I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

La factorización de polinomios de segundo grado y los personajes involucrados en su historia

Sandra Milena **Jiménez** Ardila
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.sjimenez@pedagogica.edu.co
Viviana Paola **Salazar** Fino
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
dma.vsalazar@pedagogica.edu.co
Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional
lmendieta@pedagogica.edu.co

Enseguida se presenta un breve recorrido histórico sobre la factorización de polinomios de segundo grado, sus primeros vestigios y uso, destacando la relación entre el lenguaje simbólico-algebraico y el lenguaje geométrico. También se exhiben evidencias históricas acerca del uso de factorización de polinomios de segundo grado.
La primera evidencia que se halla relacionada con la factorización data de los babilonios, estuvieron interesados en resolver ecuaciones particulares, asociadas a la solución de problemas comunes, propios de su desarrollo cultural; en este contexto nace la idea de completar cuadrados utilizando figuras, de cuyos procesos se puede identificar lo que en el ámbito escolar se conoce como *trinomio cuadrado perfecto*.
El siguiente hito en este recorrido histórico es Euclides, quien en el libro II de *Elementos* enuncia algunas proposiciones que se pueden asociar con identidades algebraicas (aunque algunos historiadores afirman que dichas identidades representaban exclusivamente nociones geométricas), entre las cuales se destaca la II.5 que se puede asociar actualmente con la *diferencia de cuadrados*.

Posteriormente, en la obra *Arithmetica* de Diofanto se encuentran indicios de uso de factorización, una evidencia de esto es el problema 7 del libro IV, relacionado con lo que en el ámbito escolar es conocido como el *cuadrado de una suma o de una diferencia*.
La manera general de resolver ecuaciones usando figuras (como los babilonios) se le debe a Thābit Ibn Qurra, quien hace uso de las proposiciones planteadas por Euclides para relacionar cuadrados con rectángulos de forma tal que con ello logra plantear un método para resolver ecuaciones que hoy se puede asociar, en lenguaje simbólico-algebraico, con la igualdad: $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$; es entonces Ibn Qurra quien realmente utiliza los resultados euclidianos y las heurísticas particulares propuestas por Al-Khwārizmī presentando métodos generales para resolver ciertas ecuaciones.
Casi un milenio después, en la época del renacimiento, François Viète es quien sienta las bases para la distinción entre variables y coeficientes, lo que contribuyó a que el álgebra se transformara de un estudio particular a uno general. Pocos años después, en la obra *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot, aparece por primera vez la factorización como método de solución de algunas ecuaciones cuadráticas. Las proposiciones de la sección 4 constan de cuatro pasos, de los cuales el último es la demostración del lema (que plantea la unicidad de la raíz encontrada) y en el cual usa la *factorización por factor común* para demostrar la no igualdad de dos expresiones que deberían serlo. Incluso, Hill (2011) afirman que "La primera ecuación resuelta es $a^2 - (b + c)a - bc = (a - b)(a + c) = 0$, [sin embargo] la forma factorizada de la ecuación cuadrática no aparece en la prueba" (p. 50).
Vietè intentó demostrar geométricamente algunos resultados algebraicos, lo que lo obligó a ignorar las raíces negativas o complejas. René Descartes logró solventar dicho problema en su *Geometría*, con lo que se conoce como "álgebra de segmentos". En esta, construyó segmentos de longitud $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} y \sqrt{a}$ y eliminó así la obligatoriedad de la homogeneidad entre expresiones de Vietè. Entre sus principales preocupaciones estaba la determinación del número de raíces de una ecuación polinómica, lo que lo lleva a enunciar el teorema del factor: "si r es raíz de $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$, entonces $p(x) = (x - r)q(x)$, es decir $x - r$ es factor de $p(x)$, donde $grad\ q(x) < grad\ p(x)$". De lo anterior, y para contestar cuántas raíces tiene la ecuación, se aplica este teorema recurrentemente y se obtiene que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, no necesariamente distintas. Entonces, el polinomio se puede expresar como producto de factores, es decir, $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_i)$.
Hacia el siglo XVIII, el álgebra trascendió de la solución de ecuaciones al estudio de estructuras como grupos, anillos y campos. Como menciona Kleiner (2007), Euler y muchos matemáticos intentaron realizar la prueba del último teorema de Fermat, para el cual, escribía, por ejemplo, $x^3 + y^3 = z^3$(un caso particular de la ecuación de Bachet ($x^2 + k = y^3$) como $(x + y)(x + y\rho)(x + y\rho^2) = z^3$, y esta es ahora una ecuación en el dominio $D_3 = \{a + b\rho : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Aparecen formalmente los Dominios de Factorización Única (DFU) de la mano de los *ideales* de Dedekind. Luego, aparecen las "formas cuadráticas binarias", expresiones de la forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + y^2, a, b, c \in \mathbb{Z}$. El objetivo de la teoría de formas cuadráticas binarias es encontrar un número entero m para el cual $f(x, y) = m$. Al igual que el caso anterior, estas formas cuadráticas se expresan como producto de factores. A lo largo del estudio de los DFU surgieron algunos teoremas referentes a la factorización, como el Teorema de Factorización Única en $F[x]$: "Cada polinomio $p(x) \in F[x]$, de grado positivo, es el producto de un elementodiferente de cero de F y polinomios mónicos irreducibles en $F[x]$.

Excepto por el orden de los factores, esta factorización es única". Debido a que siempre existió interés por encontrar expresiones análogas al número primo en $\mathbb{Z}$ en otros conjuntos numéricos, los teoremas de divisibilidad en el anillo de los números enteros se extienden al anillo de polinomios, estableciendo, entre otras nociones, la definición de polinomio irreducible, así: "Sea $P(x) \in A[x](A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}). P(x)$ es irreducible en $A[x]$ si y solo si P no puede descomponerse en un producto de dos polinomios en $A[x]$ de grado estrictamente menor: no existen $S, T \in A[x]$ tales que $P = ST,\ grad(S) < grad(P)\ \ y\ grad(T) < grad\ (P)$" (Zalamea, 2007, p. 137). Con lo anterior se concluye que la factorización de polinomios de segundo grado aparece inmersa en la búsqueda de soluciones al problema de resolver ecuaciones del mismo grado, siendo entonces este proceso –la resolución de ecuaciones- el germen de la factorización, interés que luego se va desvaneciendo hasta formular una teoría abstracta donde el concepto se incluye; utilizando los términos de Sfard (1991), se puede afirmar que la factorización surge, como casi todas las nociones matemáticas, en su concepción operacional y se va dirigiendo hacia una concepción estructural.

Referencias y bibliografía

Acevedo de Manrique, M. & Falk de Losada, M. (1997). Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al algebra abstracta. Colombia: Colciencias.

Benito, M., Fernández, E. & Sánchez, M. (2007). Diofanto de Alejandría. La aritmética y el libro sobre los números poligonales. España: NIVOLA Libros y ediciones, S.L.

Kleiner, I. (2007). A History of Abstract Algebra. Boston. EEUU: Birkhäuser

Heath, T. & Heiberg, and J. (1908) .The Thirteen Books of Euclid's Elements, Vol. 1.EEUU: Cambridge: The University Press.

Hill, R. (2011) Thomas Harriot's Artis Analyticae Praxis and the Roots of Modern Algebra. Kansas City: University of Missouri. Extraído el día 4 de marzo de 2013 de http://www.homsigmaa.org/Hill.pdf

Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (7ª entrega). Figuras y demostraciones. [Versión electrónica]. Revista SUMA, 68, 93-102.

Zalamea, F. (2007).Fundamentos de matemáticas. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.