УДК 517

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧАСТИЧНЫХ МЕР

Л.В. Веселова[1], О.Е. Тихонов[2]

1 *lidveselova@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

2 *oleg.tikhonov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Изучаются σ-аддитивные функции множества, заданные на идеале в σ-алгебре и возможно принимающие оба значения $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

Ключевые слова: σ-алгебра, мера, σ-аддитивная функция множества.

Термин *мера* будем использовать для σ-аддитивных отображений σ-алгебр в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Непустой подкласс $\mathscr{I}$ алгебры множеств $\mathscr{A}$ будем называть *идеалом* в $\mathscr{A}$, если условия $A \in \mathscr{I}$, $B \in \mathscr{A}$, $B \subset A$ влекут $B \in \mathscr{I}$.

Хорошо известно, что конечно аддитивная функция множества, заданная на алгебре множеств и принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}$, может принимать максимум одно из значений $\{+\infty\}$ или $\{-\infty\}$. В настоящей работе мы продолжаем начатое в [2] исследование “частичных мер”, то есть функций множества, заданных на идеале в σ-алгебре, обладающих многими присущими мерам свойствами и возможно принимающих оба значения $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

Лемма. *Пусть $\mu : \mathscr{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ — конечно аддитивная функция множества, заданная на идеале $\mathscr{I}$ в алгебре $\mathscr{A}$; $\mu(\varnothing) = 0$. Для $A \in \mathscr{A}$ положим:*

$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\Big\{\sum_{i\in I} \mu(B_i) : I \text{ конечно, } B_i \in \mathscr{I},\ \sum_{i\in I} B_i \subset A,\ \sum_{i\in I} \mu(B_i) \text{ опред. корректно}\Big\}. \quad (1)$$

Тогда $\widetilde{\mu}$ — конечно аддитивная функция множества на $\mathscr{A}$, принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}^{+}$.

Если μ σ-аддитивна на $\mathscr{I}$, то $\widetilde{\mu}$ σ-аддитивна на $\mathscr{A}$.

Как ясно из конструкции, введенная в лемме функция множества $\widetilde{\mu}$ является наименьшей из положительных аддитивных функций ν на $\mathscr{A}$, удовлетворяющих условию $\mu(A) \le \nu(A)$ $(A \in \mathscr{I})$.

Определение 1 [2]. *Частичной мерой в σ-алгебре называется σ-аддитивное отображение из некоторого идеала в этой алгебре в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Иными словами, функция множества $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$, заданная на непустом подклассе $\mathscr{D}_\mu$ некоторой σ-алгебры $\mathscr{A}$, является частичной мерой в $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда для любого $B \in \mathscr{A}$ класс $\mathscr{A} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}\}$ есть σ-алгебра подмножеств B и ограничение $\mu|_{\mathscr{A}\cap B}$ является мерой на $\mathscr{A} \cap B$.

Пример 1. Пусть μ_1, μ_2 — две положительные меры на σ-алгебре $\mathscr{A}$. Положим: $\mathscr{D}_{\mu_1-\mu_2} = \{A \in \mathscr{A} : \mu_1(A) - \mu_2(A)$ корректно определено$\}$. Тогда формула $(\mu_1 - \mu_2)(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$ задает частичную меру $\mu_1 - \mu_2 : \mathscr{D}_{\mu_1-\mu_2} \to \overline{\mathbb{R}}$ в $\mathscr{A}$.

Определение 2 [2]. *Частичная мера называется максимальной, если она не имеет собственных продолжений до частичной меры в рассматриваемой σ-алгебре.*

Пример 2. Пусть $\xi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Положим: $\mathscr{D}_\xi = \{A \in \mathscr{A} : \xi$ квазиинтегрируема на $A\}$ [1], $\mu_\xi(A) = \int_A \xi\, dP$ $(A \in \mathscr{D}_\xi)$. Тогда μ_ξ — максимальная частичная мера.

Отметим, что в работе [2] было показано, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ любая максимальная частичная мера, абсолютно непрерывная относительно P, имеет вид, указанный в примере 2.

В [2] было отмечено со ссылкой на лемму Цорна, что любая частичная мера продолжается до максмальной. Следующая теорема дает в определенном смысле "каноническое" продолжение.

Теорема 1. *Пусть $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ — частичная мера на σ-алгебре $\mathscr{A}$. Формулы*

$$\mu^+ = \widetilde{\mu}, \quad \mu^- = \widetilde{(-\mu)}$$

(см. (1)) задают положительные меры μ^+ и μ^- на $\mathscr{A}$. Частичная мера $\overline{\mu} = \mu^+ - \mu^-$ (пример 1) продолжает μ и максимальна.

Представление $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$ $(A \in \mathscr{D}_\mu)$ экстремально в следующем смысле: если ν_1 и ν_2 — две положительные меры на $\mathscr{A}$ такие, что $\mu(A) = \nu_1(A) - \nu_2(A)$ $(A \in \mathscr{D}_\mu)$, то $\mu^+ \leq \nu_1$, $\mu^- \leq \nu_2$.

Для двух частичных мер $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu : \mathscr{D}_\nu \to \overline{\mathbb{R}}$ на σ-алгебре $\mathscr{A}$ определим частичную меру $\mu + \nu$ как поточечную сумму на множестве $\mathscr{D}_{\mu+\nu} = \{A \in \mathscr{D}_\mu \cap \mathscr{D}_\nu :$ $\mu(A) + \nu(A)$ корректно определено$\}$. Таким образом, согласно теореме 1 отображение $(\mu, \nu) \mapsto \overline{\mu + \nu}$ задает двуместную операцию на множестве максимальных частиных мер. Эту операцию будем обозначать символом "$\dot{+}$".

Определение 2. *Частичную меру $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ в σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств Ω назовем σ-заданной, если в $\mathscr{D}_\mu$ найдется не более чем счетное разбиение $\{D_i\}_{i \in I}$ множества Ω.*

Теорема 2. *Продолжение σ-заданной частичной меры до максимальной частиной меры единственно.*

σ-заданная частичная мера допускает лишь единственное продолжение до максимальной.

Определение 3. *Частичную меру $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ в σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств Ω назовем σ-конечной, если в $\mathscr{D}_\mu$ найдется не более чем счетное разбиение $\{D_i\}_{i \in I}$ множества Ω такое, что для любого $i \in I$ значение $\mu(D_i)$ конечно.*

Заметим, что любая σ-конечная частичная мера σ-плотно задана и что операция "$\dot{+}$" на множестве σ-конечных частичных мер в σ-алгебре ассоциативна.

Литература

1. Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 312 с.

2. Tikhonov O. E. *Partial measures* // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 17. – P. 47–50.

CONTINUATION OF PARTIAL MEASURES

L.V. Veselova, O.E. Tikhonov

We study σ-additive set functions on an ideal in σ-algebra, which possibly take both the values $\{+\infty\}$

and $\{-\infty\}$.

Keywords: σ-algebra, measure, σ-additive set function.

УДК 517.98

ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Б.О. Волков[1]

1 *borisvolkov1986@gmail.com*; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В статье обсуждается связь двух определений лапласиана Леви на бесконечномерном многообразии. Первое из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как среднее Чезаро вторых производных по направлению. Второе из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. Интерес к лапласиану Леви обусловлен его связью с калибровочными полями.

Ключевые слова: лапласиан Леви, бесконечномерное многообразие, уравнения Янга-Миллса.

Оригинальное определение лапласиана Леви было следующим. Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$ — это бесконечномерный лапласиан, действующий на функции f, определенной на пространстве $L_2[0,1]$, по формуле

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f''(x)e_k, e_k >,$$

где $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в $L_2[0,1]$.

Другое определение лапласиана Леви заключается в следующем. Пусть вторая производная Фреше функции f имеет вид:

$$< f''(x)u, v >= \int_0^1 K^V(x;t,s)u(t)v(s)\,dt\,ds + \int_0^1 K^L(x;t)u(t)v(t)\,dt,$$

где $K^V(x;\cdot,\cdot) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K^L(x;\cdot) \in L_\infty[0,1]$, тогда лапласиан Леви Δ_L можно определить по формуле

$$\Delta_L f(x) = \int_0^1 K^L(x;t)\,dt.$$

Ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2[0,1]$ называется слабо равномерно плотным, если $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t)-1)\,dt = 0$ для любой функции $h \in L_\infty[0,1]$. Примером слабо равномерно плотного базиса является $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(\pi n t)$. Для слабо равномерно плотного базиса $\{e_n\}$ выполняется

$$\Delta_L \subset \Delta_L^{\{e_n\}}. \tag{1}$$

В работе [1] Л. Аккарди, П. Гибилиско и И.В. Воловича по аналогии со вторым определением лапласиана Леви был введен бесконечномерный лапласиан на пространстве функций на пространстве кривых в $\mathbb{R}^d$. Этот аналог также называется лапласианом Леви. Для такого оператора в [1] было доказано следующее. Связность