A) := \Theta_n(v_1, \dots, v_n, H) \mathbb{1}\{v_n \in A\}.$$

Außerdem vereinbaren wir für $i = 0$

$$\int 1 d(v_1, \dots, v_i) := 1 \quad \text{und} \quad \sum_{v_1, \dots, v_i \in \eta}^{\neq} 1 := 1.$$

Für den restlichen Beweis seien $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ fest gewählt. Abkürzend definieren wir $F := S_{\varphi,a,G}(A)$

und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|a|_\infty = 1$ voraus.

Eine Anwendung von Lemma 4.2.8 und die multivariate Mecke-Gleichung aus Theorem 3.3.3 liefern

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta_x F)^4 &\leq \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + 1)^4 \mathbb{1}\{x \overset{\leq k}{\leftarrow} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \\
&\leq \sum_{i=0}^k \mathbb{E} \sum_{x_1, \dots, x_i \in \eta}^{\neq} (\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + 1)^4 \tilde{\Theta}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i, \Gamma_\varphi(\eta_x); A) \\
&= \sum_{i=0}^k \beta^i \int \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_{x, x_1, \dots, x_i})) + 1)^4 \tilde{\Theta}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i, \Gamma_\varphi(\eta_{x, x_1, \dots, x_i}); A) d(x_1, \dots, x_i) \\
&\leq \sum_{i=0}^k \beta^i \int \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + i + 1)^4 \tilde{\Theta}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i, \Gamma_\varphi(\eta_{x, x_1, \dots, x_i}); A) d(x_1, \dots, x_i).
\end{aligned}$$

Für gegebene $i \in [k]_0$ und $x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R}^d$ sind die Zufallsvariablen

$$\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) \quad \text{und} \quad \tilde{\Theta}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i, \Gamma_\varphi(\eta_{x, x_1, \dots, x_i}); A)$$

stochastisch unabhängig. Somit kann, unter Verwendung von (4.2.1), die rechte Seite der vorangegangenen Ungleichung nach oben durch

$$\tilde{C}_1 \sum_{i=0}^k \beta^i \int \tilde{\Phi}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i; A) d(x_1, \dots, x_i) \quad (4.2.9)$$

abgeschätzt werden, wobei $\tilde{C}_1 := \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + k + 1)^4$. Dabei stellt Proposition 4.0.1 die Endlichkeit von \tilde{C}_1 sicher.

Für $i \in [k]$ und $x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R}^d$ mit $x_i \in A$ gilt

$$\max\{|x - x_1|, |x_1 - x_2|, \dots, |x_{i-1} - x_i|\} \geq \frac{d(x, A)}{i} \geq \frac{d(x, A)}{k}.$$

Da $\tilde{\varphi}$ monoton fallend ist, folgt weiter

$$\tilde{\Phi}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i) = \tilde{\varphi}(|x - x_1|) \tilde{\varphi}(|x_1 - x_2|) \cdots \tilde{\varphi}(|x_{i-1} - x_i|) \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x, A)}{k}\right). \quad (4.2.10)$$

Somit ergibt sich, unter Ausnutzung der letzten Forderung aus (4.2.1), folgende obere Schranke für die rechte Seite der Ungleichung (4.2.9)

$$\tilde{C}_1 \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x, A)}{k}\right)^{2/3} \sum_{i=0}^k \beta^i \int \tilde{\Phi}_{i+1}(x, x_1, \dots, x_i)^{1/3} d(x_1, \dots, x_i) \leq C_1 \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x, A)}{k}\right)^{2/3}$$

mit einer positiven Konstanten $C_1 > 0$. Dies beendet den Beweis von Ungleichung (4.2.4).

Die Ungleichung (4.2.5) folgt mit der Abschätzung

$$\mathbb{E}(\Delta_x F)^2 (\Delta_y F)^2 \leq \mathbb{E}(\Delta_x F)^4 + \mathbb{E}(\Delta_y F)^4$$

und der Anwendung der bereits gezeigten Ungleichung (4.2.4).

Für den Beweis von Ungleichung (4.2.6) liefert zunächst Ungleichung (4.2.3) aus Lemma 4.2.8

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{x,y}^2 F)^4 &\leq \mathbb{E}(2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^4 \mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \\ &\quad \times (\mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} + \mathbb{1}\{y \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_y)\}). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Unter dem Ereignis

$$\{x \xrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y}), x \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\}$$

müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Entweder ist der Pfad zwischen x und y im Graphen $\Gamma_\varphi(\eta_{x,y})$ disjunkt vom Pfad, der x in $\Gamma_\varphi(\eta_x)$ mit A verbindet, oder die beiden Pfade haben neben x mindestens eine weitere Ecke gemeinsam. Mit dieser Überlegung folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \\ &\leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \sum_{v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j \in \eta} \sum_{\neq} \Theta_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) \tilde{\Theta}_{j+1}(x, x_1, \dots, x_j, \Gamma_\varphi(\eta_x); A) \\ &+ \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^i \sum_{j=0}^k \sum_{v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j \in \eta} \sum_{\neq} \Theta_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) \tilde{\Theta}_{j+1}(v_l, x_1, \dots, x_j, \Gamma_\varphi(\eta); A). \end{aligned}$$

Analog zur Argumentation vor (4.2.9) folgt für $i, j \in [k]_0$ mit der multivariaten Mecke-Gleichung aus Theorem 3.3.3

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sum_{v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j \in \eta}^{\neq} (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^4 \Theta_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) \\ &\quad \times \tilde{\Theta}_{j+1}(x, x_1, \dots, x_j, \Gamma_\varphi(\eta_x); A) \\ &= \beta^{i+j} \int \mathbb{E}(2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_{y, v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j})) + 3)^4 \Theta_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y, \Gamma_\varphi(\eta_{x, y, v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j})) \\ &\quad \times \tilde{\Theta}_{j+1}(x, x_1, \dots, x_j, \Gamma_\varphi(\eta_{x, v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j}); A) d(v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j) \\ &\leq \beta^{i+j} \int \mathbb{E}(2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + i + j + 3)^4 \Phi_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y) \\ &\quad \times \tilde{\Phi}_{j+1}(x, x_1, \dots, x_j; A) d(v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j) \\ &\leq \tilde{C}_3 \tilde{\varphi} \left(\frac{|x-y|}{k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, A)}{k} \right)^{2/3} \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten $\tilde{C}_3 > 0$. Ebenfalls folgt mit Theorem 3.3.3 für $i \in [k]$, $l \in [i]$

und $j \in [k]_0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j \in \eta}^{\neq} (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^4 \Theta_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) \\ & \qquad \qquad \qquad \times \tilde{\Theta}_{j+1}(v_l, x_1, \dots, x_j, \Gamma_\varphi(\eta); A) \\ & \leq \beta^{i+j} \int \mathbb{E} (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + i + j + 3)^4 \Phi_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y) \\ & \qquad \qquad \qquad \times \tilde{\Phi}_{j+1}(v_l, x_1, \dots, x_j; A) d(v_1, \dots, v_i, x_1, \dots, x_j). \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Um den Integranden der rechten Seite von (4.2.12) abzuschätzen, verwenden wir die Gleichheit

$$\Phi_{i+2}(x, v_1, \dots, v_i, y) = \Phi_{l+1}(x, v_1, \dots, v_l) \Phi_{i-l+2}(v_l, \dots, v_i, y).$$

und unterscheiden die Fälle

$$\max\{|x - v_1|, |v_1 - v_2|, \dots, |v_{l-1} - v_l|\} \geq \max\{|v_l - v_{l+1}|, \dots, |v_{i-1} - v_i|, |v_i - y|\} \quad (4.2.13)$$

und

$$\max\{|x - v_1|, |v_1 - v_2|, \dots, |v_{l-1} - v_l|\} < \max\{|v_l - v_{l+1}|, \dots, |v_{i-1} - v_i|, |v_i - y|\}. \quad (4.2.14)$$

Gilt (4.2.13), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \max\{|x - v_1|, |v_1 - v_2|, \dots, |v_{l-1} - v_l|\} &= \max\{|x - v_1|, |v_1 - v_2|, \dots, |v_{i-1} - v_i|, |v_i - y|\} \\ &\geq \frac{|x - y|}{i + 1} \geq \frac{|x - y|}{k + 1} \end{aligned}$$

und damit

$$\Phi_{l+1}(x, v_1, \dots, v_l) = \tilde{\varphi}(|x - v_1|) \tilde{\varphi}(|v_1 - v_2|) \cdots \tilde{\varphi}(|v_{l-1} - v_l|) \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - y|}{k + 1}\right).$$

In Entsprechung zu (4.2.10) gilt außerdem

$$\Phi_{i-l+2}(v_l, \dots, v_i, y) \tilde{\Phi}_{j+1}(v_l, x_1, \dots, x_j; A) \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{d(y, A)}{2k}\right).$$

Analog können im Fall (4.2.14) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_{i-l+2}(v_l, \dots, v_i, y) &\leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - y|}{k + 1}\right), \\ \Phi_{l+1}(x, v_1, \dots, v_l) \tilde{\Phi}_{j+1}(v_l, x_1, \dots, x_j; A) &\leq \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x, A)}{2k}\right) \end{aligned}$$

begründet werden. Es folgt insgesamt, dass die rechte Seite von (4.2.12) nach oben durch

$$\widehat{C}_3 \widehat{\varphi} \left(\frac{|x-y|}{k+1} \right)^{2/3} \left(\widehat{\varphi} \left(\frac{d(x,A)}{2k} \right)^{2/3} + \widehat{\varphi} \left(\frac{d(y,A)}{2k} \right)^{2/3} \right)$$

abgeschätzt werden kann, wobei $\widehat{C}_3 > 0$ eine positive Konstante ist. Die selben Argumente können auch für die Abschätzung von

$$\mathbb{E}(2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^4 \mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \mathbb{1}\{y \xrightarrow{\leq k} A \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_y)\},$$

verwendet werden. Insgesamt folgt dann mit (4.2.11) die gewünschte Ungleichung (4.2.6).

In Analogie zum Beweis von Ungleichung (4.2.5), folgt die Ungleichung (4.2.7) aus der Abschätzung

$$\mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 F)^2 (\Delta_{y,z}^2 F)^2 \leq \mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 F)^4 + \mathbb{E}(\Delta_{y,z}^2 F)^4$$

und der gerade gezeigten Ungleichung (4.2.6).

Es bleibt Ungleichung (4.2.8) zu zeigen. Zunächst liefert Ungleichung (4.2.3) aus Lemma 4.2.8

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 F)^2 (\Delta_{y,z}^2 F)^2 &\leq \mathbb{E}(2 \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + 3)^2 (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^2 \\ &\quad \times \mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})\} \mathbb{1}\{y \xrightarrow{\leq k+1} z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{y,z})\}. \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Ungleichung (4.2.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}\{x \xrightarrow{\leq k+1} z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})\} \mathbb{1}\{y \xrightarrow{\leq k+1} z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{y,z})\} \\ &\leq \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \sum_{u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j \in \eta} \sum_{\neq} \Theta_{i+2}(x, u_1, \dots, u_i, z, \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})) \Theta_{j+2}(z, v_1, \dots, v_j, y, \Gamma_\varphi(\eta_{y,z})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^i \sum_{j=0}^k \sum_{u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j \in \eta} \sum_{\neq} \Theta_{i+2}(x, u_1, \dots, u_i, z, \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})) \Theta_{j+2}(u_l, v_1, \dots, v_j, y, \Gamma(\eta_y)). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der bisherigen Argumente und der multivariaten Mecke-Gleichung aus Theorem 3.3.3 folgt für $i, j \in [k]_0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sum_{u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j \in \eta}^{\neq} (2 \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + 3)^2 (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^2 \Theta_{i+2}(x, u_1, \dots, u_i, z, \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})) \\ &\quad \times \Theta_{j+2}(z, v_1, \dots, v_j, y, \Gamma_\varphi(\eta_{y,z})) \\ &\leq \beta^{i+j} \int \mathbb{E}(2 \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + i + j + 3)^2 (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + i + j + 3)^2 \\ &\quad \times \Phi_{i+2}(x_1, u_1, \dots, u_i, x_3) \Phi_{j+2}(z, v_1, \dots, v_j, y) d(u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j) \\ &\leq \widetilde{C}_5 \widehat{\varphi} \left(\frac{|x-z|}{k+1} \right)^{2/3} \widehat{\varphi} \left(\frac{|y-z|}{k+1} \right)^{2/3} \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

mit einer positiven Konstanten $\tilde{C}_5 > 0$, und analog für $i \in [k]$, $l \in [i]$ und $j \in [k]_0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j \in \eta}^{\neq} (2 \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + 3)^2 (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + 3)^2 \\ & \quad \times \Theta_{i+2}(x, u_1, \dots, u_i, z, \Gamma_\varphi(\eta_{x,z})) \Theta_{j+2}(u_l, v_1, \dots, v_j, y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) \\ & \leq \beta^{i+j} \int \mathbb{E} (2 \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + i + j + 3)^2 (2 \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) + i + j + 3)^2 \\ & \quad \times \Phi_{i+2}(x, u_1, \dots, u_i, z) \Phi_{j+2}(u_l, v_1, \dots, v_j, y) d(u_1, \dots, u_i, v_1, \dots, v_j). \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Für die Abschätzung des Integranden der rechten Seite von (4.2.16) unterscheiden wir die Fälle

$$\max\{|x - u_1|, |u_1 - u_2|, \dots, |u_{l-1} - u_l|\} \geq \max\{|u_l - u_{l+1}|, \dots, |u_{i-1} - u_i|, |u_i - z|\} \quad (4.2.17)$$

und

$$\max\{|x - u_1|, |u_1 - u_2|, \dots, |u_{l-1} - u_l|\} < \max\{|u_l - u_{l+1}|, \dots, |u_{i-1} - u_i|, |u_i - z|\}. \quad (4.2.18)$$

Das weitere Vorgehen ist analog zum vorangegangenen Beweis der Ungleichung (4.2.6). Im Fall von (4.2.17) verwenden wir die Abschätzungen

$$\Phi_{l+1}(x, u_1, \dots, u_l) = \tilde{\varphi}(|x - u_1|) \tilde{\varphi}(|u_1 - u_2|) \cdots \tilde{\varphi}(|u_{l-1} - u_l|) \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - z|}{k + 1}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_{i-l+2}(u_l, \dots, u_i, z) \Phi_{j+2}(u_l, v_1, \dots, v_j, y) &= \tilde{\varphi}(|u_l - u_{l+1}|) \cdots \tilde{\varphi}(|u_{i-1} - u_i|) \tilde{\varphi}(|u_i - z|) \\ & \quad \times \tilde{\varphi}(|u_l - v_1|) \cdots \tilde{\varphi}(|v_{j-1} - v_j|) \tilde{\varphi}(|v_j - y|) \\ & \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|y - z|}{2k + 1}\right). \end{aligned}$$

Gilt hingegen (4.2.18), so kommen die Ungleichungen

$$\Phi_{i-l+2}(u_l, \dots, u_i, z) = \tilde{\varphi}(|u_l - u_{l+1}|) \cdots \tilde{\varphi}(|u_{i-1} - u_i|) \tilde{\varphi}(|u_i - z|) \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - z|}{k + 1}\right)$$

und

$$\begin{aligned} & \Phi_{l+1}(x, u_1, \dots, u_l) \Phi_{j+2}(u_l, v_1, \dots, v_j, y) \\ &= \tilde{\varphi}(|x - u_1|) \tilde{\varphi}(|u_1 - u_2|) \cdots \tilde{\varphi}(|u_{l-1} - u_l|) \tilde{\varphi}(|u_l - v_1|) \\ & \quad \times \tilde{\varphi}(|v_1 - v_2|) \cdots \tilde{\varphi}(|v_{j-1} - v_j|) \tilde{\varphi}(|v_j - y|) \\ & \leq \tilde{\varphi}\left(\frac{|x - y|}{2k + 1}\right) \end{aligned}$$

zum Einsatz. Mit den vorangegangenen Überlegungen folgt insgesamt, dass die rechte Seite

von (4.2.16) nach oben durch

$$\widehat{C}_5 \left(\tilde{\varphi} \left(\frac{|x-y|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|x-z|}{2k+1} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{|x-z|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|y-z|}{2k+1} \right)^{2/3} \right)$$

abgeschätzt werden kann, wobei $\widehat{C}_5 > 0$ eine positive Konstante ist. Zusammen mit der Abschätzung (4.2.15) erhalten wir die Ungleichung (4.2.8), was den Beweis des Lemmas beendet. \square

Das nächste Lemma benötigen wir für die Abschätzung von Integralen über Verbindungsfunktionen.

Lemma 4.2.10. *Es seien $\alpha > 0$ und $\chi: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ eine monoton fallende Funktion mit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x|)^\alpha dx < \infty.$$

Dann existiert eine monoton fallende Funktion $h: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $h(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, so dass für alle $A \in \mathcal{K}^d$

$$\frac{1}{\lambda_d(A)} \int \chi(d(x, A))^\alpha dx \leq 1 + h(r(A))$$

gilt.

Beweis. Wegen $\chi \leq 1$ liefert die lokale Steiner-Formel aus [43, Theorem 4.2.8] für $A \in \mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} \int \chi(d(x, A))^\alpha dx &\leq \lambda_d(A) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} \chi(d(x, A))^\alpha dx \\ &= \lambda_d(A) + \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) \kappa_{d-j} V_j(A) \int_0^\infty t^{d-j-1} \chi(t)^\alpha dt, \end{aligned}$$

wobei V_0, \dots, V_{d-1} die inneren Volumina bezeichnen, siehe Abschnitt 2.4.

Unter Verwendung der Monotonie der Funktion χ folgt weiter

$$\begin{aligned} S(A) &:= \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) \kappa_{d-j} V_j(A) \int_0^\infty t^{d-j-1} \chi(t)^\alpha dt \\ &\leq \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) \kappa_{d-j} V_j(A) \left(\chi(0)^\alpha + \int_1^\infty t^{d-1} \chi(t)^\alpha dt \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{d-1} (d-j) \kappa_{d-j} V_j(A) \left(1 + \frac{1}{d \kappa_d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x|)^\alpha dx \right). \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.7 aus [21] folgt für $j \in [d-1]_0$

$$\frac{V_j(A)}{\lambda_d(A)} \leq \frac{2^d - 1}{\kappa_{d-j} r(A)^{d-j}}.$$

Insgesamt erhalten wir mit den beiden vorangegangenen Abschätzungen

$$\frac{S(A)}{\lambda_d(A)} \leq \sum_{j=0}^{d-1} \frac{(d-j)(2^d-1)}{r(A)^{d-j}} \left(1 + \frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x|)^\alpha dx\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Somit folgt mit der Definition

$$h(t) := \sum_{j=0}^{d-1} \frac{(d-j)(2^d-1)}{t^{d-j}} \left(1 + \frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathbb{R}^d} \chi(|x|)^\alpha dx\right), \quad t \in (0, \infty),$$

die Aussage des Lemmas. \square

Mit den hier gezeigten Lemmata sind alle Werkzeuge vorhanden, um die noch fehlenden Beweise der Theoreme 4.2.4 und 4.2.6 führen zu können.

Beweis von Theorem 4.2.4 und Theorem 4.2.6. Die beiden Theoreme werden mit Hilfe von Theorem 3.5.2 bewiesen.

Es sei $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$. Nach Korollar 4.1.6 existieren positive Konstanten $c > 0$ und $\tau > 0$ mit

$$\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A) \geq c\lambda_d(A) \quad (4.2.19)$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$. Weiterhin liefert Lemma 4.2.10 die Existenz einer positiven Konstanten $\tilde{c} > 0$ mit

$$\int \tilde{\varphi}\left(\frac{d(x,A)}{l}\right)^{1/3} dx \leq \tilde{c}\lambda_d(A) \quad (4.2.20)$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ und $l \in \{k, \dots, 2k\}$.

Während des gesamten Beweises werden wir mehrfach die elementare Ungleichung

$$\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}, \quad s, t \geq 0 \quad (4.2.21)$$

verwenden. Um die Übersichtlichkeit in den folgenden längeren Abschätzungen zu erhöhen, wird auf diese Ungleichung jedoch nicht jedes Mal explizit verwiesen.

Im Folgenden sei $A \in \mathcal{K}^d$ ein fest gewählter konvexer Körper mit $r(A) \geq \tau$. Wir definieren die Abkürzungen

$$\tilde{F} := S_{\varphi,a,G}(A) \quad \text{und} \quad F := \frac{S_{\varphi,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}.$$

Weiterhin seien $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ die Größen aus Definition 3.5.1 mit dem Funktional F und dem Intensitätsmaß $\lambda = \beta\lambda_d$ von η . Da der Differenzenoperator linear ist und auf Konstanten verschwindet, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ \mathbb{P} -fast sicher

$$\Delta_x F = \frac{\Delta_x \tilde{F}}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}. \quad (4.2.22)$$

Diese Gleichung gilt in analoger Weise auch für den zweiten Differenzenoperator. Aus diesem Grund werden wir die Ausdrücke $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ zunächst für das Funktional \tilde{F} (anstelle von F) mit Hilfe von Lemma 4.2.9 abschätzen und anschließend (4.2.22) verwenden, um die gewünschten Abschätzungen von $\gamma_1, \dots, \gamma_6$, basierend auf F , zu erhalten.

Wegen $\lambda_d(A) < \infty$ und der \mathbb{P} -fast sicheren Ungleichung $|\tilde{F}| \leq |a|_\infty \eta(A)$, existieren alle Momente von \tilde{F} (und damit auch von F). Insbesondere folgt die Voraussetzung $\mathbb{E}F^4 < \infty$ von Theorem 3.5.2.

Es seien $C_1, \dots, C_5 > 0$ die Konstanten aus Lemma 4.2.9. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz und die Ungleichungen (4.2.4) und (4.2.6) aus Lemma 4.2.9 liefern

$$\begin{aligned}
& \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} d(x_1, x_2, x_3) \\
&= \int \left[\int \left[\mathbb{E}(\Delta_x \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x, y}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} dx \right]^2 dy \\
&\leq \int \left[\mathbb{E}(\Delta_z \tilde{F})^4 \right]^{1/2} dz \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x, y}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} d(x, y) \\
&\leq \sqrt{C_1 C_3} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(z, A)}{k} \right)^{1/3} dz \\
&\quad \times \int \tilde{\varphi} \left(\frac{|x - y|}{k + 1} \right)^{1/3} \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(y, A)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x, y). \tag{4.2.23}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.2.10 und der Voraussetzung (4.2.1) folgt, dass die rechte Seite von (4.2.23) endlich ist und schließlich, unter Verwendung von (4.2.22), dass die Voraussetzung (3.5.1) von Theorem 3.5.2 erfüllt ist.

Die Ungleichung (4.2.6) liefert

$$\begin{aligned}
& \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\
&\leq C_3 \int \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_3|}{k + 1} \right)^{1/3} \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_1, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_3, A)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\
&\quad \times \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_2 - x_3|}{k + 1} \right)^{1/3} \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_2, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_3, A)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3).
\end{aligned}$$

Analog zur Argumentation in (4.2.23) und unter Einsatz von $\tilde{\varphi} \leq 1$ erhalten wir mit der letzten Abschätzung die Voraussetzung (3.5.2).

Mit (4.2.5) und (4.2.8) aus Lemma 4.2.9, der Ungleichung (4.2.20) und der Voraussetzung

(4.2.1) folgt

$$\begin{aligned}
& \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1} \tilde{F})^2 (\Delta_{x_2} \tilde{F})^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^2 \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\
& \leq \sqrt{C_2 C_5} \int \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_1, A)}{k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_2, A)}{k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\
& \quad \times \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_2 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\
& \leq c_1 \sqrt{C_2 C_5} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, A)}{k} \right)^{1/3} dx \\
& \leq \tilde{c} c_1 \sqrt{C_2 C_5} \lambda_d(A)
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

mit einer positiven Konstanten $c_1 > 0$. Wegen (4.2.22) und der Ungleichung (4.2.19) erhalten wir mit der vorangegangenen Abschätzung, dass γ_1 nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)^{-1/2}$ abgeschätzt werden kann. In analoger Weise werden wir auch für $\gamma_2, \dots, \gamma_6$ argumentieren.

Die Ungleichungen (4.2.7) und (4.2.8) aus Lemma 4.2.9, die Ungleichung (4.2.20) und die Voraussetzung (4.2.1) liefern

$$\begin{aligned}
& \int \mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^2 d(x_1, x_2, x_3) \\
& = \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_3}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{x_2, x_3}^2 \tilde{F})^2 \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\
& \leq \sqrt{C_4 C_5} \int \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_1, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_2, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_3, W)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} \\
& \quad \times \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_2 - x_3|}{2k+1} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\
& \leq c_2 \sqrt{C_4 C_5} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, A)}{2k} \right)^{1/3} dx \\
& \leq \tilde{c} c_2 \sqrt{C_4 C_5} \lambda_d(A)
\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten $c_2 > 0$. Unter Verwendung von (4.2.22) und der Ungleichung (4.2.19) folgt, dass γ_2 nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)^{-1/2}$ beschränkt ist.

Wegen der Ungleichung von Hölder, (4.2.4) und (4.2.20) gilt

$$\int \mathbb{E}|\Delta_x \tilde{F}|^3 dx \leq \int \left(\mathbb{E}|\Delta_x \tilde{F}|^4 \right)^{3/4} dx \leq C_1 \int \tilde{\varphi}(d(x, A))^{1/2} dx \leq \tilde{c} C_1 \lambda_d(A). \tag{4.2.25}$$

Damit folgt, dass auch die Größe γ_3 nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)^{-1/2}$ beschränkt ist. Für γ_5 kann analog argumentiert werden. Das Integral in γ_4 kann wie in (4.2.25) abgeschätzt werden. Erforderlich ist außerdem eine geeignete Abschätzung von $\mathbb{E}\tilde{F}^4$, beziehungsweise von $\mathbb{E}F^4$. Die Ungleichung (4.2.4) aus Lemma 4.2.9 und die Ungleichung

(4.2.20) liefern

$$\begin{aligned} \int [\mathbb{E}(\Delta_x \tilde{F})^4]^{1/2} dx &\leq \sqrt{C_1} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, W)}{k} \right)^{1/3} dx \leq \tilde{c} \sqrt{C_1} \lambda_d(A), \\ \int \mathbb{E}(\Delta_x \tilde{F})^4 dx &\leq C_1 \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, W)}{k} \right)^{2/3} dx \leq \tilde{c} C_1 \lambda_d(A). \end{aligned}$$

Wir erhalten mit Lemma 3.5.4, (4.2.22) und der Ungleichung (4.2.19), dass $\mathbb{E}F^4$ nach oben durch eine positive Konstante abgeschätzt werden kann, welche nicht von $\lambda_d(A)$ abhängt. Somit folgt mit (4.2.25), dass auch γ_4 durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)^{-1/2}$ beschränkt ist.

Abschließend untersuchen wir γ_6 . Mit den Ungleichungen (4.2.4) und (4.2.6) aus Lemma 4.2.9, der Voraussetzung (4.2.1) und der Abschätzung (4.2.19) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int [\mathbb{E}(\Delta_{x_1} \tilde{F})^4]^{1/2} [\mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_2}^2 \tilde{F})^4]^{1/2} d(x_1, x_2) \\ &\leq \sqrt{C_1 C_3} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{k} \right)^{1/3} \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_1, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_2, A)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x_1, x_2) \\ &\leq c_6 \sqrt{C_1 C_3} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x, A)}{2k} \right)^{1/3} dx \\ &\leq \tilde{c} c_6 \sqrt{C_1 C_3} \lambda_d(A) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\int \mathbb{E}(\Delta_{x_1, x_2}^2 \tilde{F})^4 d(x_1, x_2) \\ &\leq \sqrt{C_3} \int \tilde{\varphi} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{k} \right)^{1/3} \left[\tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_1, A)}{2k} \right)^{2/3} + \tilde{\varphi} \left(\frac{d(x_2, A)}{2k} \right)^{2/3} \right]^{1/2} d(x_1, x_2) \\ &\leq \tilde{c} c_6 \sqrt{C_1 C_3} \lambda_d(A) \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten $c_6 > 0$. Wie zuvor folgt mit (4.2.22) und (4.2.19), dass auch γ_6 durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)^{-1/2}$ beschränkt ist. Insgesamt erhalten wir mit Theorem 3.5.2 und den gezeigten Abschätzungen

$$d_1 \left(\frac{S_{\varphi, a, G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A)}}, N \right) \leq \sum_{i=1}^3 \gamma_i \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

und

$$d_K \left(\frac{S_{\varphi, a, G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A)}}, N \right) \leq \sum_{i=1}^6 \gamma_i \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

mit einer positiven Konstanten $C > 0$, welche von $a, \beta, \varphi, \tilde{\varphi}$ und G , aber nicht von $\lambda_d(A)$ abhängt. Dies beendet den Beweis der Theoreme 4.2.4 und 4.2.6. \square

4.3. GESAMTKOMPONENTENZAHL

Wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten arbeiten wir mit einem RCM basierend auf einem stationären Poisson-Prozess η in \mathbb{R}^d mit Intensität $\beta > 0$ und einer Verbindungsfunktion $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, die $0 < m_\varphi < \infty$, also (4.0.1), erfüllt. Bisher haben wir die Anzahl von Komponenten im RCM untersucht, die zu einem von endlich vielen vorgegebenen (endlichen) Graphen isomorph sind. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir uns mit der Gesamtanzahl aller endlichen Komponenten in einem wachsenden Beobachtungsfenster beschäftigen. Um im Folgenden technische Schwierigkeiten durch Randeffekte zu vermeiden, werden wir hier nur diejenigen Komponenten zählen, die vollständig in einer vorgegebenen konvexen Menge liegen. Dies entspricht auch der Zählweise in [4]. Allgemein definieren wir den Prozess aller endlichen Komponenten $\bar{\eta}_\varphi$ durch

$$\bar{\eta}_\varphi := \{(x_1, \dots, x_k) \in \eta^k : k \in \mathbb{N}, x_1 \prec \dots \prec x_k \text{ und} \\ G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_k\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \text{ ist eine Komponente von } \Gamma_\varphi(\eta)\}.$$

Für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$\bar{\eta}_\varphi(A) := |\{(x_1, \dots, x_k) \in \bar{\eta}_\varphi : x_1, \dots, x_k \in A\}|$$

die Anzahl aller endlichen Komponenten von $\Gamma_\varphi(\eta)$, die vollständig in A liegen. Weiterhin sei für $G \in \mathbf{G}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, G} := \{(x_1, \dots, x_{|G|}) \in \bar{\eta}_\varphi : G_{\text{ind}}(\{x_1, \dots, x_{|G|}\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \simeq G\}$$

der Prozess aller zu G isomorpher Komponenten von $\Gamma_\varphi(\eta)$ und für $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, k} := \bigcup_{G \in \mathbf{G}, |G|=k} \tilde{\eta}_{\varphi, G} = \bar{\eta}_\varphi \cap (\mathbb{R}^d)^k$$

der Prozess aller Komponenten der Größe k . Wie oben definieren wir für $G \in \mathbf{G}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, G}(A) := |\{(x_1, \dots, x_{|G|}) \in \tilde{\eta}_{\varphi, G} : x_1, \dots, x_{|G|} \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}_d,$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, k}(A) := |\{(x_1, \dots, x_k) \in \tilde{\eta}_{\varphi, k} : x_1, \dots, x_k \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}_d.$$

Damit sind für $A \in \mathcal{B}_d$ die Größen $\tilde{\eta}_{\varphi, G}(A)$ und $\tilde{\eta}_{\varphi, k}(A)$ jeweils die Anzahl der Tupel aus $\tilde{\eta}_{\varphi, G}$ beziehungsweise $\tilde{\eta}_{\varphi, k}$, deren Einträge sämtlich in A liegen.

Ziel dieses Abschnitts ist es den nachfolgenden zentralen Grenzwertsatz für $\bar{\eta}_\varphi(A)$ zu zeigen.

Theorem 4.3.1. *Unter der Voraussetzung (4.0.1) existiert der Grenzwert*

$$\sigma_{\varphi, \varphi} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}{\lambda_d(A)} \quad (4.3.1)$$

mit $\sigma_{\varphi,\varphi} \in (0, \infty)$ und ist gegeben durch $\sigma_{\varphi,\varphi} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sigma_{\varphi,\varphi}^{(i,j)}$. Außerdem gilt

$$\frac{\bar{\eta}_{\varphi}(A) - \mathbb{E}\bar{\eta}_{\varphi}(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_{\varphi}(A)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty,$$

wobei N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Bei obiger Verteilungskonvergenz gilt sogar Konvergenz in der Wasserstein-Distanz d_1 .

Werden rechteckige Beobachtungsfenster betrachtet, so kann in [38, Theorem 2] ein starkes Gesetz der großen Zahlen für die Größe $\bar{\eta}_{\varphi}(A)$ gefunden werden. Für den Gilbert-Graphen, also $\varphi(x) = \mathbf{1}\{|x| \leq r\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, für ein $r > 0$, wird in [37, Theorem 13.27] ein zentraler Grenzwertsatz für die Anzahl aller endlichen Komponenten gezeigt.

Theorem 4.3.1 wird durch drei Lemmata vorbereitet. Während des gesamten Abschnitts nehmen wir zur Vereinfachung $\beta = 1$ an.

Lemma 4.3.2. *Es gelte (4.0.1). Dann gilt für alle $G \in \mathbf{G}$*

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))}{\lambda_d(A)} = 0.$$

Beweis. Es sei $G \in \mathbf{G}$ und $k := |G|$. Für $A \in \mathcal{K}^d$ ist sowohl $\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A)$ als auch $\eta_{\varphi,G}(A)$ nach oben durch die Größe $\eta(A)$ beschränkt, die Poisson-verteilt ist. Somit gelten $\mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A)^2 < \infty$ und $\mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)^2 < \infty$. Die Poincaré-Ungleichung aus Theorem 3.4.1 liefert

$$\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A)) \leq \int \mathbb{E}(\Delta_x(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A)))^2 dx. \quad (4.3.2)$$

Eine Fallunterscheidung und Argumente wie im Beweis der Ungleichung (4.2.2) liefern

$$\begin{aligned} |\Delta_x(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))| &\leq \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) \mathbf{1}\{x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A^c \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\}, \quad x \in A, \\ |\Delta_x(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))| &\leq \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) \mathbf{1}\{x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\}, \quad x \in A^c, \end{aligned}$$

wobei die beiden vorangegangenen Ungleichungen jeweils \mathbb{P} -fast sicher gelten. Damit kann die rechte Seite von (4.3.2) nach oben durch

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E} \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x))^2 \mathbf{1}\{x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A^c \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\} dx \\ + \int_{A^c} \mathbb{E} \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x))^2 \mathbf{1}\{x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\} dx \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

abgeschätzt werden. Mit der Gleichung von Mecke aus Theorem 3.3.3 folgt

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E} \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x))^2 \mathbf{1}\{x \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A^c \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\} dx \\ \leq \sum_{i=1}^k \int_A \mathbb{E} \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x))^2 \sum_{x_1, \dots, x_i \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_i \in A^c \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_x)\} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k \int_A \int \mathbb{E} \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_{x,x_1,\dots,x_i}))^2 \mathbb{1}\{x \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_i \in A^c \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,x_1,\dots,x_i})\} \\
&\quad \times d(x_1, \dots, x_i) dx \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_A \int \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + k)^2 \mathbb{1}\{x \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_i \in A^c \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,x_1,\dots,x_i})\} \\
&\quad \times d(x_1, \dots, x_i) dx. \quad (4.3.4)
\end{aligned}$$

Für $i \in [k]$ und $x, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R}^d$ sind die Zufallsvariablen $\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x))$ und

$$\mathbb{1}\{x \leftrightarrow x_1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow x_i \in A^c \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,x_1,\dots,x_i})\}$$

stochastisch unabhängig. Somit ist für $i \in [k]$ und $x_0 := x$ der i -te Summand der rechten Seite von (4.3.4) gegeben durch

$$\int_A \int \mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + k)^2 \prod_{j=1}^i \varphi(x_j - x_{j-1}) \mathbb{1}\{x_i \in A^c\} d(x_1, \dots, x_i) dx. \quad (4.3.5)$$

Aufgrund der Stationarität von η hängt $\mathbb{E}(\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) + k)^2$ nicht von $x \in \mathbb{R}^d$ ab und ist eine positive (und endliche) Konstante, vergleiche Proposition 4.0.1. Durch eine Fallunterscheidung hinsichtlich $x_j \in A$ oder $x_j \in A^c$ für $j \in [i-1]$ und unter Verwendung der Voraussetzung (4.0.1) folgt, dass das Integral aus (4.3.5) nach oben durch ein positives Vielfaches von

$$\int_A \int_{A^c} \varphi(x-y) dy dx$$

abgeschätzt werden kann. Analog kann auch für den zweiten Summanden aus (4.3.3) argumentiert werden. Insgesamt erhalten wir, dass (4.3.3) nach oben durch

$$c_{\varphi,k} \int_A \int_{A^c} \varphi(x-y) dy dx$$

beschränkt ist, wobei die Konstante $c_{\varphi,k}$ lediglich von der Verbindungsfunktion φ (beziehungsweise m_φ) und k abhängt.

Weiter gilt für $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_d(A)} \int_A \int_{A^c} \varphi(x-y) dy dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda_d(A)} \int_A \int_{A^c} (\mathbb{1}\{d(x, \partial A) \leq \tau\} + \mathbb{1}\{d(x, \partial A) \geq \tau\}) \varphi(x-y) dy dx \\
&\leq \frac{\lambda_d(\{x \in A : d(x, \partial A) \leq \tau\})}{\lambda_d(A)} m_\varphi + \frac{\lambda_d(\{x \in A : d(x, \partial A) \geq \tau\})}{\lambda_d(A)} \int_{B^d(0,\tau)^c} \varphi(y) dy. \quad (4.3.6)
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Theorem 4.1.1 folgt mit [21, (3.19)], der Formel von Steiner und [21, Lemma 3.7], dass der erste Summand der rechten Seite von (4.3.6) für $r(A) \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Das Integral im zweiten Summanden der rechten Seite von (4.3.6) konvergiert mit

majorisierter Konvergenz für $\tau \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen Null, womit wir

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} \int_A \int_{A^c} \varphi(x-y) \, dy \, dx = 0$$

erhalten, was den Beweis des Lemmas beendet. \square

Mit dem vorangegangenen Lemma, Theorem 4.1.4 und Theorem 4.2.3 erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 4.3.3. *Die Aussagen von Theorem 4.1.4 und Theorem 4.2.3 gelten auch, wenn die dort auftretenden Größen $\eta_{\varphi, G_i}(A)$ für $i \in [m]$ durch $\tilde{\eta}_{\varphi, G_i}(A)$ ersetzt werden.*

Um das nächste Lemma formulieren zu können, definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{B}_d$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) := \sum_{k=1}^m \tilde{\eta}_{\varphi, k}(A) \quad \text{und} \quad \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A) := \sum_{k=m+1}^{\infty} \tilde{\eta}_{\varphi, k}(A).$$

Weiter sei für $m \in \mathbb{N}$

$$q_{\varphi, m} := \mathbb{P}(\text{die Summe der Größen aller endlichen Komponenten in } \Gamma_{\varphi}(\eta), \text{ welche in } \Gamma_{\varphi}(\eta \cup \{0\}) \text{ mit } 0 \text{ verbunden sind, beträgt mindestens } m).$$

Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir $q_{\varphi, m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Lemma 4.3.4. *Es gelte die Voraussetzung (4.0.1). Weiter seien*

$$\tilde{C}_{\varphi} := \mathbb{E}(\deg(0, \Gamma_{\varphi}(\eta \cup \{0\})) + 1)^2 \quad \text{und} \quad C_{\varphi} := \mathbb{E}[\deg(0, \Gamma_{\varphi}(\eta \cup \{0\}))^4]^{1/2}.$$

Dann gelten für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$

$$\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}{\lambda_d(A)} \leq \tilde{C}_{\varphi}, \quad \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))}{\lambda_d(A)} \leq C_{\varphi} \sqrt{q_{\varphi, m}}$$

und

$$\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)}{\lambda_d(A)} \leq C_{\varphi} \sqrt{q_{\varphi, m}}.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $B_k(x)$ das Ereignis, dass die Summe der Größen aller endlichen Komponenten aus $\Gamma_{\varphi}(\eta)$, die in $\Gamma_{\varphi}(\eta_x)$ durch eine Kante mit x verbunden sind, mindestens k beträgt. Wegen der Stationarität von η gilt $\mathbb{P}(B_k(x)) = q_{\varphi, k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Es sei $A \in \mathcal{K}^d$. Mit den Argumenten aus dem Beweis von Ungleichung (4.2.2) erhalten wir für alle $x \in A$ \mathbb{P} -fast sicher die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\Delta_x \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)| &\leq \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) + 1, \\ |\Delta_x (\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))| &\leq \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) \mathbb{1}_{B_m(x)}, \\ |\Delta_x \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)| &\leq \deg(x, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) \mathbb{1}_{B_m(x)}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Weiterhin können die obigen drei linken Seiten für alle $x \in A^c$ \mathbb{P} -fast sicher durch

$$\sum_{y \in \eta \cap A} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\}$$

nach oben abgeschätzt werden. Mit der Gleichung von Mecke aus Theorem 3.3.3 folgt

$$\begin{aligned} & \int_{A^c} \mathbb{E} \left(\sum_{y \in \eta \cap A} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \right)^2 dx \\ &= \int_{A^c} \mathbb{E} \sum_{y \in \eta \cap A} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} + \mathbb{E} \sum_{y_1, y_2 \in \eta \cap A}^{\neq} \mathbf{1}\{y_1 \leftrightarrow x \leftrightarrow y_2 \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} dx \\ &= \int_{A^c} \left[\int_A \varphi(x-y) dy + \int_{A^2} \varphi(x-y_1) \varphi(x-y_2) d(y_1, y_2) \right] dx \\ &= \int_{A^c} \left[\int_A \varphi(x-y) dy + \left(\int_A \varphi(x-y) dy \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Analog zu den Argumenten am Ende des Beweises von Lemma 4.3.2 erhalten wir

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} \int_{A^c} \mathbb{E} \left(\sum_{y \in \eta \cap A} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \right)^2 dx = 0.$$

Mit dem vorangegangenen Grenzwert, den Ungleichungen aus (4.3.7), der Ungleichung von Poincaré aus Theorem 3.4.1 und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgen die drei Ungleichungen des Lemmas. \square

Lemma 4.3.5. *Unter der Voraussetzung (4.0.1) gilt*

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}\text{ar } \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau))}{\tau^d} > 0.$$

Beweis. Für $\tau > 0$ bezeichne $g_\tau: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d)^{[2]} \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ einen Repräsentanten des Funktionals $\bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau))$. Der nachfolgende Beweis orientiert sich am Beweis von Theorem 4.1.4 und verwendet auch die dort eingeführte Notation.

Für einen gegebenen Punkt $(x, t, M) \in \mathbb{R}^d \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ bezeichne $B(x, t, M)$ das Ereignis, dass im Modell $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t)$ zwei verschiedene Ecken $y_1, y_2 \in B^d(0, \tau)$ existieren, die in $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\})$ jeweils mit x verbunden sind und ansonsten keine weiteren Nachbarn besitzen.

Mit Theorem 3.4.2 und einer Einschränkung des Integrationsbereichs erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}\text{ar } \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau)) \\ & \geq \int_{B^d(0, \tau)} \int_0^1 \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[g_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - g_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t]^2 \right. \\ & \quad \left. \times \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \right] \Lambda(dM) dt dx. \end{aligned}$$

Es sei $(x, t, M) \in B^d(0, \tau) \times [0, 1] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Falls x im Modell $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\})$ mindestens einen Nachbarn besitzt, so kann das Entfernen von x die Anzahl aller endlichen Komponenten nicht verringern. Mit dieser Überlegung folgt

$$\begin{aligned}
& |\mathbb{E}[g_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) - g_\tau(T(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \setminus \{x\}) | \hat{\eta}_t] \mathbf{1}_{B(x, t, M)}| \\
& \geq \mathbb{P}(y_1, y_2 \text{ sind in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\}) \text{ nur mit } x \text{ verbunden} | \hat{\eta}_t) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& \geq [1 - \mathbb{P}(\deg(y_1, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) \geq 2 | \hat{\eta}_t) + \mathbb{P}(\deg(y_2, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) \geq 2 | \hat{\eta}_t)] \\
& \quad \times \mathbf{1}_{B(x, t, M)}. \tag{4.3.8}
\end{aligned}$$

Es sei $\eta_{[t, 1]}$ ein von $\hat{\eta}_t$ unabhängiger Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß $(1 - t)\lambda_d$. Mit Lemma 2.1.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\deg(y_1, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta} \cup \{(x, t, M)\})) \geq 2 | \hat{\eta}_t) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& = (1 - \mathbb{P}(\deg(y_1, \Gamma_\varphi(\eta_{[t, 1]} \cup \{y_1\})) = 0 | \hat{\eta}_t)) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& = \left(1 - \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta_{[t, 1]}} \mathbf{1}\{y_1 \not\leftrightarrow z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{[t, 1]} \cup \{y_1\})\} \mid \hat{\eta}_t \right] \right) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& = \left(1 - \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta_{[t, 1]}} (1 - \varphi(y_1 - z)) \mid \hat{\eta}_t \right] \right) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& = \left(1 - \exp \left(- (1 - t) \int \varphi(y_1 - z) dz \right) \right) \mathbf{1}_{B(x, t, M)} \\
& = (1 - \exp(-(1 - t)m_\varphi)) \mathbf{1}_{B(x, t, M)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist die rechte Seite der Ungleichung (4.3.8) gleich

$$(2 \exp(-(1 - t)m_\varphi) - 1) \mathbf{1}_{B(x, t, M)}.$$

Wir wählen $s \in (0, 1)$ so, dass $2 \exp(-(1 - t)m_\varphi) - 1 \geq 1/2$ für $t \in [s, 1]$ gilt. Mit dieser Wahl folgt

$$\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau)) \geq \frac{1}{4} \int_{B^d(0, \tau)} \int_s^1 \int \mathbb{P}(B(x, t, M)) \Lambda(dM) dt dx.$$

Für $x \in B^d(0, \tau)$ und $t \in [s, 1]$ gilt mit der Gleichung von Mecke

$$\begin{aligned}
& \int \mathbb{P}(B(x, t, M)) \Lambda(dM) \\
& = \frac{1}{2} \int \mathbb{E} \sum_{(y_1, t_1, M_1), (x_2, t_2, M_2) \in \hat{\eta}_t}^{\neq} \mathbf{1}\{y_1, y_2 \in B^d(0, \tau), G_{\text{ind}}(\{x, y_1, y_2\}, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}))\} \\
& \quad \text{ist eine Komponente in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\}) \text{ und} \\
& \quad y_1 \not\leftrightarrow y_2 \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_t \cup \{(x, t, M)\})\} \Lambda(dM)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^2}{2} \int_{B^d(0, \tau)^2} \varphi(x - y_1) \varphi(x - y_2) \bar{\varphi}(y_1 - y_2) \\
&\quad \times \exp \left(t \int (\bar{\varphi}(x - z) \bar{\varphi}(y_1 - z) \bar{\varphi}(y_2 - x) - 1) dz \right) d(y_1, y_2),
\end{aligned}$$

womit wir

$$\begin{aligned}
\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau)) &\geq \frac{(1-s)s^2}{8} \int_{B^d(0, \tau)^3} \varphi(x - y_1) \varphi(x - y_2) \bar{\varphi}(y_1 - y_2) \\
&\quad \times \exp \left(\int (\bar{\varphi}(x - z) \bar{\varphi}(y_1 - z) \bar{\varphi}(y_2 - x) - 1) dz \right) d(x, y_1, y_2)
\end{aligned}$$

erhalten. Mit der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes folgt weiter

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau))}{\lambda_d(B^d(0, \tau))} \\
&\geq \frac{(1-s)s^2}{8} \int \varphi(y_1) \varphi(y_2) \bar{\varphi}(y_1 - y_2) \exp \left(\int [\bar{\varphi}(z) \bar{\varphi}(y_1 - z) \bar{\varphi}(y_2 - z) - 1] dz \right) d(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Zunächst lässt sich durch Ausmultiplizieren leicht feststellen, dass das Integral in der Exponentialfunktion im vorangegangenen Ausdruck endlich ist (größer als $-\infty$), weswegen der entsprechende Ausdruck größer als Null ist. Abschließend zeigen wir

$$\int \varphi(y_1) \varphi(y_2) \bar{\varphi}(y_1 - y_2) d(y_1, y_2) > 0, \tag{4.3.9}$$

was den Beweis des Lemmas beendet. Gilt $\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d : \varphi(y) = 1\}) = 0$, so ist obige Behauptung offensichtlich korrekt. Andernfalls existiert ein $\tau_0 \in (0, \infty)$ mit

$$0 < \lambda_d(\{y \in B^d(0, \tau_0)^c : \varphi(y) = 1\}) < \frac{1}{2} \lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d : \varphi(y) = 1\}).$$

Weiterhin gilt für $x \in B^d(0, \tau_0)^c$

$$\begin{aligned}
\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d : \varphi(y) = 1\} \setminus B^d(x, \tau_0)) &\geq \lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d : \varphi(y) = 1 \text{ und } \langle x, y \rangle \leq 0\}) \\
&= \frac{1}{2} \lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d : \varphi(y) = 1\}),
\end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^d bezeichnet. Wir erhalten insgesamt

$$\lambda_d^2(\{(y_1, y_2) \in B^d(0, \tau_0)^c \times \mathbb{R}^d : \varphi(y_1) = 1, \varphi(y_2) = 1 \text{ und } \varphi(y_1 - y_2) \neq 1\}) > 0,$$

was (4.3.9) zeigt und damit den Beweis des Lemmas beendet. \square

Mit den hier gezeigten Aussagen sind wir in der Lage den Beweis von Theorem 4.3.1 zu führen.

Beweis von Theorem 4.3.1. Für $m \in \mathbb{N}$ liefert Korollar 4.3.3 (beziehungsweise Theorem 4.1.4)

$$\sigma_{\varphi, \leq m} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}{\lambda_d(A)} = \sum_{i,j=1}^m \sigma_{\varphi, \varphi}^{(i,j)}.$$

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |\sigma_{\varphi, \leq m} - \sigma_{\varphi, \leq n}| \\ &= \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} |\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)| \\ &= \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} \left(\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)} + \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)} \right) \left| \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)} - \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)} \right| \end{aligned}$$

Weiter folgt für $A \in \mathcal{K}^d$ mit der (umgekehrten) Dreiecksungleichung in $L^2(\mathbb{P})$

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)} - \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)} \right| \\ &= \left| \sqrt{\mathbb{E}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \mathbb{E} \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A))^2} - \sqrt{\mathbb{E}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A) - \mathbb{E} \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))^2} \right| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A) - \mathbb{E}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)))^2} \\ &= \sqrt{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))}. \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Mit dieser Abschätzung und Lemma 4.3.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} & |\sigma_{\varphi, \leq m} - \sigma_{\varphi, \leq n}| \\ &\leq \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} \left(\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)} + \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A)} \right) \sqrt{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))} \\ &\leq 2\sqrt{\tilde{C}_\varphi C_\varphi q_{\varphi, m}^{1/4}}. \end{aligned}$$

Wegen $q_{\varphi, m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ folgt, dass $(\sigma_{\varphi, \leq m})_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Somit existiert der endliche Grenzwert

$$\tilde{\sigma}_\varphi := \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{\varphi, \leq m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^m \sigma_{\varphi, \varphi}^{(i,j)}.$$

Wie in (4.3.10) erhalten wir für $m \in \mathbb{N}$ mit der (umgekehrten) Dreiecksungleichung in $L^2(\mathbb{P})$ und Lemma 4.3.4

$$\begin{aligned} \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}} \left| \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_\varphi(A)} - \sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)} \right| &\leq \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}} \sqrt{\text{Var}(\tilde{\eta}_\varphi(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A))} \\ &= \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)}{\lambda_d(A)}} \leq \sqrt{C_\varphi} q_{\varphi, m}^{1/4}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_d(A)} \text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) = \sigma_{\varphi, \leq m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

und $q_{\varphi,m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ folgt, dass der Grenzwert $\sigma_{\varphi,\varphi}$ aus (4.3.1) existiert und mit $\tilde{\sigma}_\varphi$ übereinstimmt. Mit Lemma 4.3.5 erhalten wir schließlich $\sigma_{\varphi,\varphi} > 0$.

Es sei $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion, deren Lipschitz-Konstante maximal 1 ist. Für $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{K}^d$ liefert die Dreiecksungleichung

$$\left| \mathbb{E}h\left(\frac{\bar{\eta}_\varphi(A) - \mathbb{E}\bar{\eta}_\varphi(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}}\right) - \mathbb{E}h(N) \right| \leq U_1 + U_2 + U_3 \quad (4.3.11)$$

mit

$$\begin{aligned} U_1 &:= \left| \mathbb{E}h\left(\frac{\bar{\eta}_\varphi(A) - \mathbb{E}\bar{\eta}_\varphi(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}}\right) - \mathbb{E}h\left(\frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}}\right) \right|, \\ U_2 &:= \left| \mathbb{E}h\left(\frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}}\right) - \mathbb{E}h\left(\frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}}\right) \right|, \\ U_3 &:= \left| \mathbb{E}h\left(\frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}}\right) - \mathbb{E}h(N) \right|. \end{aligned}$$

Wegen Korollar 4.3.3 gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$d_1\left(\frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}}, N\right) \rightarrow 0 \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty$$

und damit $U_3 \rightarrow 0$ für $r(A) \rightarrow \infty$. Unter Verwendung der Lipschitz-Stetigkeit von h , der Dreiecksungleichung, der Ungleichung von Jensen und Lemma 4.3.4 erhalten wir für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} U_1 &\leq 2 \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}|\bar{\eta}_\varphi(A) - \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)|}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}} \leq 2 \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\text{Var}(\bar{\eta}_\varphi(A) - \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A))}}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}} \\ &= 2 \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,> m}(A)}}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}} \leq \frac{2\sqrt{C_\varphi}}{\sqrt{\sigma_{\varphi,\varphi}}} q_{\varphi,m}^{1/4}. \end{aligned}$$

Da diese obere Schranke für $m \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, folgt $U_1 \rightarrow 0$ für $r(A) \rightarrow \infty$. Abermals erhalten wir mit der Lipschitz-Stetigkeit von h und der Ungleichung von Jensen für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} U_2 \leq \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_\varphi(A)}} \right| \mathbb{E} \left| \frac{\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A) - \mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi,\leq m}(A)}} \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \left| 1 - \frac{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_{\varphi}(A)}} \right| \left| \frac{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}}{\sqrt{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}} \right| \\
&= \left| 1 - \frac{\sqrt{\sigma_{\varphi, \leq m}}}{\sqrt{\sigma_{\varphi, \varphi}}} \right|.
\end{aligned}$$

Wegen $\sigma_{\varphi, \leq m} \rightarrow \tilde{\sigma}_{\varphi} = \sigma_{\varphi, \varphi}$ für $m \rightarrow \infty$ gilt $U_2 \rightarrow 0$ für $r(A) \rightarrow \infty$. Insgesamt folgt mit (4.3.11)

$$d_1 \left(\frac{\bar{\eta}_{\varphi}(A) - \mathbb{E} \bar{\eta}_{\varphi}(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_{\varphi}(A)}}, N \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty,$$

was den Beweis des Theorems beendet. \square

4.4. KNOTENGRADE

In diesem Abschnitt werden wir uns im klassischen RCM mit der Anzahl aller Knoten mit einem vorgegebenen Knotengrad beschäftigen, die in ein kompaktes und konvexes Beobachtungsfenster fallen. Wie in den vorangegangenen Abschnitten sei dazu η ein stationärer Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß $\lambda = \beta \lambda_d$ (für ein $\beta > 0$) und φ eine Verbindungsfunktion, für die wir stets (4.0.1) voraussetzen, also $m_{\varphi} \in (0, \infty)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und für messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir die Zählgröße

$$K_n(A) := \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\text{deg}(y, \Gamma_{\varphi}(\eta)) = n\}.$$

Für $n = 0$ würde sich in obiger Definition die Anzahl der isolierten Punkte im Modell $\Gamma_{\varphi}(\eta)$, welche in der Menge A liegen, ergeben. Da jeder isolierte Punkt insbesondere eine Komponente des Modells ist, können Aussagen zu den isolierten Punkten in den vorangegangenen Abschnitten gefunden werden. Um im vorliegenden Abschnitt einige Fallunterscheidungen zu vermeiden, schließen wir hier den Fall $n = 0$ explizit aus.

Proposition 4.4.1. *Es gelte (4.0.1). Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{B}_d$*

$$\mathbb{E} K_n(A) = \frac{\beta^{n+1} m_{\varphi}^n e^{-\beta m_{\varphi}}}{n!} \lambda_d(A).$$

Beweis. Mit der Gleichung von Mecke und Proposition 4.0.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} K_n(A) &= \mathbb{E} \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\text{deg}(y, \Gamma_{\varphi}(\eta)) = n\} \\
&= \int \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbb{P}(\text{deg}(y, \Gamma_{\varphi}(\eta_x)) = n) \lambda(dy) \\
&= \frac{\beta^n m_{\varphi}^n}{n!} e^{-\beta m_{\varphi}} \int \mathbf{1}\{y \in A\} \lambda(dy) \\
&= \frac{\beta^{n+1} m_{\varphi}^n}{n!} e^{-\beta m_{\varphi}} \lambda_d(A),
\end{aligned}$$

was die Aussage der Proposition zeigt. \square

Theorem 4.4.2. *Es gelte (4.0.1). Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\beta m_\varphi \neq n+1$. Dann existieren positive Konstanten $c > 0$ und τ , welche nur von β , n und φ abhängen, so dass*

$$\text{Var } K_n(A) \geq c \lambda_d(A)$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Beweis. Die Strategie des Beweises besteht in der Anwendung von Theorem 3.4.5. Es seien $A \in \mathcal{K}^d$ und $f: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d)^{[2]} \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ ein Repräsentant von $K_n(A)$. Weiter sei im Folgenden $x \in A$. Dann gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} f(\xi_x) - f(\xi) &= \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta)) = n-1\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \\ &\quad + \mathbf{1}\{\deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = n\} \\ &\quad - \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta)) = n\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\}. \end{aligned}$$

Mit der Gleichung von Mecke und Proposition 4.0.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta)) = n\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \\ &= \beta \int \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbb{P}(\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) = n) \varphi(x-y) \, dy \\ &= \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} e^{-\beta m_\varphi} \int_A \varphi(x-y) \, dy, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \sum_{y \in \eta} \mathbf{1}\{y \in A\} \mathbf{1}\{\deg(y, \Gamma_\varphi(\eta)) = n-1\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} \\ &= \frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta m_\varphi} \int_A \varphi(x-y) \, dy. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|\mathbb{E}[f(\xi_x) - f(\xi)]| = \left| \left(\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} \right) e^{-\beta m_\varphi} \int_A \varphi(x-y) \, dy + \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!} e^{-\beta m_\varphi} \right|. \quad (4.4.1)$$

Zunächst sei $\beta m_\varphi \leq n$ angenommen. In diesem Fall gilt

$$\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} \geq 0.$$

Somit ist die rechte Seite von (4.4.1) nach unten durch

$$c_1 := \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!} e^{-\beta m_\varphi} > 0$$

beschränkt. Mit Theorem 3.4.5 und der Wahl $U := A \times [0, 1]$ erhalten wir

$$\text{Var } K_n(A) \geq \frac{\beta c_1^2}{64} (\lambda_d \otimes (\lambda_1|_{[0,1]}))(U) = \frac{\beta c_1^2}{64} \lambda_d(A).$$

Im Fall $n < \beta m_\varphi < n + 1$ gelten

$$\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} < 0 \quad (4.4.2)$$

und

$$\left| m_\varphi \left(\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} \right) \right| < \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!}.$$

Wegen

$$0 \leq \int_A \varphi(x-y) dy \leq m_\varphi$$

ist damit die rechte Seite von (4.4.1) nach unten durch

$$c_2 := \frac{\beta^n m_\varphi^n (n+1) - \beta^{n+1} m_\varphi^{n+1}}{n!} e^{-\beta m_\varphi} > 0$$

beschränkt. Wieder folgt mit Theorem 3.4.5 und der Wahl $U := A \times [0, 1]$

$$\text{Var } K_n(A) \geq \frac{\beta c_2^2}{64} (\lambda_d \otimes (\lambda_1|_{[0,1]}))(U) = \frac{\beta c_2^2}{64} \lambda_d(A).$$

Abschließend sei $n+1 < \beta m_\varphi$ angenommen. Auch in diesem Fall gilt die Ungleichung (4.4.2). Außerdem gelten

$$\left| m_\varphi \left(\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} \right) \right| > \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!}.$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B^d(0,r)} \varphi(z) dz = m_\varphi,$$

womit insgesamt die Existenz von $R > 0$ folgt mit der Eigenschaft

$$c_3 := e^{-\beta m_\varphi} \left[\left(\frac{\beta^n m_\varphi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\beta^{n+1} m_\varphi^n}{n!} \right) \int_{B^d(0,R)} \varphi(z) dz + \frac{\beta^n m_\varphi^n}{n!} \right] < 0. \quad (4.4.3)$$

Unter der Annahme $r(A) > R$ definieren wir $\tilde{U} := \{y \in A : d(y, \partial A) > R\}$. Für $x \in \tilde{U}$ gilt

$$\int_A \varphi(x-y) dy \geq \int_{B^d(0,R)} \varphi(z) dz.$$

Folglich erhalten wir mit (4.4.3) und (4.4.1)

$$|\mathbb{E}[f(\xi_x) - f(\xi)]| \geq |c_3| > 0.$$

In Anlehnung an die Argumentation im Beweis von Theorem 4.1.1 erhalten wir mit [21, (3.19)]

und der Formel von Steiner (siehe Abschnitt 2.4)

$$\begin{aligned}
\lambda_d(\tilde{U}) &= \lambda_d(A) - \lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) \leq R\}) \\
&\geq \lambda_d(A) - [\lambda_d(A + B^d(0, R)) - \lambda_d(A)] \\
&= 2\lambda_d(A) - \sum_{i=0}^d R^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(A) \\
&= \lambda_d(A) - \sum_{i=0}^{d-1} R^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(A),
\end{aligned}$$

wobei V_0, \dots, V_d die inneren Volumina bezeichnen. Weiter folgt mit [21, Lemma 3.7] die Abschätzung

$$\frac{\lambda_d(\tilde{U})}{\lambda_d(A)} \geq 1 - \sum_{i=0}^{d-1} R^{d-i} \frac{2^d - 1}{r(A)^{d-i}}.$$

Ist folglich der Inradius von A hinreichend groß, so gilt $\lambda_d(\tilde{U}) \geq \frac{1}{2}\lambda_d(A)$. Unter dieser Annahme liefert Theorem 3.4.5 mit der Wahl $U := \tilde{U} \times [0, 1]$

$$\text{Var } K_n(A) \geq \frac{\beta|c_3|^2}{64} (\lambda_d \otimes (\lambda_1|_{[0,1]}))(U) \geq \frac{\beta|c_3|^2}{128} \lambda_d(A),$$

was den Beweis beendet. □

Bemerkung 4.4.3. Aus dem Beweis von Theorem 4.4.2 geht hervor, dass die Aussage des Theorems unter der strengeren Voraussetzung $\beta m_\varphi < n + 1$ für alle $A \in \mathcal{K}^d$ gilt, unabhängig von der Größe des Inradius. Lediglich im Fall $\beta m_\varphi > n + 1$ muss angenommen werden, dass der Inradius von A hinreichend groß ist.

Auf die Bedingung $\beta m_\varphi \neq n + 1$ kann mit den Argumenten des hier präsentierten Beweises nicht verzichtet werden. Denn gelten $\beta m_\varphi = n + 1$ und

$$\int_A \varphi(x - y) dy = m_\varphi$$

für ein $x \in A$, so folgt mit (4.4.1) $|\mathbb{E}[f(\xi_x) - f(\xi)]| = 0$, was eine Anwendung von Theorem 3.4.5 ausschließt. In dieser Situation lässt das Hinzufügen des deterministischen Punktes x zum Modell $\Gamma_\varphi(\eta)$ im Mittel genauso viele Knoten mit Grad n entstehen, wie es bestehende Knoten mit Grad n entfernt.

Mit der Varianzabschätzung aus Theorem 4.4.2 können wir einen quantitativen zentralen Grenzwertsatz für $K_n(A)$, $A \in \mathcal{K}^d$, $n \in \mathbb{N}$, formulieren. Dieser beruht auf der selben Argumentation wie das Theorem 4.2.4.

Theorem 4.4.4. *Es gelte (4.2.1). Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\beta m_\varphi \neq n + 1$. Dann existieren positive Konstanten $C > 0$ und τ , welche nur von β , n , $\tilde{\varphi}$ und φ abhängen, so dass*

$$d_K\left(\frac{K_n(A) - \mathbb{E}K_n(A)}{\sqrt{\text{Var } K_n(A)}}, N\right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt, wobei N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Diese Aussage gilt in identischer Formulierung, wenn die Kolmogorov-Distanz d_K durch die Wasserstein-Distanz d_1 ersetzt wird.

Wie im Fall von Theorem 4.2.4 bereiten wir den Beweis von Theorem 4.4.4 durch einige Lemmata vor.

Lemma 4.4.5. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten für alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und alle Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ \mathbb{P} -fast sicher*

$$|\Delta_x K_n(A)| \leq \sum_{z \in \eta} \mathbf{1}\{z \in A\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_x)\} + \mathbf{1}\{x \in A\}, \quad (4.4.4)$$

$$|\Delta_{x,y}^2 K_n(A)| \leq 4 \sum_{z \in \eta} \mathbf{1}\{z \in A\} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\} \\ + (\mathbf{1}\{x \in A\} + \mathbf{1}\{y \in A\}) \mathbf{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\}. \quad (4.4.5)$$

Beweis. Die Abschätzung (4.4.4) ergibt sich sofort, da jede Kante zwischen x und einem Punkt aus $\eta \cap A$ die Anzahl der Punkte mit Grad n in A um eins erhöhen oder verringern kann. Da auch x in A liegen und Grad n besitzen kann, wird der Indikator $\mathbf{1}\{x \in A\}$ addiert.

Für den Beweis der Ungleichung (4.4.5) sei f ein Repräsentant von $K_n(A)$. Wir definieren für Punkte $v, w \in \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die folgenden zufälligen Mengen

$$B_k(v) := \{z \in \eta \cap A : z \leftrightarrow v \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_v), \deg(z, \Gamma_\varphi(\eta)) = k\}, \\ C_k(v, w) := \{z \in \eta \cap A : z \leftrightarrow v \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_v), z \not\leftrightarrow w \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_w), \deg(z, \Gamma_\varphi(\eta)) = k\}, \\ \tilde{C}_k(v, w) := \{z \in \eta \cap A : z \leftrightarrow v \text{ und } z \leftrightarrow w \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{v,w}), \deg(z, \Gamma_\varphi(\eta)) = k\}$$

und $\tilde{C}_{-1}(v, w) := \emptyset$. Mit diesen Definitionen gilt $C_k(v, w) \subset B_k(v)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^d$. Da A nach Voraussetzung kompakt ist, sind obige Mengen \mathbb{P} -fast sicher endlich.

Weiter erhalten wir

$$f(\xi_{x,y}) = f(\xi) - |B_n(x) \cup B_n(y)| + |C_{n-1}(x, y)| + |C_{n-1}(y, x)| + |\tilde{C}_{n-2}(x, y)| \\ + \mathbf{1}\{x \in A, \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) = n\} + \mathbf{1}\{y \in A, \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) = n\}, \\ f(\xi_x) = f(\xi) - |B_n(x)| + |B_{n-1}(x)| + \mathbf{1}\{x \in A, \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = n\}, \\ f(\xi_y) = f(\xi) - |B_n(y)| + |B_{n-1}(y)| + \mathbf{1}\{y \in A, \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) = n\},$$

jeweils \mathbb{P} -fast sicher. Es folgt \mathbb{P} -fast sicher

$$\Delta_{x,y} K_n(A) = f(\xi_{x,y}) - f(\xi_x) - f(\xi_y) + f(\xi) \\ = |B_n(x)| + |B_n(y)| - |B_n(x) \cup B_n(y)| + |C_{n-1}(x, y)| - |B_{n-1}(x)| \\ + |C_{n-1}(y, x)| - |B_{n-1}(y)| + |\tilde{C}_{n-2}(x, y)| \\ + \mathbf{1}\{x \in A, \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) = n\} - \mathbf{1}\{x \in A, \deg(x, \Gamma_\varphi(\eta_x)) = n\} \\ + \mathbf{1}\{y \in A, \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})) = n\} - \mathbf{1}\{y \in A, \deg(y, \Gamma_\varphi(\eta_y)) = n\},$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\Delta_{x,y}K_n(A)| &\leq |B_n(x) \cap B_n(y)| + |B_{n-1}(x) \setminus C_{n-1}(x,y)| \\
&\quad + |B_{n-1}(y) \setminus C_{n-1}(y,x)| + |\tilde{C}_{n-2}(x,y)| \\
&\quad + \mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y}), x \in A\} + \mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y}), y \in A\} \\
&\leq |\{z \in \eta \cap A : x \leftrightarrow z \text{ und } y \leftrightarrow z \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y})\}| \\
&\quad + \mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y}), x \in A\} + \mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{x,y}), y \in A\}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Ungleichung (4.4.5) und beendet den Beweis. \square

Die in Lemma 4.4.5 gezeigten Abschätzungen für die Differenzenoperatoren sind, bis auf eine positive Konstante, nach oben durch die Abschätzungen aus Lemma 4.2.8 beschränkt. Somit gilt Lemma 4.2.9 nahezu unverändert auch in der hier betrachteten Situation.

Lemma 4.4.6. *Es gelte (4.2.1). Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$, welche nur von $\beta, n, \tilde{\varphi}$ und φ abhängen, so dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ die folgenden Ungleichungen gelten*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Delta_x K_n(A))^4 &\leq C_1 \tilde{\varphi}(d(x, A))^{2/3}, \\
\mathbb{E}(\Delta_x K_n(A))^2 (\Delta_y K_n(A))^2 &\leq C_2 (\tilde{\varphi}(d(x, A))^{2/3} + \tilde{\varphi}(d(y, A))^{2/3}), \\
\mathbb{E}(\Delta_{x,y}^2 K_n(A))^4 &\leq C_3 (\tilde{\varphi}(d(x, A)/2)^{2/3} + \tilde{\varphi}(d(y, A)/2)^{2/3}) \tilde{\varphi}(|x - y|/2)^{2/3}, \\
\mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 K_n(A))^2 (\Delta_{y,z}^2 K_n(A))^2 &\leq C_4 (\tilde{\varphi}(d(x, A)/2)^{2/3} + \tilde{\varphi}(d(y, A)/2)^{2/3} + \tilde{\varphi}(d(z, A)/2)^{2/3}), \\
\mathbb{E}(\Delta_{x,z}^2 K_n(A))^2 (\Delta_{y,z}^2 K_n(A))^2 &\leq C_5 (\tilde{\varphi}(|x - y|/3)^{2/3} + \tilde{\varphi}(|y - z|/3)^{2/3}) \tilde{\varphi}(|x - z|/3)^{2/3}.
\end{aligned}$$

Beweis von Theorem 4.4.4. Der Beweis kann analog zum Beweis von Theorem 4.2.4 geführt werden. Dabei kommen die Varianzabschätzung aus Theorem 4.4.2 und die Abschätzungen der Differenzenoperatoren aus Lemma 4.4.6 zum Einsatz. \square

DAS MARKIERTE RCM

Das hier untersuchte markierte RCM beruht auf einem stationären Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d , dessen Punkte mit unabhängigen Marken aus $[0, \infty)$ versehen sind. Die Verbindungswahrscheinlichkeit für zwei gegebene Punkte des Prozesses hängt einerseits von der räumlichen Distanz der Ortskoordinaten der Punkte (in \mathbb{R}^d) und andererseits von den Marken der beiden beteiligten Punkte ab.

Zur eigentlichen Definition des Modells sei η ein Poisson-Prozess auf $\mathbf{X} := \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß $\lambda := \beta \lambda_d \otimes \mathbb{V}$, wobei \mathbb{V} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, \infty)$ ist und $\beta > 0$ angenommen sei. Damit ist η eine unabhängige \mathbb{V} -Markierung eines stationären Poisson-Prozesses in \mathbb{R}^d mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d$, siehe [28, Proposition 6.16] und [28, Theorem 5.6]. Als Relation \prec auf \mathbf{X} verwenden wir die lexikographische Ordnung in der ersten (räumlichen) Komponente der Punkte. Um die Verbindungsfunktion

$$\varphi: (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^2 \rightarrow [0, 1]$$

definieren zu können, seien \mathbb{W} ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} , W eine Zufallsvariable in \mathbb{R} mit Verteilung \mathbb{W} und

$$g: [0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$$

eine messbare Funktion, welche symmetrisch und monoton wachsend in den ersten beiden Argumenten ist. Wir definieren

$$\varphi((x, r), (y, s)) := \mathbb{P}(|x - y| \leq g(r, s, W)), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty). \quad (5.0.1)$$

Damit fällt die Verbindungswahrscheinlichkeit für zwei Punkte im (räumlichen) Abstand der Punkte. Weiterhin wächst die Wahrscheinlichkeit einer Verbindung in der Größe der Marken der beteiligten Punkte. Die Verteilung \mathbb{W} dient dazu, bei gegebenen Punkten und Marken den Zufalls ins Spiel zu bringen und wird nur in Beispielen weiter konkretisiert. Allerdings werden an den meisten Stellen Momentenbedingungen nötig sein, welche die Verteilungen \mathbb{V} und \mathbb{W} und die Funktion g erfüllen müssen. Um den Zusammenhang mit der Verbindungsfunktion herauszustellen, schreiben wir zukünftig g_φ anstelle von g .

Das so erhaltene RCM $\Gamma_\varphi(\eta)$ nennen wir *markiertes RCM*. Damit gewährleistet ist, dass in diesem markierten Modell überhaupt Kanten auftreten, muss mit Blick auf (5.0.1)

$$0 < \iint g_\varphi(r, s, w) \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}^2(d(r, s))$$

vorausgesetzt werden. Um triviale Modelle zu vermeiden, gelte diese generelle Annahme ohne weitere Erwähnung für das gesamte Kapitel.

Das hier definierte markierte RCM beinhaltet das klassische RCM mit einer Verbindungsfunktion, welche nur vom Abstand der beteiligten Punkte abhängt und in diesem fällt, als Spezialfall. Außerdem umfasst es auch den zufälligen Graphen, welcher aus dem (sphärischen) Booleschen Modell gewonnen werden kann. Dabei werden die Marken der Punkte als Radien und die Ortskoordinaten als Mittelpunkte abgeschlossener Kugeln interpretiert. Zwei Punkte sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die zugehörigen Kugeln schneiden. Zur Einbettung des Booleschen Modells (als zufälligen Graphen) in den hier präsentierten Rahmen wählen wir g_φ als die Summe der ersten beiden Argumente. Sind die Punkte (und Marken) aus η vorgegeben, so sind die Kanten des Booleschen Modells deterministisch. Folglich entfällt hier auch die Abhängigkeit von φ von der Verteilung \mathbb{W} . Das Boolesche Modell wird ebenfalls in der Einleitung vorgestellt, siehe insbesondere Abbildung 1.4.

Ein weiteres interessantes Beispiel für ein markiertes RCM ist in [9] zu finden, welches wir im Folgenden näher untersuchen. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Perkolationsmodells aus [7]. Weitere Eigenschaften dieses Modells werden auch in [3] beleuchtet.

Beispiel 5.0.1. Das markierte RCM in [9] verwendet die Verbindungsfunktion

$$\varphi((x, r), (y, s)) := 1 - \exp\left(-\alpha_1 \frac{rs}{|x - y|^{\alpha_2}}\right), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$$

mit positiven Konstanten $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Dabei lässt die Verbindungsfunktion prinzipiell auch beliebig lange Kanten zwischen Punkten zu, wenngleich deren Wahrscheinlichkeit exponentiell im Abstand der Punkte fällt. Die hier vorgeschlagene Verbindungsfunktion kann in den Rahmen unseres Modells eingebettet werden. Dazu wählen wir

$$g_\varphi(r, s, w) := \left(\frac{rs}{w}\right)^{1/\alpha_2}, \quad r, s \in [0, \infty), w > 0.$$

Weiter besitze die Zufallsvariable W eine Exponentialverteilung mit Parameter α_1 , das heißt

$\mathbb{W} = \text{Exp}(\alpha_1)$. Dann gilt

$$\varphi((x, r), (y, s)) = \mathbb{P}(|x - y| \leq g_\varphi(r, s, W)), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty).$$

Bemerkung 5.0.2. Die Annahmen an die Verbindungsfunktion φ (siehe (5.0.1)) sind keine starken, beziehungsweise zu erwartende Einschränkungen der Allgemeinheit. Die Abhängigkeit der Verbindungsfunktion vom Abstand der beteiligten Punkte und die Monotonie im Abstand sind uns bereits im unmarkierten Fall begegnet (siehe (4.2.1)) und waren dort aus technischen Gründen erforderlich. Daher ist es nicht verwunderlich, dass die Verbindungsfunktion auch im markierten Fall diese Eigenschaften aufweisen muss. Da die Verbindungsfunktion außerdem Wahrscheinlichkeiten angibt, ist es naheliegend anzunehmen, dass für gegebene $r, s \in [0, \infty)$

$$\varphi((x, r), (y, s)) = \mathbb{P}(|x - y| \leq Z), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

gilt, wobei Z eine geeignete Zufallsvariable ist, deren Verteilung von r und s abhängt. Die von uns geforderte Darstellung mit Hilfe der Funktion g_φ (siehe (5.0.1)) liefert einen messbaren Zusammenhang zwischen Z und den Marken der Punkte. Weiterhin ermöglicht sie eine einfache Integration der Verbindungsfunktion über die Positionen der beteiligten Punkte. Dabei ergeben sich d -te Potenzen von g_φ , die mit den anderen Eigenschaften der Funktion g_φ weiter abgeschätzt werden können.

Die Symmetrie von g_φ ist der Tatsache geschuldet, dass auch die Verbindungsfunktion im allgemeinen RCM als symmetrisch angenommen wird (vergleiche Abschnitt 3.1). Da die Marke eines Punktes im markierten RCM alle potentiellen Verbindungen zu anderen Knoten beeinflusst, büßen die Verbindungswahrscheinlichkeiten, im Vergleich zum unmarkierten Modell, an Unabhängigkeit ein. Die Monotonie von g_φ (in den ersten beiden Argumenten) hilft bei den daraus resultierenden technischen Schwierigkeiten. Außerdem ist die Monotonie der Verbindungswahrscheinlichkeiten in den Marken der Punkte eine Eigenschaft, welche viele markierte Modelle besitzen, allen voran das Boolesche Modell. Sie ist aber beispielsweise auch im markierten RCM anzutreffen, welches in [9] betrachtet wird (siehe auch Beispiel 5.0.1).

Schließlich merken wir an, dass die hier genannten Voraussetzungen an die Verbindungsfunktion in allen Aussagen dieses Kapitels abgeschwächt werden können. Tatsächlich genügt es anzunehmen, dass die Verbindungsfunktion vom Verbindungsvektor der Positionen der Punkte und deren Marken abhängt und, dass die Verbindungsfunktion nach oben durch eine Verbindungsfunktion der Form (5.0.1) beschränkt ist. Die eventuellen weiteren Voraussetzungen aus den folgenden Aussagen sind dann an die obere Schranke der Verbindungsfunktion zu stellen. Dies geht Hand in Hand mit den Forderungen im unmarkierten Fall in (4.2.1). Wir verzichten hier jedoch bewusst auf diese Verallgemeinerung, um die technischen Details des markierten Modells nicht weiter zu vergrößern.

Wie die nachfolgende Proposition zeigt, kann durch eine Momentenbedingung an g_φ gewährleistet werden, dass die erwartete Anzahl von Nachbarn eines deterministischen Punktes mit zufälliger Marke endlich ist.

Proposition 5.0.3. *Es sei R eine \mathbb{V} -verteilte Zufallsvariable, unabhängig von η . Unter der Voraussetzung*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^d \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}(dr) < \infty \quad (5.0.2)$$

gilt

$$\mathbb{E} \deg((0, R), \Gamma_\varphi(\eta_{(0,R)})) < \infty.$$

Beweis. Bedingte Erwartungswertbildung (gegeben η und R) und die Formel von Campbell (Theorem 2.1.2) liefern

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \deg((0, R), \Gamma_\varphi(\eta_{(0,R)})) &= \mathbb{E} \sum_{(x,r) \in \eta} \mathbf{1}\{(0, R) \leftrightarrow (x, r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(0,R)})\} \\ &= \mathbb{E} \sum_{(x,r) \in \eta} \varphi((0, R), (x, r)) \\ &= \int \mathbb{E} \varphi((0, R), (x, r)) \lambda(d(x, r)). \end{aligned}$$

Mit der Definition der Verbindungsfunktion, Polarkoordinaten und dem Satz von Fubini folgt weiter

$$\begin{aligned} \int \mathbb{E} \varphi((0, R), (x, r)) \lambda(d(x, r)) &= \iiint \mathbf{1}\{|x| \leq g_\varphi(r, s, w)\} \mathbb{W}(dw) \lambda(d(x, r)) \mathbb{V}(ds) \\ &= \beta \kappa_d \iint g_\varphi(r, s, w)^d \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}^2(d(r, s)) \\ &= \beta \kappa_d \iint (\mathbf{1}\{r \leq s\} + \mathbf{1}\{r > s\}) g_\varphi(r, s, w)^d \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}^2(d(r, s)) \\ &\leq 2\beta \kappa_d \iint g_\varphi(r, r, w)^d \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}(dr). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die rechte Seite der vorangegangenen Ungleichung endlich, was den Beweis der Proposition beendet. \square

Voraussetzungen der Form (5.0.2) werden in den folgenden Abschnitten häufig auftreten. Aufgrund der Symmetrie und Monotonie von g_φ lässt sich dabei üblicherweise mit einer Fallunterscheidung hinsichtlich der Größe der beteiligten Marken argumentieren, analog zum vorangegangenen Beweis. Tatsächlich würde in Proposition auch die Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, s, w)^d \mathbb{W}(dw) \mathbb{V}^2(d(r, s)) < \infty$$

genügen.

Beispiel 5.0.4 (Fortsetzung von Beispiel 5.0.1). In späteren Abschnitten werden Voraussetzungen der Form

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^\gamma \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

mit $\gamma > 0$ notwendig. Im Rahmen des in Beispiel 5.0.1 vorgestellten Modells erhalten wir

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^\gamma \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) = \int r^{2\gamma/\alpha_2} \mathbb{V}(dr) \int_0^\infty \alpha_1 \frac{e^{-\alpha_1 w}}{w^{\gamma/\alpha_2}} dw.$$

Dabei gilt

$$\alpha_1 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_1 w}}{w^{\gamma/\alpha_2}} dw < \infty,$$

falls $\alpha_2 > \gamma$ und damit

$$\int r^{2\gamma/\alpha_2} \mathbb{V}(dr) < \infty,$$

falls das zweite Moment der Verteilung \mathbb{V} endlich ist.

Insgesamt genügt dieses Modell den Voraussetzungen unserer späteren Aussagen, falls α_2 und die Verteilung \mathbb{V} geeignet gewählt werden.

5.1. ASYMPTOTISCHE KOVARIANZEN

Wie auch beim klassischen RCM liegt der Fokus des gesamten Kapitels auf dem Zählen von endlichen Komponenten, wofür wir hier an die Definition des Punktprozesses $\eta_{\varphi,G}$ aus (3.2.1) erinnern. Um die Notation im markierten RCM zu vereinfachen, schreiben wir für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ und einen endlichen zusammenhängenden Graphen G abkürzend

$$\eta_{\varphi,G}(A) := \eta_{\varphi,G}(A \times [0, \infty)) = |\eta_{\varphi,G} \cap (A \times [0, \infty))|.$$

Analog verwenden wir für $k \in \mathbb{N}$ die Schreibweise

$$\eta_{\varphi,k}(A) := \eta_{\varphi,k}(A \times [0, \infty)) = |\eta_{\varphi,k} \cap (A \times [0, \infty))|.$$

Der vorliegende Abschnitt beginnt, in Anlehnung an Abschnitt 4.1, mit Formeln für asymptotische Kovarianzen zwischen zwei markierten RCMen, die auf den selben Punkten, aber unterschiedlichen Verbindungsfunktionen beruhen. Auch hier sind die betrachteten Modelle gekoppelt, da eine Verbindungsfunktion die andere (punktweise) beschränkt (siehe auch die Diskussion vor Proposition 3.2.3).

Theorem 5.1.1. *Es seien $k, l \in \mathbb{N}$, $G \in \mathbf{G}_k$, $H \in \mathbf{G}_l$, ψ eine Verbindungsfunktion mit $\psi \leq \varphi$ und*

$$\vartheta := \max\{\max\deg(G), \max\deg(H)\}$$

der größte maximale Knotengrad von G und H . Es gelte

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{(\vartheta+1)d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty. \quad (5.1.1)$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\sigma_{\varphi,\psi}(G, H) := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\eta_{\varphi,G}(A), \eta_{\psi,H}(A))}{\lambda_d(A)}$$

und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \beta \iint p_{\varphi,G}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) p_{\psi,H}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \\ & \quad \times q_{k,l,\varphi,\psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) \\ & + \mathbb{1}\{k = l\} \beta \iint \exp \left[\beta \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\ & \quad \times \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq H) \\ & \quad \times \mathbb{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))), \end{aligned}$$

wobei $x_1 := 0$ und für $r_1 \in [0, \infty)$ und $(x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$\begin{aligned} q_{k,l,\varphi,\psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) & := \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}((x_i, r_i), (x_j, r_j)) \\ & \quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}((x_j, r_j), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\ & \quad - \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) + \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}((x_j, r_j), (y, r)) - 2 \right) \lambda(d(y, r)) \right]. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis kann größtenteils analog zum Beweis von Theorem 4.1.1 geführt werden. Aus diesem Grund werden hier nur diejenigen Teilschritte näher erläutert, welche von der Argumentation im Beweis von Theorem 4.1.1 abweichen. Wie im genannten Beweis gelte auch hier stets $x_1 := 0 \in \mathbb{R}^d$ und weiter sei $A \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper. Da für zwei Punkte $(y_1, r_1), (y_2, r_2) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ die Verbindungswahrscheinlichkeit $\varphi((y_1, r_1), (y_2, r_2))$ nur von $|y_1 - y_2|$ und den Marken r_1 und r_2 abhängt, erhalten wir wie im Beweis von Theorem 4.1.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \eta_{\varphi,G}(A) \eta_{\psi,H}(A) & = \iint \mathbb{1}\{z \in A, z + x_{k+1} \in A\} p_{\varphi,G}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\ & \quad \times p_{\psi,H}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\varphi}((x_i, r_i), (x_j, r_j)) \\ & \quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) \prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}((x_j, r_j), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\ & \quad \times \lambda(d(z, r_1)) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) \\ & + \mathbb{1}\{k = l\} \iint \mathbb{1}\{z \in A\} \mathbb{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \\ & \quad \times \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{(0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{(0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq H) \\ & \quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \lambda(d(z, r_1)) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\mathbb{E}\eta_{\psi,H}(A) &= \iint \mathbf{1}\{z \in A, z + x_{k+1} \in A\} \\
&\quad \times p_{\varphi,G}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))p_{\psi,H}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{j=k+1}^{k+l} \bar{\psi}((x_j, r_j), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \lambda(d(z, r_1)) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\eta_{\varphi,G}(A), \eta_{\psi,H}(A)) &= \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\eta_{\psi,H}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)\mathbb{E}\eta_{\psi,H}(A) \\
&= \beta \iint \lambda_d(A \cap (A - x_{k+1}))p_{\varphi,G}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\quad \times p_{\psi,H}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \\
&\quad \times q_{k,l,\varphi,\psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) \\
&+ \mathbf{1}\{k = l\} \lambda_d(A) \beta \iint \mathbf{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \\
&\quad \times \mathbb{P}(\Gamma_{\varphi}(\{(0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq G, \Gamma_{\psi}(\{(0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)\}) \simeq H) \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))).
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Zur Vereinfachung setzen wir im Folgenden $\beta = 1$ voraus.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien \mathbf{I}_n und \mathcal{I}_n wie in (4.1.3) und (4.1.4) definiert. Weiter sei für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{I}_n^m := \{I \in \mathcal{I}_n : \text{für alle } i \in [n] \text{ gilt } |\{j \in [n] : (i, j) \in I \text{ oder } (j, i) \in I\}| \leq m\}.$$

Damit enthält für $n, m \in \mathbb{N}$ die Menge \mathcal{I}_n^m die Kantenmengen aller Bäume mit den Knoten $[n]$ und mit maximalem Knotengrad m .

Wir betrachten zunächst das Integral im ersten Summanden der rechten Seite von (5.1.2). Mit Blick auf (4.1.5) zeigen wir die Integrierbarkeit von

$$\begin{aligned}
&p_{\varphi,G}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))p_{\psi,H}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \\
&\quad \times |q_{k,l,\varphi,\psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))|, \\
&\quad r_1 \in [0, \infty), (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty). \tag{5.1.3}
\end{aligned}$$

Wegen $\max \deg(G) \leq \vartheta$ erhalten wir für $(y_1, r_1), \dots, (y_k, r_k) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$p_{\varphi, G}((y_1, r_1), \dots, (y_k, r_k)) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}_k^\vartheta} \prod_{(i,j) \in I} \varphi((y_i, r_i), (y_j, r_j))$$

und analog für $(y_1, r_1), \dots, (y_l, r_l) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$p_{\psi, H}((y_1, r_1), \dots, (y_l, r_l)) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}_l^\vartheta} \prod_{(i,j) \in I} \psi((y_i, r_i), (y_j, r_j)) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}_l^\vartheta} \prod_{(i,j) \in I} \varphi((y_i, r_i), (y_j, r_j)).$$

Wie im Beweis von Theorem 4.1.1 gilt für $r_1 \in [0, \infty)$ und $(x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$\begin{aligned} & |q_{k,l,\varphi,\psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))| \\ & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi((x_i, r_i), (x_j, r_j)) \\ & \quad + \int \left(\sum_{i=1}^k \varphi((y, r), (x_i, r_i)) \right) \left(\sum_{j=k+1}^{k+l} \varphi((y, r), (x_j, r_j)) \right) \lambda(d(y, r)). \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit von (5.1.3) folgt, falls für alle $i \in [k]$, $j \in [k+l] \setminus [k]$, $I \in \mathcal{I}_k^\vartheta$ und $J \in \mathcal{I}_l^\vartheta$

$$\begin{aligned} & \iint \varphi((x_i, r_i), (x_j, r_j)) \prod_{(m,n) \in I \cup J^*} \varphi((x_m, r_m), (x_n, r_n)) \\ & \quad \times \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) < \infty \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

und

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi((y, r), (x_i, r_i)) \varphi((y, r), (x_j, r_j)) \prod_{(m,n) \in I \cup J^*} \varphi((x_m, r_m), (x_n, r_n)) \\ & \quad \times \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) \lambda(d(y, r)) < \infty \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

gelten, wobei $J^* := \{(j_1 + k, j_2 + k) : (j_1, j_2) \in J\}$. Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \int \varphi((y_1, r_1), (y_2, r_2)) \lambda(d(y_2, r_2)) &= \iint \mathbb{1}\{|y_1 - y_2| \leq g_\varphi(r_1, r_2, w)\} \lambda(d(y_2, r_2)) \mathbb{W}(dw) \\ &= \beta \kappa_d \iint g_\varphi^d(r_1, r_2, w) \mathbb{V}(dr_2) \mathbb{W}(dw), \end{aligned}$$

für $(y_1, r_1) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, folgt für die linke Seite von (5.1.4)

$$\begin{aligned} & \beta^{k+l-1} \kappa_d^{k+l-1} \iiint g_\varphi^d(r_i, r_j, w) \prod_{(m,n) \in I \cup J^*} g_\varphi^d(r_m, r_n, w_{m,n}) \mathbb{V}^{k+l}(d(r_1, \dots, r_{k+l})) \\ & \quad \times \mathbb{W}^{k+l-2}(d((w_{m,n})_{(m,n) \in I \cup J^*})) \mathbb{W}(dw). \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Da der Integrand von (5.1.4) eine Baumstruktur mit maximalem Knotengrad $\vartheta + 1$ beschreibt, taucht jede der Marken r_1, \dots, r_{k+l} im Integranden von (5.1.6) in höchstens $\vartheta + 1$ Faktoren auf.

Mit einer Fallunterscheidung hinsichtlich der Größen der Marken r_1, \dots, r_{k+l} im Integranden von (5.1.6), unter Ausnutzung der Symmetrie und Monotonie von g_φ (in den ersten beiden Argumenten) und mit Verwendung von Lemma 2.1.1 folgt, dass das Integral (5.1.6) unter der Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{(\vartheta+1)d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

endlich ist. Analog kann für das Integral (5.1.5) argumentiert werden. Insgesamt folgt die Integrierbarkeit von (5.1.3).

Da das Integral des zweiten Summanden aus (5.1.2) nach oben durch

$$\iint \sum_{I \in \mathcal{I}_k^\vartheta} \prod_{(i,j) \in I} \varphi((x_i, r_i), (x_j, r_j)) \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)))$$

beschränkt ist, kann die Integrierbarkeit hier in analoger Weise gezeigt werden, was den Beweis beendet. \square

Mit der Bilinearität der Kovarianzfunktion erhalten wir aus Theorem 5.1.1 das nachfolgende Resultat (vergleiche auch Korollar 4.1.3).

Korollar 5.1.2. *Es seien $k, l \in \mathbb{N}$ und ψ eine Verbindungsfunktion mit $\psi \leq \varphi$. Weiter sei $\vartheta := \max\{k, l\}$ und es gelte*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\vartheta d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\sigma_{\varphi, \psi}^{(k, l)} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(\eta_{\varphi, k}(A), \eta_{\psi, l}(A))}{\lambda_d(A)}$$

und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \beta \iint p_{\varphi, k}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) p_{\psi, l}((x_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \\ & \quad \times q_{k, l, \varphi, \psi}(r_1, (x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l})) \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k+l-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_{k+l}, r_{k+l}))) \\ & + \mathbf{1}\{k = l\} \beta \iint p_{\psi, k}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\ & \quad \times \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \mathbb{V}(dr_1) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \end{aligned}$$

mit der in Theorem 5.1.1 definierten Funktion $q_{k, l, \varphi, \psi}$ und $x_1 := 0$.

Analog zur Definition in (4.1.11) sei für $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$

$$S_{\varphi, a, G}(A) := \sum_{i=1}^m a_i \eta_{\varphi, G_i}(A), \quad A \in \mathcal{B}_d \text{ beschränkt.}$$

Der verbleibende Abschnitt ist ganz dem Nachweis der Positivität der asymptotischen Varianz von $S_{\varphi,a,G}$ gewidmet.

Theorem 5.1.3. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Weiter sei*

$$\vartheta := \max\{\max\{\max\deg(G_i) : i \in [m]\}, 2\}$$

und es gelte

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{(\vartheta+1)d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}{\lambda_d(A)} = \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j) > 0.$$

Mit Theorem 5.1.3 erhalten wir direkt nachfolgendes Korollar.

Korollar 5.1.4. (a) *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m, \neq}$ und*

$$\vartheta := \max\{\max\{\max\deg(G_i) : i \in [m]\}, 2\},$$

und es gelte

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{(\vartheta+1)d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann ist die Matrix $(\sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j))_{i,j \in [m]}$ positiv definit.

(b) *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden und*

$$\vartheta := \max\{\max\{k_i : i \in [m]\}, 3\}$$

und es gelte

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{\vartheta d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann ist die Matrix $(\sigma_{\varphi,\varphi}^{(k_i, k_j)})_{i,j \in [m]}$ positiv definit.

In Analogie zu Korollar 4.1.6 ergibt sich folgendes Resultat. Der Beweis ist identisch zum Beweis von Korollar 4.1.6.

Korollar 5.1.5. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.1.3 existiert eine Konstante $\tau > 0$, welche von β , \mathbb{V} , φ , a und G abhängt, so dass*

$$\frac{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}{\lambda_d(A)} \geq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_i a_j \sigma_{\varphi,\varphi}(G_i, G_j) > 0$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Der verbleibende Abschnitt dreht sich ganz um den Beweis von Theorem 5.1.3. Zur Vereinfachung nehmen wir $\beta = 1$ an.

Wir verwenden hier eine Beschreibung des RCMs, die größtenteils mit der übereinstimmt, welche im Vorfeld von Theorem 3.4.2 eingeführt wurde. Der einzige Unterschied besteht in den Geburtszeiten der Punkte, die in der älteren Beschreibung in $[0, 1]$ liegen, hier jedoch aus $[0, \infty)$ stammen. Zur besseren Verständlichkeit wiederholen wir an dieser Stelle die gesamte Beschreibung nochmals detailliert.

Es sei $\hat{\eta}$ ein Poisson-Prozess auf $(\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \lambda_1|_{[0, \infty)} \otimes \Lambda$, wobei $\Lambda := (\lambda_1|_{[0, 1]})^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Für einen Punkt $\hat{x} = ((x, r), t, M) \in \hat{\eta}$ interpretieren wir $(x, r) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ als Position in \mathbb{R}^d mit Markierung $r \in [0, \infty)$, welche einer \mathbb{V} -Verteilung folgt. Die Komponente $t \in [0, \infty)$ entspricht der Geburtszeit des Punktes und $M \in [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ einer Folge von Marken, die bei der Konstruktion einer paarweisen Markierung von Punkten zum Einsatz kommt.

Für $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ und $s, t \in [0, \infty)$ mit $s < t$ bezeichne $\mu_{[s, t]}$ die Einschränkung von μ auf $(\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [s, t) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, also

$$\mu_{[s, t]} := \mu \cap ((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [s, t) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}).$$

Weiterhin sei $\mu_t := \mu_{[0, t]}$ für $t \geq 0$.

Im Folgenden beschreiben wir, wie eine unabhängige Markierung von Punktpaaren aus $\hat{\eta}_t$ (für $t \geq 0$) erzeugt werden kann. Dazu sei $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Partition von \mathbb{R}^d in halb-offene und paarweise disjunkte Würfel mit Lebesgue-Maß eins und $t \geq 0$. Für zwei Punkte

$$((x_1, r_1), t_1, (u_{i,j}^{(1)})), ((x_2, r_2), t_2, (u_{i,j}^{(2)})) \in \hat{\eta}_t$$

mit $t_1 < t_2$ markieren wir das Punktpaar $\{(x_1, r_1), (x_2, r_2)\}$ wie nachfolgend beschrieben. Es sei $n \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte natürliche Zahl, für welche $x_1 \in W_n$ gilt. Wir sortieren alle Punkte von $\hat{\eta}_t$ in W_n , deren Geburtszeitpunkt vor t_2 liegt, hinsichtlich ihrer Geburtszeit. Angenommen $((x_1, r_1), t_1, (u_{i,j}^{(1)}))$ ist der m -te dieser Punkte. In diesem Fall markieren wir das Punktpaar $\{(x_1, r_1), (x_2, r_2)\}$ mit der Marke $u_{n,m}^{(2)}$. Das Ergebnis dieses Vorgehens ist ein Prozess von markierten Punktpaaren in $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ mit unabhängigen und gleichverteilten Marken in $[0, 1]$. Die Konstruktion dieser paarweisen Markierung kann auch durch eine messbare Abbildung

$$T: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}) \rightarrow \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{[2]} \times [0, 1])$$

beschrieben werden, die in Analogie zur Abbildung aus (3.4.4) definiert werden kann. Für eine gegebene Menge $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ bezeichne $\tilde{\Gamma}_\varphi(\mu)$ das RCM, welches auf den Positionen der Punkte aus μ und der paarweisen Markierung $T(\mu)$ beruht.

Im Folgenden seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^d$ mit $a \neq 0$ fixiert. Für gegebenes $\tau > 0$ sei die messbare Abbildung

$$h_\tau: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}) \rightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass $h_\tau(\hat{\eta}_1)$ die selbe Verteilung wie $S_{\varphi,a,G}(B^d(0,\tau))$ besitzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiere eine messbare Abbildung $\tilde{h}_\tau: \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0,\infty))^{[2]} \times [0,1]) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_\tau(\mu) = \tilde{h}_\tau(T(\mu))$ für alle $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$. Wir definieren für $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ und $((x,r),t,M) \in \mu$

$$q_\tau(\mu; ((x,r),t,M)) := \tilde{h}_\tau(T(\mu)) - \tilde{h}_\tau(T(\mu) \setminus \{(x,r)\}), \quad (5.1.7)$$

wobei $T(\mu) \setminus \{(x,r)\}$ die markierten Punktpaare aus $T(\mu)$, ohne den Punkt (x,r) und alle beteiligten markierten Punktpaare bezeichnet.

Für $t \in [0,1]$ sei $\mathbb{P}_{[t,1]}$ die Verteilung von $\hat{\eta}_{[t,1]}$.

Lemma 5.1.6. *Für alle $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $s_0, s_1, \dots, s_n \in [0,1]$ mit $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ gilt*

$$\text{Var } h_\tau(\hat{\eta}_1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[s_{i-1},s_i]}} \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) - H(\hat{\eta}, s_{i-1}, s_i) \right)^2,$$

wobei

$$\begin{aligned} & H(\mu, b_1, b_2) \\ & := \iint_{b_1}^{b_2} \int q_\tau(\mu_t \cup \nu \cup \{((x,r),t,M)\}; ((x,r),t,M)) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) dt \Lambda(dM) \lambda(dx, r) \end{aligned}$$

für $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ und $b_1, b_2 \in [0,1]$ mit $b_1 < b_2$.

Beweis. Da $h_\tau(\hat{\eta}_1)$ die selbe Verteilung wie $S_{\varphi,a,G}(B^d(0,\tau))$ besitzt und $S_{\varphi,a,G}(B^d(0,\tau))$ nach oben durch $|a|_\infty \eta(B^d(0,\tau) \times [0,\infty))$ beschränkt ist, existiert die Varianz von $h_\tau(\hat{\eta}_1)$. Für $t > 0$ bezeichne \mathcal{G}_t die σ -Algebra, welche durch $\hat{\eta}_t$ erzeugt wird und weiter sei $\mathcal{G}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ die triviale σ -Algebra. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Var } h_\tau(\hat{\eta}_1) &= \mathbb{E}(h_\tau(\hat{\eta}_1) - \mathbb{E}h_\tau(\hat{\eta}_1))^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}] \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}]) (\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_j}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{j-1}}]) \right]. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Für $i, j \in [n]$ mit $i < j$ gelten $\mathcal{G}_{s_i} \subset \mathcal{G}_{s_j}$ und $\mathcal{G}_{s_i} \subset \mathcal{G}_{s_{j-1}}$, womit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}]) (\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_j}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{j-1}}]) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] (\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_j}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{j-1}}]) \right. \\ & \quad \left. - (\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}]) (\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_j}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{j-1}}]) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[h_\tau(\hat{\eta}_1) \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] \right] - \mathbb{E} \left[h_\tau(\hat{\eta}_1) \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[h_\tau(\hat{\eta}_1) \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}] \right] + \mathbb{E} \left[h_\tau(\hat{\eta}_1) \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}] \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir mit (5.1.8)

$$\text{Var } h_\tau(\hat{\eta}_1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] - \mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_{i-1}}] \right)^2.$$

Mit Theorem 2.1 in [29] erhalten wir \mathbb{P} -fast sicher für alle $i \in [n]_0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h_\tau(\hat{\eta}_1) | \mathcal{G}_{s_i}] &= \mathbb{E} h_\tau(\hat{\eta}_1) + \sum_{((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{s_i}} \int D_{((x,r),t,M)} h_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) \\
&\quad - \iiint_0^{s_i} \int D_{((x,r),t,M)} h_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) dt \Lambda(dM) \lambda(d(x,r)).
\end{aligned}$$

Aus der Konstruktionsweise des RCM folgt, dass für $((x,r),t,M) \in ((\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$

$$T(\hat{\eta}_t \cup \zeta) \stackrel{d}{=} T(\hat{\eta}_t \cup \zeta \cup \{((x,r),t,M)\}) \setminus \{(x,r)\}$$

gilt, wobei ζ die Verteilung $\mathbb{P}_{[t,1]}$ besitzt und unabhängig von $\hat{\eta}_t$ ist. Zusammen mit der Definition des Differenzenoperators D für Poisson-Prozesse (vergleiche (2.2.2)) und der Definition von q_τ aus (5.1.7) folgt für $((x,r),t,M) \in ((\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned}
&\int D_{((x,r),t,M)} h_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) \\
&= \int \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{((x,r),t,M)\})) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) - \int \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_t \cup \nu)) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) \\
&= \int \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{((x,r),t,M)\})) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) \\
&\quad - \int \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{((x,r),t,M)\}) \setminus \{(x,r)\}) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) \\
&= \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{((x,r),t,M)\}; ((x,r),t,M)) \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu),
\end{aligned}$$

was den Beweis beendet. □

Lemma 5.1.7. *Unter der Voraussetzung*

$$\iint g_\varphi(r,r,w)^{3d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty,$$

existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , a und G abhängt, so dass für alle

$s, \delta \in [0, 1]$ mit $s + \delta \leq 1$ und $\tau > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[s,s+\delta)}} \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \mathbb{P}_{[t,1)}(d\nu) - H(\hat{\eta}, s, s + \delta) \right| \\ & \geq \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{[1,1+\delta)}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_1, 1, 1 + \delta) \right| - C\delta(1-s)\tau^d, \end{aligned}$$

gilt, wobei

$$\tilde{H}(\mu, b_1, b_2) := \iint_{b_1}^{b_2} q_\tau(\mu \cup \{((x,r),t,M)\}; ((x,r),t,M)) dt \Lambda(dM) \lambda(d(x,r))$$

für $\mu \in \mathbf{N}((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [0, \infty) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ und $b_1, b_2 \in [0, \infty)$ mit $b_1 < b_2$.

Beweis. Es seien $s, \delta \in [0, 1]$ mit $s + \delta \leq 1$ und $\tau > 0$. Wir zeigen im Folgenden die Existenz von Konstanten $C_1, C_2 > 0$, welche nur von a, G und φ abhängen und die Ungleichungen

$$\mathbb{E} \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[s,s+\delta)}} \left| \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \mathbb{P}_{[t,1)}(d\nu) - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| \leq C_1 \delta (1-s) \tau^d \quad (5.1.9)$$

und

$$\mathbb{E} \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\delta)}} |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}; \hat{x})| \leq C_2 \delta (1-s) \tau^d \quad (5.1.10)$$

erfüllen. Hieraus erhalten wir mit der Formel von Mecke und der Dreiecksungleichung für Integrale (als Abschätzung nach unten)

$$\mathbb{E} |H(\hat{\eta}, s, s + \delta) - \tilde{H}(\hat{\eta}_s, s, s + \delta)| \leq C_1 \delta (1-s) \tau^d$$

und

$$\mathbb{E} |\tilde{H}(\hat{\eta}_1, 1, 1 + \delta) - \tilde{H}(\hat{\eta}_s, 1, 1 + \delta)| \leq C_2 \delta (1-s) \tau^d.$$

Mit den vorangegangenen Ungleichungen folgt schließlich

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\delta)}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_1, 1, 1 + \delta) \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\delta)}} q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_s, 1, 1 + \delta) \right| + 2C_2 \delta (1-s) \tau^d \\ & = \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[s,s+\delta)}} q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_s, s, s + \delta) \right| + 2C_2 \delta (1-s) \tau^d \\ & \leq \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[s,s+\delta)}} \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \mathbb{P}_{[t,1)}(d\nu) - H(\hat{\eta}, s, s + \delta) \right| \\ & \quad + 2C_1 \delta (1-s) \tau^d + 2C_2 \delta (1-s) \tau^d, \end{aligned}$$

was der Aussage des Lemmas entspricht.

Es bleibt (5.1.9) und (5.1.10) zu zeigen. Mit Hilfe der Formel von Mecke und der Dreiecksungleichung für Integrale kann die linke Seite von (5.1.9) nach oben durch

$$\begin{aligned}
& \iiint_s^{s+\delta} \int \mathbb{E} |q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M)) \\
& \quad - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M))| \mathbb{P}_{[t,1]}(d\nu) dt \Lambda(dM) \lambda(d(x, r)) \\
& = \iiint_s^{s+\delta} \mathbb{E} |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M)) \\
& \quad - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M))| dt \Lambda(dM) \lambda(d(x, r)) \quad (5.1.11)
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Es sei $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$. Für einen Punkt $\hat{x} = ((x, r), t, M) \in ((\mathbb{R}^d \times [0, \infty)) \times [s, s + \delta) \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}})$ folgt aus dem Ereignis

$$|q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M)) - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M))| > 0$$

die Existenz eines Pfades

$$((x, r), t, M) \leftrightarrow ((x_1, r_1), t_1, M_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow ((x_i, r_i), t_i, M_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})$$

mit $i \leq k$ und paarweise verschiedenen Punkten $((x_1, r_1), t_1, M_1), \dots, ((x_i, r_i), t_i, M_i) \in \hat{\eta}_1$ und $t_i \geq s$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M)) - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{(x, r), t, M\}); ((x, r), t, M))| \\
& \leq \mathbf{1}\{\text{es gibt paarweise verschiedene } ((x_1, r_1), t_1, M_1), \dots, ((x_i, r_i), t_i, M_i) \in \hat{\eta}_1 \text{ mit} \\
& \quad i \in \{1, \dots, k\}, t_i \geq s, \text{ und } (x, r) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\} \\
& \quad \times (|\tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})) - \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}) \setminus \{\hat{x}\})| + |\tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\})) - \tilde{h}_\tau(T(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}) \setminus \{\hat{x}\})|) \\
& \leq 2|a|_\infty \mathbf{1}\{\text{es gibt paarweise verschiedene } ((x_1, r_1), t_1, M_1), \dots, ((x_i, r_i), t_i, M_i) \in \hat{\eta}_1 \text{ mit} \\
& \quad i \in \{1, \dots, k\}, t_i \geq s, \text{ und } (x, r) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\} \\
& \quad \times \sum_{j=0}^k \sum_{((y_1, \tilde{r}_1), \tilde{t}_1, \tilde{M}_1), \dots, ((y_j, \tilde{r}_j), \tilde{t}_j, \tilde{M}_j) \in \hat{\eta}_1}^{\neq} \mathbf{1}\{y_j \in B^d(0, \tau)\} \\
& \quad \quad \quad \times \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (y_1, \tilde{r}_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_j, \tilde{r}_j) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\}
\end{aligned}$$

mit $(y_0, r_0) := (x, r)$, das heißt für $j = 0$ ist die innere Summe gleich dem Indikator $\mathbf{1}\{x \in B^d(0, \tau)\}$. Weiter kann die rechte Seite der letzten Ungleichung nach oben durch

$$\begin{aligned}
& 2|a|_\infty \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^k \sum_{((x_1, r_1), t_1, M_1), \dots, ((x_i, r_i), t_i, M_i), ((y_1, \tilde{r}_1), \tilde{t}_1, \tilde{M}_1), \dots, ((y_j, \tilde{r}_j), \tilde{t}_j, \tilde{M}_j) \in \hat{\eta}_1}^{\neq} \mathbf{1}\{t_i \geq s\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{y_j \in B^d(0, \tau)\} \mathbf{1}\{(i, l) \neq (0, 0)\} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (y_1, \tilde{r}_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_j, \tilde{r}_j) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{(y_l, \tilde{r}_l) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\} \quad (5.1.12)
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden, wobei $((x_0, r_0), t_0) := ((y_l, \tilde{r}_l), \tilde{t}_l)$ und $(y_0, \tilde{r}_0) := (x, r)$. Unter Verwendung von bedingter Erwartungswertbildung und der Formel von Mecke, erhalten wir mit Hilfe von (5.1.12) folgende Abschätzung für (5.1.11)

$$2|a|_\infty \delta \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^j \sum_{i=0}^k \mathbb{1}\{(i, l) \neq (0, 0)\} (1-s) \int \mathbb{1}\{y_j \in B^d(0, \tau)\} \prod_{m=1}^j \varphi((y_{m-1}, \tilde{r}_{m-1}), (y_m, \tilde{r}_m)) \\ \times \prod_{n=1}^i \varphi((x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_n)) \lambda^{i+j}(\mathbf{d}((x_1, r_1), \dots, (x_i, r_i), (y_1, \tilde{r}_1), \dots, (y_j, \tilde{r}_j))) \lambda(\mathbf{d}(x, r))$$

mit $(x_0, r_0) := (y_l, \tilde{r}_l)$ und $(y_0, \tilde{r}_0) := (x, r)$. Es seien $j \in [k]_0$, $l \in [j]_0$, $i \in [k]_0$, $(i, l) \neq (0, 0)$, $(x_0, r_0) := (y_l, \tilde{r}_l)$ und $(y_0, \tilde{r}_0) := (x, r)$. Dann gilt

$$\iint \mathbb{1}\{y_j \in B^d(0, \tau)\} \prod_{m=1}^j \varphi((y_{m-1}, \tilde{r}_{m-1}), (y_m, \tilde{r}_m)) \prod_{n=1}^i \varphi((x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_n)) \\ \times \lambda^{i+j}(\mathbf{d}(x_1, r_1), \dots, (x_i, r_i), (y_1, \tilde{r}_1), \dots, (y_j, \tilde{r}_j)) \lambda(\mathbf{d}(x, r)) \\ = \tau^d \kappa_d^{i+j+1} \iint \prod_{m=1}^j g_\varphi(\tilde{r}_{m-1}, \tilde{r}_m, \tilde{w}_m)^d \prod_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \\ \times \mathbb{V}^{i+j+1}(\mathbf{d}(r, r_1, \dots, r_i, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_j)) \mathbb{W}^{i+j}(\mathbf{d}(w_1, \dots, w_i, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j)) \quad (5.1.13)$$

Der Integrand der linken Seite von (5.1.13) beschreibt eine Baumstruktur, deren maximaler Knotengrad drei ist. Daher taucht im vorangegangenen Integral jede der Marken $r, r_1, \dots, r_i, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_j$ in höchstens drei Faktoren auf. Mit einer Fallunterscheidung hinsichtlich der Größen der Marken $r, r_1, \dots, r_i, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_j$ im Integranden der rechten Seite von (5.1.13), unter Ausnutzung der Symmetrie und Monotonie von g_φ (in den ersten beiden Argumenten) und mit Lemma 2.1.1 folgt, dass das Integral (5.1.13) unter der Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{3d} \mathbb{V}(\mathbf{d}r) \mathbb{W}(\mathbf{d}w) < \infty$$

endlich ist. Damit erhalten wir die Ungleichung (5.1.9).

Die Formel von Mecke liefert für die linke Seite von (5.1.10)

$$\mathbb{E} \sum_{\hat{x} = ((x, r), t, M) \in \hat{\eta}_{[1, 1+\delta]}} |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{\hat{x}\}; \hat{x})| \\ = \iiint_{\mathbb{1}}^{1+\delta} \mathbb{E} |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{((x, r), t, M)\}; ((x, r), t, M)) \\ - q_\tau(\hat{\eta}_s \cup \{((x, r), t, M)\}; ((x, r), t, M))| dt \Lambda(\mathbf{d}M) \lambda(\mathbf{d}(x, r)).$$

Der restliche Beweis von (5.1.10) verläuft analog zum Beweis von (5.1.9). \square

Lemma 5.1.8. *Unter der Voraussetzung*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{2d} \mathbb{V}(\mathbf{d}r) \mathbb{W}(\mathbf{d}w) < \infty$$

gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}} \mathbf{1}\{x \notin B^d(0,2\tau)\} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| = 0.$$

Beweis. Es seien $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$, $\varepsilon > 0$ und $\tau > 0$. Für $\hat{x} = ((x,r),t,M) \in (\mathbb{R}^d \times [0,\infty)) \times [0,\infty) \times [0,1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ mit $x \notin B^d(0,\tau)$ gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} |q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x})| &\leq |a|_\infty \sum_{i=1}^k \sum_{(x_1,r_1),t_1,M_1, \dots, (x_i,r_i),t_i,M_i \in \hat{\eta}_1}^{\neq} \mathbf{1}\{x_i \in B^d(0,\tau)\} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(x,r) \leftrightarrow (x_1,r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i,r_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\}. \end{aligned}$$

Mit der Formel von Mecke (Theorem 3.3.3) folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}} \mathbf{1}\{x \notin B^d(0,2\tau)\} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| \\ &\leq |a|_\infty \mathbb{E} \sum_{\hat{x} = ((x,r),t,M) \in \hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}} \mathbf{1}\{x \notin B^d(0,2\tau)\} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^k \sum_{(x_1,r_1),t_1,M_1, \dots, (x_i,r_i),t_i,M_i \in \hat{\eta}_1}^{\neq} \mathbf{1}\{x_i \in B^d(0,\tau)\} \\ &\quad \quad \times \mathbf{1}\{(x,r) \leftrightarrow (x_1,r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i,r_i) \text{ in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\})\} \\ &\leq \frac{|a|_\infty \varepsilon}{\tau^d} \sum_{i=1}^k \int \mathbf{1}\{x_0 \notin B^d(0,2\tau), x_i \in B^d(0,\tau)\} \prod_{j=1}^i \varphi((x_{j-1},r_{j-1}), (x_j,r_j)) \\ &\quad \quad \times \lambda^{i+1}(\mathrm{d}((x_0,r_0), (x_1,r_1), \dots, (x_i,r_i))). \quad (5.1.14) \end{aligned}$$

Für $i \in [k]$ und $x_0, x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R}^d$ mit $x_0 \notin B^d(0,2\tau)$ und $x_i \in B^d(0,\tau)$ gilt

$$\max\{|x_j - x_{j-1}| : j \in [i]\} \geq \frac{\tau}{i} \geq \frac{\tau}{k}.$$

Wir erhalten für $i \in [k]$

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{1}\{x_0 \notin B^d(0,2\tau), x_i \in B^d(0,\tau)\} \prod_{j=1}^i \varphi((x_{j-1},r_{j-1}), (x_j,r_j)) \\ &\quad \quad \times \lambda^{i+1}(\mathrm{d}((x_0,r_0), (x_1,r_1), \dots, (x_i,r_i))) \\ &\leq \sum_{l=1}^i \int \mathbf{1}\{x_l \in B^d(0,\tau)\} \mathbf{1}\{|x_l - x_{l-1}| \geq \tau/k\} \prod_{j=1}^i \varphi((x_{j-1},r_{j-1}), (x_j,r_j)) \\ &\quad \quad \times \lambda^{i+1}(\mathrm{d}((x_0,r_0), (x_1,r_1), \dots, (x_i,r_i))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{l=1}^i \kappa_d^i \tau^d \iiint \mathbf{1}\{|y| \geq \tau/k\} \prod_{n=1}^{l-1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \mathbf{1}\{|y| \leq g_\varphi(r_{l-1}, r_l, w_l)\} \\ &\quad \times \prod_{n=l+1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \mathbb{V}^{i+1}(d(r_0, \dots, r_i)) \mathbb{W}^i d(w_1, \dots, w_i) dy. \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

Unter der Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{2d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

ist für $l \in [i]$

$$\begin{aligned} &\prod_{n=1}^{l-1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \mathbf{1}\{|y| \leq g_\varphi(r_{l-1}, r_l, w_l)\} \prod_{n=l+1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d, \\ &\quad r_0, \dots, r_i \in [0, \infty), w_1, \dots, w_i \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

eine integrierbare obere Schranke für die Integranden der rechten Seite von (5.1.15). Insgesamt liefern (5.1.15) und (5.1.14) eine obere Schranke für die linke Seite von (5.1.14), welche für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. \square

Mit den im Vorfeld gezeigten Lemmata sind alle Werkzeuge vorhanden, um den Beweis von Theorem 5.1.3 zu führen.

Beweis von Theorem 5.1.3. Wir werden

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau))}{\tau^d} > 0$$

zeigen. Es sei $\tau > 0$ zunächst fixiert. Nach Konstruktion besitzen $S_{\varphi, a, G}(B^d(0, \tau))$ und $h_\tau(\hat{\eta}_1)$ die selbe Verteilung. Daher können wir in diesem Beweis stets mit der Größe $h_\tau(\hat{\eta}_1)$ arbeiten.

Es seien $\alpha \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$. Weiter definieren wir für $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \alpha\tau^d/\varepsilon \rfloor\}$ die Zahlen $s_i := 1 - i\varepsilon/\tau^d$. Lemma 5.1.6, die Ungleichung von Jensen, Lemma 5.1.7 und die Ungleichung $i\varepsilon/\tau^d \leq \alpha$ für $i \in \{1, \dots, \lfloor \alpha\tau^d/\varepsilon \rfloor\}$ liefern

$$\begin{aligned} \text{Var } h_\tau(\hat{\eta}_1) &\geq \sum_{i=1}^{\lfloor \alpha\tau^d/\varepsilon \rfloor} \mathbb{E} \left(\sum_{\hat{x} = ((x, r), t, M) \in \hat{\eta}_{[s_i, s_{i-1}]}} \int q_\tau(\hat{\eta}_t \cup \nu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \mathbb{P}_{[t, 1]}(d\nu) - H(\hat{\eta}, s_i, s_{i-1}) \right)^2 \\ &\geq \left\lfloor \frac{\alpha\tau^d}{\varepsilon} \right\rfloor \max \left\{ \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{[1, 1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_1, 1, 1 + \varepsilon/\tau^d) \right| - C \frac{\varepsilon}{\tau^d} \alpha\tau^d, 0 \right\}^2 \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

mit der Konstanten $C > 0$ aus Lemma 5.1.7.

Für $b_1, b_2 \geq 0$ mit $b_1 < b_2$ und $T > 0$ schreiben wir

$$\hat{\eta}_{B^d(0, T) \times [b_1, b_2]} := \hat{\eta} \cap ((B^d(0, T) \times [0, \infty)) \times [b_1, b_2] \times [0, 1]^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}).$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so (klein), dass

$$\mathbb{P}(|\hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}| = 0) = \exp(-2^d \kappa_d \varepsilon) > \frac{1}{2}$$

gilt. Dann liefern die Unabhängigkeit von $\hat{\eta}_1$ und $\hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}$ und Lemma A.0.1 aus dem Anhang

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\hat{\eta}_1, 1, 1 + \varepsilon/\tau^d) \right| \\ &= \int \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\mu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) - \tilde{H}(\mu, 1, 1 + \varepsilon/\tau^d) \right| \mathbb{P}_{[0,1]}(d\mu) \\ &\geq \int \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\mu \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| \mathbb{P}_{[0,1]}(d\mu) \\ &\geq \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right|. \end{aligned}$$

Eine Anwendung der vorangegangenen Abschätzung und der Dreiecksungleichung auf die rechte Seite von (5.1.16) liefern

$$\begin{aligned} \text{Var } h_\tau(\hat{\eta}_1) &\geq \left[\frac{\alpha \tau^d}{\varepsilon} \right] \max \left\{ \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| - C\varepsilon \alpha \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}} \mathbb{1}\{x \notin B^d(0,2\tau)\} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right|, 0 \right\}^2 \quad (5.1.17) \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.1.8 folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{[1,1+\varepsilon/\tau^d]}} \mathbb{1}\{x \notin B^d(0,2\tau)\} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| = 0.$$

Weiterhin hat der Term $C\varepsilon\alpha$ keinen Einfluss, da er durch geeignete Wahl von $\alpha \in (0, 1)$ beliebig nahe an Null liegt. Mit Blick auf (5.1.17) genügt es folglich

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| > 0 \quad (5.1.18)$$

zu zeigen, um den Beweis des Theorems zu beenden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien alle Einträge des Vektors $a = (a_1, \dots, a_m)$ von Null verschieden. Dies kann stets erreicht werden, indem die Anzahl der gezählten Graphen verringert wird. Weiterhin sei $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$ und G_{\max} sei ein Graph aus $G = (G_1, \dots, G_m)$ mit $|G_{\max}| = k$ und a_{\max} der zu G_{\max} gehörende Eintrag aus a . Es bezeichne p_τ die Wahrscheinlichkeit, dass $\hat{\eta}_{B^d(0,2\tau) \times [1,1+\varepsilon/\tau^d]}$ genau einen Punkt $\hat{y} = ((y, r), t, M)$ enthält und dass der Knoten (y, r) im Modell $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{y}\})$ Teil einer Komponente der Größe $k+1$ ist, deren restliche Knoten im Modell $\tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1)$ eine zu G_{\max} isomorphe Komponente mit lexikographischem

Minimum in $B^d(0, \tau)$ bilden. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_\tau &= \frac{2^d \kappa_d \varepsilon e^{-2^d \kappa_d \varepsilon}}{2^d \kappa_d \tau^d} \int_{B^d(0, 2\tau) \times [0, \infty)} \mathbb{E} \sum_{\substack{\neq \\ ((x_1, r_1), t_1, M_1), \dots, ((x_k, r_k), t_k, M_k) \in \hat{\eta}_1}} \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau)\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{x_1 \prec \dots \prec x_k\} \mathbf{1}\{G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}, \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1)) \text{ ist in } \tilde{\Gamma}_\varphi(\hat{\eta}_1) \\
&\quad \quad \quad \text{eine zu } G_{\text{max}} \text{ isomorphe Komponente}\} \\
&\quad \times \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r))\right) \prod_{((z, \tilde{r}), \tilde{t}, \tilde{M}) \in \hat{\eta}_1, z \notin \{x_1, \dots, x_k\}} \bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \lambda(d(y, r)).
\end{aligned}$$

Mit der Formel von Mecke (Theorem 3.3.3) und Lemma 2.1.4 folgt

$$\begin{aligned}
p_\tau &= \frac{\varepsilon e^{-2^d \kappa_d \varepsilon}}{\tau^d} \int \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau), y \in B^d(0, 2\tau)\} p_{\varphi, G_{\text{max}}}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, \tilde{r})) - 1 \right) \lambda(d(z, \tilde{r})) \right] \\
&\quad \times \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r))\right) \lambda^{k+1}(d((y, r), (x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))).
\end{aligned}$$

Für festes $T > 0$ mit $\tau \geq T$ gilt

$$\begin{aligned}
p_\tau &\geq \frac{\varepsilon e^{-2^d \kappa_d \varepsilon}}{\tau^d} \int \mathbf{1}\{x_1 \in B^d(0, \tau), |y - x_1| \leq T\} p_{\varphi, G_{\text{max}}}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, \tilde{r})) - 1 \right) \lambda(d(z, \tilde{r})) \right] \\
&\quad \times \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r))\right) \lambda^{k+1}(d((y, r), (x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))).
\end{aligned}$$

Da die Verbindungsfunktion im markierten Fall nur vom Abstand der Punkte, aber nicht deren genauen Position, abhängt, gilt in Analogie zu Gleichung (4.1.1)

$$p_{\varphi, H}((x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)) = p_{\varphi, H}((x_1 - y, r_1), \dots, (x_n - y, r_n))$$

für $n \in \mathbb{N}$, $H \in \mathbf{G}_n$, $(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Mit dieser Überlegung, der vorangegangenen Abschätzung und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{\tau \rightarrow \infty} p_\tau &\geq \kappa_d \varepsilon e^{-2^d \kappa_d \varepsilon} \iint \mathbf{1}\{|y| \leq T\} p_{\varphi, G_{\text{max}}}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\quad \times \exp \left[\int \left(\bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, \tilde{r})) - 1 \right) \lambda(d(z, \tilde{r})) \right] \\
&\quad \times \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r))\right) \lambda^k(d((y, r), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \mathbb{V}(dr_1) \quad (5.1.19)
\end{aligned}$$

mit $x_1 := 0$.

Wegen $G_{\max} \in \mathbf{G}_\varphi$, der Formel von Mecke (Theorem 3.3.3) und Lemma 2.1.4 gilt mit $x_1 = 0$

$$\begin{aligned}
0 &< \int \mathbb{E} \sum_{(y,r),(x_2,r_2),\dots,(x_k,r_k) \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{0 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k\} \\
&\times \mathbf{1}\{\exists i \in [k] : (x_i, r_i) \leftrightarrow (y, r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta \cup \{(0, r_1)\})\} \\
&\times \mathbf{1}\{G_{\text{ind}}(\{(0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)\}, \Gamma_\varphi(\eta \cup \{(0, r_1)\})) \simeq G_{\max}\} \\
&\times \prod_{(z,\tilde{r}) \in \eta \setminus \{(y,r),(x_2,r_2),\dots,(x_k,r_k)\}} \mathbf{1}\{(y, r) \not\leftrightarrow (z, \tilde{r})\} \prod_{i=1}^k \mathbf{1}\{(x_i, r_i) \not\leftrightarrow (z, \tilde{r})\} \mathbb{V}(dr_1) \\
&= \int \mathbb{E} \sum_{(y,r),(x_2,r_2),\dots,(x_k,r_k) \in \eta}^{\neq} p_{\varphi, G_{\max}}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r))\right) \\
&\times \prod_{(z,\tilde{r}) \in \eta \setminus \{(y,r),(x_2,r_2),\dots,(x_k,r_k)\}} \bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, \tilde{r})) \mathbb{V}(dr_1) \\
&= \iint p_{\varphi, G_{\max}}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\times \exp \left[\int \left(\bar{\varphi}((y, r), (z, \tilde{r})) \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, \tilde{r})) - 1 \right) \lambda(d(z, \tilde{r})) \right] \\
&\times \left(1 - \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (y, r)) \right) \lambda^k(d((y, r), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \mathbb{V}(dr_1). \tag{5.1.20}
\end{aligned}$$

Majorisierte Konvergenz liefert, dass die rechte Seite von (5.1.20) der Grenzwert des Integrals der rechten Seite von (5.1.19) ist, für $T \rightarrow \infty$. Somit gilt $\liminf_{\tau \rightarrow \infty} p_\tau > 0$ und wegen

$$\mathbb{E} \left| \sum_{\hat{x} \in \hat{\eta}_{B^d(0, 2\tau)} \times [1, 1+\varepsilon/\tau^d]} q_\tau(\hat{\eta}_1 \cup \{\hat{x}\}; \hat{x}) \right| \geq |a_{\max}| p_\tau$$

folgt (5.1.18), was den Beweis beendet. \square

Theorem 5.1.3 und Korollar 5.1.5 stellen insbesondere sicher, dass die asymptotische Varianz von $S_{\varphi, a, G}$ positiv ist. Diese Resultate haben jedoch den Nachteil, dass ihre Voraussetzungen von den zu zählenden Graphen aus $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$, $m \in \mathbb{N}$, abhängen. Gemeint sind die Integrierbarkeitsbedingungen an die Funktion g_φ , welche sich verschärfen, je größer der größte maximale Knotengrad der gezählten Graphen ist. Der Grund dafür liegt in den asymptotischen Kovarianzformeln aus Theorem 5.1.1.

In den entsprechenden Aussagen zum klassischen (unmarkierten) RCM (vergleiche die Theoreme 4.1.1 und 4.1.4 und Korollar 4.1.6) sind keine derartigen Voraussetzungen zu finden. Hier zeigen sich die technischen Unterschiede zum klassischen RCM und die damit einhergehenden Herausforderungen. Da im markierten RCM die Marke eines Punktes jede seiner potentiellen Verbindungen beeinflusst, verlieren wir gegenüber dem klassischen RCM an Unabhängigkeit (siehe auch die Diskussion in Bemerkung 5.0.2). Dies hat, vereinfacht gesprochen, die stärkeren Voraussetzungen in Theorem 5.1.1 zur Folge. Die technischen Details ergeben sich, wenn die Integrierbarkeit der Funktion aus (5.1.3) gezeigt werden muss.

Verzichtet man auf die asymptotischen Kovarianzformeln und damit auf mögliche multivariate zentrale Grenzwertsätze, so kann die Positivität der asymptotischen Varianz von $S_{\varphi,a,G}$ auch mit Hilfe von Theorem 3.4.5 gezeigt werden, was Inhalt des nachfolgenden Theorems ist. Bei der hier präsentierten alternativen Herangehensweise entfällt die Abhängigkeit der Voraussetzungen von den gezählten Graphen aus dem Vektor G . Dies wird jedoch durch eine andere Einschränkung an das Funktional $S_{\varphi,a,G}$ erkauft. So muss gewährleistet werden, dass der Koeffizientenvektor $a = (a_1, \dots, a_m)$ keine negativen Einträge enthält. Somit ist der hier vorgestellte Ansatz dem Theorem 5.1.3 nicht zwangsläufig überlegen, sondern sollte eher als eine Alternative mit Vor- und Nachteilen verstanden werden.

Theorem 5.1.9. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in [0, \infty)^m$ mit $a \neq 0$. Weiter gelte*

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^d \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $c > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , a und G abhängt, sodass

$$\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A) \geq c\lambda_d(A)$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ gilt.

Beweis. Unser Ziel ist die Anwendung von Theorem 3.4.5. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir, dass alle Einträge des Vektors a von Null verschieden sind. Es seien $A \in \mathcal{K}^d$, f ein Repräsentant von $S_{\varphi,a,G}(A)$ und $k := \max\{|G_i| : i \in [m]\}$. Weiter sei G_{\max} ein Graph aus G mit $|G_{\max}| = k$ und zugehörigem Koeffizienten a_{\max} aus a . Außerdem gelte $a_{\max} = 1$, was durch eine entsprechende Normierung von $S_{\varphi,a,G}$ stets erreicht werden kann. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir auf $(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^n \times [0, 1]^{n^2}$ das Maß

$$\bar{\lambda}_n := \beta^n (\lambda_d \otimes \mathbb{V})^n \otimes (\lambda_1|_{[0,1]})^{n^2}.$$

Weiter sei für $\tau > 0$ die Menge $\tilde{U} \subset (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{k+1} \times [0, 1]^{(k+1)^2}$ wie folgt definiert. Für ein Element $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in \tilde{U}$ gelte $x_1 \in A$, $x_1 \prec \dots \prec x_{k+1}$ und $x_i \in B^d(x_1, \tau)$ für $i \in [k+1] \setminus \{1\}$. Außerdem sei unter dem Ereignis $Z_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}} = (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}$ der Graph $G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}, \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}))$ isomorph zu G_{\max} und der Graph $G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_{k+1}, r_{k+1})\}, \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}}))$ zusammenhängend.

Im Folgenden sei der Parameter $\tau > 0$ hinreichend groß gewählt, so dass $\bar{\lambda}_{k+1}(\tilde{U})$ proportional zu $\lambda_d(A)$ ist. Eine solche Wahl ist wegen $G_{\max} \in \mathbf{G}_{\varphi}$ stets möglich.

Weiter sei $T > 0$ hinreichend groß, so dass $\mathbb{V}([T, \infty)) > 0$ und

$$\bar{\lambda}_{k+1}(\tilde{U} \cap ((\mathbb{R}^d \times [0, T])^{k+1} \times [0, 1]^{(k+1)^2})) > 0$$

gelten. Wir definieren

$$U := \tilde{U} \cap ((\mathbb{R}^d \times [0, T])^{k+1} \times [0, 1]^{(k+1)^2}).$$

Aufgrund von $G_{\max} \in \mathbf{G}_\varphi$ ist auch $\bar{\lambda}_{k+1}(U)$ proportional zu $\lambda_d(A)$. Somit existiert ein $c_1 > 0$ mit $\bar{\lambda}_{k+1}(U) = c_1 \lambda_d(A)$, $A \in \mathcal{K}^d$.

Es seien $I_1 := [k+1]$, $I_2 := [k]$ und $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in U$. Da unter dem Ereignis $Z_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}} = (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}$ der Graph $G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_{k+1}, r_{k+1})\}, \Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}}))$ zusammenhängend ist, kann das Entfernen des Punktes (x_{k+1}, r_{k+1}) aus $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}})$ die Anzahl von Komponenten, die von f gezählt werden, nicht verringern. Falls $(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)$ in $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})$ nicht mit Punkten aus η verbunden sind, so erzeugt das Entfernen von (x_{k+1}, r_{k+1}) aus $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}})$ eine zu G_{\max} isomorphe Komponente, deren lexikographisches Minimum in A liegt. Mit dieser Überlegung erhalten wir folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[f(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I_1}}) - f(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I_2}}) \mid Z_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}} = (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]} \right] \right| \\ & \geq \mathbb{P}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k) \text{ sind in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}) \text{ nicht mit Punkten aus } \eta \text{ verbunden}) \\ & = \mathbb{E} \prod_{(z,r) \in \eta} \prod_{i=1}^k \mathbb{1}\{(x_i, r_i) \not\leftrightarrow (z, r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})\} \\ & = \mathbb{E} \prod_{(z,r) \in \eta} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, r)) \\ & = \exp \left(\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((x_i, r_i), (z, r)) - 1 \right) \lambda(d(z, r)) \right) \\ & \geq \exp \left(- \sum_{i=1}^k \int \varphi((x_i, r_i), (z, r)) \lambda(d(z, r)) \right), \end{aligned}$$

wobei wir in den letzten beiden Schritten das Lemma 2.1.4 und die Ungleichung (4.1.8) verwendet haben. Wegen der Monotonie von g_φ (in den ersten beiden Argumenten) gilt weiter für $i \in [k]$

$$\begin{aligned} \int \varphi((x_i, r_i), (z, r)) \lambda(d(z, r)) &= \iint \mathbb{1}\{|z - x_i| \leq g_\varphi(r_i, r, w)\} \lambda(d(z, r)) \mathbb{W}(dw) \\ &= \beta \kappa_d \iint g_\varphi(r_i, r, w)^d \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) \\ &\leq \frac{\beta \kappa_d}{\mathbb{V}([T, \infty))} \iint \mathbb{1}\{\tilde{r} \geq T\} g_\varphi(\tilde{r}, r, w)^d \mathbb{V}^2(d(\tilde{r}, r)) \mathbb{W}(dw) \\ &\leq \frac{\beta \kappa_d}{\mathbb{V}([T, \infty))} \iint g_\varphi(\tilde{r}, r, w)^d \mathbb{V}^2(d(\tilde{r}, r)) \mathbb{W}(dw) \\ &\leq \frac{2\beta \kappa_d}{\mathbb{V}([T, \infty))} \iint g_\varphi(r, r, w)^d \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw). \end{aligned}$$

Die rechte Seite der vorangegangenen Abschätzung ist zum einen unabhängig vom Element $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in U$ und zum anderen unter den Voraussetzungen des Theorems endlich. Damit folgt die Existenz einer positiven Konstanten $c_2 > 0$, so dass für alle $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in U$

$$\left| \mathbb{E} \left[f(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I_1}}) - f(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I_2}}) \mid Z_{(x_i, r_i)_{i \in [k+1]}} = (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]} \right] \right| \geq c_2$$

gilt.

Für $\emptyset \neq J \subset [k+1]$ und $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{k+1} \times [0, 1]^{(k+1)^2}$ verwenden wir die Abkürzung $\mathbf{x}_J := ((x_i, r_i)_{i \in J}, (m_{i,j})_{i,j \in J})$. Weiterhin sei $J^c := [k+1] \setminus J$ das Komplement von J in der Menge $[k+1]$. Wie in Theorem 3.4.5 bezeichne für $V \subset (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{k+1} \times [0, 1]^{(k+1)^2}$

$$\Pi_J(V) := \{\mathbf{x}_J \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{|J|} \times [0, 1]^{|J|^2} : \text{es gibt ein } \mathbf{y} \in V \text{ mit } \mathbf{y}_J = \mathbf{x}_J\}$$

die Projektion auf diejenigen Punkte und ihre zugehörigen Marken, deren Indices in J liegen.

Es seien $\emptyset \neq J \subset [k+1]$ und $V \subset U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{k+1}(V) &\leq \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}_J \in \Pi_J(V)\} \mathbf{1}\{\mathbf{x} \in U\} \bar{\lambda}_{k+1}(d\mathbf{x}) \\ &\leq \int \mathbf{1}\{\mathbf{x}_J \in \Pi_J(V)\} \mathbf{1}\{\exists \mathbf{y} \in U : \mathbf{y}_J = \mathbf{x}_J, \mathbf{y}_{J^c} = \mathbf{x}_{J^c}\} \bar{\lambda}_{k+1}(d\mathbf{x}) \\ &= \iint \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \in \Pi_J(V)\} \mathbf{1}\{\exists \mathbf{y} \in U : \mathbf{y}_J = \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_{J^c} = \mathbf{z}_2\} \bar{\lambda}_{|J|}(d\mathbf{z}_1) \bar{\lambda}_{|J^c|}(d\mathbf{z}_2). \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Nach der Definition von U gilt für $((x_i, r_i)_{i \in [k+1]}, (m_{i,j})_{i,j \in [k+1]}) \in U$

$$|x_i - x_j| \leq 2\tau, \quad i, j \in [k+1].$$

Damit folgt für $\mathbf{z}_1 \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{|J|} \times [0, 1]^{|J|^2}$

$$\bar{\lambda}_{|J^c|}(\{\mathbf{z}_2 \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^{|J^c|} \times [0, 1]^{|J^c|^2} : \exists \mathbf{y} \in U : \mathbf{y}_J = \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_{J^c} = \mathbf{z}_2\}) \leq (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{k+1-|J|}.$$

Mit (5.1.21) erhalten wir

$$\bar{\lambda}_{k+1}(V) \leq (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{k+1-|J|} \int \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \Pi_J(V)\} \bar{\lambda}_{|J|}(d\mathbf{z}) = (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{k+1-|J|} \bar{\lambda}_{|J|}(\Pi_J(V)),$$

und damit

$$\bar{\lambda}_{|J|}(\Pi_J(V)) \geq (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{-(k+1-|J|)} \bar{\lambda}_{k+1}(V).$$

Mit dieser Überlegung folgt

$$\begin{aligned} &\min_{\emptyset \neq J \subset [k+1]} \inf \{\bar{\lambda}_{|J|}(\Pi_J(V)) : V \subset U, \bar{\lambda}_{k+1}(V) \geq \bar{\lambda}_{k+1}(U)/2^{k+2}\} \\ &\geq 2^{-k-2} \min_{j \in [k+1]} (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{-(k+1-j)} \bar{\lambda}_{k+1}(U) \\ &= c_1 2^{-k-2} \min_{j \in [k+1]} (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{-(k+1-j)} \lambda_d(A). \end{aligned}$$

Theorem 3.4.5 liefert schließlich

$$\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A) \geq c \lambda_d(A)$$

mit

$$c := \frac{c_1 c_2^2 2^{-k-2}}{4^{k+2} (k+1)!} \min_{j \in [k+1]} (\beta 2^d \tau^d \kappa_d)^{-(k+1-j)},$$

was den Beweis beendet. \square

5.2. ZENTRALE GRENZWERTSÄTZE FÜR DIE KOMPONENTENZAHL

In Anlehnung an Abschnitt 4.2 beschäftigen wir uns hier mit zentralen Grenzwertsätzen für die Größen aus Abschnitt 5.1, also die Komponentenzahlen des markierten RCMs. In Abschnitt 4.2 hatten wir neben den quantitativen Resultaten (Theoreme 4.2.4 und 4.2.6) auch rein qualitative Grenzwertsätze (siehe Theorem 4.2.1 und 4.2.3) formuliert. Diese konnten unter schwächeren Voraussetzungen, als die quantitativen Grenzwertsätze, gezeigt werden. Auch im markierten RCM wäre es möglich, unter Verwendung der Techniken aus Abschnitt 4.2, qualitative Grenzwertsätze zu zeigen. Die dabei nötigen Voraussetzungen wären jedoch nur marginal besser, als die Voraussetzungen bei den qualitativen Aussagen. Aus diesem Grund beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf Grenzwertsätze mit bekannter Kovergenrate und auf einen multivariaten qualitativen zentralen Grenzwertsatz, der aus den quantitativen Resultaten folgt.

Für den gesamten Abschnitt sei N stets eine standardnormalverteilte Zufallsvariable.

Theorem 5.2.1. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und N_Σ ein m -dimensionaler zentrierter Zufallsvektor mit Normalverteilung und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j))_{i, j \in [m]}$ mit den Kovarianzen $\sigma_{\varphi, \varphi}(G_i, G_j)$, $i, j \in [m]$, aus Theorem 5.1.1. Weiterhin sei*

$$\vartheta := \max\{\max\{\max\deg(G_i) : i \in [m]\} + 1, 9\}$$

und es gelte

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\vartheta d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}} (\eta_{\varphi, G_1}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, G_1}(A), \dots, \eta_{\varphi, G_m}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, G_m}(A)) \xrightarrow{d} N_\Sigma \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Mit Korollar 5.1.2 erhalten wir aus Theorem 5.2.1 direkt das nachfolgende Resultat.

Korollar 5.2.2. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden und N_Σ ein m -dimensionaler zentrierter Zufallsvektor mit Normalverteilung und Kovarianzmatrix $\Sigma = (\sigma_{\varphi, \varphi}^{(k_i, k_j)})_{i, j \in [m]}$ mit den Kovarianzen $\sigma_{\varphi, \varphi}^{(k_i, k_j)}$, $i, j \in [m]$, aus Korollar 5.1.2. Weiterhin sei*

$$\vartheta := \max\{\max\{k_i : i \in [m]\}, 9\}$$

und es gelte

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\vartheta d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_d(A)}}(\eta_{\varphi,k_1}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,k_1}(A), \dots, \eta_{\varphi,k_m}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,k_m}(A)) \xrightarrow{d} N_{\Sigma} \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Neben den obigen multivariaten zentralen Grenzwertsätzen ist nachfolgendes Theorem das Herzstück dieses Abschnitts. Es handelt sich dabei um einen zentralen Grenzwertsatz für das Funktional $S_{\varphi,a,G}(A)$, $A \in \mathcal{K}^d$, welcher auch eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit liefert. Er beruht auf dem allgemeinen Resultat aus Theorem 3.5.2.

Theorem 5.2.3. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_{\varphi}^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Weiterhin sei*

$$\vartheta := \max\{\max\{\max\deg(G_i) : i \in [m]\} + 1, 9\}$$

und es gelte

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{\vartheta d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existieren Konstanten $C > 0$ und $\tau > 0$, welche von β , \mathbb{V} , φ , a und G abhängen, so dass

$$d_K\left(\frac{S_{\varphi,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}, N\right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Das vorangegangene Theorem lässt sich leicht auf die Anzahl eines bestimmten Graphen $\eta_{\varphi,G}$, $G \in \mathbf{G}_{\varphi}$, beziehungsweise auf die Anzahl aller Komponenten einer bestimmten Größe $\eta_{\varphi,k}$, $k \in \mathbb{N}$, spezialisieren. Allerdings wird es uns mit einer alternativen Herangehensweise möglich sein die Voraussetzungen in den beiden genannten Spezialfällen zu vereinfachen. Daher verschieben wir die Formulierung entsprechender Resultate und verweisen stattdessen auf Theorem 5.2.8 und die Korollare 5.2.9 und 5.2.10.

Weiterhin halten wir nachfolgend noch fest, dass Theorem 5.2.3 auch für die Wasserstein-Distanz gilt.

Theorem 5.2.4. *Die Aussage von Theorem 5.2.3 gilt in identischer Formulierung, wenn die Kolmogorov-Distanz d_K durch die Wasserstein-Distanz d_1 ersetzt wird.*

Beweis von Theorem 5.2.1. Theorem 5.1.3 und Theorem 5.2.3 liefern für jeden Vektor $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$

$$\frac{\sum_{i=1}^m a_i(\eta_{\varphi,G_i}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi,G_i}(A))}{\lambda_d(A)} \xrightarrow{d} aN_{\Sigma}a' \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty.$$

Da die vorangegangene Konvergenzaussage für $a = 0 \in \mathbb{R}^m$ trivialerweise gilt, folgt mit dem Theorem von Cramér-Wold (siehe beispielsweise [24, Korollar 5.5]) die Aussage. \square

Für die Beweise der Theoreme 5.2.3 und 5.2.4 sind einige Lemmata notwendig. Diese orientieren sich strukturell an denen aus Abschnitt 4.2, welche der Vorbereitung der Beweise

der Theoreme 4.2.4 und 4.2.6 dienen. Dabei ist das erste Resultat ein Analogon zu Lemma 4.2.8. Da auch der Beweis identisch geführt werden kann, verzichten wir auf diesen.

Lemma 5.2.5. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$, $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Dann gelten für alle beschränkten Mengen $A \in \mathcal{B}_d$ und alle Punkte $(x, r), (y, s) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ \mathbb{P} -fast sicher*

$$|\Delta_{(x,r)} S_{\varphi,a,G}(A)| \leq |a|_\infty (\deg((x, r), \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})) + 1) \times \mathbf{1}\{(x, r) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\}, \quad (5.2.1)$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x,r),(y,s)}^2 S_{\varphi,a,G}(A)| &\leq |a|_\infty (2 \deg((y, s), \Gamma_\varphi(\eta_{(y,s)})) + 3) \\ &\times \mathbf{1}\{(x, r) \xleftrightarrow{\leq k+1} (y, s) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r),(y,s)})\} \\ &\times \mathbf{1}\{(x, r) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)}) \\ &\text{oder } (y, s) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(y,s)})\}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Um die Terme $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ aus Definition 3.5.1, beziehungsweise Theorem 3.5.2 für das markierte RCM sinnvoll abschätzen zu können, benötigen wir ein Analogon zu Lemma 4.2.9. Für dessen Formulierung führen wir für $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$ die Bezeichnung

$$\Psi_n(t) := \iint \mathbf{1}\{t \leq \sum_{i=1}^n g_\varphi(r_{i-1}, r_i, w_i)\} \mathbb{V}^{n+1}(d(r_0, \dots, r_n)) \mathbb{W}^n(d(w_1, \dots, w_n)) \quad (5.2.3)$$

ein. Für das nachfolgende Lemma sind außerdem Voraussetzungen der Form

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\alpha d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty \quad (5.2.4)$$

mit $\alpha \geq 1$ nötig.

Lemma 5.2.6. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$, $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$ und R, R_1, R_2, R_3 stochastisch unabhängige, \mathbb{V} -verteilte Zufallsvariablen, ebenfalls unabhängig von den restlichen Zufallsgrößen. Weiter seien $p \in (1, \infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$.*

- (i) *Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 5q$ existiert eine Konstante $C_1 > 0$, welche nur von $\beta, \mathbb{V}, \varphi, k$ und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}(\Delta_{(x,R)} S_{\varphi,a,G}(A))^4 \leq C_1 \Psi_k(d(x, A))^{1/p} \quad (5.2.5)$$

gilt.

- (ii) *Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 4q$ existiert eine Konstante $C_2 > 0$, welche nur von $\beta, \mathbb{V}, \varphi, k$ und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$*

$$\mathbb{E}|\Delta_{(x,R)} S_{\varphi,a,G}(A)|^3 \leq C_2 \Psi_k(d(x, A))^{1/p} \quad (5.2.6)$$

gilt.

- (iii) Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 3q$ existiert eine Konstante $C_3 > 0$, φ , welche nur von β , \mathbb{V} , φ , k und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1)} S_{\varphi, a, G}(A))^2 (\Delta_{(x_2, R_2)} S_{\varphi, a, G}(A))^2 \leq C_3 \Psi_k(d(x_1, A))^{1/p} \quad (5.2.7)$$

gilt.

- (iv) Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 4q$ existiert eine Konstante $C_4 > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , k und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_2, R_2)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^4 \leq C_4 \Psi_{k+1}(|x_1 - x_2|)^{\frac{1}{2p}} \Psi_{2k+1}(d(x_1, A))^{\frac{1}{2p}} \quad (5.2.8)$$

gilt.

- (v) Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 3q$ existiert eine Konstante $C_5 > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , k und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_2, R_2)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^4 \leq C_5 \Psi_{k+1}(|x_1 - x_2|)^{1/p} \quad (5.2.9)$$

gilt.

- (vi) Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 3q$ existiert eine Konstante $C_6 > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , k und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 \\ \leq C_6 (\Psi_k(d(x_1, A))^{1/p} + \Psi_k(d(x_3, A))^{1/p}) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

gilt.

- (vii) Unter der Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 3q$ existiert eine Konstante $C_7 > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , k und $|a|_\infty$ abhängt, so dass für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$ und alle kompakten Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 \\ \leq C_7 \Psi_{k+1}(|x_1 - x_3|)^{\frac{1}{2p}} \Psi_{k+1}(|x_2 - x_3|)^{\frac{1}{2p}} \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $\beta = 1$ und $|a|_\infty = 1$ voraus. Weiter seien $x, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt.

Mit Gleichung (5.2.1) aus Lemma 5.2.5 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{(x,R)} S_{\varphi,a,G}(A))^4 &\leq \mathbb{E}(\deg((x,R), \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)})) + 1)^4 \mathbb{1}\{(x,R) \xrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)})\} \\ &\leq \mathbb{E}\left(\sum_{(y,r) \in \eta} \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y,r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)})\} + 1\right)^4 \\ &\quad \times \sum_{i=0}^k \sum_{(y_1,r_1), \dots, (y_i,r_i) \in \eta}^{\neq} \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_1,r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_i,r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)}), y_i \in A\}, \end{aligned}$$

wobei für $i = 0$

$$\sum_{(y_1,r_1), \dots, (y_i,r_i) \in \eta}^{\neq} \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_1,r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_i,r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)}), y_i \in A\} = \mathbb{1}\{x \in A\}$$

gilt. Es gibt eine Konstante $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{(x,R)} S_{\varphi,a,G}(A))^4 &\leq N_1 \mathbb{E} \sum_{j=0}^4 \sum_{i=0}^k \sum_{(y_1,r_1), \dots, (y_{i+j}, r_{i+j}) \in \eta}^{\neq} \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_l, r_l) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)})\} \\ &\quad \times \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_i, r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)}), y_i \in A\} \end{aligned}$$

gilt. Für $j \in [4]_0$ und $i \in [k]_0$ verwenden wir die Abkürzung

$$\begin{aligned} B_{i,j} &:= \mathbb{E} \sum_{(y_1,r_1), \dots, (y_{i+j}, r_{i+j}) \in \eta}^{\neq} \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_l, r_l) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)})\} \\ &\quad \times \mathbb{1}\{(x,R) \leftrightarrow (y_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_i, r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,R)}), y_i \in A\}. \end{aligned}$$

Es seien $j \in [4]_0$ und $i \in [k]_0$. Bedingte Erwartungswertbildung, die Gleichung von Mecke und die Konvention $(y_0, r_0) := (x, R)$ liefern

$$\begin{aligned} B_{i,j} &= \int \mathbb{E} \prod_{n=1}^i \varphi((y_{n-1}, r_{n-1}), (y_n, r_n)) \mathbb{1}\{y_i \in A\} \\ &\quad \times \prod_{l=i+1}^{i+j} \varphi((x, R), (y_l, r_l)) \lambda^{i+1}(d((y_1, r_1), \dots, (y_{i+j}, r_{i+j}))) \\ &= \iint \mathbb{E} \prod_{n=1}^i \mathbb{1}\{|y_{n-1} - y_n| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \mathbb{1}\{y_i \in A\} \\ &\quad \times \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbb{1}\{|x - y_l| \leq g_\varphi(R, r_l, w_l)\} \\ &\quad \times \lambda^{i+1}(d((y_1, r_1), \dots, (y_{i+j}, r_{i+j}))) \mathbb{W}^{i+j}(d(w_1, \dots, w_{i+j})) \end{aligned}$$

Für $(y_1, r_1), \dots, (y_i, r_i) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ und $w_1, \dots, w_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{n=1}^i \mathbb{1}\{|y_{n-1} - y_n| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \mathbb{1}\{y_i \in A\} \leq \mathbb{1}\{d(x, A) \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\}.$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} B_{i,j} &\leq \iint \mathbb{E} \prod_{n=1}^i \mathbb{1}\{|y_{n-1} - y_n| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbb{1}\{|x - y_l| \leq g_\varphi(R, r_l, w_l)\} \\ &\quad \times \mathbb{1}\{d(x, A) \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \\ &\quad \times \lambda^{i+j}(\mathbb{d}((y_1, r_1), \dots, (y_{i+j}, r_{i+j}))) \mathbb{W}^{i+j}(\mathbb{d}(w_1, \dots, w_{i+j})) \\ &\leq \kappa_d^{i+j} \iint \prod_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r_0, r_l, w_l)^d \mathbb{1}\{d(x, A) \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \\ &\quad \times \mathbb{V}^{i+j+1}(\mathbb{d}(r_0, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(\mathbb{d}(w_1, \dots, w_{i+j})). \end{aligned}$$

Da \mathbb{W} und \mathbb{V} Verteilungen sind, folgt mit der Ungleichung von Hölder, dass die rechte Seite der vorangegangenen Ungleichung nach oben durch

$$\begin{aligned} &\kappa_d^{i+j} \left(\iint \mathbb{1}\{d(x, A) \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \mathbb{V}^{i+1}(\mathbb{d}(r_0, r_1, \dots, r_i)) \mathbb{W}^i(\mathbb{d}(w_1, \dots, w_i)) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\iint \prod_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^{qd} \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r_0, r_l, w_l)^{qd} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{V}^{i+j+1}(\mathbb{d}(r_0, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(\mathbb{d}(w_1, \dots, w_{i+j})) \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

abgeschätzt werden kann. Wegen $j \leq 4$ taucht die Marke r_0 im Integranden von

$$\begin{aligned} &\iint \prod_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^{qd} \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r_0, r_l, w_l)^{qd} \\ &\quad \times \mathbb{V}^{i+j+1}(\mathbb{d}(r_0, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(\mathbb{d}(w_1, \dots, w_{i+j})) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

in höchstens fünf verschiedenen Faktoren auf. Die restlichen Marken r_1, \dots, r_{i+j} sind nur in maximal zwei Faktoren vertreten. Eine Fallunterscheidung hinsichtlich der Größen der Marken r_0, r_1, \dots, r_{i+j} , die Monotonie von g_φ (in den ersten beiden Argumenten) und Lemma 2.1.1 liefern, dass (5.2.13) unter der Bedingung

$$\iint g_\varphi(r, r, w) \mathbb{V}(\mathrm{d}r)^{5qd} \mathbb{W}(\mathrm{d}w) < \infty$$

endlich ist. Da der Ausdruck (5.2.13) außerdem weder von A , noch von x abhängt, folgt mit

der oberen Schranke aus (5.2.12) die Existenz einer positiven Konstanten $C_1 > 0$ mit

$$\mathbb{E}(\Delta_{(x,R)} S_{\varphi,a,G}(A))^4 \leq C_1 \Psi_k(d(x,A))^{1/p}$$

und damit die Ungleichung aus (i).

Die Ungleichung (ii) kann mit einer analogen Argumentation gezeigt werden. Da in (5.2.6) im Erwartungswert die dritte (statt der vierten Potenz aus (5.2.5)) auftaucht, ergibt sich in Anlehnung zur Abschätzung von (5.2.13) die Voraussetzung (5.2.4) mit $\alpha = 4q$.

Für die behauptete Ungleichung (5.2.7) aus (iii) folgt mit der Abschätzung (5.2.1) aus Lemma 5.2.5

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{(x_1,R_1)} S_{\varphi,a,G}(A))^2 (\Delta_{(x_2,R_2)} S_{\varphi,a,G}(A))^2 \\ & \leq \mathbb{E}(\deg((x_1, R_1), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)})) + 1)^2 (\deg((x_2, R_2), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2,R_2)})) + 1)^2 \\ & \quad \times \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)})\}. \end{aligned}$$

Es kann weiter wie im Beweis der Ungleichung (5.2.5) aus (i) vorgegangen werden.

Um die Ungleichung (5.2.8) zu zeigen, verwenden wir zunächst die Abschätzung (5.2.2) aus Lemma 5.2.5, womit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{(x_1,R_1),(x_2,R_2)}^2 S_{\varphi,a,G}(A))^4 \\ & \leq \mathbb{E}(2 \deg((x_1, R_1), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)})) + 3)^2 (2 \deg((x_2, R_2), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2,R_2)})) + 3)^2 \\ & \quad \times \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k+1} (x_2, R_2) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1),(x_2,R_2)})\} \\ & \quad \times \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)}) \\ & \quad \text{oder } (x_2, R_2) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2,R_2)})\} \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

folgt. Weiter kann die rechte Seite der letzten Ungleichung nach oben durch folgenden Ausdruck abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(2 \sum_{(y,r) \in \eta} \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \leftrightarrow (y, r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)})\} + 3 \right)^2 \\ & \times \left(2 \sum_{(y,r) \in \eta} \mathbb{1}\{(x_2, R_2) \leftrightarrow (y, r) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2,R_2)})\} + 3 \right)^2 \\ & \times \sum_{i=0}^k \sum_{(y_1,r_1), \dots, (y_i,r_i) \in \eta}^{\neq} \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \leftrightarrow (y_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (y_i, r_i) \leftrightarrow (x_2, R_2) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1),(x_2,R_2)})\} \\ & \times \sum_{j=0}^k \sum_{(z_1,\tilde{r}_1), \dots, (z_j,\tilde{r}_j) \in \eta}^{\neq} [\mathbb{1}\{(x_1, R_1) \leftrightarrow (z_1, \tilde{r}_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (z_j, \tilde{r}_j) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1,R_1)})\} \mathbb{1}\{z_j \in A\} \\ & \quad + \mathbb{1}\{(x_2, R_2) \leftrightarrow (z_1, \tilde{r}_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (z_j, \tilde{r}_j) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2,R_2)})\} \mathbb{1}\{z_j \in A\}] \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Mit einer einfachen kombinatorischen Überlegung folgt die Existenz einer Zahl $N_4 \in \mathbb{N}$, so dass

der vorangegangene Erwartungswert, nach Anwendung der Mecke-Formel, nach oben durch

$$\begin{aligned}
& N_4 \sum_{l_1, l_2=0}^2 \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \int \mathbb{E} \prod_{n_1=1}^{l_1} \varphi((x_1, R_1), (v_{n_1}, \hat{r}_{n_1})) \prod_{n_2=l_1+1}^{l_1+l_2} \varphi((x_2, R_2), (v_{n_2}, \hat{r}_{n_2})) \\
& \times \prod_{n=1}^{i+1} \varphi((y_{n-1}, r_{n-1}), (y_n, r_n)) \prod_{m=1}^j \varphi((z_{m-1}, \tilde{r}_{m-1}), (z_m, \tilde{r}_m)) \mathbb{1}\{z_j \in A\} \\
& \times \lambda^{l_1+l_2+i+j} (d((v_1, \hat{r}_1), \dots, (v_{l_1+l_2}, \hat{r}_{l_1+l_2}), (y_1, r_1), \dots, (y_i, r_i), (z_1, \tilde{r}_1), \dots, (z_j, \tilde{r}_j))) \quad (5.2.16)
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden kann, wobei die Konventionen $(y_0, r_0) := (x_1, R_1)$, $(y_{i+1}, r_{i+1}) := (x_2, R_2)$ und $(z_0, \tilde{r}_0) := (y_l, r_l)$ verwendet wurden, um die Schreibweise zu vereinfachen. Diese Abkürzungen kommen auch in den folgenden Ausdrücken zum Einsatz. Für $l_1, l_2 \in [2]_0$, $i \in [k]_0$, $l \in [i+1]_0$ und $j \in [k]_0$ ist das Integral unter den Summen aus (5.2.16) gegeben durch

$$\begin{aligned}
& \iint \mathbb{E} \prod_{n_1=1}^{l_1} \mathbb{1}\{|x_1 - v_{n_1}| \leq g_\varphi(R_1, \hat{r}_{n_1}, \hat{w}_{n_1})\} \prod_{n_2=l_1+1}^{l_1+l_2} \mathbb{1}\{|x_2 - v_{n_2}| \leq g_\varphi(R_2, \hat{r}_{n_2}, \hat{w}_{n_2})\} \\
& \times \prod_{n=1}^{i+1} \mathbb{1}\{|y_{n-1} - y_n| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \prod_{m=1}^j \mathbb{1}\{|z_{m-1} - z_m| \leq g_\varphi(\tilde{r}_{m-1}, \tilde{r}_m, \tilde{w}_m)\} \mathbb{1}\{z_j \in A\} \\
& \times \lambda^{l_1+l_2+i+j} (d((v_1, \hat{r}_1), \dots, (v_{l_1+l_2}, \hat{r}_{l_1+l_2}), (y_1, r_1), \dots, (y_i, r_i), (z_1, \tilde{r}_1), \dots, (z_j, \tilde{r}_j))) \\
& \times \mathbb{W}^{l_1+l_2+i+j+1} (d(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{l_1+l_2}, w_1, \dots, w_{i+1}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j)) \\
& \leq \kappa_d^{l_1+l_2+i+j} \iint \mathbb{E} \mathbb{1}\{|x_1 - x_2| \leq \sum_{n=1}^{i+1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \\
& \times \mathbb{1}\{d(x_1, A) \leq \sum_{n=1}^{i+1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n) + \sum_{m=1}^j g_\varphi(\tilde{r}_{m-1}, \tilde{r}_m, \tilde{w}_m)\} \\
& \times \prod_{n_1=1}^{l_1} g_\varphi(R_1, \hat{r}_{n_1}, \hat{w}_{n_1})^d \prod_{n_2=l_1+1}^{l_1+l_2} g_\varphi(R_2, \hat{r}_{n_2}, \hat{w}_{n_2})^d \prod_{n=1}^{i+1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{m=1}^j g_\varphi(\tilde{r}_{m-1}, \tilde{r}_m, \tilde{w}_m)^d \\
& \times \mathbb{V}^{l_1+l_2+i+j} (d(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{l_1+l_2}, r_1, \dots, r_i, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_j)) \\
& \times \mathbb{W}^{l_1+l_2+i+j+1} (d(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{l_1+l_2}, w_1, \dots, w_{i+1}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j)). \quad (5.2.17)
\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Hölder, der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und unter Verwendung der Abkürzung

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_4 & := \left(\iint \mathbb{E} \prod_{n_1=1}^{l_1} g_\varphi(R_1, \hat{r}_{n_1}, \hat{w}_{n_1})^{qd} \prod_{n_2=l_1+1}^{l_1+l_2} g_\varphi(R_2, \hat{r}_{n_2}, \hat{w}_{n_2})^{qd} \prod_{n=1}^{i+1} g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^{qd} \right. \\
& \times \prod_{m=1}^j g_\varphi(\tilde{r}_{m-1}, \tilde{r}_m, \tilde{w}_m)^{qd} \mathbb{V}^{l_1+l_2+i+j} (d(\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_{l_1+l_2}, r_1, \dots, r_i, \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_j)) \\
& \left. \times \mathbb{W}^{l_1+l_2+i+j+1} (d(\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{l_1+l_2}, w_1, \dots, w_{i+1}, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_j)) \right)^{1/q}
\end{aligned}$$

erhalten wir folgende obere Schranke für die rechte Seite von (5.2.17)

$$\kappa_d^{l_1+l_2+i+j} \tilde{C}_4 \tilde{\Psi}_k(|x_1 - x_2|)^{\frac{1}{2p}} \Psi_{2k+1}(d(x_1, A))^{\frac{1}{2p}}.$$

Im Integranden von \tilde{C}_4 taucht jede der Marken in höchstens vier Faktoren auf. Wie bei der Abschätzung von (5.2.13) folgt somit, dass \tilde{C}_4 unter der Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, r, w) \mathbb{V}(dr)^{4qd} \mathbb{W}(dw) < \infty$$

endlich ist. Weiterhin hängt \tilde{C}_4 weder von A , noch von x_1 und x_2 ab, was den Beweis von Ungleichung (5.2.8) beendet.

Um Ungleichung (5.2.9) zu zeigen, schätzen wir in (5.2.14) den Indikator

$$\mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1, R_1)}) \text{ oder } (x_2, R_2) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2, R_2)})\}$$

nach oben durch eins ab. Anschließend kann wie im Beweis der Ungleichung (5.2.8) argumentiert werden, wobei sich einige Ausdrücke durch das Fehlen des genannten Indikators vereinfachen.

Für den Beweis von Ungleichung (5.2.10) liefert die Ungleichung (5.2.2) aus Lemma 5.2.5

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 \\ & \leq \mathbb{E}(2 \deg((x_1, R_1), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1, R_1)})) + 3)^2 (2 \deg((x_2, R_2), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2, R_2)})) + 3)^2 \\ & \quad \times \left(\mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1, R_1)})\} \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{1}\{(x_3, R_3) \xleftrightarrow{\leq k} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_3, R_3)})\} \right). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Für jeden der beiden Summanden aus der rechten Seite von (5.2.18) kann jeweils analog zum Beweis von Ungleichung (5.2.8) aus (iv) argumentiert werden. Auch beim Beweis von (5.2.11) aus (vii) folgt mit der Ungleichung (5.2.2) aus Lemma 5.2.5

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 S_{\varphi, a, G}(A))^2 \\ & \leq \mathbb{E}(2 \deg((x_1, R_1), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1, R_1)})) + 3)^2 (2 \deg((x_2, R_2), \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2, R_2)})) + 3)^2 \\ & \quad \times \mathbb{1}\{(x_1, R_1) \xleftrightarrow{\leq k+1} (x_3, R_3) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)})\} \\ & \quad \times \mathbb{1}\{(x_2, R_2) \xleftrightarrow{\leq k+1} (x_3, R_3) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)})\}. \end{aligned}$$

Die weitere Argumentation ist ebenfalls analog zu der im Beweis von Ungleichung (5.2.8). \square

Lemma 5.2.7. *Es seien $\alpha \in (0, 1]$ und Z eine $[0, \infty)$ -wertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}Z^{\frac{d}{\alpha}+1} < \infty$. Dann gilt*

$$\int \mathbb{P}(|x| \leq Z)^\alpha dx < \infty \quad (5.2.19)$$

und es gibt eine monoton fallende Funktion $h: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $h(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, so

dass für alle $A \in \mathcal{K}^d$

$$\frac{1}{\lambda_d(A)} \int \mathbb{P}(d(x, A) \leq Z)^\alpha dx \leq 1 + h(r(A)) \quad (5.2.20)$$

gilt.

Beweis. Für $s, t > 0$ gilt

$$\mathbb{1}\{t \leq Z\} = \mathbb{1}\{t \leq Z\} Z^s Z^{-s} \leq \mathbb{1}\{t \leq Z\} Z^s t^{-s} \leq Z^s t^{-s}.$$

Mit der letzten Abschätzung und der Wahl $s := \frac{d}{\alpha} + 1$ folgt

$$\begin{aligned} \int \mathbb{P}(|x| \leq Z)^\alpha dx &= d\kappa_d \int_0^\infty t^{d-1} \mathbb{P}(t \leq Z)^\alpha dt \\ &\leq d\kappa_d \left(1 + \int_1^\infty t^{d-1} \mathbb{P}(t \leq Z)^\alpha dt \right) \\ &\leq d\kappa_d \left(1 + (\mathbb{E}Z^s)^\alpha \int_1^\infty t^{d-1-s\alpha} dt \right). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\mathbb{E}Z^s = \mathbb{E}Z^{\frac{d}{\alpha}+1} < \infty$ gilt und wegen der Ungleichung $d - 1 - s\alpha = -1 - \alpha < -1$, folgt

$$(\mathbb{E}Z^s)^\alpha \int_1^\infty t^{d-1-s\alpha} dt < \infty.$$

Damit ist (5.2.19) gezeigt. Außerdem folgt die Aussage (5.2.20) direkt aus Lemma 4.2.10 mit der Wahl $\chi(t) := \mathbb{P}(t \leq Z)$, $t \geq 0$. \square

Obiges Lemma kommt im nachfolgenden Beweis der Theoreme 5.2.3 und 5.2.4 zum Einsatz, wo es unter Anderem zur Abschätzung von Ausdrücken der Form

$$\int \Psi_n(|x|)^{1/k} dx, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

verwendet wird, siehe Definition (5.2.3). Mit der Ungleichung von Minkowski erhalten wir, dass dabei die Voraussetzungen von Lemma 5.2.7 unter der Bedingung

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{kd+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

erfüllt sind.

Die bisher in diesem Abschnitt gezeigten Lemmata ermöglichen uns die Beweise der Theoreme 5.2.3 und 5.2.4 zu führen.

Beweis von Theorem 5.2.3 und Theorem 5.2.4. Die beiden Theoreme beruhen auf Theorem 3.5.2 und der Varianzabschätzung aus Korollar 5.1.5.

Nach Korollar 5.1.5 existieren positive Konstanten $c > 0$ und $\tau > 0$, so dass

$$\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A) \geq c\lambda_d(A) \quad (5.2.21)$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ mit $r(A) \geq \tau$ gilt.

Im Folgenden sei $A \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper mit $r(A) \geq \tau$. Wir verwenden die Abkürzungen

$$\tilde{F} := S_{\varphi,a,G}(A) \quad \text{und} \quad F := \frac{S_{\varphi,a,G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi,a,G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi,a,G}(A)}}.$$

und $k := \max\{|G_1|, \dots, |G_m|\}$.

Da \mathbb{P} -fast sicher $|\tilde{F}| \leq |a|_\infty \eta(A \times [0, \infty))$ gilt und wegen $\lambda_d(A) < \infty$ folgt, dass alle Momente von \tilde{F} (und damit auch von F) existieren. Somit ist die Voraussetzung $\mathbb{E}F^4 < \infty$ von Theorem 3.5.2 erfüllt.

Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ die Ausdrücke aus Definition 3.5.1, basierend auf dem Funktional F und dem Intensitätsmaß $\lambda = \beta \lambda_d \otimes \mathbb{V}$ von η . Wie im Beweis der Theoreme 4.2.4 und 4.2.6 werden wir die Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ und die Integrale aus den Voraussetzungen (3.5.1) und (3.5.2) zunächst für das nicht-standardisierte Funktional \tilde{F} betrachten. Aufgrund der Linearität der Differenzenoperatoren (vergleiche hierzu (4.2.22)) und die folgende Argumentation) und der Varianzabschätzung (5.2.21) erhalten wir die gewünschten Abschätzungen auch für das Funktional F .

Es seien C_1, \dots, C_7 die Konstanten aus Lemma 5.2.6 und R, R_1, R_2, R_3 stochastisch unabhängige und \mathbb{V} -verteilte Zufallsvariablen, ebenfalls unabhängig von den restlichen Zufallsgrößen. Zur Vereinfachung setzen wir im Folgenden $\beta = 1$ voraus.

Mit der mehrfachen Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz, den Ungleichungen (5.2.5) und (5.2.9) aus Lemma 5.2.6 und $\Psi_n(t) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, folgt

$$\begin{aligned} & \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, r_1)} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, r_2)} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, r_1), (x_3, r_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \\ & \quad \times \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, r_2), (x_3, r_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \lambda^3(d((x_1, r_1), (x_2, r_2), (x_3, r_3))) \\ & \leq \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1)} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, R_2)} \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} \\ & \quad \times \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/4} d(x_1, x_2, x_3) \\ & \leq \sqrt{C_1 C_5} \int \Psi_k(d(x_1, A))^{1/9} \Psi_k(d(x_2, A))^{1/9} \Psi_{k+1}(|x_1 - x_3|)^{1/7} d(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Dabei wurde in Ungleichung (5.2.5) $p = 9/4$ und in Ungleichung (5.2.9) $p = 7/4$ gewählt. Mit Lemma 5.2.7 folgt die Endlichkeit der rechten Seite von (5.2.22). Wegen der Linearität des Differenzenoperators (siehe auch (4.2.22)) und (5.2.21) folgt, dass (5.2.22) auch für das Funktional F erfüllt ist und somit die Voraussetzung (3.5.1) von Theorem 3.5.2 gegeben ist.

Unter Verwendung der Ungleichungen (5.2.8) und (5.2.9) aus Lemma 5.2.6 liefert eine zu (5.2.22) analoge Argumentation

$$\begin{aligned} & \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, r_1), (x_3, r_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, r_2), (x_3, r_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} \lambda^3(d((x_1, r_1), (x_2, r_2), (x_3, r_3))) \\ & \leq \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^4 \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{C_4 C_5} \int \Psi_{k+1}(|x_1 - x_3|)^{\frac{1}{8}} \Psi_{2k+1}(d(x_1, A))^{\frac{1}{8}} \Psi_{k+1}(|x_2 - x_3|)^{\frac{1}{5}} d(x_1, x_2, x_3). \quad (5.2.23)$$

Hierbei wurde in Ungleichung (5.2.8) $p = 2$ und in Ungleichung (5.2.9) $p = 5/2$ gewählt. Mit den bereits bei (5.2.22) genannten Argumenten folgt, dass die Voraussetzung (3.5.2) von Theorem 3.5.2 erfüllt ist.

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert, dass für die Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ folgende Ungleichungen gelten

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\leq 2 \left[\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1)} F)^2 (\Delta_{(x_2, R_2)} F)^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 F)^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 F)^2 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \times d(x_1, x_2, x_3) \right]^{1/2}, \\ \gamma_2 &\leq \left[\int \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 F)^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 F)^2 d(x_1, x_2, x_3) \right]^{1/2}, \\ \gamma_3 &\leq \int \mathbb{E}|\Delta_{(x, R)} F|^3 dx, \\ \gamma_4 &\leq \frac{1}{2} [\mathbb{E}F^4]^{1/4} \int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x, R)} F)^4 \right]^{3/4} dx, \\ \gamma_5 &\leq \left[\int \mathbb{E}(\Delta_{(x, R)} F)^4 dx \right]^{1/2}, \\ \gamma_6 &\leq \left[\int 6 [\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1)} F)^4]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_2, R_2)}^2 F)^4 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + 3 \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_2, R_2)}^2 F)^4 d(x_1, x_2) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der vorangegangenen sechs Ungleichungen werden im Folgenden mit \tilde{F} anstelle von F nach oben abgeschätzt. Mit den zu Beginn des Beweises geschilderten Methoden erhalten wir dann jeweils die erforderlichen Abschätzungen von $\gamma_1, \dots, \gamma_6$.

Die Ungleichungen (5.2.7) mit $p = 5/2$ und (5.2.11) mit $p = 7/4$ aus Lemma 5.2.6 liefern

$$\begin{aligned} &\int \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1)} \tilde{F})^2 (\Delta_{(x_2, R_2)} \tilde{F})^2 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^2 \right]^{1/2} d(x_1, x_2, x_3) \\ &\leq \sqrt{C_3 C_7} \int \Psi_k(d(x_1, A))^{1/5} \Psi_{k+1}(|x_1 - x_3|)^{1/7} \Psi_{k+1}(|x_2 - x_3|)^{1/7} d(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Es folgt mit Lemma 5.2.7, dass die rechte Seite der vorangegangenen Ungleichung durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ nach oben abgeschätzt werden kann und damit die Abschätzung $\gamma_1 \leq c_1 \lambda_d(A)^{-1/2}$ für ein $c_1 > 0$.

Mit $p = 5/2$ in Ungleichung (5.2.10) und $p = 7/4$ in Ungleichung (5.2.11) und (4.2.21) folgt

$$\begin{aligned} &\int \mathbb{E}(\Delta_{(x_1, R_1), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^2 (\Delta_{(x_2, R_2), (x_3, R_3)}^2 \tilde{F})^2 d(x_1, x_2, x_3) \\ &\leq \sqrt{C_6 C_7} \sum_{i \in \{1, 3\}} \int \Psi_k(d(x_i, A))^{1/5} \Psi_{k+1}(|x_1 - x_3|)^{1/7} \Psi_{k+1}(|x_2 - x_3|)^{1/7} d(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.2.7 ist die rechte Seite der letzten Ungleichung nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ beschränkt, womit $\gamma_2 \leq c_2 \lambda_d(A)^{-1/2}$ für ein $c_2 > 0$ folgt.

Ungleichung (5.2.6) mit $p = 5$ impliziert

$$\int \mathbb{E} |\Delta_{(x,R)} \tilde{F}|^3 dx \leq C_2 \int \Psi_k(d(x, A))^{1/5} dx.$$

Wie zuvor folgt $\gamma_3 \leq c_3 \lambda_d(A)^{-1/2}$ für ein $c_3 > 0$.

Für die Abschätzung von γ_4 ist es notwendig auch $\mathbb{E} F^4$ geeignet abzuschätzen, wozu Lemma 3.5.4 verwendet werden kann. Die Ungleichung von Jensen und (5.2.5) mit $p = 7/2$ liefern

$$\int \left[\mathbb{E} (\Delta_{(x,r)} \tilde{F})^4 \right]^{1/2} \lambda(d(x, r)) \leq \int \left[\mathbb{E} (\Delta_{(x,R)} \tilde{F})^4 \right]^{1/2} dx \leq \sqrt{C_1} \int \Psi_k(d(x, A))^{1/7} dx,$$

beziehungsweise mit $p = 6$

$$\int \mathbb{E} (\Delta_{(x,R)} \tilde{F})^4 dx \leq C_1 \int \Psi_k(d(x, A))^{1/6} dx.$$

Nach Lemma 5.2.7 sind die beiden rechten Seiten der beiden letzten Ungleichungen nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ beschränkt. Damit folgt aus Lemma 3.5.4, dass $\mathbb{E} F^4$ durch eine positive Konstante abgeschätzt werden kann, welche nicht von $\lambda_d(A)$ abhängt. Weiter folgt mit der Wahl $p = 19/4$ in Ungleichung (5.2.5) und $\Psi_n(t) \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\int \left[\mathbb{E} (\Delta_{(x,R)} \tilde{F})^4 \right]^{3/4} dx \leq C_1^{3/4} \int \Psi_k(d(x, A))^{3/19} dx \leq C_1^{3/4} \int \Psi_k(d(x, A))^{1/7} dx.$$

Eine abermalige Anwendung von 5.2.7 liefert, dass die rechte Seite der letzten Ungleichung nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ abgeschätzt werden kann, womit insgesamt $\gamma_4 \leq c_4 \lambda_d(A)^{-1/2}$ für ein $c_4 > 0$ folgt.

Der Term γ_5 kann analog zu γ_3 oder γ_4 abgeschätzt werden. Auch hier gilt $\gamma_5 \leq c_5 \lambda_d(A)^{-1/2}$ für ein $c_5 > 0$.

Mit der Ungleichung (5.2.5) und $p = 7/2$, beziehungsweise (5.2.9) und $p = 5/2$ folgt

$$\begin{aligned} & \int \left[\mathbb{E} (\Delta_{(x_1, R_1)} F)^4 \right]^{1/2} \left[\mathbb{E} (\Delta_{(x_1, R_1), (x_2, R_2)}^2 F)^4 \right]^{1/2} d(x_1, x_2) \\ & \leq \sqrt{C_1 C_5} \int \Psi_k(d(x_1, A))^{1/7} \Psi_{k+1}(|x_1 - x_2|)^{1/5} d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Wie in allen vorangegangenen Fällen kann diese obere Schranke mit Lemma 5.2.7 nach oben durch ein positives Vielfaches von $\lambda_d(A)$ abgeschätzt werden, was schließlich $\gamma_6 \leq c_6 \lambda_d(A)^{-1/2}$ mit $c_6 > 0$ liefert.

Abschließend beendet eine Anwendung von Theorem 3.5.2 den Beweis. \square

Unter Einsatz der Varianzabschätzung aus Theorem 5.1.9 ist es möglich eine alternative Version des univariaten zentralen Grenzwertsatzes aus Theorem 5.2.3 zu formulieren. Dieser kommt mit geringeren Voraussetzungen an die Verbindungsfunktion aus, die insbesondere unabhängig vom größten Knotengrad der gezählten Graphen sind. Die schwächeren Vorausset-

zungen werden jedoch durch den Verzicht auf negative Einträge im Vektor der Koeffizienten $a \in \mathbb{R}^m$ erkauft.

Wir verweisen an dieser Stelle auch auf die Diskussion vor Theorem 5.1.9, wo die Unterschiede der verschiedenen Herangehensweisen näher beleuchtet werden.

Theorem 5.2.8. *Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in [0, \infty)^m$ mit $a \neq 0$. Weiterhin gelte*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{9d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ , a und G abhängt, so dass

$$d_K \left(\frac{S_{\varphi, a, G}(A) - \mathbb{E}S_{\varphi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var } S_{\varphi, a, G}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ gilt.

Der Beweis des Theorems verläuft analog zum Beweis von Theorem 5.2.3. Allerdings verwenden wir zum Abschätzen der Varianz das Theorem 5.1.9 anstelle von Theorem 5.1.3. Dies hat die geänderten Voraussetzungen zur Folge.

Die folgenden Korollare sind direkte Folgerungen aus Theorem 5.2.8. Diese lassen sich auch mit Hilfe von Theorem 5.2.3 formulieren, allerdings unter stärkeren Voraussetzungen.

Korollar 5.2.9. *Es sei $G \in \mathbf{G}_\varphi$ und es gelte*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{9d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ und G abhängt, so dass

$$d_K \left(\frac{\eta_{\varphi, G}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, G}(A)}{\sqrt{\text{Var } \eta_{\varphi, G}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ gilt.

Korollar 5.2.10. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{9d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von β , \mathbb{V} , φ und k abhängt, so dass

$$d_K \left(\frac{\eta_{\varphi, k}(A) - \mathbb{E}\eta_{\varphi, k}(A)}{\sqrt{\text{Var } \eta_{\varphi, k}(A)}}, N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda_d(A)}}$$

für alle $A \in \mathcal{K}^d$ gilt.

Bemerkung 5.2.11. Analog zu Theorem 5.2.3 (siehe auch Theorem 5.2.4) gelten die Aussagen

des Theorems 5.2.8 und der Korollare 5.2.9 und 5.2.10 auch, wenn anstelle der Kolmogorov-Distanz d_K die Wasserstein-Distanz d_1 verwendet wird.

5.3. GESAMTKOMPONENTENZAHL

In Anlehnung an das Vorgehen im unmarkierten Modell, werden wir in diesem Abschnitt einen zentralen Grenzwertsatz für die Gesamtzahl aller endlichen Komponenten formulieren und beweisen. Dazu sei η ein Poisson-Prozess auf $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß $\lambda := \beta \lambda_d \otimes \mathbb{V}$ und $\beta > 0$. Weiterhin sei eine Verbindungsfunktion $\varphi: (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^2 \rightarrow [0, 1]$ vorgegeben, welche (5.0.1) genügt.

Entsprechend zu den Definitionen aus Abschnitt 4.3 sei

$$\bar{\eta}_\varphi := \{((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \in \eta^k : k \in \mathbb{N}, x_1 \prec \dots \prec x_k \text{ und} \\ G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \text{ ist eine Komponente von } \Gamma_\varphi(\eta)\}.$$

der Prozess aller endlichen Komponenten in $\Gamma_\varphi(\eta)$ und für $A \in \mathcal{B}_d$ sei

$$\bar{\eta}_\varphi(A) := |\{((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \in \bar{\eta}_\varphi : x_1, \dots, x_k \in A\}|$$

die Anzahl aller endlichen Komponenten von $\Gamma_\varphi(\eta)$, deren Knoten sämtlich in A liegen. Für einen vorgegebenen Graphen $G \in \mathbf{G}$ sei weiterhin

$$\tilde{\eta}_{\varphi, G} := \{((x_1, r_1), \dots, (x_{|G|}, r_{|G|})) \in \bar{\eta}_\varphi : G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_{|G|}, r_{|G|})\}, \Gamma_\varphi(\eta)) \simeq G\}$$

der Prozess aller zu G isomorpher Komponenten von $\Gamma_\varphi(\eta)$ und für gegebenes $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, k} := \bigcup_{G \in \mathbf{G}, |G|=k} \tilde{\eta}_{\varphi, G} = \bar{\eta}_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^k$$

der Prozess aller Komponenten der Größe k . Schließlich definieren wir für $G \in \mathbf{G}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, G}(A) := |\{((x_1, r_1), \dots, (x_{|G|}, r_{|G|})) \in \tilde{\eta}_{\varphi, G} : x_1, \dots, x_{|G|} \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}_d$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\eta}_{\varphi, k}(A) := |\{((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \in \bar{\eta}_\varphi : x_1, \dots, x_k \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}_d,$$

jeweils die Anzahl aller Komponenten aus $\tilde{\eta}_{\varphi, G}$ und $\tilde{\eta}_{\varphi, k}$, deren Knoten vollständig in einer gegebenen konvexen Menge $A \in \mathcal{K}^d$ liegen.

Wir zeigen in diesem Abschnitt folgenden zentralen Grenzwertsatz.

Theorem 5.3.1. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^k \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann existiert der Grenzwert

$$\sigma_{\varphi,\varphi} := \lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \bar{\eta}_{\varphi}(A)}{\lambda_d(A)} \quad (5.3.1)$$

mit $\sigma_{\varphi,\varphi} \in (0, \infty)$ und ist gegeben durch $\sigma_{\varphi,\varphi} = \sum_{i,j=1}^{\infty} \sigma_{\varphi,\varphi}^{(i,j)}$. Außerdem gilt

$$\frac{\bar{\eta}_{\varphi}(A) - \mathbb{E}\bar{\eta}_{\varphi}(A)}{\sqrt{\text{Var } \bar{\eta}_{\varphi}(A)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty,$$

wobei N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Bei obiger Verteilungskonvergenz gilt sogar Konvergenz in der Wasserstein-Distanz d_1 .

Das grundsätzliche Vorgehen beim Beweis des obigen Theorems entspricht dem von Abschnitt 4.3. Auch hier werden wir das Theorem zunächst mit mehreren Lemmata vorbereiten und dazu für den Rest des Abschnitts zur Vereinfachung $\beta = 1$ annehmen.

Lemma 5.3.2. *Unter der Voraussetzung*

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{3d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

gilt für alle $G \in \mathbf{G}$

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))}{\lambda_d(A)} = 0.$$

Beweis. Es seien $G \in \mathbf{G}$, $k := |G|$ und $A \in \mathcal{K}^d$. Wie im Beweis von Lemma 4.3.2 stellen wir zunächst fest, dass sowohl $\mathbb{E}\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A)^2 < \infty$ als auch $\mathbb{E}\eta_{\varphi,G}(A)^2 < \infty$ gelten, da die Größen $\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A)$ und $\eta_{\varphi,G}(A)$ nach oben durch die Poisson-verteilte Zufallsvariable $\eta(A \times [0, \infty))$ beschränkt sind. Die Ungleichung von Poincaré aus Theorem 3.4.1 liefert

$$\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A)) \leq \int \mathbb{E}(\Delta_{(x,r)}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A)))^2 \lambda(d(x,r)). \quad (5.3.2)$$

Wie im Beweis von Lemma 4.3.2 gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$|\Delta_{(x,r)}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))| \leq \deg((x,r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})) \mathbf{1}\{(x,r) \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A^c \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})\}$$

für $(x,r) \in A \times [0, \infty)$, beziehungsweise für $(x,r) \in A^c \times [0, \infty)$

$$|\Delta_{(x,r)}(\tilde{\eta}_{\varphi,G}(A) - \eta_{\varphi,G}(A))| \leq \deg((x,r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})) \mathbf{1}\{(x,r) \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})\}.$$

Folglich ist die rechte Seite von (5.3.2) nach oben durch

$$\begin{aligned} & \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \deg((x,r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)}))^2 \mathbf{1}\{(x,r) \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A^c \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})\} \lambda(d(x,r)) \\ & + \int_{A^c \times [0, \infty)} \mathbb{E} \deg((x,r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)}))^2 \mathbf{1}\{(x,r) \overset{\leq k}{\longleftrightarrow} A \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x,r)})\} \lambda(d(x,r)) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

beschränkt. In den folgenden Gleichungen und Abschätzungen gelte $(x_0, r_0) := (x, r)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \deg((x, r), \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)}))^2 \mathbf{1}\{(x, r) \xleftrightarrow{\leq k} A^c \times [0, \infty) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\} \lambda(d(x, r)) \\
& \leq \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \left(\sum_{(y,s) \in \eta} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (y, s) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\} \right)^2 \\
& \quad \times \sum_{i=1}^k \sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_i, r_i) \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)}), x_i \in A^c\} \lambda(d(x, r)) \\
& = \sum_{i=1}^k \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \sum_{(y_1, s_1), (y_2, s_2) \in \eta} \mathbf{1}\{(y_1, s_1) \leftrightarrow (x, r) \leftrightarrow (y_2, s_2) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\} \\
& \quad \times \sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_i, r_i) \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)}), x_i \in A^c\} \lambda(d(x, r)) \\
& \leq c \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^k \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_{i+j}, r_{i+j}) \in \eta}^{\neq} \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (x_l, r_l) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (x_1, r_1) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (x_i, r_i) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)}), x_i \in A^c\} \lambda(d(x, r)) \\
& = c \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^k \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} \sum_{(x_1, r_1), \dots, (x_{i+j}, r_{i+j}) \in \eta}^{\neq} \mathbf{1}\{x_i \in A^c\} \prod_{l=i+1}^{i+j} \varphi((x, r), (x_l, r_l)) \\
& \quad \times \prod_{n=1}^i \varphi((x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_n)) \lambda(d(x, r)) \\
& = c \sum_{j=0}^2 \sum_{i=1}^k \int \mathbf{1}\{x \in A, x_i \in A^c\} \prod_{n=1}^i \varphi((x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_n)) \prod_{l=i+1}^{i+j} \varphi((x, r), (x_l, r_l)) \\
& \quad \times \lambda^{i+j+1}(d((x, r), (x_1, r_1), \dots, (x_{i+j}, r_{i+j})))
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{N}$. Weiter erhalten wir für $i \in [k]$ und $j \in [2]_0$

$$\begin{aligned}
B_{i,j} & := \int \mathbf{1}\{x \in A, x_i \in A^c\} \prod_{n=1}^i \varphi((x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_n)) \prod_{l=i+1}^{i+j} \varphi((x, r), (x_l, r_l)) \\
& \quad \times \lambda^{i+j+1}(d((x, r), (x_1, r_1), \dots, (x_{i+j}, r_{i+j}))) \\
& = \iint \prod_{n=1}^i \mathbf{1}\{|x_n - x_{n-1}| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \prod_{l=i+1}^{i+j} \mathbf{1}\{|x - x_l| \leq g_\varphi(r, r_l, w_l)\} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{x \in A, x_i \in A^c\} \mathbb{W}^{i+j}(d(w_1, \dots, w_{i+j})) \lambda^{i+j+1}(d((x, r), (x_1, r_1), \dots, (x_{i+j}, r_{i+j}))).
\end{aligned}$$

Für $(x, r), (x_1, r_1), \dots, (x_i, r_i) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ und $w_1, \dots, w_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\prod_{n=1}^i \mathbf{1}\{|x_n - x_{n-1}| \leq g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} \leq \mathbf{1}\{|x - x_i| \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\}.$$

Integration über x_1, \dots, x_{i-1} und x_{i+1}, \dots, x_{i+j} liefert

$$\begin{aligned} B_{i,j} &\leq \kappa_d^{i+j-1} \iint \prod_{n=2}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r, r_l, w_l)^d \\ &\quad \times \int \mathbf{1}\{x \in A, x_i \in A^c\} \mathbf{1}\{|x - x_i| \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} d(x, x_i) \\ &\quad \times \mathbb{V}^{i+j+1}(d(r, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(d(w_1, \dots, w_{i+j})). \end{aligned}$$

Für $t \geq 0$ und $\tau > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \int_A \int_{A^c} \mathbf{1}\{|x - y| \leq t\} dy dx &= \int_A \int_{A^c} \mathbf{1}\{d(x, \partial A) \leq \tau\} \mathbf{1}\{|x - y| \leq t\} dy dx \\ &\quad + \int_A \int_{A^c} \mathbf{1}\{d(x, \partial A) > \tau\} \mathbf{1}\{|x - y| \leq t\} dy dx \\ &\leq \lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) \leq \tau\}) \int \mathbf{1}\{|y| \leq t\} dy \\ &\quad + \lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) > \tau\}) \int_{B^d(0, \tau)^c} \mathbf{1}\{|y| \leq t\} dy. \end{aligned}$$

Es folgt für $\tau > 0$

$$\begin{aligned} B_{i,j} &\leq \kappa_d^{i+j-1} \iint \prod_{n=2}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r, r_l, w_l)^d \\ &\quad \times \left[\kappa_d \lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) \leq \tau\}) \left(\sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n) \right)^d \right. \\ &\quad \left. + \lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) > \tau\}) \int_{B^d(0, \tau)^c} \mathbf{1}\{|y| \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} dy \right] \\ &\quad \times \mathbb{V}^{i+j+1}(d(r, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(d(w_1, \dots, w_{i+j})). \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Unter der Voraussetzung

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{3d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

ist

$$\begin{aligned} \prod_{n=2}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r, r_l, w_l)^d \left(\sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n) \right)^d, \\ r, r_1, \dots, r_{i+j} \in [0, \infty), w_1, \dots, w_{i+j} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

eine integrierbare Majorante für den Integranden der rechten Seite von (5.3.4). Dabei kann beispielsweise wie im Beweis von Lemma 5.2.5 bei der Abschätzung von (5.2.13) argumentiert

werden. Mit den Lemmata 3.6 und 3.7 aus [21] folgt für jedes $\tau > 0$

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\lambda_d(\{z \in A : d(z, \partial A) \leq \tau\})}{\lambda_d(A)} = 0.$$

Der zweite Summand der rechten Seite von (5.3.4) ist nach Division durch $\lambda_d(A)$ nach oben durch

$$\begin{aligned} & \kappa_d^{i+j-1} \iint \prod_{n=2}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)^d \prod_{l=i+1}^{i+j} g_\varphi(r, r_l, w_l)^d \int_{B^d(0, \tau)^c} \mathbf{1}\{|y| \leq \sum_{n=1}^i g_\varphi(r_{n-1}, r_n, w_n)\} dy \\ & \quad \times \mathbb{V}^{i+j+1}(d(r, r_1, \dots, r_{i+j})) \mathbb{W}^{i+j}(d(w_1, \dots, w_{i+j})) \end{aligned}$$

beschränkt. Diese obere Schranke hängt nicht von A ab und verschwindet für $\tau \rightarrow \infty$. Damit folgt

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{B_{i,j}}{\lambda_d(A)} = 0.$$

Der zweite Summand der rechten Seite von (5.3.3) kann analog behandelt werden, womit insgesamt die Behauptung

$$\lim_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi, G}(A) - \eta_{\varphi, G}(A))}{\lambda_d(A)} = 0.$$

folgt. □

Wie im unmarkierten Modell (siehe Korollar 4.3.3) erhalten wir folgendes Korollar. Dabei verwenden wir für $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$ die Bezeichnung

$$\tilde{S}_{\varphi, a, G}(A) := \sum_{i=1}^m a_i \tilde{\eta}_{\varphi, G_i}(A), \quad A \in \mathcal{B}_d \text{ beschränkt.}$$

Korollar 5.3.3. (a) Die Aussagen von Theorem 5.1.3 gelten auch, wenn die dort auftretenden Größen $\eta_{\varphi, G_i}(A)$, $i \in [m]$, durch $\tilde{\eta}_{\varphi, G_i}(A)$ ersetzt werden.

(b) Es seien $m \in \mathbb{N}$, $G = (G_1, \dots, G_m) \in \mathbf{G}_\varphi^{m, \neq}$ und $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ mit $a \neq 0$. Weiterhin sei

$$\vartheta := \max\{\max\{\max \deg(G_i) : i \in [m]\} + 1, 9\}$$

und es gelte

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^{\vartheta d+1} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Dann gilt

$$\frac{\tilde{S}_{\varphi, a, G}(A) - \mathbb{E} \tilde{S}_{\varphi, a, G}(A)}{\sqrt{\text{Var} \tilde{S}_{\varphi, a, G}(A)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } r(A) \rightarrow \infty,$$

wobei N eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Bei obiger Verteilungskonvergenz gilt sogar Konvergenz in der Wasserstein-Distanz d_1 .

Für $A \in \mathcal{B}_d$ und $m \in \mathbb{N}$ seien

$$\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) := \sum_{i=1}^m \tilde{\eta}_{\varphi, i}(A) \quad \text{und} \quad \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A) := \sum_{i=m+1}^{\infty} \tilde{\eta}_{\varphi, i}(A).$$

Es sei R eine \mathbb{V} -verteilte Zufallsvariable, unabhängig von η . Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$q_{\varphi, m} := \mathbb{P}(\text{die Summe der Größen aller endlichen Komponenten in } \Gamma_{\varphi}(\eta), \text{ welche} \\ \text{in } \Gamma_{\varphi}(\eta \cup \{(0, R)\}) \text{ mit } (0, R) \text{ verbunden sind, beträgt mindestens } m).$$

Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir direkt $q_{\varphi, m} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Lemma 5.3.4. *Es gelte*

$$\iint g_{\varphi}(r, r, w)^{4d} \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty.$$

Weiter sei R eine \mathbb{V} -verteilte Zufallsvariable, unabhängig von η , sowie

$$\tilde{C}_{\varphi} := \mathbb{E}(\deg((0, R), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(0, R)})) + 1)^2 \quad \text{und} \quad C_{\varphi} := \mathbb{E}[\deg((0, R), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(0, R)}))^4]^{1/2}.$$

Dann gelten $C_{\varphi}, \tilde{C}_{\varphi} < \infty$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$

$$\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)}{\lambda_d(A)} \leq \tilde{C}_{\varphi}, \quad \limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))}{\lambda_d(A)} \leq C_{\varphi} \sqrt{q_{\varphi, m}},$$

und

$$\limsup_{r(A) \rightarrow \infty} \frac{\text{Var } \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)}{\lambda_d(A)} \leq C_{\varphi} \sqrt{q_{\varphi, m}}.$$

Beweis. Zunächst erhalten wir unter den Voraussetzungen des Lemmas $C_{\varphi}, \tilde{C}_{\varphi} < \infty$ mit Argumenten wie im Beweis von Lemma 5.2.6.

Der restliche Beweis orientiert sich stark an dem von Lemma 4.3.4 im unmarkierten Modell. Für $k \in \mathbb{N}$ und $(x, r) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ bezeichne $B_k(x, r)$ das Ereignis, dass die Summe über die Größen aller endlichen Komponenten aus $\Gamma_{\varphi}(\eta)$, welche in $\Gamma_{\varphi}(\eta \cup \{(x, r)\})$ durch eine Kante mit (x, r) verbunden sind, mindestens k beträgt. Wegen der Stationarität von η gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}(B_k(x, R)) = q_{\varphi, k}.$$

Es sei $A \in \mathcal{K}^d$. Wie im Beweis von Lemma 4.3.4 gelten für alle $(x, r) \in A \times [0, \infty)$ die folgenden Abschätzungen \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x, r)} \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)| &\leq \deg((x, r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x, r)})) + 1, \\ |\Delta_{(x, r)}(\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))| &\leq \deg((x, r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x, r)})) \mathbf{1}_{B_m(x, r)}, \\ |\Delta_{(x, r)} \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)| &\leq \deg((x, r), \Gamma_{\varphi}(\eta_{(x, r)})) \mathbf{1}_{B_m(x, r)}. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Gilt $(x, r) \in A^c \times [0, \infty)$, so können die drei obigen Beträge jeweils durch

$$\sum_{(y,s) \in \eta \cap A \times [0, \infty)} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (y, s) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\}$$

nach oben abgeschätzt werden. Analog zur Argumentation aus Lemma 5.3.2 erhalten wir, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\lambda_d(A)} \int_{A^c \times [0, \infty)} \mathbb{E} \left(\sum_{(y,s) \in \eta \cap A \times [0, \infty)} \mathbf{1}\{(x, r) \leftrightarrow (y, s) \text{ in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x,r)})\} \right)^2 \lambda(d(x, r))$$

für $r(A) \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Weiter gilt mit der ersten Abschätzung aus (5.3.5)

$$\int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} |\Delta_{(x,r)} \tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A)|^2 \lambda(d(x, r)) \leq \lambda_d(A) \tilde{C}_\varphi.$$

Außerdem liefern die Ungleichung von Cauchy-Schwarz und die beiden letzten Abschätzungen aus (5.3.5)

$$\begin{aligned} \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} |\Delta_{(x,r)} (\tilde{\eta}_{\varphi, \leq m}(A) - \tilde{\eta}_{\varphi, \leq n}(A))|^2 \lambda(d(x, r)) &\leq \lambda_d(A) C_\varphi \sqrt{q_{\varphi, m}}, \\ \int_{A \times [0, \infty)} \mathbb{E} |\Delta_{(x,r)} \tilde{\eta}_{\varphi, > m}(A)|^2 \lambda(d(x, r)) &\leq \lambda_d(A) C_\varphi \sqrt{q_{\varphi, m}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde auch jeweils die Stationarität des Poisson-Prozesses η verwendet. Schließlich beendet eine Anwendung der Ungleichung von Poincaré aus Theorem 3.4.1 den Beweis dieses Lemmas. \square

Lemma 5.3.5. *Unter der Voraussetzung*

$$\iint g_\varphi(r, r, w)^d \mathbb{V}(dr) \mathbb{W}(dw) < \infty$$

gilt

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V} \bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau))}{\tau^d} > 0.$$

Beweis. Es sei $G \in \mathbf{G}_\varphi$ ein Graph mit $k \geq 3$ Knoten, dessen Knotenmenge mit $[k]$ durchnummeriert ist. Weiterhin existiere ein induzierter Teilgraph von G mit Knotenmenge $I \subset [k]$, $|I| \geq 2$, welcher nicht zusammenhängend ist. Das einfachste Beispiel ist ein Graph mit drei Ecken und zwei Kanten.

Für $\tau > 0$ sei f_τ ein Repräsentant von $\bar{\eta}_\varphi(B^d(0, \tau))$. Weiterhin seien $(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k) \in B^d(0, \tau) \times [0, \infty)$. Es bezeichne $B_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)} \in \mathcal{A}$ das Ereignis, dass die Marken $Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}$ derartig sind, dass $G_{\text{ind}}(\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}, \Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}))$ isomorph zu G ist, wobei für $i \in [k]$ insbesondere (x_i, r_i) dem Knoten $i \in [k]$ in G entspricht. Unter dem Ereignis $B_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}$ gilt

$$f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}) \geq 0,$$

da das Entfernen der Punkte (x_i, r_i) , $i \in [k] \setminus I$, aus dem Graphen $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})$ die Anzahl endlicher Komponenten in $B^d(0, \tau)$ höchstens vergrößern, aber nicht verringern kann. Falls zusätzlich die Knotenmenge $\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}$ im Graphen $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})$ eine zu G isomorphe Komponente bildet, also keine Kanten zwischen den Punkten $\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}$ und η existieren, so gilt sogar

$$f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}) \geq 1.$$

Dies liegt daran, dass durch das Entfernen der Punkte (x_i, r_i) , $i \in [k] \setminus I$, aus dem Graphen $\Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})$ die Komponente, welche von $\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\}$ gebildet wird und zu $f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}})$ beiträgt, in mindestens zwei kleinere Komponenten zerfällt. Mit diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]})} | B_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}] \\ & \geq \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)\} \text{ ist in } \Gamma_\varphi(\eta_{(x_i, r_i)_{i \in [k]})} \text{ eine } G\text{-Komponente}\} | B_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}] \\ & = \mathbb{E} \prod_{(y, r) \in \eta} \prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) \\ & = \exp \left[\int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]})} | Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}]^2 \right] \\ & \geq \tilde{p}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \exp \left[2 \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right], \end{aligned}$$

wobei $\tilde{p}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))$ die Wahrscheinlichkeit von $B_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}$ bezeichne.

Es sei $T > 0$ mit $2T \leq \tau$. Wir definieren

$$U_\tau := \{((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \in (B^d(0, \tau) \times [0, \infty))^k : x_1 \in B^d(0, \tau/2), \\ |x_1 - x_i| \leq T, i \in [k] \setminus \{1\}\}.$$

Mit dieser Definition gilt

$$\begin{aligned} M_\tau & := \int_{U_\tau} \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]})} | Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)}]^2 \right] \lambda^k(d((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))) \\ & \geq \int_{U_\tau} \exp \left[2 \int \left(\prod_{i=1}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \tilde{p}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \\ & \quad \times \lambda^k(d((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{U_\tau} \exp \left[2 \int \left(\bar{\varphi}((y, r), (0, r_1)) \prod_{i=2}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i - x_1, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \tilde{p}((0, r_1), (x_2 - x_1, r_2), \dots, (x_k - x_1, r_k)) \lambda^k(d((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))) \\
&= \frac{\kappa_d \tau^d}{2^d} \iint_{(B^d(0, T) \times [0, \infty))^{k-1}} \tilde{p}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \\
&\quad \times \exp \left[2 \int \left(\bar{\varphi}((y, r), (0, x_1)) \prod_{i=2}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \mathbb{V}(dr_1). \tag{5.3.6}
\end{aligned}$$

Dabei wurde sowohl die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes, als auch die Translationsinvarianz von $\tilde{p}((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))$ in den Positionen x_1, \dots, x_k verwendet.

Da $G \in \mathbf{G}_\varphi$ gilt und damit G im Modell $\Gamma_\varphi(\eta)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt, folgt

$$\begin{aligned}
&\iint \exp \left[\int \left(\bar{\varphi}((y, r), (0, x_1)) \prod_{i=2}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \tilde{p}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \mathbb{V}(dr_1) > 0,
\end{aligned}$$

wobei analog zur Abschätzung (5.1.20) argumentiert werden kann. Es folgt weiter

$$\begin{aligned}
c_0 := &\iint_{(B^d(0, T_0) \times [0, \infty))^{k-1}} \exp \left[2 \int \left(\bar{\varphi}((y, r), (0, x_1)) \prod_{i=2}^k \bar{\varphi}((y, r), (x_i, r_i)) - 1 \right) \lambda(d(y, r)) \right] \\
&\quad \times \tilde{p}((0, r_1), (x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k)) \lambda^{k-1}(d((x_2, r_2), \dots, (x_k, r_k))) \mathbb{V}(dr_1) > 0
\end{aligned}$$

für ein hinreichend großes $T_0 > 0$. Im Folgenden sei $\tau > 0$ hinreichend groß, sodass $\tau \geq 2T_0$ gilt. Mit der Abschätzung (5.3.6) folgt

$$M_\tau \geq \frac{\kappa_d \tau^d}{2^d} \cdot c_0$$

und somit

$$\liminf_{\tau \rightarrow \infty} \frac{M_\tau}{\tau^d} > 0.$$

Mit Lemma 3.3.4 folgt für $(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$

$$f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}) = \sum_{\emptyset \neq J_1 \subset I} \Delta_{\mathbf{x}_{J_1}}^{|J_1|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) - \sum_{\emptyset \neq J_2 \subset [k]} \Delta_{\mathbf{x}_{J_2}}^{|J_2|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \tag{5.3.7}$$

mit der Abkürzung $\mathbf{x}_J := (x_j, r_j)_{j \in J}$ für $J \subset [k]$. Die Ungleichung von Jensen liefert für $n \in \mathbb{N}$ und $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n s_i \right)^2 = n^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{n} \right)^2 \leq n^2 \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{n} = n \sum_{i=1}^n s_i^2.$$

Mit der mehrfachen Anwendung dieser Ungleichung und Gleichung (5.3.7) erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in I}}) - f_\tau(\xi_{(x_i, r_i)_{i \in [k]}}) \middle| Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)} \right]^2 \right] \\
& \leq 2^{k+1} \mathbb{E} \left[\sum_{\emptyset \neq J_1 \subset I} \mathbb{E} \left[\Delta_{\mathbf{x}_{J_1}}^{|J_1|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \middle| Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)} \right]^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\emptyset \neq J_2 \subset [k]} \mathbb{E} \left[\Delta_{\mathbf{x}_{J_2}}^{|J_2|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \middle| Z_{(x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)} \right]^2 \right] \\
& \leq 2^{k+2} \mathbb{E} \left[\sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \mathbb{E} \left[\Delta_{\mathbf{x}_J}^{|J|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \middle| Z_{\mathbf{x}_J} \right]^2 \right].
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$M_\tau \leq 2^{k+2} \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} \int_{U_\tau} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Delta_{\mathbf{x}_J}^{|J|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \middle| Z_{\mathbf{x}_J} \right]^2 \right] \lambda^k(d((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k))).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
U_\tau = \{ & ((x_1, r_1), \dots, (x_k, r_k)) \in (\mathbb{R}^d \times [0, \infty))^k : x_i \in B^d(0, \tau/2 + T), i = [k] \setminus \{1\}, \\
& x_1 \in B^d(0, \tau/2) \bigcap_{i=2}^k B^d(x_i, T) \}
\end{aligned}$$

erhalten wir die Abschätzung

$$M_\tau \leq 2^{k+2} \sum_{\emptyset \neq J \subset [k]} (\kappa_d T^d)^{k-|J|} \int \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Delta_{\mathbf{x}_J}^{|J|} \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \middle| Z_{\mathbf{x}_J} \right]^2 \right] \lambda^{|J|}(d\mathbf{x}_J).$$

Da die hier auftretenden Integrale auch Teil der unteren Schranke für die Varianz aus Theorem 3.4.4 sind, existiert eine Konstante $\tilde{c} > 0$, welche nur von k , I und T abhängt, sodass

$$\text{Var } \bar{\eta}(B^d(0, \tau)) \geq \tilde{c} M_\tau$$

gilt. Wegen $\liminf_{\tau \rightarrow \infty} M_\tau / \tau^d > 0$ folgt die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 5.3.1. Der Beweis von Theorem 5.3.1 verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.3.1. Dabei müssen lediglich die Aussagen des aktuellen Kapitels verwendet werden. \square

ANHANG A

EIN LEMMA ÜBER POISSON-PROZESSE

Lemma A.0.1. *Es sei $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ ein Borelraum und η ein Poisson-Prozess auf $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ mit $\mathbb{P}(\eta(\mathbf{X}) = 0) \geq 1/2$. Weiterhin sei $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) - c \right| \geq \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) \right|.$$

Beweis. Wegen $\mathbb{P}(\eta(\mathbf{X}) = 0) \geq 1/2 > 0$ gilt $\gamma := \mathbb{E}\eta(\mathbf{X}) < \infty$ und damit ist das Intensitätsmaß von η gegeben durch $\gamma\mathbb{Q}$ mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$. Wegen Proposition 3.5 in [28] können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\eta = \{X_i : i \in [\kappa]\}$$

gilt, wobei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und \mathbb{Q} -verteilter Zufallselemente in \mathbf{X} ist und κ eine von $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter γ ist. Wegen

$$1/2 \leq \mathbb{P}(\eta(X) = 0) = \mathbb{P}(\kappa = 0)$$

existiert eine Zufallsvariable κ' mit $\kappa' \stackrel{d}{=} \kappa$ und $\mathbb{P}(\kappa'\kappa = 0) = 1$. Dies lässt sich konstruktiv leicht begründen. Dazu nehmen wir vorübergehend ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}_1, \lambda_{|[0,1]})$ an, wobei \mathcal{B}_1 die Borelsche σ -Algebra auf $[0, 1]$ bezeichne. Weiter seien

$$S_k := \sum_{n=0}^k e^{-\gamma} \frac{\gamma^n}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

und $S_{-1} := 0$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $\kappa(\omega) := k$ für alle $\omega \in [S_{k-1}, S_k)$. Außerdem sei $\kappa(1) := 0$. Analog verwenden wir für $k \in \mathbb{N}_0$ die Definition $\kappa'(\omega) := k$ für alle $\omega \in (1 - S_k, 1 - S_{k-1}]$ und

$\kappa'(0) := 0$. Damit besitzen die Zufallsvariablen κ und κ' jeweils eine Poissonverteilung mit Parameter γ und es gilt $\kappa(\omega)\kappa'(\omega) = 0$ für alle $\omega \in [0, 1]$, also insbesondere $\mathbb{P}(\kappa\kappa' = 0) = 1$.

Wir kehren zum eigentlichen Beweis des Lemmas zurück und definieren

$$\eta' := \{X_i : i \in [\kappa']\}$$

Damit ist auch η' ein Poisson-Prozess auf $(\mathbf{X}, \mathcal{X})$ mit Intensitätsmaß $\gamma\mathbb{Q}$ und folglich $\eta' \stackrel{d}{=} \eta$. Wegen $\mathbb{P}(\kappa'\kappa = 0) = 1$ gilt außerdem

$$\mathbb{P}(\eta(\mathbf{X}) = 0 \text{ oder } \eta'(\mathbf{X}) = 0) = 1. \quad (\text{A.0.1})$$

Mit $\eta' \stackrel{d}{=} \eta$ folgt

$$\mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) - c \right| = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) - c \right| + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta'} f(y) - c \right| \geq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) - \sum_{y \in \eta'} f(y) \right|. \quad (\text{A.0.2})$$

Wegen (A.0.1) gilt

$$\mathbb{P} \left(\sum_{y \in \eta} f(y) = 0 \text{ oder } \sum_{y \in \eta'} f(y) = 0 \right) = 1$$

und damit ist die rechte Seite von (A.0.2) gleich

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) \right| + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta'} f(y) \right| = \mathbb{E} \left| \sum_{y \in \eta} f(y) \right|,$$

was den Beweis des Lemmas beendet. □

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Bock, H. H. (1996). Probabilistic models in cluster analysis. *Comput. Statist. Data Anal.* **23**, 5–28.
- [2] Bollobás, B. (2001). *Random Graphs*. 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Bringmann, K., Keusch, R. und Lengler, J. (2017). Sampling geometric inhomogeneous random graphs in linear time. arXiv:1511.00576v3.
- [4] van de Brug, T. und Meester, R. (2004). On central limit theorems in the random connection model. *Phys. A* **332**, 263–278.
- [5] Burton, R. und Meester, R. (1993). Long range percolation in stationary point processes. *Random Structures Algorithms* **4**, 177–190.
- [6] Chen, L. (1985). Poincaré-type inequalities via stochastic integrals. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **69**, 251–277.
- [7] Deijfen, M., van der Hofstad, R. und Hooghiemstra, G. (2013). Scale-free percolation. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **49**, 817–838.
- [8] Deprez, P. and Wüthrich, M. V. (2015). Networks, random graphs and percolation. *Theoretical aspects of spatial-temporal modeling*, 95–124, Springer, Tokyo.
- [9] Deprez, P. und Wüthrich, M. (2016). Scale-free percolation in continuum space. arXiv:1312.1948v3.
- [10] Dettmann, C. P. und Georgiou, O. (2016). Random geometric graphs with general connection functions. *Phys. Rev. E* **93**, 032313.
- [11] Devroye, L. und Fraiman, N. (2014). The random connection model on the torus. *Combin. Probab. Comput.* **23**, 796–804.
- [12] Diestel, R. (2017). *Graph Theory*. 5th edition. Springer, Berlin Heidelberg.

- [13] Franceschetti, M. und Meester, R. (2007). *Random Networks for Communication: From Statistical Physics to Information Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [14] Erdős, P. und Rényi, A. (1959). On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen* **6**, 290–297.
- [15] Gilbert, E. N. (1959). Random graphs. *Ann. Math. Statist.* **30**, 1141–1144.
- [16] Gilbert, E. N. (1961). Random plane networks. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **9**, 533–543.
- [17] Giles, A. P., Georgiou, O. und Dettmann, C. P. (2016). Connectivity of soft random geometric graphs over annuli. *J. Stat. Phys.* **162**, 1068–1083.
- [18] Godehardt, E. (1990). *Graphs as Structural Models*. 2nd edition. Vieweg, Braunschweig.
- [19] Grimmett, G. R., Keane, M. und Marstrand, J. M. (1984). On the connectedness of a random graph. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **96**, 151–166.
- [20] van der Hofstad, R. (2017). *Random Graphs and Complex Networks. Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [21] Hug, D., Last, G. und Schulte, M. (2016). Second order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. *Ann. Appl. Probab.* **26**, 73–135.
- [22] Iyer, S. K. (2018). The random connection model: connectivity, edge lengths, and degree distributions. *Random Structures Algorithms* **52**, 283–300.
- [23] Janson, S., Łuczak, T. und Rucinski, A. (2000). *Random Graphs*. Wiley-Interscience, New York.
- [24] Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. 2nd edition. Springer, New York.
- [25] Kallenberg, O. (2017). *Random Measures, Theory and Applications*. Springer, Cham.
- [26] Last, G., Nestmann, F. und Schulte, M. (2018). The random connection model and functions of edge-marked Poisson processes: second order properties and normal approximation. arXiv:1808.01203v1.
- [27] Last, G., Peccati, G. und Schulte, M. (2016). Normal approximation on Poisson spaces: Mehler’s formula, second order Poincaré inequalities and stabilization. *Probab. Theory Related Fields.* **165**, 667–723.
- [28] Last, G. und Penrose, M. (2017). *Lectures on the Poisson Process*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [29] Last, G. und Penrose, M.D. (2011). Martingale representation for Poisson processes with applications to minimal variance hedging. *Stoch. Proc. Appl.* **121**, 1588–1606.

-
- [30] Mao, G. und Anderson, B. (2012). Towards a better understanding of large-scale network models. *IEEE/ACM Transactions on Networking* **20**, 408–421.
- [31] Mao, G. und Anderson, B. (2013). Connectivity of large wireless networks under a general connection model. *IEEE Transactions on Information Theory* **59**, 1761–1772.
- [32] Meester, R., Penrose, M. D. und Sarkar, A. (1997). The random connection model in high dimensions. *Statist. Probab. Lett.* **35**, 145–153.
- [33] Meester, R. und Roy, R. (1996). *Continuum Percolation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [34] Newman, M. E. J. (2009). Random Graphs with Clustering. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 058701.
- [35] Newman, M. E. J. (2018). *Networks*. 2nd edition. Oxford University Press, Oxford.
- [36] Peccati, G. und Reitzner, M. (2016). *Stochastic Analysis for Poisson Point Processes: Malliavin Calculus, Wiener-Itô Chaos Expansions and Stochastic Geometry*. Springer, Cham.
- [37] Penrose, M. (2003). *Random Geometric Graphs*. Oxford University Press, Oxford.
- [38] Penrose, M. D. (1991). On a continuum percolation model. *Adv. in Appl. Probab.* **23**, 536–556.
- [39] Penrose, M. D. (2016). Connectivity of soft random geometric graphs. *Ann. Appl. Probab.* **26**, 986–1028.
- [40] Penrose, M. D. (2017). Inhomogeneous random graphs, isolated vertices, and Poisson approximation. arXiv: 1507.07132.
- [41] Ross, N. (2011). Fundamentals of Stein’s method. *Probab. Surv.* **8**, 210–293.
- [42] Roy, R. und Sarkar, A. (2003). High density asymptotics of the Poisson random connection model. *Phys. A* **318**, 230–242.
- [43] Schneider, R. (2013). *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- [44] Schneider, R. und Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Berlin Heidelberg.
- [45] Wu, L. (2000). A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probab. Theory Related Fields* **118**, 427–438.