На правах рукописи

КИРИЧЕНКО Валерий Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

В Кириченко

Казань 2000

Работа выполнена в Саратовском государственном техническом университете.

Научный консультант: доктор технических наук, профессор В.А Крысько

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор А.Д. Ляшко
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.В. Немировский
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Паймушин

Ведущая организация: Ростовский государственный университет

Защита диссертации состоится "26" октября 2000 г. в 14час. 30м. в аудитории физ.2 на заседании специализированного Совета Д 053.29.01 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по механике при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке при "ГУ им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан "26" 09 2000 г.

Ученый секретарь специализированного Совета, кандидат физико-математических наук, доцент А.А. Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основой многих деформируемых конструкций, взаимодействующих с температурным полем, являются оболочечные и пластинчатые элементы из нетрадиционных материалов — композитов, полимеров, новых сплавов. Существенное влияние на прочность и устойчивость таких элементов оказывают сдвиговые напряжения, последовательный учет которых ведет к построению уточненных (неклассических) моделей оболочек — естественным образом такие модели возникают и при построении различных теорий многослойных оболочек. В настоящее время известно множество нелинейных моделей термоупругих многослойных анизотропных оболочек, однако, с одной стороны, практически отсутствует сравнительный анализ различных моделей (особенно по отношению к задачам устойчивости), а с другой — отсутствует анализ моделей по отношению ко всем основным постулатам термодинамики сплошных сред (как правило, из рассмотрения "выпадают" интегральные варианты принципа Онсагера и уравнение энергетического баланса, что приводит к утрате некоторых индивидуальных свойств реальной термодинамической системы). Вместе с тем проблема корректности построенных нелинейных уточненных моделей, включая вопросы разрешимости и сходимости численных методов, относится к классу нерешенных проблем математической теории оболочек. В свою очередь, наличие такой проблемы оказывает, например, негативное влияние на качество получаемых результатов при исследовании эволюционных режимов (и динамической устойчивости) деформируемых конструкций — хорошо известно, что полное описание эволюции механической системы требует введения фазового пространства, но его суть раскрывается именно в теоремах существования.

Таким образом, математическое моделирование в задачах статики и динамики конструктивно неоднородных термоупругих оболочек является исключительно актуальной тематикой исследований и предполагает решение трех задач: 1) построение моделей оболочек, согласованных с постулатами термодинамики; 2) исследование корректности уточненных моделей; 3) проведение численных экспериментов и анализ полученных результатов.

Цель работы. Построение неклассических математических моделей конструктивно неоднородных термоупругих пологих оболочек с дополнительным требованием инвариантности всех основных уравнений термодинамики для конечных трехмерных объемов сплошной среды, относительно используемых приближенных уравнений состояния при независимой аппроксимации определяющих функций; исследование корректности построенных моделей, эволюционных уравнений для оболочек Рейсснера и для трехслойных оболочек Григолюка-Чулкова; обоснование сходимости численных методов и проведение на их основе численных экспериментов по исследованию устойчивости оболочек в рамках различных моделей.

Научная новизна. В работе развивается новое научное направление, связанное с разработкой теории и методов решения неклассических задач термоупругости для конструктивно неоднородных пологих оболочек и пластин.

Впервые доказана разрешимость геометрически нелинейных связанных задач термоупругости для пологих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с учетом трехмерного уравнения теплопроводности параболического типа.

Впервые доказана разрешимость геометрически нелинейных связанных задач термоупругости "в перемещениях" для трехслойных оболочек, в рамках гипотез Григолюка-Чулкова.

Предложены универсальные "проекционные" условия движения и равновесия деформируемых твердых тел, взаимодействующих с температурным полем. Основой "проекционных" условий являются фундаментальные постулаты термодинамики и вариационные уравнения для конечных объемов сплошной среды. Указанные условия позволяют отказаться на этапе построения математических моделей оболочек от использования "смешанных" вариационных уравнений при независимой аппроксимации определяющих функций.

Построены на базе "проекционных" условий непротиворечивые с точки зрения фундаментальных постулатов термодинамики геометрически нелинейные варианты уточненных моделей многослойных ортотропных термоупругих оболочек. При этом эволюцию оболочек определяют неклассические системы дифференциальных уравнений различного типа и размерности, неразрешенные относительно "старших" производных по переменной "время".

Впервые с помощью построенных моделей многослойных оболочек выявлена неоднозначность в определении НДС оболочек — установлено, что статические условия идеального контакта слоев не относятся к классу необходимых условий в континуальной теории многослойных оболочек.

Впервые исследованы вопросы существования и единственности решения для связанных и несвязанных геометрически нелинейных задач термоупругости в уточненной теории пологих оболочек и пластин Рейсснера. К изученному классу задач относятся краевые задачи, определяющие модели многослойных оболочек в рамках обобщенных гипотез Тимошенко, Пелеха-Шереметьева, Амбарцумяна, Григолюка-Куликова.

Впервые исследована частичная диссипативность эволюционных уравнений в связанных задачах термоупругости для пластин — рассмотрены классические и уточненные модели пластин. Проведенные исследования обобщают известные результаты Н.Ф.Морозова.

Определен новый класс задач в теории оболочек — обобщенные задачи дифракции, характерной особенностью которых является учет локальной,по "объему" оболочки, аппроксимации определяющих функций и локального взаимодействия с температурным полем.

Впервые доказана разрешимость связанных и несвязанных обобщенных задач дифракции для термоупругих пологих оболочек переменной толщины; тем самым доказана корректность предложенного способа декомпозиции оболочек.

Впервые исследована сходимость метода Бубнова-Галеркина при решении линейных связанных задач термоупругости для пластин в рамках гипотез Кирхгофа-Лява и Рейсснера с учетом конечной скорости распространения тепла.

Достоверность результатов, с одной стороны, обеспечивается их полным соответствием всем основным уравнениям термодинамики для конечных объемов сплошной среды, а с другой - гарантируется доказанными в работе теоремами и проведенными численными экспериментами, включая сопоставление с известными и экспериментальными результатами.

Практическая ценность полученных результатов заключается в использовании при проектировании и оценке качества новых деформируемых конструкций построенных корректных моделей оболочек и алгоритмов. Некоторые из разработанных моделей многослойных оболочек и алгоритмов внедрены в расчетную практику НПЦ "АЛМАЗ-ФАЗОТРОН". Соответствующий документ прилагается к диссертации. Кроме того, результаты работы используются: 1) в учебном процессе при чтении авторского спецкурса "Математическое моделирование" по теме "Теория экстремальных задач и вариационные принципы в механике" (опубликовано три пособия по данной тематике); 2) при подготовке кандидатских диссертаций соискателей (подготовлено три кандидата наук).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на Республиканской школе по оптимальному управлению тепловыми процессами в механических системах (Тернополь, 1981); на Всесоюзном симпозиуме "Актуальные проблемы нелинейной теории упругости" (Ленинград, 1983); на Всесоюзной конференции "Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов" (Москва, 1983); на IV Всесоюзной конференции "Проблемы научных исследований в области изучения и освоения мирового океана" (Владивосток, 1983); на VIII и IX Всесоюзных конференциях "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности" (Новосибирск, 1983; Саратов, 1985); на II Всесоюзном симпозиуме "Устойчивость в механике деформируемого твердого тела" (Калинин, 1986); на II Всесоюзной конференции "Механика неоднородных структур" (Львов, 1988); на XV, XVIII, XIX Международных конференциях по теории оболочек и пластин (Казань, 1990; Саратов, 1997 — сделан пленарный доклад; Нижний Новгород, 1999); на симпозиуме "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках" (Воронеж, 2000); на Межвузовской научной конференции "Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами" (Саратов, 2000); на семинаре по теории оболочек Казанского государственного университета (Казань, 1986).

В целом работа докладывалась на научном семинаре по теории пластин и оболочек кафедры "Высшая математика" СГТУ под руководством профессора Крысько В.А., и на научном семинаре по теории пластин и оболочек КГУ под руководством академика Коноплева Ю.Г.

На защиту выносятся: "проекционные" условия движения и равновесия деформируемых твердых тел, позволяющие построить согласованные с основными уравнениями термодинамики варианты уточненных моделей многослойных ортотропных оболочек; новые уточненные модели многослойных ортотропных термоупругих пологих оболочек; доказательства разрешимости связанных и несвязанных задач термоупругости для классических и уточненных моделей оболочек, в том числе для оболочек Рейсснера; доказательства частичной диссипативности эволюционных уравнений в связанных задачах термоупругости для пластин; определение и доказательство корректности обобщенных задач дифракции в теории конструктивно неоднородных оболочек; модифицированный итерационный алгоритм решения уравнений типа Кармана; результаты численных экспериментов по исследованию динамической и статической устойчивости "в большом" пологих оболочек в рамках различных моделей.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 28 работ автора. В автореферате приведен список, состоящий из 18 основных публикаций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка, содержащего 270 наименований литературных источников. Диссертация содержит 328 страниц машинописного текста, 2 таблицы и 11 страниц иллюстраций.

Диссертационная работа выполнена на кафедре "Высшая математика" Саратовского государственного технического университета. Часть диссертационной работы выполнялась в рамках двух Грантов Министерства образования РФ в области фундаментальных исследований (Грант 1992 г. - "СПИ-161" и Грант 97-0-4.3-160).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается анализ современного состояния исследуемых вопросов, излагается содержание работы по главам и приводится краткий исторический обзор, посвященный математическому моделированию в задачах статики и динамики многослойных термоупругих оболочек.

Основополагающие работы по формированию математических моделей конструктивно неоднородных оболочек и пластин принадлежат таким ученым, как И.Г.Бубнов, С.П.Тимошенко, В.З.Власов, Т.Карман, В.В.Новожилов, Х.М.Муштари, К.З.Галимов, Н.А.Алфутов, С.А.Амбарцумян, А.Н.Андреев, В.Н.Бакулин, В.Г.Баженов, А.Е.Богданович, В.В.Болотин, Н.А.Буяков, А.Т.Василенко, В.В.Васильев, В.Е.Вериженко, И.И.Ворович, Э.И.Григолюк, М.С.Ганеева, Я.М.Григоренко, В.Г.Карнаухов, Ю.Г.Коноплев, В.И.Королев, В.А.Крысько, Н.Д.Кузнецов, В.А.Лазько, Н.Ф.Морозов, Н.Н.Москаленко, Ю.В.Немировский, Ю.Н.Новичков, И.Ф.Образцов, В.Н.Паймушин, Б.Л.Пелех, В.В.Пикуль, В.Г.Пискунов, А.П.Прусаков, Б.Е.Победря, И.Н.Преображенский, А.О.Рассказов, А.Ф.Рябов, В.С.Сипетов, А.В.Саченков, А.Г.Терегулов, И.Г.Терегулов, В.П.Тамуж, П.Е.Товстик, К.Ф.Черных, Н.А.Шульга, Р.Кристиансен, Э.Рейсснер и др. Итогом деятельности нескольких поколений ученых являются различные дискретные и континуальные модели оболочек, при этом в последнее время отчетливо наблюдается объективная тенденция к отказу от построения "универсальной" двумерной модели в пользу построения моделей, воспроизводящих лишь некоторые количественные и качественные характеристики оболочек. Проявление такой тенденции наблюдается и в теории многослойных оболочек: дискретные модели целесообразно применять при исследовании НДС оболочек, а континуальные — при исследовании устойчивости. Кроме того, проведенные исследования убедительно показали необходимость учета сдвиговых напряжений и обжатия при построении многослойных оболочек — различные методы учета указанных факторов приводят к уточненным вариантам теории оболочек (модели Рейсснера, Амбарцумяна, Пелеха-Шереметьева, Григолюка-Чулкова, Григолюка-Куликова, Немировского, Паймушина, Болотина-Новичкова, Пикуля, Пискунова, Рассказова и др.) — в обзоре дается краткая характеристика некоторых базовых моделей многослойных оболочек.

Выдающуюся роль в обосновании корректности математических моделей оболочек сыграли фундаментальные работы отечественных математиков и механиков: С.Л.Соболева, В.Н.Кондрашова, С.М.Никольского, О.А.Ладыженской, М.М.Вишика, И.И.Воровича, С.Г.Михлина, Н.Ф.Морозова и др. При этом центральным понятием в обосновании стало понятие обобщенного решения краевых задач, тесно связанное с вариационными уравнениями в механике сплошных сред. К настоящему времени для краевых задач, определяющих классические модели оболочек (в рамках гипотез Кирхгофа-Лява) исследованы многие вопросы о существовании и единственности решения в трудах таких ученых, как И.И.Ворович, Н.Ф.Морозов, Л.П.Лебедев, В.И.Седенко, Ф.Сьярле, П.Рабле, Ж.-Л.Лионс, Ю.А.Дубинский, В.И.Скрыпник, Ш.М.Шлафман, С.Г.Михлин, М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, Б.А.Шойхет и др.

Исследование корректности уточненных моделей оболочек является во многом открытой проблемой. В этом направлении получены отдельные результаты, например, исследована разрешимость граничной задачи равновесного состояния трехслойной оболочки (Э.И.Григолюк, В.Ф.Власов, А.А.Юркевич) и многослойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем (М.М.Карчевский, А.Д.Ляшко, В.Н.Паймушин), а также разрешимость уравнений динамики в "смешанной" форме для трехслойных оболочек (А.И.Голованов).

Связанным задачам термоупругости посвящены работы М.Био, В.Новацкого, А.Д.Коваленко, Я.С.Подстригича, Р.Н.Швеца, Ю.М.Коляно, В.А.Крысько, В.Г.Карнаухова, В.Ф.Грибанова, Н.Г.Паничкина, В.Н.Бакулина, И.Ф.Образцова, В.А.Потопахина, Б.Е.Победри, Ю.В.Немировского, В.Р.Купрадзе, Т.Г.Гегелия, Т.В.Бурчуладзе, Г.Венка, И.И.Воровича, В.Г.Сафроненко и др. По результатам информационного исследования делается вывод об отсутствии работ , в которых исследуется корректность связанных задач термоупругости для оболочек в рамках уточненных моделей с учетом геометрической нелинейности.

Заключительная часть обзора посвящена исследованиям в области задач дифракции и декомпозиции оболочек.

В первой главе рассмотрены вопросы корректности математических моделей пологих оболочек в рамках классических гипотез Кирхгофа-Лява и Григолюка-Чулкова, кроме того, обоснована сходимость (подтвержденная численными экспериментами) алгоритмов по численному исследованию задач динамической и статической устойчивости оболочек.

Хорошо известно, что эволюция диссипативной распределенной системы качественно отличается от эволюции гамильтоновой системы, в частности, для диссипативной системы допускается существование аттракторов, а для гамильтоновой — не допускается. Вместе с тем связанные задачи термоупругости для пологих оболочек определяют в силу термоупругого рассеяния энергии класс распределенных диссипативных систем и, следовательно, вопросы разрешимости таких задач имеют принципиальное значение как для обоснования корректности используемых моделей оболочек, так и для изучения их эволюционных режимов. Одним из объектов исследования явилась следующая система эволюционных уравнений, определяющая связанную задачу термоупругости для изотропной, однородной пластины с учетом малости инерции продольных перемещений и трехмерного уравнения теплопроводности параболического типа

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\rho\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial u_{30}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\left\{(-x_3)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[\frac{E(-x_3)}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_{3-i}^2}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha E}{1-\nu}\theta\right]+(-x_3)\frac{\partial^2}{\partial x_{3-i}\partial x_i}\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\left(-2x_3\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_1\partial x_2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\times \tag{1}$$

$$\times\left(\frac{E}{2(1+\nu)}e_{12}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_{i-1}}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\left(\frac{E}{1-\nu^2}\left[e_{ii}+\nu e_{3-i\,3-i}\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.-\frac{\alpha E\theta}{1-\nu}\right)\right)\right\}\right)dx_3=g_1(x_1,x_2,t),$$

$$\frac{C_0}{T_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\lambda}{T_0}\Delta_1\theta=-\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left(e_{ii}-x_3\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}\right)\right\}+\frac{1}{T_0}g_2(x_1,x_2,x_3,t), \tag{2}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial u_{3-i\,0}}{\partial x_{3-i}}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x_2}+\frac{\partial u_{20}}{\partial x_1}\right)\right]\right)dx_3=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right)^2+\nu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}}\right)^2\right]-\right.\right. \tag{3}$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha E\theta}{1-\nu}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left[\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_1}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_2}\right]\right)dx_3\,,$$

$$u_{30}\big|_{\Gamma}=0,\ \frac{\partial u_{30}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0,\ u_{i0}\big|_{\Gamma}=0,\ \theta\big|_{S}=0,\ i=\overline{1,2}, \tag{4}$$

$$u_{30}\big|_{t=t_0}=\varphi_{30},\ \frac{\partial u_{30}}{\partial t}\bigg|_{t-t_0}=\psi_{30},\ \theta\big|_{t=t_0}=\varphi_4; \tag{5}$$

где u_{i0} — продольные компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности пластины; u_{30} — функция прогиба; θ — функция приращения температурного поля; ε — коэффициент демпфирования, $\varepsilon>0$; Ω — план пластины; h — ее толщина; $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, $\overline{\Gamma}=\partial\Omega\times[t_0,t_1]$,

$D=\Omega\times\left(-\frac{h}{2}.\frac{h}{2}\right)$, $\overline{D}=D\cup\partial D$, $S=\partial D\times[t_0,t_1]$, $Q_1=\Omega\times(t_0,t_1)$, $Q_2=D\times(t_0,t_1)$; $[t_0,t_1]$ — "временной отрезок" наблюдения за эволюцией пластины; E, ν, α, λ, e_0 — упругие и теплофизические постоянные; T_0 — температура пластины в исходном состоянии; g_1 — интенсивность поперечной нагрузки; g_2 — интенсивность источников тепла; e_{ij} — компоненты тензора деформаций; $\varphi_{30}, \psi_{30}, \varphi_4$ — известные функции, определяющие начальные условия.

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия: $g_i\in L^2(Q_i)$; $\varphi_{30}\in H_0^2(\Omega)$; $\psi_{30}\in L^2(\Omega)$; $\varphi_4\in L^2(D)$, $i=\overline{1,2}$. Тогда: 1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i0},\tilde{u}_{30},\tilde{\theta}\}$ задачи (1)-(5), при этом

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{30}\in L^\infty\left(t_0,t_1;H_0^2(\Omega)\right),\ \frac{\partial\tilde{u}_{30}}{\partial t}\in L^\infty\left(t_0,t_1;L^2(\Omega)\right);\\ \tilde{u}_{i0}\in L^\infty\left(t_0,t_1;H_0^1(\Omega)\right),\ \tilde{\theta}\in L^2\left(t_0,t_1;H_0^1(D)\right),\ i=\overline{1,2};\end{gathered}\tag{6}$$

2) приближенное решение задачи (1)-(5) может быть найдено методом Бубнова-Галеркина, при этом функции u_{i0}, $i=\overline{1,2}$, определяются как решения задачи (3), (4), а все множество получаемых приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих (6), и его предельные точки определяют решение задачи (1)-(5); 3) при выполнении дополнительных условий $g_{01}=ess\,sup|g_1|_\Omega<\infty$, $g_{02}=ess\,sup|g_2|_D<\infty$ система эволюционных уравнений (1)-(3) частично диссипативна, то есть при произвольных $\varphi_{30}, \psi_{30}, \varphi_4$ из указанного в теореме класса функций найдется такое $t_2\geq t_0$ и число $\gamma>0$, что для почти всех $t>t_2$ выполняется условие

$$\left|\frac{\partial\tilde{u}_{30}}{\partial t}\right|_\Omega^2+\left|\Delta\tilde{u}_{30}\right|_\Omega^2\leq\gamma^2.$$

Аналогичная теорема рассмотрена для системы уравнений движения в "смешанной" форме. Кроме того, исследована возможность решения связанной линеаризованной задачи термоупругости для пластин с учетом конечной скорости распространения тепла.

Далее, для связанной задачи термоупругости пологих трехслойных оболочек, моделируемой в рамках гипотез Григолюка-Чулкова (задача в "перемещениях"), доказано существование хотя бы одного приближенного решения такой задачи с помощью метода Бубнова-Галеркина.

Отметим, что все рассмотренные краевые задачи относятся к классу неклассических задач, определяемых системами дифференциальных уравнений различного типа и размерности.

В следующем разделе главы описываются результаты по численному исследованию динамической устойчивости для жестко защемленной по контуру пологой оболочки в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с полным учетом инерции вращения и инерции продольных перемещений точек срединной поверхности. Приближенное решение связанной задачи термоупругости определяется с помощью метода Бубнова-Галеркина, при этом обоснование его сходимости и доказательство разрешимости поставленной задачи было получено в кандидатской диссертации. Выявление "динамической" критической нагрузки проводилось в соответствии с тремя критериями (Шио, Сунг и Рота; Будянского и Рота; Вольмира) и по всем критериям получены одинаковые результаты: учет "эффекта связанности" оказывает влияние (порядка 6-7%) на величину критической нагрузки, а учет инерции вращения — практически не оказывает (менее 2%).

В заключительном разделе главы изучена модификация одного итерационного алгоритма решения стационарных задач в теории пологих оболочек (модель на базе гипотез Кирхгофа-Лява) — такой алгоритм позволяет сводить решение исходной системы уравнений к последовательному решению одного линейного дифференциального уравнения эллиптического типа.

<u>Во второй главе</u> определены "проекционные" условия движения термоупругого деформируемого тела и на их основе построены новые модели термоупругих многослойных ортотропных оболочек с учетом и без учета обжатия; доказана корректность построенных моделей и моделей оболочек Рейсснера с учетом геометрической нелинейности; получены условия "неединственности" НДС для многослойных оболочек и с помощью численных экспериментов проведен анализ особенностей различных уточненных моделей многослойных оболочек при исследовании статической устойчивости "в большом".

Пусть деформируемое твердое тело (ДТТ) занимает в пространстве R^3 ограниченную измеримую по Лебегу область D с граничной поверхностью ∂D. Пространство R^3 параметризовано декартовой системой координат так, что координатные линии x_1, x_2 совмещены с линиями кривизны поверхности приведения, а ось Ox_3 направлена по нормали к поверхности приведения в сторону центра кривизны. Тогда $\overline{D} = D \cup \partial D = \overline{\Omega} \times [\delta_0, \delta_n]$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, где $\overline{\Omega}$ — проекция ДТТ на поверхность приведения (план ДТТ), $\partial\ \Omega$ — граница плана, δ_0, δ_n — координаты на оси Ox_3, $Q_2 = D \times (t_0, t_1)$, $(x_1, x_2, x_3, t) \in Q_2$. Полагаем, что ДТТ состоит из "n" ортотропных слоев, поверхности раздела которых определяются уравнениями: $x_3 = \delta_k$, $k = \overline{1, n-1}$. Каждый слой является прямым цилиндром $D_k = \{(x_1, x_2, x) \in R^3 | (x_1, x_2) \in \Omega, \delta_{k-1} < x_3 < \delta_k\}$, $k = \overline{1, n-1}$; $h = \delta_n - \delta_0$ — "толщина" ДТТ; в произвольной точке $M(x_1^k, x_2^k, x_3^k) \in D_k$ оси ортотропии совпадают с направлением координатных линий. Ограничиваясь рассмотрением ДТТ в виде пологой оболочки, компоненты тензора деформаций ε_{ij} принимаем в квадратичном приближении по В.В.Новожилову (с точностью до малых добавок). Кроме того, в пределах "k"-го слоя D_k для термоупругого многослойного ортотропного ДТТ выполняется закон Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{11}^k(x_1,x_2,x_3,t)=\frac{E_1^k\left(1-\nu_{23}^k\nu_{32}^k\right)}{\Delta^k}\varepsilon_{11}+\frac{E_1^k\left(\nu_{21}^k+\nu_{23}^k\nu_{31}^k\right)}{\Delta^k}\varepsilon_{22}-\beta_{11}^k(T-T_0)+$$
$$+\frac{E_1^k\left(\nu_{31}^k+\nu_{32}^k\nu_{21}^k\right)}{\Delta^k},\ k=\overline{1,n},\ \sigma_{12}^k(x_1,x_2,x_3,t)=2G_{12}^k\varepsilon_{12}(1\to 2\to 3\to 1), \tag{7}$$

где $E_i^k=E_i^k(x_1,x_2,x_3)$, $G_{ij}^k=G_{ij}^k(x_1,x_2,x_3)$, $\nu_{ij}^k=\nu_{ij}^k(x_1,x_2,x_3)$ — соответственно неоднородные модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона в "k"-м слое; $\Delta^k=1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k-\nu_{23}^k\nu_{32}^k-\nu_{31}^k\nu_{13}^k-2\nu_{12}^k\nu_{23}^k\nu_{13}^k$; $T=T(x_1,x_2,x_3,t)$, T_0 — соответственно абсолютная температура ДТТ в момент времени t и исходная температура в недеформированном состоянии; $\beta_{ij}^k=\beta_{ij}^k(x_1,x_2,x_3)$, а $\beta_{ij}^k(T-T_0)$ — компоненты тензора температурных напряжений. На поверхностях раздела слоев выполняются условия "идеального" контакта. Состояние ДТТ в момент времени t_0 определяют начальные условия

$$u_j(x_1,x_2,x_3,t_0)=\varphi_j(x_1,x_2,x_3),\ \frac{\partial u_j(x_1,x_2,x_3,t_0)}{\partial t}=\psi_j(x_1,x_2,x_3),\ j=\overline{1,3},$$

$$T(x_1,x_2,x_3,t_0)=T^*(x_1,x_2,x_3),\ (x_1,x_2,x_3)\in D,$$

где $\varphi_j(x_1,x_2,x_3)$, $\psi_j(x_1,x_2,x_3)$, $T^*(x_1,x_2,x_3)$ — известные функции; u_j — компоненты вектора перемещений.

"Проекционная" форма основных условий движения термоупругого многослойного ортотропного ДТТ состоит из следующих уравнений, аппроксимаций и задач.

1. Уравнение энергетического баланса

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\left[\rho^k \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial t}\cdot\frac{\partial u_i^k}{\partial t}\right)+\sigma_{ij}^k\frac{\partial \varepsilon_{ij}^k}{\partial t}+T^k\frac{\partial S_V^k}{\partial t}\right]dx_1\,dx_2\,dx_3 =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\left(\rho^k F_i\frac{\partial u_i^k}{\partial t}-div\,\overline{g}^k+g_0^k\right)dx_1\,dx_2\,dx_3+\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k^l} p_i^*\frac{\partial u_i^k}{\partial t}dS\,, \tag{8}$$

где $\rho^k=\rho^k(x_1,x_2,x_3,t)$, ε_{ij}^k — плотность и компоненты тензора деформаций в слое D_k; ∂D_k — граничная поверхность области D_k; ∂D_k^l — часть поверхности ∂D_k, на которой заданы статические условия; p_i^* — компоненты известного вектора напряжений, действующего на поверхность ∂D; $\overline{g}^k$ — вектор теплового потока с компонентами

$$g_i^k=-\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}^k\frac{\partial T^k}{\partial x_j},\ i=\overline{1,3}\,; \tag{9}$$

$g_0^k\equiv g_0(x_1,x_2,x_3,t)$ — объемная плотность тепловых источников в слое D_k; F_i — компоненты вектора плотности массовых сил; $S_v^k\equiv S_v^k(x_1,x_2,x_3,t)$ — удельная энтропия в слое D_k, отнесенная к единице объема, уравнение состояния для энтропии имеет вид

$$S_V=c_\varepsilon\frac{T-T_0}{T_0}+\beta_{ij}\varepsilon_{ij}, \tag{10}$$

$c_\varepsilon\equiv c_\varepsilon(x_1,x_2,x_3)$ — удельная теплоемкость при постоянной деформации.

2. Модифицированное уравнение Гамильтона-Остроградского(Г.-О.)

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\left(-\rho^k\frac{\partial u_i^k}{\partial t}\frac{\partial(\delta u_i^k)}{\partial t}+\sigma_{ij}^k\,\delta\,\varepsilon_{ij}^k\right)dx_1dx_2dx_3dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\rho^k\psi_i\delta u_i^k dx_1dx_2dx_3=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\rho^k F_i\,\delta u_i^k dx_1dx_2dx_3dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{nk}\int_{\partial D_k}p_i^*\delta\,u_i^k dSdt+ \tag{11}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_k}\left(c_\varepsilon^k\frac{\theta}{T_0}+\beta_{ij}^k\varepsilon_{ij}^k-\widetilde{S}_V^k\right)\delta T^k dx_1dx_2dx_3dt\,,$$

где δu_i^k — компоненты вектора виртуальных перемещений, $\delta\varepsilon_{ij}^k$ — функции от компонент δu_i^k; $\tilde{S}_v^k$ — возможная аппроксимация функции энтропии; δT^k — вариация функции температурного поля в области D_k; $\overline{D}_k = D_k \cup \partial D_k$; $u_i^k \in L_i^1(Q_2)$, $\delta u_i^k \in L_i^2(Q_2)$, $\sigma_{ij} \in L_{ij}^3(Q_2)$; $L_i^1(Q_2)$, $L_i^2(Q_2)$, $L_{ij}^3(Q_2)$ — нормированные пространства функций, определенных на области Q_2 и обладающих гладкостью, достаточной для определения интегралов от слагаемых в (8) и (11).

3. Способ аппроксимации перемещений:

1) компоненты $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ задаем в виде

$$u_i = \left\{\tilde{u}_i^{m_i}(x_1 x_2, x_3, t), x_3 \in \left[\delta_{m_i - 1}, \delta_{m_i}\right]\right\},\ m_i = \overline{1, M_i},\ i = \overline{1,3}, \tag{12}$$

где M_i — число слоев, на которые разбивается область $\overline{D}$ плоскостями, определяемыми уравнениями $x_3 = \delta_{m_i}$ (при этом $\delta_{M_i} \equiv \delta_n$);

2) $\forall m_i, \tilde{u}_i^{m_i} \in L_{im_i}^1(Q_2^{m_i}) \subset L_i^1(Q_2^{m_i})$, где $Q_2^{m_i} = D_{m_i} \times (t_0, t_1)$,

$$D_{m_i} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| (x_1, x_2) \in \Omega, \delta_{m_i - 1} < x_3 < \delta_{m_i}\right\},\ L_{im_i}^1(Q_2^{m_i}) \text{—}$$

в общем бесконечномерные подпространства пространства $L_i(Q_2^{m_i})$;

3) для функций $\tilde{u}_i^{m_i}$ могут задаваться дополнительные ограничения в виде различных функциональных уравнений, которые, в свою очередь, определяются интегральными, дифференциальными и вариационными уравнениями, а также терминальными условиями.

Из (12) при $M_i = 1 (\forall\ i = \overline{1,3})$ получаем континуальные модели, при $M_i = n (\forall\ i = \overline{1,3})$ и $\delta_{m_i} = \delta_k$ — дискретные модели с послойной аппроксимацией компонент вектора перемещений, при $M_i \neq n$ и $\delta_{m_i} \neq \delta_k$ — различные модификации, позволяющие учесть предполагаемые особенности НДС. Заметим, что примером функциональных ограничений на $\tilde{u}_i^{m_i}$ в виде терминальных условий являются ограничения в модели Пелеха-Шереметьева, примером ограничения в виде вариационного уравнения является используемое уравнение Г.-О., а ограничением в виде дифференциального уравнения выступает обобщенное уравнение теплопроводности при рассмотрении связанных задач.

4. Проекционная форма уравнений состояния (11):

1) аппроксимацию компонент σ_{ij} определим так

$$\sigma_{ij} = \left\{\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}}(x_1, x_2, x_3, t), x_3 \in \left[\delta_{l_{ij}-1}, \delta_{l_{ij}}\right]\right\},\ l_{ij} = \overline{1, L_{ij}},\ i, j = \overline{1,3}, \tag{13}$$

где L_{ij} — число слоев, на которые разбивается область $\overline{D}$ плоскостями, определяемыми уравнениями $x_3 = \delta_{l_{ij}}$ ($\delta_{l_{ij}} \equiv \delta_n$);

2) $\forall\ l_{ij}$, $\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}} \in L_{ijl_{ij}}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)$, где $Q_2^{l_{ij}} = D_{l_{ij}} \times (t_0, t_1)$,

$$D_{l_{ij}} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \middle| (x_1, x_2) \in \Omega,\ \delta_{l_{ij}-1} < x_3 < \delta_{l_{ij}}\right\},$$

$L_{ijl_{ij}}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)$ — в общем бесконечномерные подпространства пространства $L_{ij}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)$, при этом норма в $L_{ij}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)$ определяется как "сужение" функционала нормы из $L_{ij}^3(Q_2)$;

3) явный вид компонент $\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}}$ определяем как решение следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \sum_{l_{ij}=1}^{L_{ij}} \left|\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}} - c_{ijml}(x_1, x_2, x_3)\varepsilon_{ml} + \beta_{ij}(T - T_0)\right|_{L_{ij}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)}^2 \to \inf, \tag{14}$$

где $\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}}$ — искомые функции, обеспечивающие (в силу выбора подпространств $L_{ij}^3\left(Q_2^{l_{ij}}\right)$) выполнение условий идеального контакта, $c_{ijml}(x_1, x_2 x_3)$ — компоненты тензора упругих постоянных, а функции ε_{ml} $m, l = \overline{1,3}$ и $(T - T_0)$ — полагаются известными;

4) дополнительные ограничения на вид аппроксимации $\tilde{\sigma}_{ij}^{l_{ij}}$ задаются различными функциональными уравнениями.

Из (13) при $L_{ij} = n$, $i,j = \overline{1,3}$, $\delta_{l_{ij}} = \delta_n$ получаем послойную аппроксимацию напряжений, определяемую, в общем, различными подпространствами (в границах слоя) и не всегда приводящую к дискретным моделям (например, если уравнения движения формируются относительно аппроксимаций перемещений, принимаемых для всего пакета слоев в целом).

5. Проекционная форма начальных условий, позволяющая найти компоненты аппроксимаций $\tilde{u}_i^{m_i}(x_1, x_2 x_3, t)$ при $t = t_0$ определяется как решение экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{m_i=1}^{M_i} \left| \tilde{u}_i^{m_i}(x_1, x_2, x_3, t) - \varphi_i(x_1, x_2, x_3) \right|^2_{\tilde{L}_{im_i}^1 (D_{m_i})} \to inf, \tag{15}$$

где $\tilde{L}_{im_i}^1(D_{m_i})$ — нормированные пространства следов функций из соответствующих подпространств $L_{im_i}^1(Q_2^{m_i})$; $|\cdot|_H$ — обозначение нормы в нормированном пространстве H.

6. Необходимое условие экстремума в интегральном принципе термодинамики при постоянном потоке (принцип Онсагера)

$$\delta\left(\int_{\delta_0}^{\delta_n} \iint_{\Omega} \left\{ TT_0 \frac{\partial S_V}{\partial t} + T\, div\, \bar{g} - Tg_0 - \left(\bar{g} + \frac{1}{2}\bar{g}' \right) grad T \right\} dv \right) = 0, \tag{16}$$

где $\bar{g}' = \lambda_{11}(x_1, x_2, x_3)\dfrac{\partial T}{\partial x_1}\bar{i} + \lambda_{22}(x_1, x_2, x_3)\dfrac{\partial T}{\partial x_2}\bar{j} + \lambda_{33}(x_1, x_2, x_3)\dfrac{\partial T}{\partial x_3}\bar{k}$, $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ — декартов базис; $T \in L^4(Q_2)$, $S \in L^5(Q_2)$, $\bar{g} \in L_1^6(Q_2) \times L_2^6(Q_2) \times L_3^6(Q_2)$; $L^4(Q_2)$, $L^5(Q_2)$, $L_i^6(Q_2)$ $(i = \overline{1,3})$ — нормированные пространства функций, определенных на области Q_2 и обладающих достаточной гладкостью для определения интегралов от слагаемых в (16); $\bar{g}$ — возможная аппроксимация вектор-функции теплового потока.

Компоненты в аппроксимации энтропии и теплового потока находятся из экстремальных задач, подобных (14), с учетом ограничений в виде вариационных уравнений (11), (16); аппроксимация температурного поля определяется подобно аппроксимации перемещений.

При данном определении "проекционной" формы условий движения 1-6 центральное место занимает выбор подпространств, на которых определяются аппроксимации. Конструктивный механизм наполнения физическим содержанием указанных подпространств заключается в "согласовании" получаемых приближенных уравнений состояния (на базе выбранных подпространств) с основными постулатами термомеханики ДТТ. Для формализации понятия "согласование" даются следующие определения.

Определение 1. Назовем любое приближенное уравнение состояния ДТТ из (7), (9), (10) согласованным с основными постулатами термомеханики ДТТ, если использование такого уравнения позволяет в сочетании с другими принимаемыми уравнениями состояния сохранить исходную трехмерную (по пространственным переменным) форму записи уравнений (8), (11), (16), полученную на базе точных уравнений состояния (7), (9), (10).

Таким образом, согласованные уравнения состояния позволяют "в среднем", то есть по отношению к основным постулатам термомеханики, записанным в интегральной форме для конечного объема, сохранить индивидуальные физические свойства материала ДТТ.

Как известно, в различных теориях оболочек, например, на базе гипотез Кирхгофа-Лява и Тимошенко, используют "укороченные" уравнения энергетического баланса и Г.-О., то есть такие, в которых с помощью различных асимптотических оценок отбрасывается ряд слагаемых. В связи с этим дается такое определение.

Определение 2. Назовем любое приближенное уравнение состояния ДТТ из (7), (9), (10) асимптотически согласованным с основными постулатами термомеханики ДТТ, если выполняются условия из определения 1 по отношению к "укороченным" уравнениям (8), (11), (16).

Определение 3. Математическую модель оболочек будем называть согласованной или асимптотически согласованной, если при ее построении используются согласованные или асимптотически согласованные уравнения состояния; в противном случае модель будем называть несогласованной.

Тривиальным примером согласованных и асимптотически согласованных моделей являются те, в которых используются точные уравнения состояния (7), (9), (10); примером несогласованных (в том числе асимптотически не согласованных) моделей являются модели многослойных оболочек, для которых уравнения состояния получаются с помощью вариационных уравнений Рейсснера, и их модификаций.

Далее в работе определяются условия движения многослойного ортотропного ДТТ на базе "смешанного" модифицированного уравнения Челленджера-Рейсснера и уравнения Онсагера, при этом способ аппроксимации перемещений, компонент тензора напряжений, температурного поля, энтропии, компонент вектор-функций теплового потока и начальных условий соответствует принятому для "проекционной" формы условий движения. Кроме того, на базе принципа виртуальных работ получена "проекционная" форма основных условий равновесия ДТТ (стационарная задача).

На основе уравнений Г.-О., Челленджера-Рейсснера, виртуальных работ и интегрального принципа Онсагера построены новые математические модели оболочек с использованием проекционной формы уравнений состояния и начальных условий — при этом выявлена соответствующая таким моделям многозначность в определении НДС, которая, однако, не влияет на решение итоговых двумерных систем уравнений движения или равновесия. В частности, построены две модели многослойной ортотропной термоупругой оболочки с учетом обжатия, одна из которых на базе "проекционной" формы условий движения дает нетривиальный пример согласованной модели — с этой целью рассматривается аппроксимация компонент вектора перемещений в виде

$$u_i = \sum_{j=0}^{3} u_{ij}(x_1, x_2, t)x_3^j, \; i = \overline{1,2}, \; u_3 = \sum_{j=0}^{1} u_{3j}(x_1, x_2, t)x_3^j, \tag{17}$$

таким образом, $M_k = 1$, $L_{k_l}^1(Q_2) \equiv L_{k_l}^1(Q_2)$, $k = \overline{1,3}$, $L_{k_l}^1(Q_2)$ — линейные многообразия элементов вида (17) из $L_k^1(Q_2)$. Используется трехмерное уравнение теплопроводности с точными уравнениями состояния (9), (10) без каких-либо аппроксимаций температурного поля.

В рамках первой модели компоненты тензора напряжений σ_{ij} ($i = \overline{1,3}$) определяем с помощью точных уравнений состояния (7) — таким образом, в общем, нарушаются условия идеального контакта слоев, но вся модель является согласованной. Итоговая система уравнений термомеханического движения пологой многослойной ортотропной оболочки (связанная задача термоупругости) с учетом обжатия определяется как система уравнений Эйлера-Лагранжа для вариационных уравнений (11), (16).

В рамках второй модели используем проекционную форму уравнений состояния для компонент σ_{i3} $i = \overline{1,3}$, с этой целью зададим аппроксимацию σ_{i3} в виде

$$\tilde{\sigma}_{i3} = \sum_{j=0}^{2} \mu_{ij}(x_1, x_2, t)x_3^j, \; i = \overline{1,2}, \; \tilde{\sigma}_{33} = \sum_{j=0}^{4} \mu_{3j}(x_1, x_2, t)x_3^j, \tag{18}$$

при этом полагаем $L_{k3} = 1$ $(k = \overline{1,3})$. Далее принимаем, что $L_{k3}^3(Q_2) \equiv L^2(Q_2)$, $k = \overline{1,3}$. Таким образом, аппроксимация (18) эквивалентна определению компонент $\tilde{\sigma}_{k3}$, $k=\overline{1,3}$, как элементов бесконечномерных подпространств $L^3_{k3l}(Q_2)$, $k=\overline{1,3}$, пространства $L^2(Q_2)$ следующего вида

$$L^3_{k3l}(Q_2)=\left\{v(x_1,x_2,x_3,t)\middle| v(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{j=0}^{n_k} w_{kj}(x_1,x_2,t)x_3^j\right\},$$

где $n_1=n_2=2$, $n_3=4$; $w_{kj}(x_1,x_2,t)$ — произвольные элементы пространства $L^2(\Omega\times(t_0,t_1))$. Компоненты σ_{ij} $(i,j=1,2)$ — определяем из уравнений состояния (7), а компоненты $\tilde{\sigma}_{k3}$, $k=\overline{1,3}$ — из условия (14) как единственные (в силу строгой нормированности пространства $L^2(Q_2)$) проекции на подпространства $L^3_{k3l}(Q_2)$ компонент σ_{i3}, $k=\overline{1,3}$. При этом элементы $(\tilde{\sigma}_{k3}-\sigma_{k3})$ ортогональны соответствующим подпространствам $L^3_{k3l}(Q_2)$, но тогда из выполнения условия (14) следует выполнение условий ортогональности вида

$$\sum_{j=0}^{n_k}\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\left(\int_{\delta_0}^{\delta_n}(\tilde{\sigma}_{k3}-\delta_{k3})x^j dx_3\right)w_{kj}(x_1,x_2,t)dx_1dx_2dt=0,$$

откуда в силу произвольности элементов $w_{kj}(x_1,x_2,t)$ для почти всех $(x_1,x_2,t)\in\Omega\times(t_0,t_1)$ получаем равенства

$$\int_{\delta_0}^{\delta_n}(\tilde{\sigma}_{k3}-\sigma_{k3})x_3^j dx_3=0,\ k=\overline{1,3},\ j=\overline{0,n_k}. \tag{19}$$

Так как система функций $\{x_3^j\}$ — линейно независима на $[\delta_0, \delta_n]$, то систему (19) можно разрешить, например, по правилу Крамера относительно искомых функций $\mu_{il}\left(i=1,2,\ l=\overline{0,2}\right)$, $\mu_{3j}\left(j=\overline{0,4}\right)$ — полагаем, что такое решение найдено. Очевидно, по построению аппроксимации (18) удовлетворяют условиям идеального контакта .

Итоговая система уравнений термомеханического движения оболочки для второй модели вновь определяется из вариационных уравнений (11), (16). Доказательство согласованности второй модели следует из теоремы.

Теорема. При выполнении условий построения первой и второй моделей оболочки справедливы равенства

$$\int_{\delta_0}^{\delta_n} \tilde{\sigma}_{k3}\varepsilon_{k3}dx_3 = \int_{\delta_0}^{\delta_n} \sigma_{k3}\varepsilon_{k3}dx_3, \ \int_{\delta_0}^{\delta_n} \tilde{\sigma}_{k3}\delta\varepsilon_{k3}dx_3 = \int_{\delta_0}^{\delta_n} \sigma_{k3}\delta\varepsilon_{k3}dx_3,$$

$$\int_{\delta_0}^{\delta_n} \tilde{\sigma}_{k3}\frac{\partial \varepsilon_{k3}}{\partial t}dx_3 = \int_{\delta_0}^{\delta_n} \sigma_{k3}\frac{\partial \varepsilon_{k3}}{\partial t}dx_3, \ k=\overline{1,3},$$

где $\tilde{\sigma}_{k3}$ — компоненты вида (18), σ_{k3} — компоненты, найденные из уравнений (7); $\delta\,\varepsilon_{k3}$ — определяются подобно ε_{k3}.

Следствие 1. Вторая модель является согласованной моделью.

Следствие 2. При заданной аппроксимации компонент вектора перемещений решения итоговых двумерных (по пространственным переменным) уравнений термомеханического движения в рамках первой и второй моделей эквивалентны, то есть НДС оболочки не определяется однозначно, а выполнение статических условий контакта не является необходимым.

Следствие 3. При построении второй модели выполняется условие инвариантности основных уравнений термодинамики (8), (11), (16) для конечных трехмерных объемов сплошной среды относительно используемых приближенных уравнений состояния.

Проблемы разрешимости, сходимости численных методов и качественного анализа для связанных задач термоупругости в уточненной теории пологих оболочек относятся к разделу нерешенных проблем — часть из них указана в монографии И.И.Воровича "Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек" — поэтому в работе этим вопросам уделено особое внимание и для всех построенных асимптотически согласованных моделей (а тем самым для моделей Рейсснера, Пелеха-Шереметьева и континуальных моделей Григолюка-Куликова) получено полное или частичное решение всех указанных проблем.

Одной из рассмотренных задач является следующая связанная задача термоупругости для однородных изотропных пологих оболочек "в перемещениях" с учетом демпфирования (модель Пелеха-Шереметьева)

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\rho\frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}+\varepsilon_i\frac{\partial u_{i0}}{\partial t}-\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}-\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}}\right)dx_3=0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\rho\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)u_{i1}-\frac{4x_3^3}{3h^2}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right]+\varepsilon_i\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\times\right.$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)u_{i1}-\frac{4x_3^3}{3h^2}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right]-\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}-\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}}+\qquad(20)$$
$$\left.+\left(1-\frac{4x_3^2}{h^2}\right)\sigma_{i3}\right)dx_3=0,\ i=\overline{1,2},$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\rho\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial t^2}+\varepsilon_3\frac{\partial u_{30}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}\left\{-\rho\left(-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)u_{i1}-\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{4x_3^3}{3h^2}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right]\right)-\varepsilon_i\left(-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)u_{i1}-\frac{4x_3^3}{3h^2}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right]\right)+$$
$$+\left(-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial^2\sigma_{ii}}{\partial x_i^2}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{ii}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right)-k_i\sigma_{ii}+\left(-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}\partial x_i}-$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma_{12}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}}\right)-\left(1-\frac{4x_3^2}{h^2}\right)\frac{\partial\sigma_{i3}}{\partial x_i}\right\}\right)dx_3=g_1(x_1,x_2,t),$$

$$\frac{C_0}{T_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\lambda}{T_0}\Delta_1\theta=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{2}\left[e_{ii}+\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i}+\left(-\frac{4x_3^3}{3h^2}\right)\times\right.\right. \tag{21}$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}\right]\right)+\frac{1}{T_0}g_2(x_1,x_2,x_3,t);$$

$$u_{30}\big|_\Gamma=0,\ \frac{\partial u_{30}}{\partial n}\bigg|_\Gamma=0,\ u_{ij}\big|_\Gamma=0,\ \theta\big|_S=0,\ \Gamma=\partial\Omega\times[t_0,t_1],\ S=\partial D\times[t_0,t_1]; \tag{22}$$

$$u_{ij}(x_1,x_2,t_0)=\varphi_{ij}(x_1,x_2),\ \frac{\partial u_{ij}(x_1,x_2,t_0)}{\partial t}=\psi_{ij}(x_1,x_2),\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{0,1},$$

$$u_{30}(x_1,x_2,t_0)=\varphi_{30}(x_1,x_2),\ \frac{\partial u_{30}(x_1,x_2,t_0)}{\partial t}=\psi_{30}(x_1,x_2), \tag{23}$$

$$\theta(x_1,x_2,x_3,t_0)=\varphi_4(x_1,x_2,x_3);$$

где $Q_1=\Omega\times(t_0,t_1)$, e_{ij} — компоненты тензора деформаций срединной поверхности.

Теорема. Пусть $\partial\,\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия: $g_i\in L^2(Q_i)$, $\varphi_{30}\in H_0^2(\Omega)$, $\psi_{30}\in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_{ij}\in H_0^1(\Omega)$, $\psi_{ij}\in L^2(\Omega)$, $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,1}$, $\varphi_4\in L^2(D)$. Тогда: 1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{ij},\tilde{u}_{30},\tilde{\theta}\}$ задачи (20)-(23), при этом

$$\tilde{u}_{30}\in L^\infty(t_0,t_1;H_0^2(\Omega));\ \tilde{u}_{ij},\frac{\partial\tilde{u}_{30}}{\partial t}\in L^\infty(t_0,t_1;H_0^1(\Omega)); \tag{24}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_{ij}}{\partial t}\in L^\infty(t_0,t_1;L^2(\Omega));\ \tilde{\theta}\in L^2(t_0,t_1;H_0^1(D)),\ \tilde{\theta}\in L^\infty(t_0,t_1;L^2(D));$$

2) приближенное решение задачи (20)-(23) может быть найдено методом Бубнова-Галеркина, при этом все множество получаемых приближенных решений слабо компактно в пространствах, соответствующих (24), а его предельные точки определяют решение задачи (20)-(23).

Подобные теоремы доказаны для связанных и несвязанных задач термоупругости с малой инерцией продольных перемещений; при дополнительном предположении о малости инерции вращения доказана, следуя методике Н.Ф.Морозова, теорема единственности решения для несвязанной задачи (модель Пелеха-Шереметьева). Кроме того, доказана возможность решения методом Бубнова-Галеркина связанной линеаризованной задачи термоупругости для пластин с гиперболическим уравнением теплопроводности (модель Пелеха-Шереметьева) и стационарной задачи термоупругости для пластин с учетом геометрической нелинейности.

Как известно, при исследовании эволюции оболочек большое значение имеет диссипативность уравнений движения (это одно из необходимых условий существования аттрактора у распределенной системы) — первые результаты по диссипативности уравнений Маргера-Власова получены Н.Ф.Морозовым. В настоящей главе доказана частичная диссипативность эволюционных уравнений в уточненной теории пластин, то есть диссипативность относительно функции прогиба.

В заключительном разделе главы представлены результаты численных экспериментов по исследованию статической устойчивости прямоугольных в плане многослойных ортотропных оболочек на базе моделей Пелеха-Шереметьева (PEL), KULO и KUL — соответственно моделей Григолюка-Куликова без учета и с учетом "дополнительных" функций μ_i^k в аппроксимации σ_{i3}^k, ACMO и ACM — соответственно асимптотически согласованных моделей без учета и с учетом функций μ_i^k, TIM 1 и TIMF — соответственно моделей типа Тимошенко с $f(x_3)=1$ и $f(x_3)=\left(x_3-\dfrac{4x_3^3}{3h^2}\right)$. На рисунках 1 и 2 приведены "кривые устойчивости" для центральной точки оболочки, а на рисунках 3 и 4 — "кривые напряжений" для компоненты σ_{i3} при граничных условиях "скользящая заделка" (тип 1) и при "шарнирном опирании" (тип 2). Анализ численных экспериментов подтвердил теоретические выводы об эффективности модели ACM: 1) результаты (по отношению к "кривым устойчивости"), полученные для модели KUL, существенно зависят от учета функций μ_i^k, а для модели ACM — не зависят; 2) при учете дополнительных функций μ_i^k "кривая устойчивости", полученная по модели KUL, приближается (по отношению к расположению кривой на рисунке) к кривой, полученной по модели ACM; 3) "кривые напряжений" по отношению к компонентам σ_{i3} качественно отличаются для модели PEL (эти компоненты разрывны по переменной "x_3") и для модели KUL и ACM (эти компоненты непрерывны по переменной "x_3"), при этом, что принципиально, "кривые устойчивости" для модели PEL и ACM совпадают.

В третьей главе рассмотрены актуальные вопросы моделирования обобщенных задач дифракции в теории оболочек и вопросы обоснования их корректности. К классу обобщенных задач дифракции можно отнести, например, задачи, определяемые для оболочек в рамках моделей Григолюка-Чулкова, Болотина-Новичкова, задачи с учетом зоны краевого эффекта, задачи для составных конструкций, основанные на системном анализе (метод структурной декомпозиции), задачи для ребристых оболочек и т.д. Традиционно указанные задачи не рассматриваются в рамках единого класса задач, однако вариационные уравнения, определяющие эволюцию и равновесие деформируемых тел, дают почти очевидную методическую основу для выделения нового класса обобщенных задач дифракции в теории оболочек — именно такая "вариационная" методика использована при моделировании задач в данной главе.

Одним из объектов исследования явилась пологая однородная изотропная оболочка переменной толщины, занимающая в параметризован-

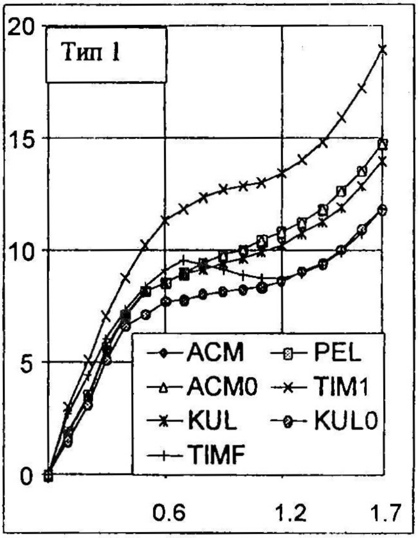

Рис.1

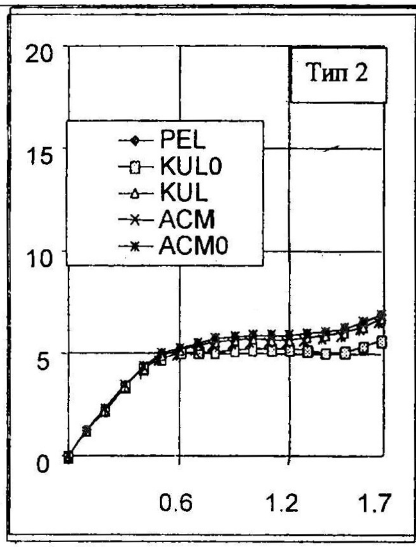

Рис.2

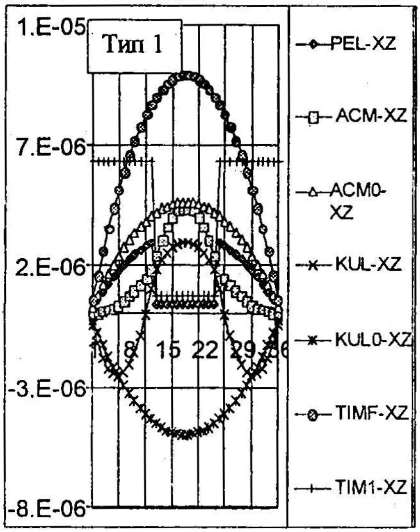

Рис.3

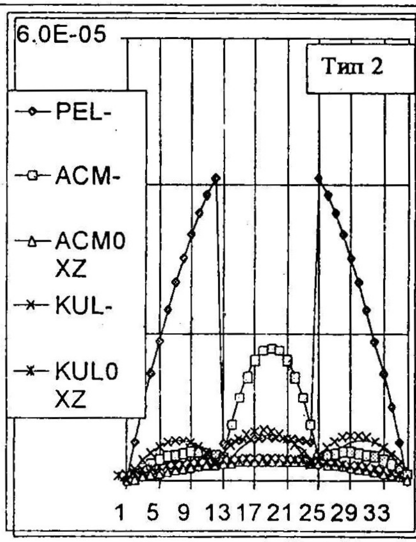

Рис.4

ном пространстве R^3 область $D = \Omega \times \left(-\frac{h(x_1, x_2)}{2}, \frac{h(x_1, x_2)}{2}\right)$, где $h(x_1, x_2) > 0$ функция, определяющая толщину оболочки, $(x_1, x_2) \in \Omega$. Полагаем, что план оболочки можно разбить достаточно гладкой кривой γ на две измеримые подобласти Ω_i, $i = \overline{1,2}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ так, что $D_1 = \Omega_1 \times \left(-\frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{2}\right)$, $D_2 = \Omega_2 \times \left(-\frac{h_2}{2}, \frac{h_2}{2}\right)$, $h_1 \geq h_2 > 0$, $h_i = const$, $i = \overline{1,2}$. Кроме того, "толстая" область D_1 взаимодействует с температурным полем, а "тонкая" D_2 — не взаимодействует. Математическая модель рассматриваемой оболочки определяется, согласно результатам из второй главы, следующей системой вариационных уравнений

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_{\Omega}\left(-\rho(\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_{j0}}{\partial t}\frac{\partial \delta u_{i0}}{\partial t} - \rho\left(\mu_1\frac{h_1^3}{12} + \mu_2\frac{h_2^3}{12}\right)\left(grad\frac{\partial u_{30}}{\partial t}\right)\times\right.\right.$$

$$\times grad\frac{\partial \delta u_{30}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2}\left(\left[\mu_1\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}}\sigma_{ii}^1\delta\varepsilon_{ii}^1 dx_3 + \mu_2\int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}}\sigma_{ii}^2\delta\varepsilon_{ii}^2 dx_3\right] + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \left[\mu_1\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}}\sigma_{12}^1\delta\varepsilon_{i3-i}^1 dx_3 + \mu_2\int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}}\sigma_{12}^2\delta\varepsilon_{i3-i}^2 dx_3\right] + 2\mu_1\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}}\sigma_{i3}^1\delta\varepsilon_{i3}^1 dx_3\right)\right)dx_1dx_2\right\}dt - \tag{25}$$

$$-\iint_{\Omega}\rho\left(\psi_{30}\delta u_{30}(t_0) + \left[\mu_1\frac{h_1^3}{12}grad\psi_{30} + \mu_2\frac{h_2^3}{12}grad\psi_{30}\right]grad\,\delta u_{30}(t_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2}(\psi_{i0}\,\delta u_{i0}(t_0))\right)dx_1dx_2 = \int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}g_1(x_1, x_2, t)\delta u_{30}\,dx_1dx_2dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iint_{\Omega_1}\left(\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}}\left[-\frac{C_0}{T_0}\theta\frac{\partial\delta\theta}{\partial t} + \frac{\lambda}{T_0}grad\,\theta\,grad\,\delta\theta\right]dx_3\right)dx_1dx_2\right\}dt +$$

$$+\iiint_{D_1}\left(-\frac{C_0}{T_0}\varphi_4\delta\theta(t_0)\right)dx_1dx_2dx_3 = \tag{26}$$

$$=-\frac{E\alpha}{1-\nu}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\iiint_{D_1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(e_{ii}^{1}+(-x_3)\frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2}\right)\right]\delta\theta-\sum_{i=1}^{2}\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial\delta\theta}{\partial t}\right)dx_1dx_2dx_3\right\}dt+\frac{E\alpha}{1-\nu}\iiint_{D_1}\left(\sum_{i=1}^{2}\left(x_3-\frac{4x_3^3}{3h_1^2}\right)\frac{\partial u_{i1}(t_0)}{\partial x_i}\right)\times$$

$$\times\delta\theta(t_0)dx_1dx_2dx_3+\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_1}\iiint_{D_1}g_2\,\delta\theta\,dx_1dx_2dx_2dt,$$

$$\mu_i(x_1,x_2)=\begin{cases}1,(x_1,x_2)\in\Omega_i,\\ 0,(x_1,x_2)\in\Omega_{3-i},\ \ i=1,2,\end{cases}$$

при этом для "толстой" области D_1 использована аппроксимация компонент вектора перемещений в рамках модели Пелеха-Шереметьева, а в "тонкой" области D_2 — в рамках гипотез Кирхгофа-Лява; μ_i - индикаторные функции.

Уравнения движения и теплопроводности, получаемые из вариационных уравнений (25)-(26), как уравнения Эйлера-Лагранжа, дополняются следующими краевыми условиями

$$u_{30}\big|_{\Gamma}=0,\ \left.\frac{\partial u_{30}}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0,\ u_{i1}\big|_{\Gamma_1}=0,\ u_{i0}\big|_{\Gamma}=0,\ \theta\big|_{S_1}=0,$$

$$\partial\Omega=\partial\tilde{\Omega}_1\cup\partial\tilde{\Omega}_2,\ \overline{\Omega}_i=\Omega_i\cup\partial\Omega_i,\ \partial\Omega_i=\partial\tilde{\Omega}_i\cup\gamma,\ \Gamma=\partial\Omega\times[t_0,t_1],$$

$$\Gamma_1=\partial\Omega_1\times[t_0,t_1],\ S_1=\partial D_1\times[t_0,t_1],$$

$$u_{30}(x_1,x_2,t)=\varphi_{30}(x_1,x_2),\ \frac{\partial u_{30}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=\psi_{30}(x_1,x_2),\ u_{i0}(x_1,x_2,t)=$$

$$=\varphi_{i0}(x_1,x_2),\ \frac{\partial u_{i0}(x_1,x_2,t)}{\partial t}=\psi_{i0}(x_1,x_2),\ \theta(x_1,x_2,x_3,t_0)=\varphi_4(x_1,x_2,x_3)$$

и определяют связанную задачу термоупругости для оболочки (задача А).

Теорема. Пусть кривые $\partial\Omega$, $\partial\Omega_i$, γ имеют гладкость, достаточную для используемых теорем вложения и выполняются такие условия: Ω_i — измеримые подобласти области Ω, $g_i \in L^2(Q_i)$, $\varphi_{30} \in H_0^2(\Omega)$, $\psi_{30}, \varphi_{i0} \in H_0^1(\Omega)$, $\psi_{i0} \in L^2(\Omega)$, $i = \overline{1,2}$, $\varphi_4 \in L^2(D_1)$. Тогда: 1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{30}, \tilde{\theta}\}$ задачи А, при этом

$$\tilde{u}_{30} \in L^\infty\big(t_0,t_1;H_0^2(\Omega)\big);\ \tilde{u}_{i0}, \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L^\infty\big(t_0,t_1;H_0^1(\Omega)\big);$$
$$\tilde{u}_{i1} \in L^\infty\big(t_0,t_1;H_0^1(\Omega_1)\big);\ \frac{\partial \tilde{u}_{i0}}{\partial t} \in L^\infty\big(t_0,t_1;L^2(\Omega)\big);\ \theta \in L^2\big(t_0,t_1;H_0^1(D_1)\big); \tag{27}$$

2) приближенное решение задачи А может быть найдено методом Бубнова-Галеркина, при этом функции u_{i1} определяются как решения соответствующих уравнений эллиптического типа, а все множество получаемых приближенных решений слабо компактно в пространствах (27) и его предельные точки определяют решение задачи А.

Подобные задачи и теоремы, доказывающие корректность построенных моделей, получены для обобщенных задач дифракции термоупругих пологих оболочек и пластин, локально определяемых в рамках гипотез Григолюка-Чулкова, обобщенных гипотез Тимошенко и гипотез Кирхгофа-Лява; рассмотрены варианты уравнений движения "в перемещениях" и "в смешанной" форме, кроме того, исследована стационарная задача.

В заключении диссертации сформулированы основные результаты и выводы научного и прикладного характера.

1. Для геометрически нелинейных связанных задач термоупругости пологих оболочек и пластин в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с учетом трехмерного уравнения теплопроводности параболического типа и малости инерции продольных перемещений точек срединной поверхности получены доказательства существования решения и слабой компактности

множества, определяемых с помощью метода Бубнова-Галеркина, приближенных решений; доказана диссипативность указанных эволюционных уравнений по отношению к функции прогиба (частичная диссипативность).

2. Для геометрически нелинейных связанных задач термоупругости трехслойных пологих оболочек в рамках гипотез Григолюка-Чулкова, с учетом трехмерного уравнения теплопроводности параболического типа и без учета малости инерции продольных перемещений точек срединной поверхности получено доказательство существования решения и слабой компактности множества, определяемых с помощью метода Бубнова-Галеркина, приближенных решений — система эволюционных уравнений рассмотрена "в перемещениях". Предложенная схема доказательства может быть основой при исследовании сходимости конечно-разностных методов и различных вариантов проекционных методов для указанного класса задач.

3. Для геометрически нелинейных связанных задач термоупругости пологих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с учетом трехмерного уравнения теплопроводности параболического типа и без учета малости инерции продольных перемещений точек срединной поверхности проведены численные эксперименты на базе метода Бубнова-Галеркина, в результате которых установлено: а) в рамках допустимой для пологих оболочек 5%-ной погрешности учет "инерции вращения" не оказывает влияния на "динамическую критическую нагрузку" (по А.С.Вольмиру); б) учет "эффекта связанности" температурного и деформационного полей приводит к изменению указанной нагрузки на 6-7% при неоптимальном, с точки зрения "эффекта связанности", выборе материала оболочки — за основу при определении безразмерных параметров был взят алюминий.

4. Предложена и теоретически исследована модификация итерационного алгоритма для численного решения уравнений типа Кармана, позволяющая исследовать смежные формы равновесия пологих оболочек и пластин при продольном нагружении — проведенные численные эксперименты подтвердили эффективность модификации для определенного класса параметров цилиндрических панелей и пластин.

5. Определены новые "проекционные" условия движения и равновесия деформируемых твердых тел, взаимодействующих с температурным полем: указанные условия представляют собой совокупность интегральных уравнений энергетического баланса, Гамильтона-Остроградского (или принципа виртуальных работ), Онсагера, для конечных объемов сплошной среды, а также экстремальных задач для определения наилучших аппроксимаций компонент тензора напряжений, вектора теплового потока, энтропии и начальных условий. Сформулированные условия допускают естественное обобщение на случай взаимодействия с различными физическими полями — для этого достаточно учесть "энергетический" вклад новых физических полей и воспользоваться "проекционной" формой записи дополнительных уравнений состояния.

6. Построены на базе "проекционных" условий новые континуальные модели многослойных, ортотропных, термоупругих пологих оболочек с учетом и без учета терминальных условий для сдвиговых компонент тензора напряжений — одно из отличий получаемых моделей от известных заключается в новых уравнениях состояния для указанных компонент, при этом выполняется дополнительное требование инвариантности основных уравнений термодинамики (в интегральной форме) относительно таких уравнений состояния.

7. С помощью новых моделей многослойных оболочек, без учета и с учетом обжатия, доказана неединственность НДС для рассматриваемого

класса оболочек — этот факт является следствием интегрального характера уравнений теории оболочек относительно "поперечной" координаты. Следствием "неединственности" НДС является возможность нарушения статических условий идеального контакта слоев в континуальных моделях многослойных оболочек.

8. С помощью новой методики получения априорных оценок, в основе которой лежит интегродифференциальная (трехмерная) форма записи исследуемых эволюционных и стационарных уравнений, доказана разрешимость связанных и несвязанных задач термоупругости для пологих оболочек в рамках обобщенных гипотез Тимошенко (модель Пелеха-Шереметьева) с учетом геометрической нелинейности и трехмерного обобщенного уравнения теплопроводности параболического типа. Исследована сходимость метода Бубнова-Галеркина (доказана слабая компактность множества получаемых приближенных решений) и установлена диссипативность эволюционных уравнений по отношению к функции прогиба (частичная диссипативность). Доказательства приведены для систем уравнений движения в "смешанной" форме и "перемещениях", то есть с учетом и без учета малости инерции продольных перемещений. Частным случаем изученных моделей являются модели оболочек Рейсснера.

9. Проведено численное исследование на базе метода конечных разностей статической устойчивости "в большом" для многослойных ортотропных пологих оболочек в рамках семи уточненных моделей, в частности, исследованы континуальные модели Тимошенко, Пелеха-Шереметьева, Григолюка-Куликова и новые модели, построенные в работе. Полученные результаты подтвердили установленную теоретически неоднозначность в определении НДС для многослойных оболочек и выявили эффективность, по отношению к точности получаемых результатов, новых моделей и модели Пелеха-Шереметьева.

10. Определена на базе вариационных уравнений Гамильтона-Остроградского и Онсагера связанная обобщенная задача дифракции для пологой оболочки переменной толщины, локально определяемой в рамках обобщенных гипотез Тимошенко (модель Пелеха-Шереметьева) и гипотез Кирхгофа-Лява, при локальном взаимодействии с температурным полем. Для систем эволюционных уравнений "в перемещениях" и "смешанной" форме доказана разрешимость поставленных краевых задач и возможность их приближенного решения методом Бубнова-Галеркина.

11. Определена на базе вариационных уравнений Гамильтона-Остроградского и Онсагера связанная обобщенная задача дифракции для многослойной пологой оболочки переменной толщины, локально определяемой в рамках обобщенных гипотез Тимошенко и гипотез Григолюка-Чулкова, при локальном взаимодействии с температурным полем. Для систем "в перемещениях" и "смешанной" форме доказана разрешимость поставленных краевых задач и возможность их приближенного решения методом Бубнова-Галеркина.

12. Определена на базе принципа виртуальных работ стационарная обобщенная задача дифракции для пологой оболочки переменной толщины, локально определяемой в рамках обобщенных гипотез Тимошенко и гипотез Кирхгофа-Лява, при локальном взаимодействии с температурным полем. Для системы уравнений равновесия в "смешанной" форме доказана разрешимость поставленных краевых задач и возможность их приближенного решения методом Бубнова-Галеркина.

Содержание диссертации изложено в следующих основных публикациях:

1. Кириченко В.Ф., Крысько В.А. К вопросу о решении нелинейных краевых задач методом Канторовича-Власова // Дифференц. уравнения.- 1980.- XVI, № 12.- С.2186-2189.

2. Кириченко В.Ф., Крысько В.А. Метод вариационных итераций в теории пластин и его обоснование // Прикл. мех. (Киев).- 1981.- XVII, № 4.- С.71-76.

3. Кириченко В.Ф. О существовании и единственности решения одной связанной задачи термоупругости // Теория и методы расчета нелинейных пластин и оболочек. Межвуз. науч. сб.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981.- С.69-70.

4. Кириченко В.Ф., Крысько В.А. О существовании решения одной нелинейной связанной задачи термоупругости // Дифференц. уравнения.- 1984.- XX, № 9.- С.1583-1588.

5. Крысько В.А., Кириченко В.Ф., Сурова Н.С. Устойчивость ортотропных многослойных оболочек в рамках модели типа Тимошенко // Изв. вузов. Строительство и архитектура.- 1988.- № 7.- С.42-45.

6. Кириченко В.Ф., Крысько В.А., Хаметова Н.А. О влиянии эффекта термоупругой связанности полей температуры и деформаций на динамическую устойчивость пологих оболочек // Прикл. мех. (Киев).- 1988.- XXIV, № 11.- С.46-50.

7. Бочкарев В.В., Кириченко В.Ф., Крысько В.А. О некоторых итерационных алгоритмах решения уравнений типа Кармана // Изв. вузов. Математика.- 1989.- № 9.- С.5-14.

8. Кириченко В.Ф., Бочкарев В.В. Связанные задачи термоупругости для пологих оболочек в рамках обобщенной модели Тимошенко.- Саратов: Сарат. гос. тех. ун-т, 1989.- 37 с.- Деп. в ВИНИТИ 17.11.89, № 6939-В89.

9. Кириченко В.Ф. Математические модели связанных задач термоупругости для пологих оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Межвуз. науч. сб. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992.- Вып. 24.- С.86-91.

10. Кириченко В.Ф., Крысько В.А., Сурова Н.С. Численное исследование устойчивости многослойных оболочек по уточненным теориям.- Саратов: Сарат. гос. тех. ун-т, 1995.- 22 с.- Деп. в ВИНИТИ 25.04.95, № 1149-В95.
11. Кириченко В.Ф. "Проекционные" условия движения термоупругого деформируемого твердого тела и их применение в теории многослойных ортотропных оболочек // Труды 18 Международн. конф. по теории оболочек и пластин.- Саратов, 29 сент.-4 окт. 1997 г.- Т.1.-Саратов, 1997.- С.144-155.
12. Кириченко В.Ф. О применении метода Бубнова-Галеркина к решению некоторых связанных задач термоупругости // Труды 18 Международн. конф. по теории оболочек и пластин.- Саратов, 29 сент.-4 окт. 1997 г.- Т.2.- Саратов, 1997.- С.8-11.
13. Кириченко В.Ф., Сурова Н.С. Численное исследование устойчивости "в большом" многослойных пологих оболочек в рамках различных уточненных теорий // // Труды 18 Международн. конф. по теории оболочек и пластин.- Саратов, 29 сент.-4 окт. 1997 г.- Т.3.-Саратов, 1997.- С.103-107.
14. Кириченко В.Ф. Разрешимость связанных задач термоупругости пологих оболочек // Понтрягинские чтения - X. Тез. докл.- Воронеж: ВГУ, 1999.- С.124.
15. Кириченко В.Ф. Обобщенная диссипативность эволюционных уравнений в уточненной теории пластин // Проблемы прочности материалов и конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. научн. сб.- Саратов: СГТУ, 1999.- С.81-86.
16. Кириченко В.Ф. Разрешимость краевых задач для термочувствительных пологих оболочек в рамках уточненных теорий // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XIX Международн. конф. по теории оболочек и

2-00

пластин.- Нижний Новгород, 28-30 сентября 1999 г.- Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1999.- С.98-101.

17. Кириченко В.Ф. О конечномерности аттрактора для диссипативной системы в уточненной теории пластин // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тез. докл.- Воронеж: ВГУ, 2000.- С.109.
18. Кириченко В.Ф. Разрешимость и частичная диссипативность эволюционных уравнений в обобщенной задаче дифракции для термоупругой пластины // Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами: Межвуз. научн. сб.- Саратов: СГТУ, 2000.- С.11-21.

КИРИЧЕНКО Валерий Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ
КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ
ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Автореферат

Корректор Л.А. Скворцова

Лицензия ЛР № 020271 от 15.11.96

Подписано в печать 10.07.00 Формат 60x84 1/16
Бум. тип. Усл.-печ.л. 2,09 Уч.-изд.л. 2,0
Тираж 100 экз. Заказ 332 Бесплатно
Саратовский государственный технический университет
410054 г.Саратов, ул. Политехническая, 77
Копипринтер СГТУ 410054 г.Саратов, ул. Политехническая, 77