

УДК 517.948

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

М.Г. Ахмадиев¹¹ bulat-007@mail.ru; Казанский научно–исследовательский технологический университет

В работе для численного решения сингулярного интегро–дифференциального уравнения задачи дифракции используется метод механических квадратур. Доказано, что этот метод устойчив относительно малых возмущений элементов аппроксимирующих уравнений.

Ключевые слова: приближенные методы, задача дифракции, метод механических квадратур, сингулярные интегро–дифференциальные уравнения, аппроксимирующие уравнения, операторные уравнения.

В работах [1]–[6] рассмотрены прямые методы решения следующего уравнения теории крыла, которая имеет приложения в ряде прикладных задач, например, в задачах аэродинамики, теории упругости, фильтрации, управления и др.:

$$B(t)\Gamma(t) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\tau)}{\tau - t} dt = f(t) \quad (-1 < t < 1),$$

при условиях $\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0$.

В работе [2] отмечено, что аналогичные результаты могут быть получены и для уравнений вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(\tau)}{\tau - t} dt + (T\Gamma)(t) = f(t) \quad (-1 < t < 1),$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Следуя указанным выше работам, рассмотрим сингулярное интегро–дифференциальное уравнение, встречающееся в задачах дифракции [7]–[8]

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} dt + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau)}{|\tau - t|^\lambda} \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (-1 < t < 1), \quad (1)$$

при условиях

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \quad (2)$$

где $h(t, \tau)$, $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – искомая функция, λ ($0 \leq \lambda < 1$) – числовой параметр, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В этой работе для численного решения задачи (1)–(2) применяется метод механических квадратур; это является непосредственным продолжением работы [9], где поставленная задача решена полиномиальными методами. Теоретическое обоснование метода механических квадратур проводится с помощью одного из вариантов общей теории приближенных методов анализа [10] и результатов теории приближения функций.

Известно [1], что решение задачи (1)–(2) представляется в виде

$$\varphi(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2} \varphi_0(\tau),$$

где $\varphi_0(\tau)$ – ограниченная функция.

Приближённое решение задачи (1)–(2) ищем в виде (см. например, [1] или [8])

$$\begin{aligned} \varphi_n(\tau) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \tilde{\varphi}(\tau_k) \frac{\sqrt{1 - \tau^2} U_n(\tau) \sqrt{1 - \tau_k^2}}{\tau - \tau_k} = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}(\tau_k) \sum_{m=1}^n \frac{T_{m-1}(\tau) - T_{m+1}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \sin(m\nu_k), \end{aligned}$$

где $\nu_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $\tau_k = \cos \nu_k$, а $T_k(\tau)$ и $U_k(\tau)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода, соответственно. Следуя работам [1], [3] и [8], используя при этом свойства полиномов Чебышева, находим

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_n(\tau)}{\tau - t} d\tau = -\frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}(\tau_k) \sum_{k=1}^n m U_{m-1}(t) \sin(m\nu_k) = \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}(\tau_k) \frac{w(\tau_k, t)}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad (3)$$

где

$$w(\tau_k, t) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{m=1}^n m \sin(m\nu_k) \sin(m\nu), \quad t = \cos \nu.$$

Для интеграла со слабой особенностью построим квадратурную формулу. С этой целью подинтегральную функцию $h(t, \tau)\varphi(\tau)$ аппроксимируем полиномом $P_n^r(h\varphi)$ по переменной τ . Здесь через P_n^r обозначен оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции её интерполяционный полином Лагранжа по узлам τ_k . Тогда имеем

$$T(h\varphi)(t) = \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau)}{|\tau - t|^\lambda} \varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{k=1}^n h(t, \tau_k) \tilde{\varphi}(\tau_k) \int_{-1}^1 \frac{l_k(\tau)}{|\tau - t|^\lambda} d\tau, \quad (4)$$

где $l_k(\tau)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа для узлов τ_k .

Таким образом, используя формулы (3) и (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно приближённых значений искомой функции, обозначим их через $\tilde{\varphi}(\tau_k)$.

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{w(\tau_k, \tau_j)}{\sin \nu} + h(\tau_j, \tau_k) \alpha_{kj} \right] \tilde{\varphi}(\tau_k) = f(\tau_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где

$$\tau_m = \cos \nu_m; \nu_m = \frac{m\pi}{n+1} \quad (m = k, j); \alpha_{kj} = \int_{-1}^1 \frac{l_k(\tau)}{|\tau_j - \tau|^\lambda} d\tau.$$

Введём в рассмотрение пространство $L_{2,\rho}$ квадратично-суммируемых функций с весом $\rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$ с обычной нормой. Через $L_{2,\rho}^{(1)}$ обозначим пространство функ-

ций, удовлетворяющих условиям (2), первые производные которых квадратично-суммируемы с весом $\rho(t)$

$$\|\varphi\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} = \|\varphi'\|_{L_{2,\rho}} = \|\varphi'\|_{2,\rho} = \left(\int_{-1}^1 \rho(t) |\varphi'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пусть $X = L_{2,\rho}^{(1)}$, $Y = L_{2,\rho}$. Тогда задачу (1)-(2) запишем в виде операторного уравнения, эквивалентного ей,

$$K\varphi = \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau)}{|t - \tau|^\lambda} \varphi(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Теорема. Пусть $f \in C$, $h(t, \tau)$ непрерывна по переменному t и удовлетворяет условию Дини-Липшица по переменной τ и уравнение (6) однозначно разрешимо в X при любой правой части $f \in Y$. Тогда при n таких, что

$$q_n = A \left\{ \omega_t(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1-\lambda}} + \left[\omega_\tau(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1/4}} \right] \ln n \right\} < 1$$

система (5) имеет единственное решение $\{\tilde{\varphi}^*(\tau_k)\}_{k=1}^n$ и приближённые решения

$$\varphi_n^*(\tau) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \tilde{\varphi}^*(\tau_k) \frac{\sqrt{1-\tau^2} U_n(\tau) \sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau - \tau_k}$$

сходятся к точному решению $\varphi^*(\tau)$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_X = O\{q_n + E_{n-1}(f)_C\},$$

где A – постоянная, не зависящая от n , $\omega_S(h, \frac{1}{n})_C$ – модуль непрерывности функции $h(\cdot, \cdot)$ по переменной S равномерно относительно другой, а $E_{n-1}(f)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(t)$ алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$.

Литература

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
2. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения уравнения теории крыла // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.
3. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1968. – 288 с.
4. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Математики. – 1980. – Т. 18. – М.: ВИНТИ. – С. 251–307.
5. Ioakimidis N. I. A natural interpolation formula for Prandtl's singular integrodifferential equation // Int. j. Meth. Fluids. – 1984. – Т. 4. – № 3. – С. 283–290.
6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 254 с.

7. Захаров Е. В., Собянина И. В. *Об одномерных интегро-дифференциальных уравнениях задач дифракции на экранах* // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 4. – С. 632–636.
8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции*. – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.
9. Ахмадиев М. Г. *Прямые методы решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений*. // Казань:Деп. в ВИНТИИ. – 1986. – № 43. – 18 с.
10. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. – Казань: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.
11. Натансон П. Н. *Конструктивная теория функций*. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFRACTION

M.G. Akhmadiev

For numerical solution of singular integro-differential equations of diffraction it is used the method of mechanical quadratures. It is proved that this method is stable under small perturbations of approximating equations.

Keywords: approximate methods, diffraction problem, method of the mechanical squarings, singular and integro-differential equations, approximating equations, operators equations.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Ш.А. Балгимбаева¹

¹ *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Получены точные по порядку оценки приближения гиперболическими суммами Фурье по кратной системе всплесков с компактными носителями на классах типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля в пространстве L_q для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Ключевые слова: поперечники Фурье, гиперболический крест, пространства типа Никольского–Бесова, пространства типа Лизоркина–Трибеля.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ – множества натуральных, действительных и целых чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Пусть $L_q = L_q([0, 1]^d)$ ($1 \leq q \leq \infty, 2 \leq d \in \mathbb{N}$) – пространство измеримых функций $f: [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{C}$, суммируемых в степени q (при $q = \infty$ существенно ограниченных) на $[0, 1]^d$ со стандартной нормой

$$\|f\|_{L_q} = \|f\|_{L_q([0, 1]^d)} = \left(\int_{[0, 1]^d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty),$$

$$\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty([0, 1]^d)} = \text{ess sup} \{|f(x)| : x \in [0, 1]^d\}.$$