Материалы международной конференции
“Алгебра и математическая логика: теория и приложения”
и сопутствующей молодежной летней школы
“Вычислимость и вычислимые структуры”,
посвященной 210-летию Казанского университета
80-летию со дня основания кафедры алгебры Казанского университета Н. Г. Чеботаревым
и 70-летию со дня рождения заведующего кафедрой члена-корреспондента АН РТ
М. М. Арсланова

АЛГЕБРА

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА:

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

(г. Казань, 2-6 июня 2014 г.)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2014

Казанский (Приволжский)
федеральный университет
Россия, Татарстан
420008, Казань
ул. Кремлевская 18

Kazan (Volga Region)
Federal University
Russia, Tatarstan
420008, Kazan
Kremlevskaya st. 18

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Российский фонд фундаментальных исследований
Издание осуществлено при финансовой поддержке
РФФИ (проекты №14-01-06022 г_2_2014 и №14-01-06810 мол_г_1) и КФУ.

УДК 510:512
ББК 22.1
М33

Материалы печатаются в авторской редакции.

М33 Материалы конференции "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 2-6 июня 2014 г.) и сопутствующей моло-дежной летней школы "Вычислимость и вычислимые структуры". – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – 176 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международную коференцию "Алгебра и математическая логика: теория и приложения" (г. Казань, 2-6 июня 2014 г.) и сопутствующую молодежную летную школу "Вычислимость и вычислимые структуры", посвященную 210-летию Казанского университета, 80-летию со дня основания кафедры алгебры (ныне кафедра алгебры и математической логики) Казанского университета Н.Г. Чеботаревым и 70-летию со дня рождения зав. кафедрой члена-корреспондента АН РТ М. М. Арсланова.

УДК 510:512
ББК 22.1

Содержание

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ “АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ”:

Председатель:
Ершов Юрий Леонидович — акад. РАН, гл. науч. сотр. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Зам. председателя:
Калимуллин Искандер Шагитович — проф. кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета

Ученый секретарь:
Фролов Андрей Николаевич — доц. кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского федерального университета

Члены программного комитета:
Амбос-Шпиис Клаус — директор Института математики Гейдельбергского университета, Германия
Арсланов Марат Мирзаевич — зав. кафедрой алгебры и математической логики Казанского федерального университета
Артамонов Вячеслав Александрович — проф. кафедры высшей алгебры Московского государственного университета
Востоков Сергей Владимирович — проф. кафедры алгебры Санкт-Петербургского государственного университета
Гончаров Сергей Савостьянович — член-корр. РАН, директор Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Джокуш Карл — проф. Иллинойского университета, Урбана-Чемпейн, США
Кузнецов Михаил Иванович — зав. кафедрой алгебры Нижегородского государственного университета
Купер Стюарт Барри — проф. Лидского университета, Великобритания
Латышев Виктор Николаевич — зав. кафедрой высшей алгебры Московского государственного университета
Левчук Владимир Михайлович — зав. кафедрой алгебры и математической логики Сибирского федерального университета, Красноярск
Лемпп Стефан — проф. Висконсинского университета, Мэдисон, США
Мазуров Виктор Данилович — член-корр. РАН, гл. науч. сотр. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
Махнев Александр Алексеевич — член-корр. РАН, зав. отделом алгебры Института математики и механики УрО РАН
Монталбан Антонио — проф. Калифорнийского университета, Беркли, США
Найт Джулия — проф. Нотр-Дамского университета, США
Оманадзе Роланд Шалвович — зав. кафедрой алгебры и математической логики Тбилисского университета им. Ив. Джавахишвили, Грузия
Скрябин Сергей Маркович — проф. кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета
Соар Роберт — проф. Чикагского университета, США
Тронин Сергей Николаевич — проф. кафедры алгебры и математической логики Казанского федерального университета
Хисамиев Назиф Гарифуллинович — зав. кафедрой алгебры и математической логики Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева, Казахстан
Хусаинов Бахадыр — проф. Оклендского университета, Новая Зеландия
Шор Ричард — проф. Корнелльского университета, США

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ “АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ”:

Председатель:
Нургалиев Данис Карлович, проректор по научной деятельности КФУ, профессор

Ученый секретарь:
Фролов Андрей Николаевич, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования КФУ

Члены Оргкомитета:
Чугунов Владимир Аркадьевич, директор института математики и механики КФУ, профессор

Абызов Адель Наилевич, доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ

Альпин Юрий Абдуллович, доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ

Гортышев Юрий Федорович, академик-секретарь Отделения математики, механики и машиноведения АН РТ, академик АН РТ

Ильин Сергей Николаевич, доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ

Ишмухаметов Шамиль Талгатович, профессор кафедры системного анализа и информационных технологий КФУ

Калимуллин Искандер Шагитович, профессор кафедры алгебры и математической логики КФУ

Корешков Николай Александрович, доцент кафедры алгебры и математической логики КФУ

Латыпов Рустам Хафизович, директор института вычислительной математики КФУ, профессор

Насрутдинов Марат Фаритович, заместитель директора высшей школы информационных технологий и информационных систем КФУ

Насыров Семен Рафаилович, заведующий кафедрой математического анализа, член-корреспондент АН РТ

Салахов Мякзюм Халимуллович, президент КФУ, академик АН РТ

Скрябин Сергей Маркович, ведущий научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики КФУ, профессор

Соловьев Валерий Дмитриевич, заведующий кафедрой прикладной информатики КФУ, профессор

Тронин Сергей Николаевич, профессор кафедры алгебры и математической логики КФУ

Хасьянов Айрат Фаридович, директор Высшей школы информационных технологий и информационных систем КФУ

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ “ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ВЫЧИСЛИМЫЕ СТРУКТУРЫ” :

Председатель:
Арсланов Марат Мирзаевич — зав. кафедрой алгебры и математической логики КФУ, член-корреспондент АН РТ

Зам. председателя:
Калимуллин Искандер Шагитович — д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и математической логики КФУ

Члены программного комитета:
Гончаров С. С. (ИМ СО РАН, Новосибирск)
Морозов А. С. (НГУ, Новосибирск)
Найт Дж. (Университет Нотр Дам, США)
Лемпп С. (Университет Висконсина, США)
Хусаинов Б. (Университет Окленда, Новая Зеландия)
Амбос-Шпис К. (Гейдельбергский университет, Германия)
Ишмухаметов Ш. Т. (КФУ, Казань)
Калимуллин И. Ш. (КФУ, Казань)
Фролов А. Н. (КФУ, Казань)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ МОЛОДЕЖНОЙ ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ “ВЫЧИСЛИМОСТЬ И ВЫЧИСЛИМЫЕ СТРУКТУРЫ” :

Председатель:
Калимуллин Искандер Шагитович — д.ф.-м.н., профессор кафедры алгебры и математической логики КФУ

Ученый секретарь
Зубков М. В. (КФУ, Казань) — к.ф.-м.н.

Члены Оргкомитета:
Арсланов М. М. (КФУ, Казань)
Абызов А. Н. (КФУ, Казань)
Ильин С. Н. (КФУ, Казань)
Насрутдинов М. Ф. (КФУ, Казань)
Файзрахманов М. Х. (КФУ, Казань)
Фролов А. Н. (КФУ, Казань)
Ямалеев М. М. (КФУ, Казань)

NUMBERINGS AND LEARNABILITY

K. Ambos-Spies.
Institute for Informatics, University of Heidelberg, Heidelberg, Germany
ambos@math.uni-heidelberg.de

For a computable family $\mathcal{A}$ of computably enumerable sets there are two properties that indicate that the sets in $\mathcal{A}$ can be sufficiently easily distinguished: first, learnability of the class $\mathcal{A}$ where two models of learning may be considered, explanatory learning (EX) and behaviorally correct learning (BC); and, second, equivalence of all computable numberings of the family $\mathcal{A}$ under computable functions (computable equivalence) or under functions computable relative to the halting problem ($\emptyset'$-equivalence).

Ambos-Spies, Badaev and Goncharov (2011) have studied the relations among these properties. They have shown that EX-learnability of $\mathcal{A}$ implies that all computable numberings of $\mathcal{A}$ are $\emptyset'$-equivalent but that the converse is not true in general, and that the properties of BC-learnability of $\mathcal{A}$ and of $\emptyset'$-equivalence of the computable numberings of $\mathcal{A}$ are independent. They left open the question whether there is a computable family $\mathcal{A}$ of c.e. sets such that all computable numberings of $\mathcal{A}$ are computably equivalent and $\mathcal{A}$ is not BC-learnable. Such a family has been recently constructed by Ambos-Spies and Badaev.

In our talk we discuss the above results.

SPECTRA OF RECURSIVE MODELS OF DISINTEGRATED STRONGLY MINIMAL THEORIES

Uri Andrews
University of Wisconsin – Madison, Madison, WI, USA
andrews@math.wisc.edu

In 1978, Goncharov showed [3] that there are strongly minimal theories where only the prime model has a recursive presentation. The spectrum of recursive models of a theory describes which models have recursive presentations. The general question is to characterize the spectra of recursive models of strongly minimal theories.

Since then, several other examples were given (see references) of strongly minimal theories where some models are recursive and others not. Most given examples involve disintegrated theories. A theory is disintegrated if the algebraic closure operator is given by the 2-variable formulae in the language. It is precisely this lack of structure, thus the combinatorial nature, of these theories that have allowed the constructions above.

We aim to classify the spectra of recursive models of disintegrated strongly minimal theories. A first step towards this goal was to classify the spectra of recursive models of disintegrated strongly minimal theories in finite languages.

Theorem. (A.-Medvedev [1]) *If T is a disintegrated strongly minimal theory with a finite language, then there are exactly three possibilities for the spectrum of recursive models of T. Either every model is recursively presentable, no model is recursively presentable, or only the prime model is recursively presentable*

In the infinite language case, there is more recursion theoretic content to manage. We have determine the spectrum of recursive models of the strongly minimal theories in (infinite) binary languages.

Theorem. (A.-Lempp) *There are exactly 7 spectra of recursive models of disintegrated strongly minimal theories in binary languages.*

We make the following conjecture, with some evidence:

Conjecture. (A.-Lempp) *For every n, there are only finitely many spectra of recursive models of disintegrated strongly minimal theories in n-ary languages.*

I will describe our work on the above theorems as well as our hope to prove the conjecture.

References

1. Andrews, Uri and Medvedev, Alice, *Recursive spectra of strongly minimal theories satisfying the Zilber trichotomy*, Trans. Amer. Math. Soc., 366 (2014), 2393–2417.
2. Andrews, Uri and Lempp, Steffen, *Spectra of recursive models of strongly minimal disintegrated theories in languages of bounded arity*, in preparation.
3. Goncharov, Sergey S., *Constructive models of $\aleph_1$-categorical theories*, Mat. Zametki **23** (1978), 885–888.

DEFINABLE RELATIONS IN TURING DEGREE STRUCTURES

M. M. Arslanov
Kazan Federal University, Kazan, Russia
Marat.Arslanov@kpfu.ru

We study questions of the definability of classes of n-computably enumerable (n-c. e.) Turing degrees in the language of structures of the n-c. e. sets $\mathcal{E}_n, 1 \leqslant n < \omega$, under set inclusion. A set of Turing degrees $\mathcal{C}$ is definable in $\mathcal{E}_n$ for some $n \geqslant 1$ if there is a definable in $\mathcal{E}_n$ class of sets $S \subset \mathcal{E}_n$ such that $\mathcal{C} = \{\deg(B) \mid B \in S\}$.

In particular, answers to questions posed in my previous paper [1] will be given.

References

1. Arslanov M.M. *Definable relations in Turing degree structures* // J.Logic Computation. – 2013. – V. 23, N. 6. – P. 1145–1154.

ON SEMISIMPLE HOPF ALGEBRAS

V. A. Artamonov
Department of algebra Moscow State University
artamon@mech.math.msu.su

Let H be a finite dimensional semisimple Hopf algebra over an algebraically closed field k of characteristic zero or greater than $\dim H$. In the talk we consider the problem of a classification of these Hopf algebras up to an isomorphism. We assume that in each dimension $d > 1$ there exists at most one irreducible H-module of the dimension d.

If H has one irreducible H-module of a dimension $d > 1$, then the number of algebra homomorphisms $H \to k$ is divisible by d and is a divisor of d^2. In the case of d^2 there is a complete classification of H [1–3].

The case d was considered in [4] under some assumptions.

It is shown that under some assupmtions H cannot have two irreducible modules of dimensions d and d^2.

Generalizing [4] there is found an explicit form of comultiplication and an antipode in H without addition restrictions.

References

1. Mukhatov R.B́., *On a structure of semisimple Hopf algebra* // VINITI. – 17.10.2012. – № 405-B2012. – 17 P.

2. Artamonov V. A., Chubarov I. A., *Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras* // Modules and comodules, Trends in Mathematics, — Basel/Switzerland: Birkhauser Verlag, 2008. – P. 65–85

3. Artamonov V. A., Chubarov I. A., *Properties of some semisimple Hopf algebras* // Contemp. Math. – 483. – Algebras, representations and applications, A conference in honour of Ivan Shestakov's 60th birthday, August 26 – September 1, 2007, Maresias, Brazil. Edited by: Vyacheslav Futorny, Victor Kac, Iryna Kashuba and E. Zelmanov., Amer. Math. Soc. – 2009. – P. 23–36.

4. Spiridonova S. Yu. *Generalized cocommutativity of some Hopf algebras and their connections with finite fields.* // Algebra and Analysis. – 2013. – V. 25., №. 5. – P. 253—269.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ СТРУКТУР КЛАССИЧЕСКИХ И УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР И ЛОГИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Е. И. Бунина, А. В. Михалев, А. Г. Пинус

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Новосибирский гос. технический университет

helenbunina@yandex.ru, mikhalev@rector.msu.ru, ag.pinus@gmail.com

Мы рассматриваем элементарную эквивалентность производных алгебраических структур и ее связь с эквивалентностью исходных структур.

Первым рассматриваемым примером является элементарная эквивалентность производных структур свободных алгебр многообразий.

В то время как все бесконечно порожденные свободные алгебры многообразий неразличимы в языке логики первого порядка (элементарно эквивалентны), то переход от самих свободных алгебр к их производным структурам (таким как решетки подалгебр, конгруэнций, полугруппы эндоморфизмов, группы автоморфизмов и т.д.) позволяют довольно тонко (чаще всего, максимально тонко, т.е. на языке логики второго порядка) класифицирорвать мощности свободных порождающих свободных алгебр.

В докладе будет приведен ряд конкретных результатов такого рода и ряд открытых конкретных проблем (см., например, [1]).

Вторым важным примером является элементарная эквивалентность групп автоморфизмов векторных пространств над телами и свободных модулей над кольцами. В случае конечной размерности пространств (модулей) элементарная эквивалентность таких групп равносильна элементарной же эквивалентности тел и совпадению размерностей (либо элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов данных модулей), в случае пространств (модулей) бесконечной размерности появляется эквивалентность тел (или колец) в более сильной логике — ограниченной логике второго порядка (см. [2]).

Известна теорема Бэра–Капланского для абелевых групп, которая утверждает, что изоморфность колец эндоморфизмов периодических абелевых групп равносильна изоморфности самих групп. Аналогичные теоремы для изоморфности групп автоморфизмов абелевых p-групп ($p > 2$) доказаны Лептиным ($p \geqslant 5$) и Либертом ($p \geqslant 3$). В докладе будет описан критерий элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп и групп автоморфизмов абелевых p-групп при $p > 2$. Именно, оказывается, что кольца эндоморфизмы (группы автоморфизмов) групп элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда сами группы эквивалентны в логике второго порядка либо, в некоторых случаях, — в ограниченном языке логики второго порядка (см. [3]).

Литература

1. Важенин Ю.М., Пинус А.Г. *Элементарная классификация и разрешимость теорий производных структур.* – Успехи мат.наук. – 2005. – Т. 60. –№ 3. – С. 3–40.

2. Бунина Е.И., Михалев А.В. *Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2004. – V. 10. – N. 2. – С. 51–134.

3. Бунина Е.И., Михалев А.В., Ройзнер М.А. *Критерий элементарной групп автоморфимов эквивалентности колец и эндоморфизмов абелевых p-групп* // ДАН России. – 2014. – в печати.

СЕПАРАНТ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

Ю. Л. Ершов

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirs

В работах Д.Бринка и автора было определено понятие сепаранта сепарабельного многочлена (от одной переменной) над нормированным полем и указано как использовать сепарант для более точных форм леммы Гензеля и теорем о непрерывности корней. В докладе предлагается расширение понятия сепаранта на произвольные (не обязательно сепарабельные) многочлены и указываются его полезные применения.

Далее рассматриваются вопросы о нахождении (вычислении) сепаранта и константы Краснера произвольного многочлена. Для этого вводятся понятия полидискриминанта многочлена и полирезультанта двух многочленов.

COUNTABLE LINEAR ORDERINGS AND COMPUTABILITY

A. N. Frolov
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirs
andrey.frolov@kpfu.ru

I will talk about computable linear orderings. A linear ordering is called X-computable, if the universe and the order relation are X-computable. I will review some results to discribe spectra of linear orderings. The *spectrum* of a linear ordering L is the class $\{\deg_T(X) \mid L \text{ has a } X\text{-computable copy}\}$. In particular, I will consider linear orderings with trivial spectra. The spectrum is trivial, if it contains all Turing degrees. Then I will present results about spectra of the successor relation of computable linear orderings, and, in particular, the connection with spectra of linear orderings in general.

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ И ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА КЛАСОВ МОДЕЛЕЙ

С. С. Гончаров
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirs
s.s.goncharov@math.nsc.ru

SIGN CONVERSION FOR (0,1)-MATRICES

A. E. Guterman
Moscow State University, Moscow
guterman@list.ru

Two important functions in matrix theory, determinant and permanent, look very similar:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

and

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

here $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ is a matrix, $\mathfrak{S}_n$ denotes the set of all permutations of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. The value $sgn(\sigma) \in \{-1, 1\}$ is the signum of the permutation σ.

Starting from the work of Pólya, 1913, many researchers are investigating different approaches to convert the permanent into the determinant.

Let M_n denote the set of all $n \times n$ matrices with the entries 0 or 1 over the field of real numbers $\mathbb{R}$. Let $X \circ A$ denote the entrywise product of two matrices.

A matrix $A \in M_n$ is *convertible* if there exists $X \in M_n(\pm 1)$ such that $\mathrm{per} A = \det(X \circ A)$. Let $v(A)$ denote the number of nonzero elements in a $(0,1)$-matrix A. In 1971 Gibson proved that if $A \in M_n$ is convertible matrix with $\mathrm{per} A > 0$, then $v(A) \leqslant \Omega_n := (n^2 + 3n - 2)/2$ and the equality holds if and only if there exist permutation matrices $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ such that $A = PT_nQ$, where $T_n = (t_{ij}) \in M_n$ with

$$t_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad 1 \leqslant i < j < n \\ 1 & \text{if} \quad i \geqslant j \text{ or } j = n \end{cases} .$$

The above theorem says that the number $\Omega_n = (n^2+3n-2)/2$ provides a barrier for the conversion, and extremal convertible matrix is unique up to the permutation equivalence.

From Gibson's theorem and further investigations the following problem naturally arises:

To compute the function ω_n such that for any $A \in M_n$ with $v(A) \leqslant \omega_n$ it holds that A is convertible.

Among our results there is the complete solution of this problem. Moreover, we prove the analog of Gibson result and find the value of ω_n for the set of symmetric (0,1) matrices. Several other results on the Pólya problem over finite fields are obtained.

This talk is based on the joint work with Mikhail Budrevich, Gregor Dolinar, Bojan Kuzma and Marko Orel.

РАВНОМЕРНЫЕ И НЕРАВНОМЕРНЫЕ СВОДИМОСТИ СЧЕТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

И. Ш. Калимуллин

Казанский федеральный университет, Казань

ikalimul@gmail.com

Доклад посвящен исследованиям различных версий определения алгоритмической сводимости между алгенбраическими структурами. В частности, будут рассмотрены сводимости относительно тьюринговых операторов, операторов перечисления, а также относительно Σ-формул в наследственно конечных надстройках. Будет изучен ряд конструкций обращения скачка на которых данные сводимости различаются.

Кроме того, будет подробно изучена Σ-сводимость между прямыми суммами циклических p-групп.

ВЫЧИСЛИМЫЕ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Н. Г. Хисамиев

Восточно-Казахстанский государственный университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск

hisamiev@mail.ru

Пусть G – группа. Отображение $\nu : \omega \to G$ множества всех натуральных чисел ω на G называется нумерацией группы G. Пара (G, ν) называется конструктивной или вычислимо нумерованной, если существует алгоритм, который по любой тройке m, n и s натуральных чисел определяет истинность равенства $\nu m \cdot \nu n = \nu s$. Если существует такая нумерация ν, что (G, ν) – конструктивная группа, то G называется конструктивизируемой или вычислимой, а ν – ее вычислимой нумерацией.

Основными проблемами здесь являются проблема существования конструктивизаций для той или иной группы, проблема единственности и продолжения вычислимой нумерации. Исследование этих проблем начато А.И. Мальцевым и продолжено Ю.Л. Ершовым, С.С. Гончаровым и другими математиками.

В докладе рассмотрены указанные проблемы для нильпотентной группы без кручения ступени 2; для нильпотентной группы без кручения, размерность коммутанта которой конечна; для R-группы, размерность пересечения центра и коммутанта которой конечна; для нильпотентной группы без кручения конечной размерности.

А также приведены применения этих результатов для исследования проблемы соотношения вычислимости и рекурсивно перечислимо определенности для нильпотентных групп и R-групп.

COMPUTABLY ENUMERABLE ALGEBRAIC SYSTEMS

B. Khoussainov
University of Auckland, New Zealand
bmk@cs.auckland.ac.nz

Given an c.e. equivalence relation E and a class C of algebraic structures, define the set $K(E,C)$ as the set of all structures from C isomorphic to c.e. structures with equality relation E.

The problems considered in this tutorial are concerned with characterisation of structures from the classes $K(C,E)$, and understanding the relationship between algebraic properties of structures from $K(C,E)$ and computability-theoretic properties of E.

This set up traces back to the works of Malcev and Ershov, and later Kassymov and Khoussainov. The current work is joint with Gavruskin, Stephan and Jain.

STRONGLY MINIMAL THEORIES WITH COMPUTABLE MODELS

J. F. Knight
University of Notre Dame
knight.1@nd.edu

In computable model theory, there is work on algorithmic complexity of models of a given elementary first order theory. The guiding principle is that if a theory is well-behaved from the point of view of model theory, we should find it easier to understand the complexity of the models. We consider only countable models, with universe a subset of ω. The theories with the best possible behavior are the $\aleph_0$-categorical ones. Arguably, strongly minimal theories are next best.

In the talk, I will review earlier results on $\aleph_0$-categorical theories [1], [2], and then describe recent results, joint with Uri Andrews, on strongly minimal theories. Here is are the most recent versions of the results.

Theorem 1. *Suppose T is a strongly minimal theory such that $T \cap \exists_{n+2}$ is Δ^0_n uniformly in n. Then all models of T have computable copies.*

Relativizing to $\emptyset^{(3)}$, we obtain the following.

Corollary 2. *Suppose T is a strongly minimal theory with a computable model. Then all models have Δ^0_4 copies.*

The proof of Theorem 1 splits into cases, depending on whether the theory is arithmetical, and whether the model has certain saturation properties. If the theory is non-arithmetical and the model is saturated, or at least “boundedly saturated”, we use a workers construction.

References

1. M. Lerman and J. H. Schmerl, *Theories with recursive models*, *J. Symb. Logic*. – 1979. – V. 44. – P. 59–76.

2. J. F. Knight, *Non-arithmetical* $\aleph_0$*-categorical theories with recursive models*, *J. Symb. Logic*. – 1994. – V. 59. – P. 106–112.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИМПЛИФИКАЦИЯ И КРИПТОГРАФИЧЕСКИЕ МОТИВЫ.

В. Н. Латышев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет

vnlatyshev@yandex.ru

С единой точки зрения излагаются общие основы алгебраической симплификации. Изложение базируется на понятиях схемы симплификации (введены ранее автором) и стандартного базиса идеала определяющих соотношений. Предметом изучения являются алгебры, полученные “деформацией” из полугрупповых алгебр упорядоченных полугрупп. К их числу принадлежат, например, свободные ассоциативные алгебры и универсальные обёртывающие алгебр Ли. Последним уделено особое внимание. Указываются возможные примененмя в теории кодирования.

Литература

1. Buchberger B. and Loos R. *Algebraic simplification* // Computing. – 1982. – V. 4. – P. 11-13.

2. Latyshev V.N. *An improved version of standard bases* // Formal powerseries and algebraic combinatorics, Proc. 12-th Int.Conf., EPSAC‘OO, Moscow, Russia, Jun 2000, 496-5-6.

TITLE: D.C.E. AND N-C.E. DEGREES

S. Lempp

Madison, USA

lempp@math.wisc.edu

I will survey work on these degree structures over the past three decades, with an emphasis on the contributions by Marat M. Arslanov.

ON AUTOMORPHISMS OF DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{33,30,15;1,2,15\}$

A. A. Makhnev
Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg
makhnev@imm.uran.ru

We consider undirected graphs without loops or multiple edges. Let Γ be a graph. For vertex a of Γ the subgraph $\Gamma_i(a)=\{b\ |d(a,b)=i\}$ is called *i-neighboorhod* of a in Γ. We set $[a]=\Gamma_1(a)$. The *degree* of a vertex a of Γ is the number of vertices in $[a]$. Γ is called *regular* of degree k, if the degree of any its vertex is equal k. Γ is called *amply regular* with parameters (v,k,λ,μ) if Γ is regular of degree k on v vertices, and $|[u]\cap[w]|$ equals λ, if u is adjacent to w, equals μ, if $d(u,w)=2$. Amply regular graph of diameter 2 is called *strongly regular.*

Let $u,w\in\Gamma$ such that $d(u,w)=i$. By $b_i(u,w)$ (by $c_i(u,w)$) we denote the number of vertices in $\Gamma_{i+1}(u)\cap[b]$ (in $\Gamma_{i-1}(u)\cap[b]$). The graph Γ with diameter d is called *distance-regular* with intersection array $\{b_0,b_1,...,b_{d-1};c_1,...,c_d\}$ if for every $i\in\{0,...,d\}$ the values $b_i=b_i(u,w)$ and $c_i=c_i(u,w)$ do not depend on the choice of vertices u,w at distance i. A distance-regular graph is amply regular with parameters (v,k,λ,μ), where v is the number of vertices of the graph, $k=b_0$, $\lambda=k-b_1-1$ and $\mu=c_2$.

In [1] there were found feasible intersection arrays of distance-regular graphs with $\lambda=2$ and at most 4096 vertices. One of them is the intersection array $\{33,30,15;1,2,15\}$.

Theorem. *Let Γ be a distance-regular graph with intersection array $\{33,30,15;1,2,15\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — an element of G of prime order p and $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Then $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,11\}$ and one of the following conditions holds:*

(1) *Ω is empty graph, $p=2$, $\alpha_2(g)=64l$ and $\alpha_1(g)=64s-16l$;*

(2) *Ω is n-clique and either*

(*i*) *$n=1$, $p=11$, $\alpha_2(g)=143+352l$, $\alpha_1(g)=121+352t-88l$ or $p=3$, $\alpha_2(g)=15+96l$, $\alpha_1(g)=96t+57-24l$, or*

(*ii*) *$n=4$, $p=5$, $\alpha_2(g)=60+160l$, $\alpha_1(g)=100+640t-40l$ or $p=3$, $\alpha_2(g)=60+96l$, $\alpha_1(g)=384t+228-24l$, or $p=2$, $\alpha_2(g)=60+64l$, $\alpha_1(g)=64t-28-16l$;*

(3) *Ω is not empty graph and or a clique, and either*

(*i*) *$p=3$, the degree of Ω is 9 and Ω is a distance-regular graph with intersection array $\{9,6,1;1,2,9\}$, or the degree of Ω is 6 and Ω is strongly regular graph with parameters $(16,6,2,2)$, or*

(*ii*) *$p=2$.*

Corollary. Distance-regular graph with intersection array $\{33,30,15;1,2,15\}$ is not arc transitive.

References

1. Makhnev A. A., Nirova M.S. *On distance-regular graphs with $\lambda=2$* // Vestnik of Sibirean Federal University. – 2014. – V. 7., No. 1. – P. 35–41.

PERIODIC GROUPS WITH RESTRICTIONS ON ELEMENT ORDERS

V. D. Mazurov
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
mazurov@math.nsc.ru

For a periodic groups G, denote by $\omega(G)$ the spectrum, i.e. the set of element orders, of G. The talk gives a survey of results about conditions of spectrum which ensure the local finiteness of corresponding group. A particular attention will be paid to following fresh results which are not yet published.

Theorem. (E. Jabara, D. Lytkina, A. Mamontov, V. Mazurov).

(1)*Let G be a group with $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$. Then G is finite and isomorphic to the stabilizer of a point in the simple sporadic Mathieu group M_{11} .*

(2) *If the order of every element of a group G is at most 6 then G is either locally finite, or a 5-group.*

(3) *Let G be a group without elements of order 6.*

a) If G is of exponent 72 then G is locally finite.

b) If G is a non-primary $\{2, 3\}$-group and every three elements of order 3 in G generate a finite subgroup, then G either is locally finite, or is an extension of a nilpotent 2-group by a 3-group with the unique subgroup of order 3.

ON Σ–PRESENTABILITY OF STRUCTURES OVER HF($\mathbb{R}$)

A. S. Morozov
Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk
morozov@math.nsc.ru

We follow basic definitions from ([1, 2]). The concept of Σ–definability over HF($\mathbb{R}$), the hereditarily finite superstructure over the ordered field of reals, describes the situation when have in our disposal a hypothetical computer that uses exact real numbers, not their approximations, and thus Σ–definable structures are the structures that could be defined and studied with this computer.

In the talk, we present and discuss some new results on Σ–presentability of structures over HF($\mathbb{R}$). For a series of general mathematical structures of cardinaility 2^ω, we prove non–Σ–presentability with any parameters. We will also discuss some general methods which were proven to be useful when working with HF($\mathbb{R}$).

References

1. Ershov Yu. L., *Definability and Computability.* – New York: Plenum Publ. Co., 1996.

2. Ershov Yu. L., Puzarenko V. G., Stukachev A. I., HF–*Computability* // In: Computability in Context. Computation and Logic in the Real World (S. Barry Cooper and Andrea Sorbi, editors), World Scientific. – 2011. –P. 169–242 (Chapter 6).

SIMPLE SETS, D-C.E. SETS AND QUASI-REDUCIBILITY

R. Sh. Omanadze
Professor of Javakhishvili Tbilisi State University, Department of Exact and Natural Sciences, Tbilisi, Georgia
roland.omanadze@tsu.ge

The notion of quasi-reducibility (Q-reducibility) is very natural and important for the Theory of Algorithms. With the help of this notion a series of interesting results were obtained. This notion plays a key role in the Marchenkov solution of the well known Post problem using Post's methods. Q-reducibility have applications in several field of the Theory of Algorithms, for instance in the study of word problems and in computational complexity.

In our talk we discuss some known properties of Q-reducibility on the classes of simple sets and d-computably enumerable (d-c.e) sets. Also, some new properties of quasi-reducibilities on the classes of maximal sets and r-maximal sets will be given.

FINITARY AND INFINITARY FIRST-ORDER COMBINATORICS AND TWO LEVELS OF EXPRESSIVENESS IN PREDICATE LOGIC

M. G. Peretyatkin
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty
m.g.peretyatkin@predicate-logic.org

Computable isomorphisms between the Tarski-Lindenbaum algebras of predicate calculi of finite rich signatures were built in [1] and [2] presenting two levels of expressiveness in first-order logic. The work [1] uses an available version of the universal construction; its methods are based on *combinatorial computation* in predicate logic; thus, these methods can be said to be *infinitary first-order combinatorics*. Furthermore, the work [2] uses finite-to-finite signature reduction procedures; its methods are based on *finite combinatorial transformations* in the same logic; thus, these methods can be said to be *finitary first-order combinatorics*. The motivation for the first-order combinatorics, cf. [3], was determined by the idea to establish a new conceptual framework to understand nature of the results in [1] and [2] better (thereby, some part of terminology and notations in the author's works before 2013 turns out to be obsolete).

As a basis for first-order combinatorics, we consider signature reduction procedures, which are considered as particular cases of combinatorial methods in predicate logic. Finite-to-finite signature reduction procedures are considered as cases of finitary first-order methods, while infinite-to-finite signature reduction procedures are considered as cases of infinitary first-order methods. The problem is to generalize these particular methods to a maximum general approach for which it would be possible to apply such a serious term as 'combinatorics'. We consider combinatorics in first-order predicate logic; therefore, the concept of a 'method' is understood as some manner $\mathfrak{m}$ of transformation of a computably axiomatizable theory T in anther such a theory S providing a computable isomorphism $\mu : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(S)$ between their Tarski-Lindenbaum algebras.

A principal aim of the combinatorial approach is to characterize classes of finitary and infinitary methods of transformation of theories. After that, we can define the *finitary semantic layer* as the set of those model-theoretic properties $\mathfrak{p}$ which are preserved under finitary first-order methods, and *infinitary semantic layer* as the set of those properties $\mathfrak{p}$ which are preserved under infinitary methods. For the first-order combinatorial approach under discussion, initiated in [3], its perfection is considered as a demand of higher priority, while the maximality of the semantic layers of preserved model-theoretic properties is considered as a demand of secondary priority.

References

1. Peretyat'kin M. G., *Semantic universal classes of models*. Algebra and Logic. – 1991. – V. 30. – No 4. – P. 414–434.

2. Peretyat'kin M. G., *Semantic universality of theories over superlist*. Algebra and Logic. – 1992 . – V. 30. – No 5. – P. 517–539.

3. Peretyat'kin M. G., *Introduction in first-order combinatorics providing a conceptual framework for computation in predicate logic*. Computation Tools 2013, IARIA. – 2013. – P. 31–36.

THE POST CORRESPONDENCE PROBLEM IN METABELIAN AND POLYCYCLIC GROUPS

V. A. Roman'kov

Omsk State University n.f. F.M. Dostoevsky, Omsk

romankov48@mail.ru

We say that the Equalization Problem is decidable in a class of groups ν if for any pair of groups $\bar{G}, G \in \nu$ and every pair of homomorphisms $\varphi, \psi \in Hom(\bar{G}, G)$ there is an algorithm that determines non triviality of $Eq(\varphi, \psi) = \{g \in \bar{G} : g\varphi = g\psi\}$. When $\bar{G}$ be a relatively free group in the variety generated by G, we get the classical Post correspondence problem for G. Also, we say that the Generalized Equalization Problem is decidable in ν if for any pair of groups $\bar{G}, G \in \nu$, every pair of homomorphisms $\varphi, \psi \in Hom(\bar{G}, G)$ and given nontrivial element $v \in G$ we can effectively decide is there $g \in \bar{G}$ such that $g\varphi = v \cdot g\psi$.

Theorem 1. *The Generalized Equalization Problem, the Equalization Problem are decidable in the class π of all polycyclic groups, and the Post Correspondence Problem is decidable for every polycyclic group G.*

Theorem 2. *The Generalized Equalization Problem, the Equalization Problem, and the Post Correspondence Problem are decidable for every finitely generated metabelian group G under restriction that for every $g \in \bar{G}$ $(g\varphi)(g\psi)^{-1} \in N$, where N is a normal abelian subgroup of G (for example the commutant of G).*

There is a connection with the generalized twisted conjugacy problems in group theory and with non-commutative discrete optimization.

The results were obtained together with A. Myasnikov.

PAIRINGS IN LOCAL FIELDS AND CRYPTOGRAPHY

S. V. Vostokov, E. S. Vostokova

Saint-Petersburg state University, faculty of mathematics and mechanics, Stary Peterhof, University Ave 28, Saint-Petersburg, Russia

sergei.vostokov@gmail.com, lizk.vostokova@gmail.com

We consider local pairings arised in the classical reciprocity laws at the turn of the 20th century and define a new cryptosystem and an electronic signature. Pairings in number fields considered in the present paper first appeared when David Hilbert began to develop Kronecker's idea concerning an analogy between numbers and functions.Hilbert applied this idea to a long-standing problem on the reciprocity law, which consisted in finding an explicit expression for the product of nth power residue symbols in a number field containing all nth roots of 1,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1} = \zeta_n^{f(\alpha,\beta)},$$

i.e., in the calculation of the function $f(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \mod n\mathbb{Z}$. In his 9th problem, D. Hilbert suggested to extend the calculations from number fields to the fields of p-adic numbers, i.e. from global fields to local fields in the terminology of Serre. In other words, to make these calculations local, which in essense is an analog of the calculation of the Abelian integral of a differential form on a Riemann surface in terms of residues.

In 1975 a public-key cryptography was invented. As a result, all asymmetric encryption systems appeared later were based on a certain hard-to-calculate problem. Every such a system led to a thorough investigation of the problem providing its security.

The RSA motivated the study of integer factorization, and the Diffie–Hellman

We propose two new cryptographic system and new electronic signature.

A COMPUTATION MODEL FOR REAL NUMBERS

Yang Yue

Department of Mathematics, National University of Singapore, Block S17, 10 Lower Kent Ridge Road, Singapore 119076

matyangy@nus.edu.sg

In this talk, I will present a model of computation on real numbers. It is a natural generalization of standard Turing machines. This model fits more closely to the intuition of working mathematicians, for example, the exponential function and the equality predicate are both computable. It has the potential to be generalized further to computation on higher types.

A NEW GENERALIZATION OF INTUITIONISTIC FUZZY BI-IDEALS IN SEMIGROUPS

Saleem Abdullah
Department of Mathematics, Quaid-i-Azam University Islamabad, Pakistan
matyangy@nus.edu.sg

The concept of quasi-coincidence of intuitionistic fuzzy point with an intuitionistic fuzzy set is considered. By using this idea, the notion of (α,β)-intuitionistic fuzzy bi-ideals, (1,2)ideals in a semigroup, where α,β are any two of $\{\in, q, \in\vee q, \in\wedge q\}$ with $\alpha\neq\in\wedge q$, is introduced and consequently, a generalization of intuitionistic fuzzy bi-ideals is defined. In this paper, we study the related properties of the (α,β)-intuitionistic fuzzy bi-ideals, (1,2) ideals and in particular, an $(\in,\in\vee q)$-fuzzy bi-ideals and (1,2) ideals in semigroups will be investigated. We prove that for intuitionistic fuzzy set $A=\langle\mu_A,\lambda_A\rangle$ of a semigroup S is an intuitionistic fuzzy bi-ideal of S if and only if it satisfy for all $x,y,z\in S$ and $t_1,t_2\in(0,1]$ and $s_1,s_2\in[0,1)$,

(a) $x(t_1,s_1)\in A$ and $y(t_2,s_2)\in A\Longrightarrow(xy)(m\{t_1,t_2\},M\{s_1,s_2\})\in A$,

(b) $x(t_1,s_1)\in A$ and $z(t_2,s_2)\in A\Longrightarrow(xyz)(m\{t_1,t_2\},M\{s_1,s_2\})\in A$.

We also prove that for an intuitionistic fuzzy set $A=\langle\mu_A,\lambda_A\rangle$ *of a semigroups* S *is an* $(\in,\in\vee q)$*-intuitionistic fuzzy bi-ideal of* S *if and only if the following conditions hold;*

(a) $\mu_A(xy)\geqslant\min\{\mu_A(x),\mu_A(y),0.5\}$ *and* $\lambda_A(xy)\leqslant\max\{\lambda_A(x),\lambda_A(y),0.5\}$.

(b) $\mu_A(xay)\geqslant\min\{\mu_A(x),\mu_A(y),0.5\}$ *and* $\lambda_A(xay)\leqslant\max\{\lambda_A(x),\lambda_A(y),0.5\}$.

References

1. S. Abdullah, B. Davvaz and M.Aslam, (α,β)-intuitionistic fuzzy ideals of hemirings, Computer and Mathematics with Applications, 62 8, (2011), 3077-3090.

2. S. Abdullah and M. Aslam, (Φ,Ψ)-intuitionistic fuzzy ideals in semigroups, Italian J. Pure Appl. Math. Vol. 32 (In press).

3. K. T. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 20(1986), 87–96.

4. D. Coker and M. Demirci, *On intuitionistic fuzzy points*, Notes IFS, 1(2)(1995), 79–84.

5. Y. B. Jun, *On* (Φ,Ψ)*-intuitionistic Fuzzy Subgroups*, KYUNGPOOK Math. J. 45(2005), 87-94.

РЕТРАКТАБЕЛЬНЫЕ И КОРЕТРАКТАБЕЛЬНЫЕ МОДУЛИ

А. Н. Абызов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
aabyzov@kpfu.ru

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными. Модуль M называется *коретрактабельным (соотв. ретрактабельным)*, если для каждого его собственного (соотв. ненулевого) подмодуля N выполнено условие $Hom_R(M/N, M) \neq 0$ (соотв. $Hom_R(M, N) \neq 0$). Кольцо R называется *правым CC - кольцом (соотв. правым mod - ретрактабельным кольцом)*, если каждый правый R - модуль является коретрактабельным (соотв. ретрактабельным). В работах [1], [2] было дано описание правых CC - колец.

Теорема. Для кольца R следующие условия равносильны:

(1) для каждого идеала I кольца R каждый свободный правый модуль над кольцом R/I является коретрактбельным;

(2) для каждого идеала I кольца R фактор-кольцо R/I является кольцом Каша;

(3) над кольцом R каждый правый и левый конечно порожденный модуль является коретрактбельным;

(4) над кольцом R каждый правый и левый циклический модуль является коретрактбельным;

(5) R - правое CC - кольцо;

(6) R - левое CC - кольцо;

(7) кольцо R изоморфно конечному прямому произведению полных матричных колец конечных размеров над совершенными локальными кольцами.

Кольцо R называется *правым CSL - кольцом,* если каждый правый R - модуль M, у которого $End_R(M)$ - тело, является простым.

Теорема. Для правого (или левого) квазиинвариантного кольца R следующие условия равносильны:

(1) R - mod - ретрактабельное кольцо;

(2) R - полуартиново CSL - кольцо;

(3) R - полуартиново кольцо, у которого каждый максимальный неразложимый фактор является локальным совершенным кольцом.

References

1. Abyzov A.N. On some classes of semiartinian rings // Siberian Mathematical Journal.– 2012.– Volume 53.– Issue 5.– pp 763-771.

2. Zemlicka J., Completely coretractable rings // Bull. Iran. Math. Soc..– 2013.– Volume 39.– Issue 3.– pp. 523-528.

SOME RESULTS ON CS-RICKART MODULES

A. N. Abyzov, T. H. N. Nhan
Chair of Algebra and Mathematical Logic, Kazan (Volga Region) Federal Univesrity, 18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia
aabyzov@ksu.ru, Adel.Abyzov@ksu.ru,tranhoaingocnhan@gmail.com

Let M be a right R-module. M is called a *CS-Rickart module* if $\mathrm{Ker}\varphi$ is essential in a direct summand of M for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$. M is called a *d-CS-Rickart module* if $\mathrm{Im}\varphi$ lies above a direct summand of M for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$.

Theorem 1. *Let A be a uniform hereditary right R-module, B be a singular uniform Artinian right R-module. Then the following statements hold:*

1. *$A \oplus B$ is a CS-Rickart module.*
2. *If B is not an A-injective module, then $A \oplus B$ is not a CS module.*

If R is a Dedekind domain and P is a nonzero prime ideal of R, then it is deduced from the previous theorem that R-module $R \oplus (R/P^n)$, where n is a natural number, is a CS-Rickart module and direct sum of CS module but not a CS module.

Let M be a right R-module. We then define $\nabla(M)$ as the set $\{f \in \mathrm{End}_R M \mid \mathrm{Im}f \ll M\}$ and $\triangle(M)$ as the set $\{f \in \mathrm{End}_R M \mid \mathrm{Ker}f \trianglelefteq M\}$.

Theorem 2. *Let M be a right R-module and P be a projective module in the category $\sigma(M)$. Then the following conditions are equivalent:*

1. *For any homomorphism $\varphi \in \mathrm{End}_R(P)$, we have $\varphi(P) = eP \oplus P'$, where P' is an M-singular module and $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(P)$.*
2. *P is a CS-Rickart module satisfying C_2 condition.*
3. *P is a d-CS-Rickart module satisfying $\triangle(P) = \nabla(P)$.*

From the equivalence of 1) - 3), we obtain the following corollary, which has been proved in [2].

Corollary 3. *The following conditions are equivalent for a ring R:*

(1) *R is a semiregular ring and $J(R) = Z_r(R)$.*

(2) *The ring R is a right ACS ring which is also a right C_2 ring.*

(3) *If T is a finitely generated right ideal, then $T = eR \oplus S$ where $e = e^2 \in R$ and S is a right singular ideal of R.*

(4) *Every finitely generated projective module is a CS-Rickart module which is also a C_2 module.*

References

1. G. Lee, S.T. Rizvi and C.S. Roman, *Rickart Modules* // Communications in Algebra. – 2010. – V. 38., No. 11. – P. 4005–4027.

2. W. K. Nicholson, M. F. Yousif, *Weakly continous and C_2 rings* // Communications in Algebra. – 2001. – V. 29., No. 6. – P. 2429–2446.

УНИФОРМИЗАЦИЯ $\Sigma-$ПРЕДИКАТОВ В $HW(\mathbb{R}_{EXP})$

С. А. Александрова
НГУ, Новосибирск
svet-ka@eml.ru

Доклад посвящён исследованию проблемы униформизации для Σ-определимых предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой ($HW(\mathbb{R}_{exp})$). Описание используемой модели списочной надстройки может быть найдено в [1].

Теорема. *Для любого Σ-определимого в $HW(\mathbb{R}_{exp})$ предиката $P \subseteq$ $\subseteq HW(\mathbb{R}_{exp}) \times HW(\mathbb{R}_{exp})$ существует Σ-определимая функция f с областью определения*
$dom(f) = \{x : \exists y P(x, y)\}$ *и графиком* $\Gamma_f \subseteq P$.

Как следствие получен результат существования универсальной функции для класса Σ-определимых в $HW(\mathbb{R}_{exp})$.

Литература

1. Гончаров С. С., Свириденко Д. И. $\Sigma-$*программирование* // Выч. Системы, – 1985. – Вып. 10. – С. 3–30.

КОМБИНАТОРИКА ПОЛУГРУППЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
Yuri.Alpin@kpfu.ru

Согласно теореме Фробениуса неприводимая неотрицательная матрица либо примитивна, либо посредством перестановочного подобия преобразуется к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{r-1,r} \\ A_{r1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{причём } A^r = \begin{pmatrix} A_{11}^{(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{(r)} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{rr}^{(r)} \end{pmatrix}$$

— матрица с примитивными диагональными блоками. В работе [1] доказано обобщение теоремы Фробениуса: всякая неприводимая полугруппа неотрицательных матриц без нулевых рядов либо содержит положительную матрицу, либо посредством некоторого перестановочного подобия матрицы полугруппы преобразуются к блочному виду, при котором в каждом блочном ряду есть ровно один ненулевой блок, причём преобразованная полугруппа содержит блочно-диагональную матрицу с положительными блоками. Авторы поставили вопрос о комбинаторном доказательстве этой теоремы. Искомое доказательство опубликовано в [2]. Средствами этой работы можно перенести теорему Протасова–Войнова на более широкий класс полугрупп.

Пусть $\mathcal{P}$ — полугруппа неотрицательных матриц порядка n без нулевых рядов. Индексы i и j *совместимы*, если для некоторой $A \in \mathcal{P}$ и некоторого индекса

k одновременно $a_{ik} > 0$ и $a_{jk} > 0$. Бинарное отношение совместимости на множестве индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$ рефлексивно и симметрично. Для неприводимых полугрупп, но не только для них, совместимость транзитивна и, тем самым, является эквивалентностью. Матрицу $A \geqslant 0$ называют стягивающей, если $AA^T > 0$.

Теорема. *Пусть для полугруппы $\mathcal{P}$ отношение совместимости является эквивалентностью, причём число классов совместимости равно r. Тогда существует перестановочное подобие, преобразующее матрицы полугруппы $\mathcal{P}$ к блочной форме, при которой каждая матрица имеет r ненулевых блоков — по одному в каждом блочном ряду. Преобразованная полугруппа содержит идеал, состоящий из матриц, ненулевые блоки которых — стягивающие матрицы. Если $\mathcal{P}$ неприводима, то преобразованная полугруппа содержит идеал, состоящий из матриц с положительными ненулевыми блоками.*

Литература

1. Protasov V.Yu., Voynov A.S. *Sets of nonnegative matrices without positive products* // Linear Algebra Appl. – 2012. – V. 437. – P. 749-765.

2. Альпин Ю.А., Альпина В.С. *Комбинаторные свойства неприводимых полугрупп неотрицательных матриц* // Записки научн. семин. ПОМИ. – Т. 405. – 2012. – С. 13-23.

If the group $G = AB$ is the product of two abelian subgroups A and B, i.e. $G = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$, then G is metabelian by a well-known theorem of N. Itô [1, Theorem 2.1.1]. This raises the question whether every group $G = AB$ with abelian-by-finite subgroups A and B is metabelian-by-finite [1, Question 3] or at least soluble-by-finite.

However, this seemingly simple question is very difficult to attack. A positive answer was given only under additional requirements, for instance for linear groups G by Ya. Sysak and for residually finite groups G by J. Wilson (see [1, Theorem 2.3.4]). Furthermore, N.S. Chernikov proved that every group $G = AB$ with central-by-finite subgroups A and B is soluble-by-finite (see [1, Theorem 2.2.5]).

It is natural first to consider groups $G = AB$ where the two factors A and B have abelian subgroups with small index, notably less or equal than 2. In this talk we will discuss some results in the case that "enough"involutions are present which were recently obtained by Lev Kazarin, Yaroslav Sysak and myself. Here we mention two examples.

It is unknown whether every group $G = AB$ which is the product of two Chernikov subgroups both containing abelian subgroups of index at most 2, is likewise a (soluble) Chernikov group.

The following theorem in [1] gives a positive answer in the special case that one of the two subgroups A or B is of dihedral type.

Theorem 1. Let the group $G = AB$ be the product of two Chernikov subgroups A and B, each of which contains an abelian subgroup A_0 resp. B_0 of index at most 2. If further one of the two subgroups, A say, is of dihedral type, i.e. it contains an involution τ that inverts every element of A_0, then G is a soluble Chernikov group.

Groups of dihedral type will lso be called *generalized dihedral.* It is easy to see that a group A is generalized dihedral if and only if it is a semidirect product $A = X \rtimes << a >$ of an abelian group X with a group $< a >$ of order 2 such that $x^a = x^{-1}$ for every $x \in X$. Clearly dihedral groups and locally dihedral groups are generalized dihedral.

The following theorem is proved in [6]. It generalizes earlier results about products of dihedral groups in [5] and products of locally dihedral groups in [4] and [2].

Theorem 2. Let the group $G = AB$ be the product of two subgroups A and B each of which is either abelian or generalized dihedral. Then G is soluble.

The proofs of theses results depend on special calculations with involutions. In particular extensive use is made from the fact that in any group two distinct involutions generate a dihedral group.

Литература

1. Amberg B., Franciosi, S., de Giovanni, F., *Products of Groups.* – The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 1992.

2. Amberg B., Fransman A., Kazarin L. *Products of locally dihedral subgroups* // J. Algebra. – 2012. – V. 350. – P. 308–317.

3. Amberg B., Kazarin L. *On the product of two Chernikov subgroups* // Israel J. Math. – 2010. – V. 175. – P. 363–389.

4. Amberg B., Kazarin L. *Periodic groups saturated by dihedral groups* // Proceedings "Ischia Group Theory 2010 World Scientific, Singapore. – 2011. – P. 11–19.

5. Amberg B., Sysak Ya. *Products of two groups containing cyclic subgroups of index at most 2* // Arch. Math. – 2008. – V. 90. – P. 101–111.

6. Amberg B., Sysak Ya. *On products of groups which contin abelian subgroups of index at most 2* //J. of Group Theory. – to appear.

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ИММУННОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ.

В. Д. Аносов, А. В. Покровский

ИПИБ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

AlexPokrovskiy@yandex.ru

В рамках данной работы множество отображений, действующих из V_n в V_t обозначим символом $\mathcal{F}_{n,t}$. Множество булевых функций от n переменных обозначим $\mathcal{F}_n$. Полный прообраз элемента $y \in \Phi(V_n)$, где $\Phi \in \mathcal{F}_{n,t}$ обозначим как $\Phi^{-1}(y)$.

Определение Множеством аннуляторов отображения $\Phi \in \mathcal{F}_{n,t}$ и вектора $y \in \Phi(V_n)$ или просто множеством аннуляторов отображения Φ называется

$$\mathrm{Ann}(\Phi, y) = \left\{ g \in \mathcal{F}_n \mid g(x) = 0 \ \ \forall x \in \Phi^{-1}(y) \right\}.$$

Определение Алгебраической иммунностью отображения $\Phi \in \mathcal{F}_{n,t}$ называется

$$\mathrm{AI}(\Phi) = \min_{y \in \Phi(V_n)} \left\{ \deg(g) \mid g \in \mathrm{Ann}(\Phi, y) \setminus \{0\} \right\}.$$

В случае $t = 1$ в явном виде получается определение алгебраической иммунности булевой функции (см., например, [3]). Понятие алгебраической иммунности отображения характеризует его устойчивость к методу решения нелинейных систем, предложенного в работах [1] и [2], при котором левые части уравнений решаемой системы рассматриваются как координатные функции отображения.

Естественный вопрос, который возникает при исследовании алгебраической иммунности, это вопрос о ее максимальном значении и достижимости этой оценки. В случае, когда отображение является булевой функцией $f \in \mathcal{F}_n$, то выполняется неравенство (см., например, [3])

$$\mathrm{AI}(f) \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil .$$

В случае $t \geqslant 1$ удалось доказать более общую теорему, из которой как следствие получается предыдущий результат.

Теорема. *Алгебраическая иммунность отображения $\Phi \in \mathcal{F}_{n,t}$ удовлетворяет неравенству*

$$AI(\Phi) \leqslant \left\lceil \frac{n - \log_2 |\Phi(V_n)| + 1}{2} \right\rceil .$$

Литература

1. Armknecht F. *Algebraic attacks on certain stream ciphers.* –Mannheim: Universität Mannheim, 2006. – 217 p.

2. Armknecht F., Krause M., *Single- and Multi-output Boolean Functions with Maximal Algebraic Immunity* // LCNS. – 2006. – V. 4052. – Part 2. – P. 180–191.

3. Meier W., Pasalic E., Carlet C. *Algebraic Attacks and Decomposition of Boolean Functions* // LCNS. – 2004. V. 3027. – P. 474–491

ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ ОТНОШЕНИЙ

Н. Ю. Аншваева, Д. А. Бредихин

Саратовский государственный технический университет, Саратов

anshvaevanatalya@mail.ru

Под *алгеброй отношений* мы понимаем упорядоченную пару (Φ, Ω), где Φ – множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними. Операции над отношениями обычно задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Важным классом логических операция является класс диофантовых операций [1]. Операция называется *диофантовой*, если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Отношение теоретико-множественного включения $\subset$ стабильно относительно диофантовых операций. Следовательно, всякая алгебра отношений с диофантовыми операциями может быть рассмотрена как упорядоченная $(\Phi, \Omega, \subset)$ этим отношением.

К числу диофантовых относится операция умножения отношений $\circ$. Эта операция является ассоциативной. Алгебра отношений вида $(\Phi, \circ)$ образует полугруппу отношений, и всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе отношений. Существует ряд других ассоциативных диофантовых операций над отношениями, поэтому с точки зрения теории полугрупп естественно возникает задача изучения свойств этих операций. Сосредоточим внимание на следующей ассоциативной операции над отношениями $*$, определяемой следующим образом. Для всяких бинарных отношений ρ и σ, определенных на множестве U, положим

$$\rho * \sigma = \{(u,v) \in U \times U : (\exists s,t,w)(u,s) \in \rho(t,w) \in \sigma\}.$$

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega, \subset\}$ класс упорядоченных алгебр, изоморфных упорядоченным алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega, \subset\}$ ($Q\{\Omega, \subset\}$) – многообразие (квазимногообразие), порожденное классом $R\{\Omega, \subset\}$.

Теорема 1. *Для упорядоченной полугруппы* $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leqslant)$ *следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathbf{A}$ *принадлежит квазимногообразию* $Q\{*, \subset\}$*;*

2. $\mathbf{A}$ *принадлежит многообразию* $Var\{*, \subset\}$*;*

3. $\mathbf{A}$ *удовлетворяет тождествам*

$$xy = x^2y = xy^2 \ (1), \ \ xyz = xzy = \ (2), \ x \leqslant x^2 \ (3), \ xy \leqslant x^2 \ (4).$$

Теорема 2. *Упорядоченная полугруппа* $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leqslant)$ *принадлежит классу* $R\{*, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам (1–4) и следующим аксиомам* $xy = x^2 \vee yz = zy = y$ *(5),* $\quad xy = x^2 \vee y \leqslant z$ *(6).*

Литература

1. Бредихин Д. А., *Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями* // Доклады Российской Академии Наук. – 1998. – Т. 360. – С. 594–595.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ И ПРОСТЫХ НАД КОНЕЧНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ МОДЕЛЯХ ТЕОРИЙ ЛОКАЛЬНО СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

К. А. Байкалова
Новосибирск
bkristina@bk.ru

Определение [1, 2]. *Свободная L-алгебра* — это алгебра, изоморфная алгебре всех L-термов. L-алгебра A называется *локально свободной*, если любая конечно порождённая подалгебра алгебры A свободна.

Определение [3]. Модель M теории T называется *предельной*, если M не является простой моделью ни над каким кортежем и $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$ для некоторой элементарной цепи $(M_n)_{n\in\omega}$ простых моделей теории T над некоторыми кортежами.

Теорема 1. *Счетная теория локально свободной алгебры мала тогда и только тогда, когда ее сигнатура содержит не более одного одноместного функционального символа и не содержит функциональных символов местности* $n \geqslant 2$.

Теорема 2. *Если T — малая теория локально свободной алгебры, то T имеет не более одной предельной модели, а также 1 или ω простых над конечными множествами моделей.*

Теорема 3. *Если T — счетная теория локально свободной алгебры с континуальным числом типов, то T имеет 2^ω предельных моделей.*

Теорема 4. *Если T — счетная теория локально свободной алгебры с континуальным числом типов, то T имеет 2^ω простых моделей над конечными множествами.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00460-а.

Литература

1. Мальцев А. И., *Аксиоматизируемые классы локально свободных алгебр некоторых типов* // Сиб. матем. журн.. – 1962. – Т. 5. – № 3. – С. 729—743.

2. Белеградек О. В., *Теория моделей локально свободных алгебр* // Теория моделей и её применения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. – 1988. – С. 3—25.

3. Судоплатов С. В., *Проблема Лахлана.* – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009.

FINITE GROUPS WITH π-DECOMPOSABLE 2-MAXIMAL SUBGROUPS

V. A. Belonogov

Krasovsky Inst. Math. Mech., Ural Branch of RAS, Ekaterinburg (Russia)

belonogov@imm.uran.ru

The finite non-nilpotent groups in which all 2-maximal subgroups are nilpotent was studied in [1] and [2]. Let π be a set of primes. A group is called π*-decomposable* (or (π,π')-decomposable) if it is the direct product of a π-group and a π'-group.

Theorem. *Let G be a finite simple group and π a set of primes. The following assertion are equivalent:*

(A) *G is not π-decomposable and all its 2-maximal subgroups are π-decomposable;*

(B) *one of the following conditions holds (here $\alpha(G)$ denotes that of sets $\pi\cap\pi(G)$ and $\pi'\cap\pi(G)$ which does not contain the number 2):*

(1) *$G \simeq A_r$, where $r = 5$ with $\varnothing \neq \alpha(G) \subseteq \{3,5\}$ or r and $(r-1)/2$ are primes, $r \notin \{5,7,11,23\}$ with $\alpha(G) = \{r\}$;*

(2) *$G \simeq PSL_2(q)$, $q > 5$, $d := (2, q-1)$ and one of the following conditions holds:*

(2a) *$q \in \{7,11\}$ with $\alpha(G) = \{q\}$;*

(2b) *$q > 11$, $(q+1)/d =: r$ is prime with $\alpha(G) = \{r\}$;*

(2c) *$q > 11$, $(q-1)/d =: r$ is prime with $\varnothing \neq \alpha(G) \subseteq \{p,r\}$, where $\{p\} = \pi(q)$;*

(3) *$G \simeq PSL_r(q)$, where r and $s := t/(t, q-1)$ are odd primes for $t = (q^r - 1)/(q-1)$, with $\alpha(G) = \{s\}$;*

(4) *$G \simeq PSU_r(q)$, where r and $s := t/(t, q+1)$ are odd primes for $t = (q^r + 1)/(q+1)$, with $\alpha(G) = \{s\}$;*

(5) *$G \simeq M_{23}$ with $\alpha(G) = \{23\}$ or $G \simeq F_2$ with $\alpha(G) = \{47\}$.*

The proof of Theorem is based on the results of [4]. The description of all finite groups G with property (A) of Theorem will appear in [5] (with using [3]).

This work was supported by RFBR (project no. 13-01-00469), Program DMS of RAS (project no. 12-T-1-1003), and by Programs of JR of UB RAS with SB RAS (project no. 12-S-1-10018) and Belarusian NAS (project no. 12-S-1-1009).

References

1. Janko Z., *Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen* // Math. Z. 1962. – V. 79. – No. 5. – P. 422–424.

2. Belonogov V. A., *Finite solvable groups with nilpotent 2-maximal subgroups* // Math. Notes. – 1968. – V. 3. – No. 1. – P. 15–21.

3. Belonogov V. A., *On finite groups saturated with (π,π')-decomposable subgroups* // Siberian Math. J. – 1969. – V. 10. – No. 3. – P. 354–362.

4. Belonogov V. A., *On control of the prime spectrum of finite simple group* // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2013. – V. 19. – No. 3. – P. 29–44. (In Russian).

5. Belonogov V. A., *Finite groups in which all 2-maximal subgroups are π-decomposable* // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2014. – V. 20. – No. 2. (In Russian, to appear).

ON AUTOMORPHISMS OF DISTANCE-REGULAR GRAPHS WITH INTERSECTION ARRAYS $\{2R+1, 2R-2, 1; 1, 2, 2R+1\}$

I. N. Belousov, A. A. Makhnev
Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg
i_ belousov@mail.ru, makhnev@imm.uran.ru

We consider undirected graphs without loops or multiple edges. Let Γ be a graph. For vertex a of Γ the subgraph $\Gamma_i(a) = \{b\ |d(a, b) = i\}$ is called *i-neighboorhod* of a in Γ. We set $[a] = \Gamma_1(a)$. Γ is called *amply regular* with parameters (v, k, λ, μ) if Γ is regular of degree k on v vertices, and $|[u] \cap [w]|$ equals λ, if u is adjacent to w, equals μ, if $d(u, w) = 2$. Amply regular graph of diameter 2 is called *strongly regular*.

Let $u, w \in \Gamma$ such that $d(u, w) = i$. By $b_i(u, w)$ (by $c_i(u, w)$) we denote the number of vertices in $\Gamma_{i+1}(u) \cap [b]$ (in $\Gamma_{i-1}(u) \cap [b]$). The graph Γ with diameter d is called *distance-regular* with intersection array $\{b_0, b_1, ..., b_{d-1}; c_1, ..., c_d\}$ if for every $i \in \{0, ..., d\}$ the values $b_i = b_i(u, w)$ and $c_i = c_i(u, w)$ do not depend on the choice of vertices u, w at distance i.

In [1] there were found feasible intersection arrays of distance-regular graphs with $\lambda = 2$ and at most 4096 vertices. There are intersection arrays $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$.

Theorem. *Let Γ be a distance-regular graph with intersection array $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leqslant 43$, $2r+1$ is not a prime power, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — an element of G of prime order p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ and $\alpha_i(g)$ is the number of vertices $u \in \Gamma$ such that $d(u, u^g) = i$. Then the following conditions holds:*

(1) if $(r-1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$, then $(r, p) \in \{(22, 5), (25, 17), (27, 5), (27, 11), (31, 7), (32, 5), (32, 13), (38, 7), (38, 11), (42, 5), (42, 17), (43, 29)\}$;

(2) if Ω is empty graph, then either p does not devide r, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 2r + 2 + (4r + 2)l$ and p devides $2l$, $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, and $r \in \{22, 25, 27, 31, 37, 43\}$ or p devides r, $\alpha_3(g) = wr$, p devides $2r + 2 - w$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r + 1)l$ and p devides $l - w + 1$;

(3) if Ω is n-clique then either $n = p = 2$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r + 2)l$ and p devides $6l$;

(4) if Ω intersects t antipodal classes by s vertices and $p > 2$, then p devides $2r+2-t$ and $r-s$, in the case $p > 2$ the graph Ω is distance-regular with intersection array $\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t-4 = 2s-2$ and $|\Gamma - \Omega| \leqslant ts(2r-t)$, in particular, $s < r$ and $p < r$.

Corollary. Distance-regular graph with intersection array $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leqslant 43$, $2r + 1$ is not a prime power, is not arc transitive.

References

1. Makhnev A. A., Nirova M.S. *On distance-regular graphs with $\lambda = 2$* // Vestnik of Sibirean Federal University. – 2014. – V. 7. – No. 1. – P. 35–41.

Σ_2^0-НАЧАЛЬНЫХ СЕГМЕНТАХ ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Р. И. Бикмухаметов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
ravil.bkm@gmail.com

Одно из направлений исследований вычислимых линейных порядков сосредоточено на изучении алгоритмической сложности начальных сегментов. Данная работа посвящена обзору и дальнейшему изучению этой области. Во всех определениях и обозначениях теории вычислимости будем придерживаться книги [1].

Линейный порядок $\mathcal{L} = (L, <_L)$ называется вычислимым (X-вычислимым), если основное множество L и отношение порядка $<_L$ являются вычислимыми (X-вычислимым). Начальным сегментом линейного порядка называется такое подмножество $I \subseteq L$ с индуцированным порядком, что:

$$\forall x, y \ [(x <_L y \ \& \ y \in I) \Rightarrow x \in I]$$

М. Роу [2] показал, что Π_1^0-начальный сегмент вычислимого линейного порядка имеет вычислимое представление. С другой стороны, им был построен пример вычислимого линейного порядка с Π_3^0-начальным сегментом, не имеющим вычислимой копии. Р. Коулз, Р. Доуни и Б. Хусаинов [3] показали, что существует вычислимый линейный порядок с Π_2^0 -начальным сегментом, не изоморфным никакому вычислимому линейному порядку. Заметим, что доказательство последнего результата использует метод приоритета с бесконечными нарушениями. Более простое доказательство, использующее только лишь приоритет с конечными нарушениями, получено М. В. Зубковым [4]. К. Амбос - Шпис, С. Б. Купер и С. Лемпп [5] в совместной работе показали, что каждый Σ_2^0-начальный сегмент любого вычислимого линейного порядка имеет вычислимую копию. Следующая теорема, полученная автором, является дополнением к последнему результату.

Теорема 1. *Для любого вычислимого линейного порядка $\mathcal{L} = (L, <_L)$ без наибольшего элемента и любого множества $M \in \Sigma_2^0$, существует такой вычислимый линейный порядок $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{A} + \eta$, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ и $\mathcal{A} \equiv_T M$.*

Ясно, что если вычислимый линейный порядок имеет наибольший элемент, то он может быть только вычислимым (т.е. Σ_0-) начальным сегментом. Таким образом, Σ_2^0-начальные сегменты вычислимых линейных порядков исчерпывают в совокупности все вычислимые линейные порядки без наибольших элементов и все Σ_2^0-степени.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ-12-01-97008 и РФФИ-14-01-31158.

Литература

1. Соар Р. И., *Вычислимо перечислимые множества и степени.* – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – 576 с.

2. Raw M. J. S., *Complexity of automorphisms of recursive linear orders: Ph.D. Thesis.* – University of Wisconsin-Madison, 1995.

3. Coles R. J., Downey R., Khoussainov B., *On Initial Segments of Computable Linear Orders* // Order. – 1997. – V 14. – № 2. – P. 107–124.

4. Зубков М. В., *О начальных сегментах вычислимых линейных порядков с дополнительными вычислимыми предикатами* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, – № 5. – С. 564–579.

5. Ambos-Spies K., Cooper S. B., Lempp S., *Initial Segments of Recursive Linear Orders* // Order. – 1997. – V. 14, – № 2. – C. 101–105.

GROWTH CODIMENSIONS SOME SIMPLE LINEAR ALGEBRAS WITH UNIT

O. A. Bogdanchuk, S. P. Mishchenko
Department of Algebra and Geometric Computations
Ulyanovsk State University
Ulyanovsk 432970, Russia
bogdanchuk_ o_ a@mail.ru, mishchenkosp@mail.ru

We consider numerical characteristics of not associative algebras variety over a field of characteristic zero and their polynomial identities.In the sequel we shall follow the work [1], [2], where the necessary background was stated.

How known, any information about the variety $\mathbf{V}$ contained in properties of the sequence $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, of multilinear elements relatively free algebra. An important characteristic of the variety is the codimension sequence $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$. The growth of this sequence determines the growth of variety.

In the case of the exponential growth the sequence $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ is bounded and has lower and upper limits, are known as the lower and upper exponents of variety, respectively. When they are equal, the limit of this sequence exists and is called by the exponent of variety.

Classic objects such as simple algebra or simple algebra with unit often have integer exponent of it variety. Moreover, the exponent equal to the dimension of algebra.

The first example of simple algebra variety with fractional exponent was constructed in [3]. We have constructed the infinite series of similar varieties with different fractional exponents.

Theorem. *For the simple algebra variety $var(V_s)$, $s \in \mathbb{N}$, over field of zero characteristic the following strict inequalities hold*

$$3 < \exp(V_3) < \exp(V_4) < \ldots < \exp(V_s) < \exp(V_{s+1}) < \ldots < 4.$$

References

1. Giambruno A. Zaicev M. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods, Mathematical Surveys and Monographs.* – AMS, Providence, RI, 2005. – 122 p.

2. Bahturin Yu. A. *Identities in Lie Algebras (Russian).* – Moscow: Nauka, 1985. – 447 p.

3. Zaicev M. V., Repovsh D. *Four dimencional simple algebra with fractional PI-exponent* // Mathematical Notes. – 2014. – V. 95. – No. 4. – P. 538–553.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОБОБЩЕННОЙ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ

Р. В. Бородич, М. В. Селькин, Е. Н. Бородич
Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины Гомель
Borodich@gsu.by; Selkin@gsu.by; EBorodich@gsu.by

В работе Д.Бейдлемана и Ш.Смита [1] был поставлен следующий вопрос: "Если H субнормальная подгруппа группы G содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?". Эта задача рассматривалась в работах М.В.Селькина [2], Баллестера-Болиншеса [3] и многих других авторов

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ — гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп. В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Теорема.

Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если N — субнормальная A-допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Литература

1. Beidleman J. C., Smith H. *On Frattini-like subgroups* // Glasgow Math. J.. – 1993. — Vol. 35. – P. 95–98.

2. Селькин М. В. *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп.* – Мн.:Беларуская навука, 1997. – 144 с.

3. Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D. *On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group* // Glasgow Math. J.. – 1994. – V. 36. – P. 241–247.

ON PARTIAL ORDERED ALGEBRAS OF RELATIONS WITH OPERATIONS OF CYLINDRIFICATION

D. A. Bredikhin
Saratov State Technical University, Saratov
bredikhin@mail.ru

A set of binary relations closed with respect to some collection of operations on relations forms an algebra called an *algebra of relations*, and each such algebra can be considered to be partially ordered by the relation of set-theoretic inclusion. The first mathematician who treated algebras of relations from the point of view of universal algebra was Alfred Tarski [1]. Now, the theory of algebras of relations is an essential part of algebraic logic and modern algebra [2]. We concentrate our attention on the operation of relation product $\circ$ (that is, composition of relations) and two unary operations of cylindrification ∇_1, ∇_2, playing the important role in algebraic logic [3]. These operations are defined as follows. For any binary relation ρ on U, put $\nabla_1(\rho) = \{(u,v) \in U \times U : (\exists w)(u,w) \in \rho\}$; $\nabla_2(\rho) = \{(u,v) \in U \times U : (\exists w)(w,v) \in \in \rho\}$.

Let $R\{\Omega, \subset\}$ denote the class of all partially ordered algebras isomorphic to ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω.

Theorem 1. *A partially ordered algebra $(A, \cdot, {}^*, \leqslant)$ of the type $(2,1)$ belongs to the class $R\{\circ, \nabla_1, \subseteq\}$ if and only if it satisfies the following axioms:*

$$(xy)z = x(yz), \quad x^{**} = x^*, \quad (xy)^* = xy^*, \quad x \leqslant x^*x, \quad x^*y \leqslant x^*,$$
$$x^*y^* = x^* \vee yz = zy = y, \quad x^*y^* = x^* \vee y \leqslant z.$$

Theorem 2. *A partially ordered algebra $(A, \cdot, {}^\star, \leqslant)$ of the type $(2,1)$ belongs to the class $R\{\circ, \nabla_2, \subseteq\}$ if and only if it satisfies the following axioms:*

$$(xy)z = x(yz), \quad x^{\star\star} = x^\star, \quad (xy)^\star = x^\star y, \quad x \leqslant xx^\star, \quad xy^\star \leqslant y^\star,$$
$$x^\star y^\star = y^\star \vee xz = zx = x, \quad x^\star y^\star = y^\star \vee x \leqslant z.$$

Theorem 3. *A partially ordered algebra $(A, \cdot, {}^*, {}^\star, \leqslant)$ of the type $(2,1,1)$ belongs to the class $R\{\circ, \nabla_2, \nabla_2, \subseteq\}$ if and only if $(A, \cdot, {}^*, \leqslant)$ satisfies the conditions of Th. 1, $(A, \cdot, {}^\star, \leqslant)$ satisfies the conditions of Th. 2, and the following identities hold:*

$$x^{*\star} = x^{\star*}, \quad x^* = xx^{\star*}, \quad x^\star = x^{*\star}x.$$

The proofs of the theorems is based on results of [4, 5].

References

1. Tarski A., *On the calculus of relations*// Symbolic Logic. – 1941. – V. 4. – P. 73–89.

2. Andrŕeka H., Nŕemeti I., Sain, I., *In Handbook of Philosophical Logic, Vol 2, second edition, pp.133-247.* – Kluwer Academic publishers, 2001.

3. Henkin L., Monk J. D., Tarski, A., *Cylindric Algebras, Part I.* – Amsterdam: North Holland, 1971.

4. Bredikhin D.A. *On quasi-identities of algebras of relations with Diophantine operations*// Siberian Mathematical Journal. – 1997. – V. 38. – P. 23–33.

5. Bredikhin D.A. *On algebras of relations with Diophantine operations*// Doklady Mathematics. – 1998. – V. 57. – P. 435–436.

АБСОЛЮТНО ЗАМКНУТЫЕ ГРУППЫ В КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ

А. И. Будкин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

budkin@math.asu.ru

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп. В этом случае для любой группы G из $\mathcal{M}$ и её подгруппы H доминион $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H)$ подгруппы H в G (в $\mathcal{M}$) определяется так:

$\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = \{a \in G \mid \forall M \in \mathcal{M}\ \forall f, g : G \to M,$

$$\text{если } f\mid_H = g\mid_H, \text{ то } a^f = a^g\}.$$

Здесь, как обычно, через $f, g : G \to M$ обозначены гомоморфизмы группы G в группу M, через $f\mid_H$ — ограничение f на H.

Несложно заметить, что $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(-)$ является оператором замыкания на решетке подгрупп данной группы G, в том смысле, что он экстенсивный (доминион подгруппы H содержит H), идемпотентный (доминион доминиона подгруппы H равен доминиону H) и изотонный (если $H \subset B$, то доминион H содержится в доминионе B). Возникает понятие замкнутой подгруппы H в группе G (относительно класса $\mathcal{M}$), которое исследуется в данной работе. Подробную информацию о доминионах можно найти в [1,2].

Группа H называется абсолютно замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы G из $\mathcal{M}$ из каждого включения $H \leqslant G$ следует, что $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Группа H называется n-замкнутой в классе $\mathcal{M}$, если для любой группы $G = gr(H, a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathcal{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами, справедливо равенство: $\mathrm{dom}_G^{\mathcal{M}}(H) = H$.

Множество Σ подгрупп группы G называется локальным покрытием группы Σ, если $\cup_{A \in \Sigma} A = G$ и для любых $A, B \in \Sigma$ существует $C \in \Sigma$ такая, что $A \cup B \subseteq C$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное квазимногообразие групп, $G \in \mathcal{M}$, $H \leqslant G$, $\Sigma_G = \{G_k \mid k \in K\}$, $\Sigma_H = \{H_k \mid k \in K\}$ — локальные покрытия групп G и H соответственно, $H_k \subseteq G_k$ при каждом k. Предполагаем, что если $H_k \subset H_m$, то $G_k \subseteq G_m$, и если $G_k \subset G_m$, то $H_k \subseteq H_m$. Тогда если всякая группа H_k замкнута в G_k относительно $\mathcal{M}$, то группа H замкнута в G относительно $\mathcal{M}$.*

Следствие. *Пусть $G \in \mathcal{M}$, $H \leqslant G$, $\Sigma_H = \{H_k \mid k \in K\}$ — локальное покрытие группы H. Тогда если всякая группа H_k замкнута в G относительно $\mathcal{M}$, то группа H замкнута в G относительно $\mathcal{M}$.*

Теорема 2. *Если для каждого натурального числа n группа H n-замкнута в квазимногообразии $\mathcal{M}$, то H абсолютно замкнута в этом квазимногообразии.*

Литература

1. Будкин А. И., *Решетки доминионов универсальных алгебр* // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46. – № 1. – С. 26–45.

2. Budkin A. I., *Dominions in Quasivarieties of Universal Algebras* // Studia Logica. – 2004. – Т. 78. – № 1/2. – С. 107–127.

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С МЕТАНИЛЬПОТЕНТНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. В. Бузланов
УО "Гомельский госуниверситет имени Ф.Скорины Гомель
kolenchukova@gsu.by

Рассматриваются только конечные разрешимые группы, используется терминология, принятая в [1]. Нееденичную нормальную p-подгруппу T группы G будем называть подгруппой шмидтовского типа в G, если выполняются следующие утверждения:

1) если T неабелева, то $\Phi(T) = T' = Z(T)$ — подгруппа экспоненты p;
2) если T абелева, то она элементарная;
3) если $p > 2$, то $exp(T) = p$, если $p = 2$, то $exp(T) \leqslant 4$;
4) $T/\Phi(T)$ — G-главный фактор и $\Phi(T) = T \cap \Phi(G) \subseteq Z(T)$.

Продолжая исследования работ [2] и [3], доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$, не $\mathfrak{F}$-группа G с $\Phi(G) = 1$ имеет две максимальные подгруппы $M_1 \lhd G$, $M_2 \ntriangleleft G$, принадлежащие $\mathfrak{F}$. Если $M_1 \supseteq F(G)$, $M_2 \supset F(G)$, то для любой минимальной нормальной p-подгруппы P группы G, содержащейся в $G^{\mathfrak{F}}$, справедливы следующие утверждения:*

1) $C = C_G(P) \subset M_1$, $M_1 = F(G)\lambda H$, где $1 \neq H \in \mathfrak{N}$, M_1/C — нильпотентная p'-группа, G/C — ненильпотентная группа;

2) если $q = |G : M_1|$, то $P = P_1 \times P_1^x \times P_1^{x^{k-1}}$, где $k \leqslant q$, $x \in G/M_1$, P_1 — минимальная M_1-допустимая подгруппа группы P, причем $k = q$, если подгруппы P_1 и P_1^x не являются M_1-изоморфными;

3) $C \subset M_2$, $M_2/C = (M_2/C)_p\lambda(M_2/C)_{p'}$, где $(M_2/C)_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}$ для некоторого локального экрана f формации $\mathfrak{F}$;

4) если $q \neq p$, то G/C есть p'-группа, M_2/C — картеровская подгруппа;

5) если $q = p$, то $(M_2/C)_p = (G/C)_p \neq 1$ есть подгруппа порядка p, $F(G/C) = M_1/C$ — холловская p'-подгруппа группы G/C, $G/C = (Q/C)(M_2/C)$ где Q/C есть r-подгруппа шмидтовского типа в G/C для некоторого простого числа $r \neq p$, причем либо $Q/C = (G/C)^{\mathfrak{F}}$, если $G/C \notin \mathfrak{F}$, либо $Q/C = (G/C)^{\mathfrak{N}}$, $M_2/C \in \mathfrak{N}$, если $G/C \in \mathfrak{F}$.

Литература

1. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* – М: Наука, 1978. – 272 с.

2. Бузланов А. В., *Конечные разрешимые группы с нормальной максимальной метанильпотентной подгруппой* // Вопросы алгебры. – 1995. – Вып. 8. – С. 22–30.

3. Бузланов А. В., *Конечные разрешимые группы с несопряженными метанильпотентными максимальными подгруппами* // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2(7). – С. 52–57.

ON LOCALLY SOLUBLE SUBGROUPS OF THE FINITARY LINEAR GROUP

O. Yu. Dashkova
The Branch of Moscow state university in Sevastopol, Sevastopol, Ukraine
odashkova@yandex.ru

In [1], [2] it was begun the investigation of the finitary linear group $FL_\nu(K)$ where K is a ring with the unit, ν is a linearly ordered set. In particular it was studied the finitary unitriangular group $UT_\nu(K)$ [2].

We study the finitary linear group $FL_\nu(K)$ in the case where K is a commutative Noetherian ring with the unit.

The main result of this paper is the theorem.

Theorem. *Let G be a locally soluble subgroup of $FL_\nu(K)$, K be a commutative Noetherian ring with the unit. Then G is a locally abelian–by–metanilpotent–by–polycyclic group.*

References

1. Levchuk V. M., *Some locally nilpotent rings and their adjoined groups* // Mathematical Notices. – 1987. – V. 42. – № 5. – P. 631–641.

2. Merzlyakov Yu. I., *Equsubgroups of unitriangular groups: the criterion of self-normalization* // Reports of the Academy of sciences. – 1994. – V. 339. – № 6. – P. 732–735.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЛОЖНОСТИ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Д. П. Димитриченко
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (НИИ ПМА КБНЦ РАН), Нальчик
dimdp@rambler.ru

В настоящей работе рассмотрен вопрос об определении сложности k-значных логических функций при помощи методов логического интегро-дифференциального исчисления, прикладные аспекты которого проанализированы в [1].

Рассмотрим множество k^k всевозможных k-значных логических функций $F(x)$ от одной переменной $x, x = 0,\ldots,k\text{-}1$.

Определение. Производной $F'(x_0)$ функции $F(x)$ в точке x_0 называется величина приращения функции при изменении значения аргумента x_0 на единицу в положительном направлении, такое что: $F(x_0 + 1) = F(x_0) + F'(x_0)$ [2].

Теорема 1. Всюду определенная функция $F(x)$ дифференцируема во всех точках области определения [2].

Отсюда следует, что каждой всюду определенной функции $F(x)$ можно поставить в соответствие всюду определенную производную.

Критерием оценки сложности функции является количество последовательных дифференцирований, обращающих исходную функцию $F(x)$ в тождественный ноль или саму себя. Тогда нулевая константа будет иметь сложность равную нулю, ненулевые константы единице, линейные функции двум и т.д.

Для анализа сложности множества всех k-значных функций при заданном значении k учтем теорему о разложении произвольной k-значной функции [3]:

Теорема 2. Пусть функция $F(x)$ определена в точке $x_0 = 0$ и имеет в ней производные до порядка k-1 включительно, тогда она представима в виде следующего интегрального разложения: $F(x) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} F^{(j)}(0) I_j(x)$.

При этом достаточно последовательно дифференцировать совокупность интегральных функций до полного их обнуления.

Получены следующие результаты все множество k-значных функций разбивается на два непересекающихся класса:

1) Функции, последовательное дифференцирование которых приводит к нулевой константе за конечное число шагов. Это полиномы или их аналоги.

2) Функции, для которых выполняется следующее соотношение: $F^{(m)}(x) = F(x)$, m - некоторое натуральное число. Это дискретные аналоги тригонометрических функций sin и cos.

Литература

1. Лютикова Л. А. *Исследование систем булевых функций логическими интегро-диффернциальными методами* // Материали за 6 Международна научна практична конференция "Найновите постижения на европейской наука-2011". София. – 2011. – Т. 37. – № 9. – С. 31–38.

2. Димитриченко Д. П. *Об одном способе дифференцирования логических функций* // Материалы международной конференции молодых ученых Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик. – 2011. – С. 103–105.

3. Димитриченко Д. П. *К вопросу о представлении логической функции через ее производные* // Материалы II Международного Российско-Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик. – 2012. – С. 92–94.

ОДНОЗНАЧНАЯ НУМЕРАЦИЯ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

М. В. Доржиева

НГУ, Новосибирск

dm-3004@inbox.ru

Джеймс Оуинс показал в своей работе [1], что для семейства всех Π^1_1-множеств нет однозначной нумерации, используя метарекурсивную теорию. Данный результат был получен в классической форме без использования метарекурсии для первого уровня аналитической иерархии, а также перенесен на уровень $n \in N$.

Теорема 1. *Для $n \geqslant 1$ не существует Π^1_n-вычислимой последовательности $\nu(n)$ такой, что каждое Π^1_n-множество в этой последовательности встречается только один раз.*

Литература

1. James C. Owings, Jr, The meta-r.e. sets, but not the Π^1_1 sets, can be enumerated without repetition, The Journal of Symbolic Logic, Volume 35, Number 2, June 1970.

2. Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, 1972 г.

О СЕМАНТИКАХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ.

Б. Н. Дроботун

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Павлодар
drobotun.nina@mail.ru

В данной работе строится нетрадиционная теоретико-кольцевая семантика исчисления высказываний (ИВ).

С алгебраической точки зрения, множество формул ИВ есть множество термов сигнатуры $\lambda = \langle G_1^2; G_2^2; G_3^2; G_4^2; d_1; d_2 \rangle$ над множеством пропозициональных переменных $\{X_1; X_2; ...; X_t; ...\}$. Построение семантик ИВ сводится, тем самым, к построению удовлетворяющих определенным условиям интерпретаций η сигнатуры λ, при этом, в качестве «строительного материала» используются структурные составляющие конкретных алгебраических систем $\mathbf{M}$. Конкретизация представлений о семантиках пропозициональных логических исчислений [1-2], применительно к ИВ может быть осуществлена следующим образом.

Определение 1. Алгебра $\mathbf{I} = \langle I;^\eta G_1^2;^\eta G_2^2;^\eta G_3^2;^\eta G_4^2;^\eta d_1;^\eta d_2 \rangle$ называется интерпретацией ИВ с полем означивания $\mathbf{M} = \langle M; f_1^{n_1}; f_2^{n_2}; ...; f_r^{n_r}; P_1^{m_1}; P_2^{m_2}; ...; P_s^{n_s}; a_1; a_2; ...; a_t \rangle$, если основные операции этой алгебры являются термальными операциями системы $\mathbf{M}$.

Определение 2. Пусть $\mathbf{I}$ - интерпретация ИВ с полем означивания $\mathbf{M}$ и S – подмножество носителя M этой системы. Терм $t = t(X_1; X_2; ...; X_n)$ сигнатуры λ называется общезначимым (относительно интерпретации η и подмножества S), если ${}^\eta t(a_1; a_2; ...; a_n) \in S$ для любых $a_1; a_2; ...; a_n \in M$

Определение 3. Интерпретация $\mathbf{I}$ ИВ с полем означивания $\mathbf{M}$ и выделенным подмножеством S называется семантикой ИВ, если выполняются условия:

3.1) все аксиомы ИВ, как термы сигнатуры λ, являются общезначимыми;

3.2) если посылки правил вывода ИВ, как термы сигнатуры λ, являются общезначимыми, то и заключения этих правил, как термы сигнатуры λ, также являются общезначимыми.

Предложение 1. Пусть $\mathbf{M} = \langle M; +; \bullet; 0; 1 \rangle$ – произвольное булево кольцо с единицей, интерпретация η сигнатуры λ на множестве M определена по правилам: ${}^\eta G_1^2(a; b) = a+b+a\bullet b$; ${}^\eta G_2^2(a; b) = a\bullet b$; ${}^\eta G_3^2(a; b) = 1+a+a\bullet b$; ${}^\eta d_1 = 1$; ${}^\eta d_2 = 0$ и $S = \{1\}$. Тогда алгебра $\mathbf{I} = \langle M;^\eta G_1^2;^\eta G_2^2;^\eta G_3^2; 0; 1 \rangle$ является семантикой ИВ с полем означивания $\mathbf{M}$ и выделенным подмножеством S.

Литература

1. *Математическая энциклопедия.* – Т. 4. – М.: Советская энциклопедия., 1984.

2. Гильберт Д., Бернайс П. *Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики.* – Пер. с англ. – М.: Наука., 1979.

3. Лавров И.А. *Математическая логика.* – М.: Академия., 2006.

КОМПОЗИЦИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР ПО ДВУМ ГОМОМОРФИЗМАМ

Д. В. Дубнов
МТУСИ, Москва
ddubnov@yandex.ru

Композиция по двум гомоморфизмам [2] Пусть A, B — ассоциативные алгебры над полем k, $F : A \to B$, $G : B \to A$ - гомоморфизмы алгебр. Определим на тензорном произведении $A \otimes B$ следующее умножение:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1G(b_1)a_2 \otimes b_2 + a_1 \otimes b_1F(a_2)b_2) - a_1G(b_1) \otimes F(a_2)b_2.$$

Алгебру $A \otimes B$ с таким умножением будем называть композицией A и B по гомоморфизмам F и G и обозначать $A \circ_{(F,G)} B$ или просто $A \circ B$.

Предложение. *$A \circ B$ — ассоциативная алгебра.*

Композиция колчанов с соотношениями Пусть A, B, — алгебры колчанов с соотношениеми над полем k с изоморфной полупростой частью, то есть $A = C \oplus Rad(A)$, $B = C \oplus Rad(B)$, $C = k^n = ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n$. Радикал Джекобсона алгебры A (аналогично B) разлагается в сумму векторных пространств $RadA = C \oplus A_{ij}$, где $A_{ij} = p_iRad(A)p_j$.

Поскольку $A/Rad(A) = C$, $B/Rad(B) = C$, изоморфизм полупростых частей даёт пару гомоморфизмов $F : A \to B$, $G : B \to A$, образом которых является C. Алгебру $A \circ_{(F,G)} B$ можно отфакторизовать до алгебры $A \circ_C B$ на векторном пространстве $A \otimes_C B = C \oplus Rad(A) \oplus Rad(B) \oplus \bigoplus_{i,j,k=1,\ldots n} A_{i,j} \otimes B_{j,k}$ с полупростой частью C и умножением в радикале

$$a_{ij}b_{kl} = \delta_{jk}a_{ij} \otimes b_{kl}, \qquad b_{kl}a_{ij} = 0, \qquad a_{ij} \in A, \quad b_{kl} \in B.$$

Теорема [1]. *Гомологическая размерность алгебры $A \circ_C B$ равна сумме гомологических размерностей алгебр A и B.*

Гомоморфизмы вложения и проекции и псевдодифференцирование композиции алгебр по двум гомоморфизмам Имеются следующие гомоморфизмы вложения и проекции:

$$i_A : \ A \to A \circ B, \ \ i_A(a) = a \otimes 1; \qquad i_B : \ B \to A \circ B, \ \ i_B(b) = 1 \otimes b,$$

$$p_A : \ A \circ B \to A, \ \ p_A(a \circ b) = aG(b); \qquad p_B : \ A \circ B \to B, \ \ p_A(a \circ b) = F(a)b$$

Композиция по двум гомоморфизмам имеет каноническое псевдодифференцирование D, удовлетворяющее обобщённому правилу Лейбница

$$D(xy) = i_Ap_A(x)D(y) + D(x)i_Bp_B(y).$$

Определим $D(a \otimes 1) := a \otimes 1 - 1 \otimes F(a); \quad D(1 \otimes b) := 1 \otimes b - G(b) \otimes 1$, откуда $D(a \otimes b) = D((a \otimes 1)(1 \otimes b)) = 2a \otimes b - aG(b) \otimes 1 - 1 \otimes F(a)b.$

Литература

1. Дубнов Д. В., *О базисных алгебрах конечной гомологической размерности* // Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, математика, механика. 1997. No 2, С. 15-17

2. Дубнов Д. В., *Представления конечномерных ассоциативных алгебр.* Диссертация кандидата физ.-мат. наук. Москва, 2000.

О БЕЗОПАСНОСТИ ОПЕРАТОРА ИНФЛЯЦИОННОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ

С. М. Дудаков
Тверской госуниверситет, Тверь
sergeydudakov@yandex.ru

Для извлечение информации из баз данных традиционно используются логические языки [1], прежде всего — SQL. Последние версии этого языка имеют в своем составе средство построения рекурсивных запросов. Логическим аналогом этого механизма является оператор инфляционной фиксированной точки (IFP, см. [3]). Базы данных практически всегда рассматриваются над некоторым универсумом, на котором определены какие-то отношения и операции [2]. Запросы (формулы) при этом могут использовать отношения и базы данных, и универсума. Но одновременное использование IFP-оператора и отношений универсума легко приводит к возможности моделирования работы машины Тьюринга, что означает неразрешимость проблемы определения истинности для этих формул. Мы исследуем вопрос: для каких универсумов выполнение IFP-оператора безопасно, то есть результат всегда строится за конечное число шагов?

Основные наши результаты состоят в следующих утверждениях:
Теорема. *Пусть теория T имеет конечную сигнатуру. Для того, чтобы существовала IFP-формула, истинность которой невозможно определить за конечное число шагов в моделях теории T, необходимо и достаточно существование множества формул X, удовлетворяющего следующим условиям:*

A. *формулы из X не содержат сложных термов (аргументами предиката или функции могут быть только переменные),*

B. *в X существует бесконечно много попарно неэквивалентных в T формул,*

C. *существует константа K и каждая формула из X содержит не более K различных переменных (свободных или связанных).*

Следствие. *Если теория конечной сигнатуры является счетно категоричной, то такого множества формул X не существует, следовательно, результат IFP-оператора всегда может быть построен за конечное число шагов.*

Вместе с тем, следствие не является необходимым условием:
Теорема. *Существует теория конечной сигнатуры, которая не является счетно категоричной, но результат IFP-оператора всегда может быть построен за конечное число шагов.*

Литература

1. Codd E.F. Relational completeness of data base sublanguages // Database Systems (ed. Rustin R.), Prentice-Hall — 1972. — P.33–64.

2. Kanellakis P., Kuper G., Revesz P. Constraint query languages // Journal of computer and system sciences — 1995. — V.51 — P.26–52.

3. Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic // Annals of Pure and Applied Logic 1986. — №32 — P.265–280.

ИНВАРИАНТЫ И КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ H-ПОЛУПЕРВИЧНЫХ H-МОДУЛЬНЫХ PI-АЛГЕБР

М. С. Еряшкин
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
mikhail.eryashkin@gmail.com

Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа. Вопрос о том, будет ли коммутативная H-модульная A целым расширением подалгебры инвариантов A^H был поставлен в [1]. Естественным продолжением этого направления исследований является рассмотрение аналогичного вопроса о целостности H-модульной алгебры над подалгеброй центральных инвариантов для H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству. В работе [2] был получен положительный ответ на этот вопрос для первичных H-модульных PI-алгебр при некоторых дополнительных предположениях. Аналогичный вопрос рассматривался в [3] для специального класса H-модульных алгебр, удовлетворяющих полиномиальному тождеству. Основным подходом в этой работе являлся переход к кольцу частных H-первичных H-модульных алгебр из рассматриваемого класса, которое являлось конечномерной алгеброй над полем инвариантных элементов. Аналогичное утверждение удалось получить для некоторых H-полупервичных H-модульных PI-алгебр.

Теорема 1. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная PI-алгебра, которая имеет конечное число H-первичных идеалов $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ таких, $\bigcap P_i = 0$. Тогда алгебра A имеет квазифробениусово классическое двустороннее кольцо частных Q, которое является H-полупростой H-модульной алгеброй. Алгебра Q является конечно-порожденным модулем над подалгеброй центральных инвариантов $\mathcal{C}(A)^H$. Причем алгебра $\mathcal{C}(A)^H$ полупроста и $Q_H(A) = \mathcal{C}(A)^H A$.*

Более того, если A — H-первичная H-модульная PI-алгебра, то алгебра $\mathcal{C}(A)^H$ является полем.

Установленные факты о кольцах частных позволили показать

Теорема 2. *Пусть H — конечномерная алгебра Хопфа, а A — H-модульная алгебра, которая имеет конечное число H-первичных идеалов $\{P_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ таких, $\bigcap P_i = 0$. Тогда если алгебра A является проективным модулем конечного ранга над своим центром $Z(A)$, то алгебра A цела над подалгеброй центральных инвариантов $Z(A)^H$.*

Литература

1. Montgomery S., *Hopf algebras and their actions on rings.* – CBMS Reg. Conf. Ser. Math. № 82, Amer. Math. Soc., 1993. – 238 p.

2. Etingof P., *Galois bimodules and integrality of PI comodule algebras over invariants* //arXiv:1306.3821 [math.QA]. – 2013.

3. Еряшкин М. С., *Кольца Мартиндейла и H-модульные алгебры, обладающие инвариантными характеристическими многочленами.* – Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53. – № 4. – С. 822—838.

LIMITWISE MONOTONIC SETS OF REALS

M. Kh. Faizrahmanov, I. Sh. Kalimullin
Kazan, Kazan (Volga Region) Federal University
marat.faizrahmanov@gmail.com, Iskander.Kalimullin@kpfu.ru

We extend the limitwise monotonicity notion to the case of arbitrary computable linear ordering to get a set which is limitwise monotonic precisely in the non-computable degrees. Also we get a series of connected non-uniformity results to obtain new examples of non-uniformly equivalent families of computable sets with the same enumeration degree spectrum.

О КОММУТАТИВНОСТИ КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ОДНОГО КЛАССА P-ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП

В. Х. Фарукшин
Московский Педагогический Государственный Университет, Москва
fvkh@mail.com

Рассматривается категория $\mathcal{L}_p$ p-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга. Группа A называется p-локальной (p — простое число), если A является $\mathbb{Z}_p$-модулем, $\mathbb{Z}_p$ — локализация кольца целых чисел относительно простого p. Подполе K поля p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ называется полем расщепления для группы $A \in \mathcal{L}_p$, если для кольца $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$ выполнено условие $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong D \oplus F$, где D — делимый R-модуль, F — свободный R-модуль, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Кольцо R в этом случае называется кольцом расщепления для группы A.

Теорема. *Пусть группа* $A \in \mathcal{L}_p$ и поле её расщепления K является квадратичным расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ группы A коммутативно в том и только том случае, если группа A изоморфна $\mathbb{Z}_p$, или $\mathbb{Q}$, или аддитивной группе кольца расщепления R^+ для группы A.

Данное утверждение относится к проблеме, поставленной в [1].

Литература

1. Szele T., Szendrei J., *On abelian groups with commutative endomorphism ring* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1951. – 2. – P. 309–324.

ON CATEGORICITY OF SCATTERED LINEAR ORDERS

A. Frolov, M. Zubkov
N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlevskaya 18, Kazan, Russia
andrey.frolov@kpfu.ru, maxim.zubkov@kpfu.ru

We consider the categoricity of countable scattered linear orders. Recall that linear order is *scattered* if it has no dense suborder. A computable linear order L is *computably (Δ^0_n-, resp.) categorical* if for every computable copy L' of L there is a computable (Δ^0_n-, resp.) isomorphism between L' and L. J. Remmel [1], S. Goncharov, V. Dzgoev [2] obtained the description of computably categorical linear orders. Namely, they proved that a computable linear order is computably categorical if and only if it contains finitely many pairs of successors. Ch. McCoy [3] obtained the description of Δ^0_2-categorical computable linear order with additional conditions. We proved that if L is a computable scattered linear order such that L is a finite sum of scattered orders of rank n then L is Δ^0_{2n}-categorical. The definition of rank of scattered linear orders can be fined in [4].

Литература

1. Remmel J. B. *Recursively categorical linear orderings* // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1981. – V. 82. – No. 2. – P. 387–391.

2. Goncharov S. S., Dzgoev V. D. *Autostability of models* // Algebra i Logika. – 1980. – V. 19. – P. 45–58.

3. McCoy Ch. F. *Partial Results in Δ^0_3-Categoricity in Linear Orderings and Boolean Algebras* // Algebra Logika. – 2002. – V. 41. – №. 5. – P. 531–552.

4. Rosenstein J., Linear orderings. – New York: Academic Press, 1982.

COMPUTABLY ENUMERABLE GRAPHS AND EQUIVALENCE STRUCTURES

A. Gavrûškin
Auckland University of Technology, Auckland
gavruskin@aut.ac.nz

We investigate dependence of recursively enumerable structures on the equality relation given by a specific c. e. equivalence relation on ω. In particular, we compare c.e. equivalence relations in terms of structures they permit to represent. This defines partially ordered sets that depend on classes of structures under consideration. We consider the class of graphs and the class of equivalence structures and investigate some algebraic properties of these partially ordered sets. For instance, we show that some of these partial ordered sets possess atoms, minimal, and maximal elements. We also fully describe the isomorphism types of some of these partial orders.

This is a joint work with **Sanjay Jain, Bakh Khoussainov,** and **Frank Stephan.**

ON SIMPLE NON-AMENABLE GROUPS

A. L. Gevorgyan, A. E. Grigoryan
Russian-Armenian (Slavonic) University, Yerevan
amirjan.gevorgian@gmail.com, ag89.08@mail.ru

One of the classical results on non-amenable groups is Adian's theorem, which states that for all odd $n \geqslant 665$ and $m > 1$ the free Burnside groups $B(m, n)$ are non-amenable (see [2]).

Using the construction of the n-periodic products of groups introduced by S.I.Adian and non-amenability of the groups $B(m, n)$, we have constructed 2-generated non-amenable simple groups of bounded period. The constructed groups confirm the hypothesis of the existence of non-amenable groups without absolutely free subgroups of rank 2 in a stronger form. Note that the first examples of non-amenable groups without absolutely free subgroups of rank 2 were constructed in [2]. The groups from [2] also are simple. But they are either torsion free or periodic groups with unbounded orders of elements.

References

1. Adian S. I., *Random walks on free periodic groups* // Math. USSR-Izv. – 1983. – V. 21. – No. 3. – P. 425–434.

2. Ol'shanskii A. Yu., *On the problem of the existence of an invariant mean on a group* // Uspekhi Mat. Nauk. – 1980. – V. 35. – No. 4. – P. 199-200.

ПОЛИНОМИАЛЬНО ВЫЧИСЛИМЫЕ $\Sigma-$ СПЕЦИФИКАЦИИ ИЕРАРХИЗИРОВАННЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ

В. Н. Глушкова
ДГТУ, Ростов-на-Дону
lar@aaanet.ru, lar@sfedu.ru

Поведение мультиагентной системы специфицируется формулами многосортного языка ИП 1-го порядка с ограниченными кванторами над КС-списками, выделенными в концепции Σ - программирования [1]. КС-списки представляют деревья разбора КС-грамматик, иерархизирующих совокупность действий и состояний агентов посредством правил вида $St_0 \to \{Act\}^*$, (St_0- начальное состояние) $Act \to Act_1 \mid ... \mid Act_n$, $Act_i \to St_1...St_k$. Результатом действия Act_i является переход через соответствующую последовательность состояний, правила для которых определяются спецификой действия.

Основу спецификации составляют $\Delta_0 T$- формулы вида:

$$(\forall x_1 \dot{\in} t_1) \dots (\forall x_m \dot{\in} t_m)(y_1 \prec z_1) \dots (y_p \prec z_p)\varphi(\bar{x}, \bar{t}) \to \psi(\bar{x}, \bar{t})$$

$m \geqslant 1$, $p \geqslant 0$, $y_j, z_j \in < \bar{x}, \bar{t} >$; $\dot{\in}$ обозначает отношение принадлежности элемента списку или его транзитивное замыкание, $\prec -$ отношение "левее". Формулы φ (ψ) конъюнкция атомных формул вида p, $\tau_1 = \tau_2$ $(r,\ f = \tau)$ или их отрицаний; $p, r, f-$ предикатные и функциональный символы, τ, τ_1, τ_2- термы.

Теория Th каждого агента рассматривается как логическая спецификация для вычисления функций и отношений на списках носителя модели. Алгоритм интерпретации реализует прямой логический вывод для заданной теории, исходя из начальных фактов. Предикаты, функции и аксиомы теории согласованы с нетерминальными символами и правилами грамматики [2]. Иерархичность списков позволяет синтаксически ориентированным способом за полиномиальное время относительно "размера"дерева найти все элементы, удовлетворяющие префиксу формулы. Для интерпретации функций применяется одна из главных парадигм вычислений с равенством использование их как правил переписывания термов. При интерпретации теории строят дерево исполнения действий с константами, вычисляемыми в процессе интерпретации. Аксиомы агентов могут выполняться асинхронно за исключением тех аксиом, которые содержат общие предикаты (функции) разных агентов. Обработка таких аксиом задерживается в случае неопределенности значений разделяемых функций и предикатов.

Литература

1. Goncharov S.S., Ershov Yu.L., Sviridenko D.I., *Semantic programming* // Information processing. – 1986. – V. 11. – № 10 . – p. 1093–1100.

2. Глушкова В. Н., *Полиномиально вычислимые* Σ*- спецификации иерархизированных моделей систем реального времени* //Компьютерное моделирование 2013. Труды международной научно-технической конференции 3-5 июля 2013 года. – Санкт-Петербург: изд-во Политехнического университета – 2013. – с. 112-117.

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ПО СПЕКТРУ

И. Б. Горшков

Институт математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск

ilygor@ngs.ru

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — ее спектр, т. е. множество порядков элементов группы G. Будем говорить, что G распознаваема по спектру (кратко, распознаваема), если для любой конечной группы L из равенства $\omega(L) = \omega(G)$ следует изоморфизм $L \simeq \simeq G$. Отметим, что распознаваемость симметрических групп S_n степени $n = = 7, 9, 11, 12, 13, 14$ и нераспознаваемость для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ была установлена в работах [1], [2], [3], [4]. Вопрос о распознаваемости симметрической группы степени 10 остается открытым. В [5] была доказана распозноваемость групп S_p, где p — простое число, большее 13, кроме того там же были получены сильные ограничения на группы с тем же спектром, что и у групп S_{p+1}. В [6] было доказано, что если группа G с тем же спектром, что и симметрическая группа степени n, имеет композиционный фактор изоморфный знакопеременной группе A_n степени n, то $G \simeq S_n$.

Недавно в [7] была доказана распознаваемость знакопеременных групп A_n, $n \geqslant 25$. Доказательство ведется индукцией по степени. Основную идею доказательства этой работы можно перенести на случай симметрических групп. Таким образом, для дальнейшего применения метода полученного в [7] к симметрическим группам полезно доказать распознаваемость симметрических групп малых степеней.

В настоящей работе доказывается распознаваемость групп S_{15}, S_{16}, S_{18}, и S_{21}. **Теорема.** *Группы* $S_{15}, S_{16}, S_{18}, S_{21}$ *распознаваемы.*

Литература

1. Brandl R. , Shi W. *Finite groups whose element orders are consecutive integers* // J. Algebra. – 1991. – V. 143. – N. 2. – P. 388-–400.

2. Praeger C. E., Shi W. *A characterization of some alternating and symmetric groups* // Comm. Algebra. – 1994. – V. 22. – N. 5. – P. 1507–1530.

3. Мазуров В. Д. *Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов* // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36. – № 1. – С. 37-–53.

4. Darafsheh M. R., Modhaddamfar A. R. *A characterization of some finite groups by their element orders* // Algebra Colloq. – 2000. – V. 7. – N. 4. – P. 467-–47.

5. Заварницин А. В. *Распознавание по множеству порядков элементов симметрических групп степени r и r+1 для простого r* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 5. – P. 1002—1006.

6. Заварницин А. В., Мазуров В. Д. *О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп* // Алгебра и логика. – 1999. – Т. 38. – № 3. – С. 296–315.

7. Горшков И. Б. *Распознаваемость знакопеременных групп по спектру* // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52. – № 1. – С. 57—63.

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦА ZS_4

Е. В. Грачев, А. М. Попова

Новосибирский государственный технический университет, город Новосибирск

algebra@nstu.ru

В работе предлагается алгоритм для нахождения группы автоморфизмов кольца ZS_4 и изучается строение этой группы с помощью теории представлений. Пусть $T_1(G), ..., T_s(G)$ - все неприводимые неэквивалентные представления конечной группы G, тогда можно рассмотреть клеточно-диагональное представление $D(G) = (diag(T_1(G), \cdots, T_s(G), g \in G)$. Легко показать, что $ZG) \cong Z[D(G)]$, где последнее кольцо есть целочисленная линейная оболочка матричного представления $D(G)$.

Напомним, что S_4 имеет пять неприводимых неэквивалентных представлений $T_1(S_4), ..., T_5(S_4)$ степеней, соответственно, $n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = n_5 = 3$. Все представления считаем целочисленными. Назовем кольца $Z[T_i(S_4)]$, возникающие на месте соответствующих клеток кольца $D(S_4)$, просто клетками.

Обозначим через $Ker\varphi_m$ ядро гомоморфизма Минковского
$\varphi_m : GL_n(Z) \to GL_n(Z_m)$

Введем обозначения $K_{12} = diag(1, 1, Ker\varphi_{12}, 1, 1)$, $K_{4,8} = diag(1, 1, 1, Ker\varphi_8, 1)$, $K_{5,8} = diag(1, 1, 1, 1, Ker\varphi_8)$

Понятно, что $K_{12} \times K_{4,8} \times K_{5,8} \lhd U(Z[D(S_4)])$. Поэтому можем все клетки рассматривать по соответствующим модулям.

Лемма 1. *Перестановка клеток $Z[T_4(S_4)]$ и $Z[T_5(S_4)]$ не является автоморфизмом кольца $Z[D(S_4)]$.*

Из леммы 1 следует, что автоморфизмы кольца $Z[D(S_4)]$ задаются сопряжениями клеточно-диагональными матрицами над Q.

Лемма 2. *Пусть $T(S_4)$ - неприводимое представление группы S_4 степени 2 или 3 над кольцом целых чисел. Тогда любой автоморфизм кольца $Z[T(S_4)]$ задается сопряжением этого кольца матрицей из $GL_2(Z)$ или $GL_3(Z)$.*

Из лемм 1 и 2 следует, что искать сопрягающие матрицы можно в $GL_n(Z)$ по соответствующему модулю. На этом и основан алгоритм. Таким образом, мы ищем группу матриц $V = \{diag(1, 1, v, y, z)\} \setminus K_{12} \times K_{4,8} \times K_{5,8}$, где $v \in GL_2(Z)$, $y, z \in GL_3(Z)$, которые при сопряжении возвращают кольцо $Z[D(S_4)]$ в себя.

В группе V рассматривается нормальный ряд $V_1 \lhd V_2 \lhd V$, где $V_1 = diag(1, 1, v, 1, 1) \setminus K_{12}$, $V_2 = diag(1, 1, v, y, 1) \setminus K_{12} \times K_{4,8}$ и изучаются факторы этого ряда. При этом используется специальный аддитивный базис кольца $Z[D(S_4)]$ (см. [1]). Получена

Теорема. *В приведенных выше обозначениях справедливо: $V_1 \cong C_2 \times C_6$, $V_2 \setminus V_1 \cong C_2^7$, $V \setminus V_2 \cong H$, где $|H| = 524288$, $C(H) \cong C_2^{13}$, $H \setminus C(H) \cong C_2^6$.*

Литература

1. Грачев Е. В., Попова А.М. *Единицы целочисленного группового кольца группы A_5* // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки . – 2006. – Т. 4. – № 9. – С. 3–15.

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ КОЛЬЦА ZS_4

А. М. Гурин

Харьковский национальный университет, Харьков

alexgu101@ya.ru

Речь пойдет о композициях циклических групп с общими элементами. На многограннике и графе композициям групп отвечают множества граней и циклов с общими ребрами.

Композиция групп образует цепь, если существует композиция групповых операций групп композиции, которая отображает каждый элемент одной из групп в любой, наперед указанный элемент иной группы из композиции групп.

Композиция групп образует цикл, если для каждого элемента произвольной группы композиции существует отображение этого элемента в себя при помощи композиции групповых операций, составленной так, что в нее входят ровно по одной групповой операции из каждой группы композиции.

Теорема 1. *Комбинаторика каждого многогранника и графа с числом вершин меньше 9 однозначно определеяется перечнем его цепей и циклов.*

Теорема 2. *Комбинаторика каждого выпуклого многогранника с правильными гранями однозначно определяется перечнем его цепей групп с числом групп в каждой цепи меньше 4.*

О ЗАДАНИИ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП СИСТЕМАМИ ТОЖДЕСТВ

С. В. Гусев

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

sergey.gusb@gmail.com

Эпигруппой называется полугруппа, в которой некоторая степень любого элемента является *групповым элементом*, т. е. лежит в некоторой ее подгруппе. На всякой эпигруппе можно ввести дополнительную унарную операцию, называемую *псевдообращением* (см., например, [1]). Это позволяет рассматривать многообразия эпигрупп как унарных полугрупп. Обзор полученных здесь результатов можно найти в [2, § 2]. Пусть Σ — произвольная система тождеств, записанных в сигнатуре, состоящей из одной бинарной и одной унарной операции. Обозначим через K_Σ класс всех эпигрупп, удовлетворяющих Σ. Как хорошо известно, этот класс может не быть многообразием. В связи с этим естественным представляется вопрос о том, при каких ограничениях на Σ класс K_Σ является многообразием. В данной работе получен исчерпывающий ответ на этот вопрос. Слово в указанной выше сигнатуре называется *полугрупповым*, если оно не содержит унарной операции. Тождество называют *полугрупповым*, если обе его части являются полугрупповыми словами. Полугрупповое тождество называется *регулярным*, если каждая буква входит в левую и правую его части одинаковое число раз. Элемент, псевдообратный к элементу x данной эпигруппы, обозначается через $\overline{x}$.

Теорема. *Для системы тождеств Σ, записанных в сигнатуре, состоящей из одной бинарной и одной унарной операции, следующие условия эквивалентны:*

1) K_Σ *— многообразие;*
2) Σ *влечет тождество, одна из частей которого является полугрупповым словом, а другая — нет;*
3) Σ *влечет тождество* $x^n = \overline{\overline{x^n}}$ *для некоторого* n*;*
4) Σ *содержит либо полугрупповое не регулярное тождество, либо тождество, одна из частей которого является полугрупповым словом, а другая — нет.*

.

Пункт 4) показывает, что если система Σ конечна, то существует простой алгоритм проверки того, является ли класс K_Σ многообразием.

Литература

1. Шеврин Л. Н. *К теории эпигрупп.* I, II // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 129–160; № 9. – С. 153–176.
2. Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

ON INJECTIVE ENVELOPES OF SIMPLE SEMIMODULES

S. N. Il'in
Lobachevskiˇi Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia
silyin@kpfu.ru

As is well-known, every module over a ring has an injective envelope. The same result does not hold for semimodules over semirings in general, but some important cases were found when semimodules possess injective envelopes. Namely, it was shown in [1] that every semimodule over an additively idempotent semiring has an injective envelope; that result was significantly generalized in [2] for semimodules over additively regular semirings. However, the problem of describing of semirings whose all semimodules have injective envelopes, in the general case is, probably, a quite complicated question, so, it is natural to consider the analogous one in respect to simple semimodules in light of the fact that every simple semimodule is either a module, or it has an idempotent addition. Particularly, each simple semimodule over a zeroic semiring has an idempotent addition, and it was shown in [3] that they all have injective envelopes. We present here two new results on this matter.

Remind that a semiring S is *additively regular* (*additively π-regular*, *zeroic*) iff, for any $a \in S$, the equation $a + x + a = a$ ($na + x + na = na$ for some $n \in \mathbb{N}$, $a + x = x$) is solvable in S. We say that a semiring S is *semizeroic* iff the equation $a+x+y = y$ is solvable in S for any $a \in S$. Clearly, any additively regular semiring is additively π-regular, and all additively π-regular semirings as well as all zeroic ones are semizeroic.

Theorem 1. *For a semiring S the following conditions are equivalent:*

(i) Every simple S-semimodule having an idempotent addition possesses an injective envelope;

(ii) S is semizeroic.

Theorem 2. *Every simple semimodule over an additively π-regular semiring has an injective envelope.*

References

1. Wang H., *Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings* // Semigroup Forum. – 1994. – V. 48. – No. 3. – P. 377–379.

2. Katsov Y., *Tensor products and injective envelopes of semimodules over additively regular semirings* // Algebra Collocuium. – 1997. – V. 4. – No. 2. – P. 121–131.

3. Il'in S. N., *V-semirings* // Siberian Mathematical Journal. – 2012. – V. 53. – No. 2. – P. 222–231.

ТОЖДЕСТВА ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ВЛОЖЕННЫХ В АЛГЕБРЫ ЛИ

И. М. Исаев, А. В. Кислицин

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул

isaev@uni-altai.ru, kislitsin@uni-altai.ru

Пусть F – некоторое поле, A – линейная алгебра над полем F, E – подпространство алгебры A.

Пусть $F\langle X\rangle$ – свободная неассоциативная алгебра от множества порождающих X. Тождеством векторного пространства E называется неассоциативный полином $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ такой, что $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 0$ в алгебре A для всех элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$. Тождество $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является следствием множества тождеств $G = \{g_i(x_1, \ldots, x_{m_i}) | i \in I\}$, если многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ лежит в идеале алгебры $F\langle X\rangle$, порожденном многочленами, полученными из многочленов множества $G = \{g_i(x_1, \ldots, x_{m_i}) | i \in I\}$ с помощью линейных замен переменных.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ класс всех векторных пространств, вложенных в алгебры Ли. Ясно, что векторное пространство E, являющееся подпространством алгебры L, лежит в этом классе, если E удовлетворяет всем тождествам вида $(uv)w + (vw)u + (wu)v = 0$, $uv = -vu$, $u^2 = 0$ для всех неассоциативных одночленов из $F\langle X\rangle$.

В настоящей работе доказано следующее утверждение:

Теорема. *Тождества класса $\mathfrak{L}$ векторных пространств, вложенных в алгебры Ли, не следуют из конечного набора тождеств, выполняющихся в этом классе.*

Ранее авторами доказана аналогичная теорема для тождеств векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12.01.00329а) и в рамках задания № 2014/418

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 12.01.00329а) и в рамках задания № 2014/418 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России на 2014 год.

Литература

1. Исаев И. М., Кислицин А. В., *Тождества векторных пространств и примеры конечномерных линейных алгебр, не имеющих конечного базиса тождеств* // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52. – № 4. – С. 435–460.

2. Исаев И. М., Кислицин А. В., *Тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры* // Мальцевские чтения: тезисы докладов международной конференции по математике. 2013. http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/13/maltsev13.pdf.

ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШРУТОВ СЛОЖНЫХ ХИМИЧЕСКИ РЕАКЦИЙ И ВЫПИСЫВАНИЯ СУММАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. И. Спивак, А. С. Исмагилова
БашГУ, ИНК РАН, г.Уфа
ismagilovaas@rambler.ru

Маршрут реакции – это характеристика некоторого ее направления, выражающего один из путей химического взаимодействия в данной системе при определенном сочетании элементарных стадий, описываемом соответствующим набором стехиометрических чисел [1]. С математической точки зрения, маршрут есть вектор, умножение элементов которого на соответствующие стадии механизма сложной реакции вместе с последующим сложением стадий приводит к суммарному уравнению реакции, которое уже не содержит промежуточных веществ [2].

Результатом настоящей работы является описание теоретико-графовых методов нахождения циклических подграфов графа химической реакции [3], соответствующих базисным маршрутам, и выписывание суммарных уравнений.

Алгоритмы нахождения базисных маршрутов основаны на анализе матрицы инцидентности [4] и матрицы индексов[1].

Под матрицей индексов будем понимать $(m \times n)$-матрицу элементами которой являются индексы вершин графа сложной реакции взятые со знаком "-" для исходных веществ данной стадии, продуктов реакции – со знаком "+":

$$S = (s_{ij}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

где m – число стадий, n – число промежуточных веществ. Если вещество не участвует в данной стадии, то соответствующий ему элемент в матрице индексов обозначается . Таким образом, строкам поставлены в соответствие стадии, столбцам – промежуточные вещества.

Литература

1. Киперман С. Л. *Основы химической кинетики в гетерогенном катализе.* – М.: Химия, 1979. – 350 с.

2. Темкин М. И. *Механизм и кинетика сложных каталитических реакций. Лекции, прочитанные на первом симпозиуме Международного конгресса по катализу.* – М.: Наука, 1970. – С. 57-76.

[1] Индексация вершин графа была предложена А.И.Вольпертом [3] для изучения свойств решений дифференциальных уравнений

3. Вольперт А. И., Худяев С. И. *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики.* – М: Наука, 1975. – 394 с.

4. Спивак С. И., Исмагилова А. С., Хамитова И. А. *Теоретико-графовый метод определения маршрутов сложных химических реакций* // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 434. – № 4. – С. 499-501.

КРИТЕРИЙ ОТДЕЛИМОСТИ НУМЕРАЦИИ АЛГЕБРЫ

Н. Х. Касымов

С основными неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1,2].

Следуя Ю. Л. Ершову [1], нумерованную алгебру назовем отделимой, если таковой является ее нумерационная эквивалентность.

Под гомоморфизмами нумерованных алгебр понимаются обычные гомоморфизмы, являющиеся морфизмами соответствующих нумерованных множеств.

Теорема 1. *Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми.* **Следствие 1.** *Отделимая нумерация подпрямо неразложимой алгебры эффективно отделима.* **Теорема 2.** *Всякая отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является эффективно отделимой.* Таким образом, нумерационные эквивалентности отделимых нумераций алгебр с артиновыми решетками конгруэнций являются вычислимыми в смысле Ю. Л. Ершова [1].

Следствие 2. *Отделимая нумерация алгебры с конечным числом конгруэнций является эффективно отделимой.*

Замечание 1. *Сложность нумерационной эквивалентности отделимой (даже рекурсивно отделимой) нумерованной алгебры с нетеровой решеткой конгруэнций может превосходить любую наперед заданную.* **Замечание 2.** *Нумерованная простая алгебра эффективно отделима тогда и только тогда, когда она имеет собственное рекурсивно перечислимое подмножество, замкнутое относительно ее нумерации.*

Замечание 3. *Среди нумерованных алгебр существуют как подпрямо неразложимые, так и алгебры с артиновыми решетками конгруэнций, нумерационные эквивалентности которых обладают собственными рекурсивно перечислимыми подмножествами (замкнутыми относительно соответствующих нумераций) и не являются отделимыми.*

Литература

1. Ершов Ю. Л. *Теория нумераций* // Наука, М.. – 1977.

2. Касымов Н. Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры* // УМН. – 1996. – Т. 51, № 3. – С. 145–176.

PROPERTIES OF AN INTUITIONISTIC MULTI-TYPED THEORY WITH OPERATIONS

F. Kachapova.
Auckland University of Technology, Auckland
farida.kachapova@aut.ac.nz

A formal system BT [2] for constructive mathematics is a generalisation of Beeson's theory of operations [1]. The theory BT additionally has a countable number of types for sets and a predicative comprehension axiom for each set type. BT has intuitionistic logic but is consistent with classical logic. BT is proof-theoretically stronger than the Beeson's theory. Many theorems of classical mathematics can be expressed in BT due to its rich language.

BT has a set-theoretical model constructed of its external terms. Using this model and a realizability, we prove the following two metamathematical properties of BT.

Theorem 1.

1. Conjunction property.

$$\text{If } BT \vdash \varphi \vee \psi, \text{ then } BT \vdash \varphi \text{ or } BT \vdash \psi.$$

2. Existence property.

$$\text{If } BT \vdash \exists Y \varphi(Y), \text{ then for some external term } t,\ BT \vdash \exists Y\,[t \simeq Y \wedge \varphi(t)].$$

Next we define an extension $PATr$ of Peano arithmetic PA, which is equiconsistent with BT.

Theory $PATr_0$ is just PA. Theory $PATR_{k+1}$ is the theory $PATR_k$ with an additional predicate Tr_{k+1}, which is a truth predicate for formulas of the language $PATr_k$.

Theory $PATr$ is obtained from PA by adding all the truth predicates $Tr_k (k = = 1, 2, \ldots)$ and corresponding axioms.

We denote BT_s the fragment of BT that contains only types $\leqslant s$.

Theorem 2.

1. The theories BT_s and $PATr_s$ are interpretable in each other $(s = 0, 1, 2 \ldots)$.

2. The theories BT and $PATr$ are interpretable in each other.

References

1. Beeson M., *A type-free Godel interpretation* // Journal of Symbolic Logic. – 1978. – V. 43. – No. 2. – P. 213–227.

2. Kashapova F., *Isolation of classes of constructively derivable theorems in a many-sorted intuitionistic set theory equivalent to a second-order arithmetic* // Doklady Mathematics. – 1984. – V. 29. – No. 3. – P. 583–587.

ЧИСЛО ПОЯВЛЕНИЙ ВЕКТОРОВ В МАТРИЧНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НАД КОЛЬЦОМ ГАЛУА

О. В. Камловский

ООО “Центр сертификационных исследований”, г. Москва

ov-kam@yandex.ru

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа характеристики p^n, состоящее из q^n элементов, $R_{s,t}$ — множество всех матриц размеров $s \times t$ над R, $V = (V(i))_{i=0}^{\infty}$ — последовательность матриц $V(i) = (v_{st}(i))_{m\times k}$, удовлетворяющая условиям

$$V(i+1) = AV(i) + B, \quad i \geqslant 0,$$

где $A \in R_{m,m}$, $B \in R_{m,k}$, а $V(0) \in R_{m,k}$ — начальная матрица.

Будем рассматривать V и последовательности $v_{st} = (v_{st}(i))_{i=0}^{\infty}$, $s = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, k$ как псевдослучайные последовательности. Выберем натуральные числа r, i_1, …, i_r, j_1, …, j_r так, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant k$. Изучим частоту $N_l(\vec{z}, v_{i_1 t}, \dots, v_{i_r t})$ появлений вектора $\vec{z} \in R^r$ среди векторов
$(v_{i_1t}(0), \dots, v_{i_rt}(0)), (v_{i_1t}(1), \dots, v_{i_rt}(1)), \dots,$
$(v_{i_1t}(l-1), \dots, v_{i_rt}(l-1)),$
а также частоту $N_l(\vec{z}, v_{sj_1}, \dots, v_{sj_r})$ появлений $\vec{z}$ среди векторов
$(v_{sj_1}(0), \dots, v_{sj_r}(0)), (v_{sj_1}(1), \dots, v_{sj_r}(1)), \dots,$
$(v_{sj_1}(l-1), \dots, v_{sj_r}(l-1)).$

Пусть $\bar{R} = R/pR = GF(q)$ — факторкольцо кольца R по идеалу pR. Образ многочлена $F(x) \in R[x]$ (матрицы $C \in R_{m,k}$) при действии естественного эпиморфизма $R[x] \to \bar{R}[x]$ ($R_{m,k} \to \bar{R}_{m,k}$) обозначим через $\bar{F}(x)$ ($\bar{C}$). Будем считать, что характеристический многочлен $F(x)$ матрицы A удовлетворяет условиям: $\bar{F}(x)$ — неприводим над $\bar{R}$, $\bar{F}(x) \neq x$, $\bar{F}(x) \neq x - e$. Тогда матрица $A - E$ обратима над R. Пусть $C = -(A-E)^{-1}B$, $T(F)$ — период многочлена $F(x)$.

Теорема. *Если ранг матрицы $\bar{V}(0) - \bar{C}$ равен k, то для каждого $l \leqslant T(F)$*

$$\left| N_l(\vec{z}, v_{i_1t}, \dots, v_{i_rt}) - \frac{l}{q^{nr}} \right| < \frac{q^{nr}-1}{q^{nr}} p^{n+\nu-1} \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{F}) + \frac{9}{5} \right) q^{\frac{m}{2}},$$

$$\left| N_l(\vec{z}, v_{sj_1}, \dots, v_{sj_r}) - \frac{l}{q^{nr}} \right| < \frac{q^{nr}-1}{q^{nr}} p^{n+\nu-1} \left(\frac{4}{\pi^2} \ln T(\bar{F}) + \frac{9}{5} \right) q^{\frac{m}{2}}.$$

Эти оценки обобщают результаты работ [1] и [2], где предполагалось, что $F(x)$ является многочленом максимально возможного периода $T(F) = p^{n-1}(q^m - 1)$.

Литература

1. Нечаев В. И., *Распределение знаков в последовательности прямоугольных матриц над конечным полем* // Труды математического института имени В.А.Стеклова. –1997. – Т. 218. – С. 335–342.

2. Цыпышев В. Н., *Матричный линейный конгруэнтный генератор над кольцом Галуа нечетной характеристики* // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – №o 1. – С. 112–124.

К ВОПРОСУ О ДОПОЛНЯЕМОСТИ КОРАДИКАЛА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С. Ф. Каморников
Международный университет "МИТСО Гомель
sfkamornikov@mail.ru

Используются определения и обозначения из [1].

Как отмечено в [2], в теории конечных групп большое значение имеет вопрос о существовании дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалам. Центральное место в решении этого вопроса занимает следующий результат Л. А. Шеметкова.

Теорема ([3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – конечная группа. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгуппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Эта теорема имеет универсальный характер. Она включает в себя практически все известные результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикалов (в том числе теорему Шура-Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы, теорему Гашюца о дополняемости абелевого $\mathfrak{F}$-корадикала, теорему Ф. Холла о дополняемости коммутанта разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами, теорему Хупперта о дополняемости подгруппы $O^p(G)$, обладающей абелевой силовской p-подгруппой).

Примеры показывают, что условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала в приведенной теореме Л. А. Шеметкова существенно. Это означает, что любой прогресс в попытках ослабить это условие может быть связан только с введением дополнительных ограничений на группу G или формацию $\mathfrak{F}$. В данной работе такой прогресс достигается за счет рассмотрения группы G, представимой в виде произведения субнормальных подгрупп, и насыщенной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация Фиттинга, G – конечная группа, представимая в виде произведения субнормальных подгрупп A и B. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовские p-подгуппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Следствие [4]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация Фиттинга, G – конечная группа, представимая в виде произведения нормальных подгрупп A и B. Если для любого простого числа p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовские p-подгуппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Литература

1. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* – М.: Наука. – 1978. – 272 с.

2. Шеметков Л. А., *Два направления в развитии теории непростых конечных групп* // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30. – № 2. – С. 179–198.

3. Шеметков Л. А., *О формационных свойствах конечных групп* // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204. – № 6. – С. 1324–1327.

4. Каморников С. Ф., *О дополнениях корадикала конечной группы* // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6. – С. 17–23.

О ГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ ГРУПП С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ СООТНОШЕНИЯМИ.

М. Р. Карапетян, А. С. Пайлеванян
Российско-Армянский (Славянский) университет, Ереван
Ереванский Государственный Университет, Ереван
ag89.08@mail.ru , apahlevanyan@ysu.am

Элемент $A \in Z[G]$ называется нетривиальным левым (правым) делителем нуля, если A есть левый (соответственно, правый) делитель нуля и для любого элемента $B \in Z[G]$ такого, что $B \neq 0$ и $AB = 0$, пара A, B не является тривиальной парой делителей нуля, т.е. $A = X(1 - h)$ и $B = (1 + h + \cdot + h^{n-1})Y$ для некоторохо элемента h порядка n (или наоборот). С.В.Иванов в Коуровской тетради поставил вопрос [см. Коуровская тетрадь, задача 11.36.д]: Пусть $m \geqslant 2$ и n доататочно большое нечетное число. Верно ли, что каждая пара делителей нуля в $Z[B(m,n)]$ тривиальна? Недавно С.В.Иванов и Р.Михайлов в [1] дали отрицательное решение этого вопроса, построив нетривиальные пары делителей нуля в $Z[B(m,n)]$ для всех нечетных периодов $n > 10^{10}$. Намаи доказана, что построенные им зависящие от n, пары нетривиальных делителей нуля на самом деле являются нетривиальными парами делеителей нуля для всех нечетных $n \geqslant 665$. Доказательство опирается на монографию [2].

Литература

1. Ivanov S. V., Mikhailov R., *On Zero-divisors in Group Rings of Groups with Torsion* // Canadian Mathematical Bulletin. – 2012.

2. Адян С. И., *Проблема Бернсайда и тождества в группах.* – М.: Наука, 1975. – 335 с.

ОБРАЩЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ НАД ДВОЙНЫМ МОДУЛЕМ

А. В. Карпов
Томский государственный университет, Томск
karpov@isc.tsu.ru

Пусть C и S — кольца с единицами, G — конечная абелева группа, рассматриваемая как двойной модуль ${}_CG_S$. Функция $f : G \to G$ называется *дифференцируемой* в точке x из G, если существует её *производная* в этой точке — такой элемент $D_f(x)$ из S, что для любого двустороннего идеала $J \trianglelefteq C$ и любого элемента a из подмодуля JG верно

$$f(x + a) \equiv f(x) + a \cdot D_f(x) \mod J^2G.$$

Функция f называется *дифференцируемой*, если она обладает производной в каждой точке из G. В том числе дифференцируемыми являются полиномиальные вектор-функции над коммутативным кольцом.

Пусть функция f индуцируем подстановку на множестве $X_f \subseteq G$. Рассматриваются задачи построения для f обратной подстановки и генерации взаимно обратных подстановок, имеющие приложения в криптографии и теории кодирования и решённые в [2] для полиномиальной функции f над кольцом Z_{p^m}.

Пусть J — двусторонний нильпотентный идеал в C индекса нильпотентности $r \geqslant 2$. Тогда подгруппы $G_n = J^nG$, где $1 \leqslant n \leqslant r$, образуют строго убывающую цепь в G, и обращение функции f может быть выполнено последовательно над фактор-группами G/G_n. Именно, пусть функция g_k — обратная к f над фактор-группой G/G_k, то есть $f(g_k(x)) \equiv x \mod G_k$ для для любого x из X_f. Тогда обратной к f над фактор-группой G/G_{k+1} является функция

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) - (f(g_k(x)) - x)D_f(g_k(x))^L,$$

где $L = |S/Ann_S(G_2 : G_1)^*| - 1$ и $Ann_S(G_2 : G_1) = \{s \in S | G_1 s \subseteq G_2\}$. Функция

$$g_{k+\lfloor k/2 \rfloor}(x) = 2g_k(x) - g_k(f(g_k(x))), k \geqslant 2,$$

является обратной к f над фактор-группой $G/G_{k+\lfloor k/2 \rfloor}$. Наконец, функция

$$g_k^*(x) = g_k(x) - f_0(g_k(x))D_{g_k}(x)$$

— обратная к $f(x) + f_0(x)$, если $f_0(x) \in G_{\lceil k/2 \rceil}$ и $D_{f_0}(x) \in Ann_S(G_k : G_{\lceil k/2 \rceil})$ для любого $x \in X_f$.

Литература

1. Карпов А. В., *Перестановочные многочлены над примарными кольцами* // Прикладная дискретная математика. – 2013. – № 4(22). – С. 16–21.

О МНОГООБРАЗИИ $\mathcal{B}_{1,1}$ АЛГЕБР С ДВУМЯ УНАРНЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

В. К. Карташов

Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград

kartashovvk@yandex.ru

К настоящему времени для унаров (т. е. алгебр с одной унарной операцией) по проблематике, обозначенной в [1], [2], получен ряд глубоких результатов, имеющих окончательный вид.

Оказалось ([3], [4]), что теория унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одного символа, имеет значительную специфику и, поэтому, результаты для унаров не всегда могут быть эффективно использованы для построения гипотез в общей теории унарных алгебр. Поэтому исследование унарных алгебр с двумя операциями приобретает актуальный характер.

В настоящее время среди таких алгебр наиболее глубоко исследованы алгебры многообразия $\mathcal{A}_{1,1}$, заданного тождествами $fg(x) = gf(x) = x$, где f, g – функциональные унарные символы (см., например, [4]).

В данном сообщении рассматриваются алгебры многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$, определенного тождеством $fg(x) = x$. Многообразие $\mathcal{B}_{1,1}$ рассматривалось в [6], [7].

Автором получены следующие результаты.

Теорема 1. *Многообразие $\mathcal{B}_{1,1}$ является покрытием для $\mathcal{A}_{1,1}$ в решетке всех многообразий алгебр с двумя унарными операциями.*

Теорема 2. *Для любой сильно связной алгебры $\mathfrak{A}$ многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$ справедливо равенство*

$$End\mathfrak{A} = Aut\mathfrak{A}.$$

(через $End\mathfrak{A}$ и $Aut\mathfrak{A}$ обозначаются соответственно полугруппа эндоморфизмов и группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$).

Литература

1. Skornjakov L. A., *Unars* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1982. – V. 29. – P. 3–15.
2. Карташов В. К., *О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр* // Чебышевский сборник. – 2011. – Т. 38. – № 2. – С. 18–26.
3. Johnson J., Seifert R. L., *A survey of multi-unary algebras. Mimeographed seminar notes.* – U. C. Berkeley, 1967. – 16 с.
4. Карташов В. К., Карташова А. В., Пономарев В. Н., *Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – Вып. 4(2). – С. 57–62.
5. Горбунов В. А., *Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость* // Алгебра и логика. – 1977. – Т. 16. – № 5. – С. 507–548.
6. Акатаев А. А., Смирнов Д. М., *Решетки подмногообразий многообразий алгебр* // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7. – № 1. – С. 5–25.
7. Бощенко А. П., *Решетки конгруэнций унарных алгебр с двумя операциями f и g, удовлетворяющими тождествам $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ или $g(f(x)) = x$* // Волгогр. гос. пед. ун-т. – Волгоград, 1998. – Деп. в ВИНИТИ 20.04.98. № 1220-В98. – 32 с.

О ГРУППОИДАХ АНТИМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЬЦЕВСКОГО УМНОЖЕНИЯ

А. В. Карташова

Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград

kartashovaan@yandex.ru

Пусть $\mathfrak{K}$ – произвольный класс алгебраических систем. Произведение $\mathfrak{M}\underset{\mathfrak{K}}{\circ}\mathfrak{N}$ его подклассов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{K}$ определено А.И. Мальцевым ([1]) по правилу
$\mathcal{A} \in \mathfrak{M}\underset{\mathfrak{K}}{\circ}\mathfrak{N} \Leftrightarrow$

$$\mathcal{A} \in \mathfrak{K} \;\&\; (\exists\theta)(\mathcal{A}/\theta \in \mathfrak{N} \;\&\; (\forall a \in \mathcal{A})(a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{M})),$$

где $a\theta$ – смежный класс конгруэнции θ, содержащий элемент a.

Антимногообразием (см. [2]) называется всякий класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры Ω, определяемый некоторым (возможно, пустым) множеством антитождеств, т.е. предложений вида

$$(\forall \bar{x})(\neg\alpha_1(\bar{x}) \vee \neg\alpha_2(\bar{x}) \vee \ldots \vee \neg\alpha_m(\bar{x})),$$

где $\alpha_i(\bar{x})$ – атомная формула сигнатуры Ω для любого числа $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Теорема 1. *Пусть множество функциональных символов сигнатуры Ω конечно. Тогда подантимногообразия каждого антимногообразия $\mathfrak{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω образуют полугруппу относительно умножения в классе $\mathfrak{K}$.*

Для любой сигнатуры Ω через $\mathfrak{U}_\Omega$ обозначим класс всех алгебраических систем данной сигнатуры, а через $\mathfrak{U}'_\Omega$ – класс всех алгебраических систем этой сигнатуры, не содержащих идемпотентов.

Теорема 2. *Если множество функциональных символов сигнатуры Ω бесконечно, то подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{U}_\Omega$ не образуют группоида относительно мальцевского умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{K}$ – антимногообразие алгебр конечной сигнатуры Ω, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{K}$. Тогда*

$$\mathfrak{M}\underset{\mathfrak{K}}{\circ}\mathfrak{N} = \begin{cases} \mathfrak{U}'_\Omega, & \text{если} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{U}_\Omega, \quad \mathfrak{M} \neq \mathfrak{U}_\Omega, \\ \mathfrak{N}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

.

Следствие. *Антимногообразия алгебр конечной сигнатуры Ω образуют относительно умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$ полугруппу с пустым центром без правых единиц, единственной левой единицей которой является элемент $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Литература

1. Мальцев А. И., *Об умножении классов алгебраических систем* // Сиб. мат. ж. – 1967. –Т. 8. – № 2. – С. 346–365.

2. Горбунов В. А., Кравченко А. В., *Универсальные хорновы классы и антимногообразия алгебраических систем* // Алгебра и логика – 2000. –Т. 39. – № 1. – С. 3–22.

ТЕОРЕМА МОЕНСА ДЛЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

И. Б. Кайгородов
Институт математики СО РАН, Новосибирск
kib@math.nsc.ru

В 1955 Джекобсон доказал, что конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль, допускающая невырожденное (обратимое) дифференцирование, является нильпотентной. В дальнейшем, Диксимье привел пример нильпотентной алгебры Ли, где каждое дифференцирование нильпотентно. Данные результаты получили обобщение для случая предифференцирования в работах Бажо и Бурде. Дифференцирования и предифференцирования допускают обобщение до лейбницевых дифференцирований. Под лейбницевым дифференцированием порядка n подразумевают линейное отображение, удовлетворяющее тождеству

$$\phi((\ldots(x_1x_2)\ldots)x_n) = \sum_{i=1}^{n}(\ldots(\ldots(x_1x_2)\ldots\phi(x_i))\ldots)x_n.$$

В работе [1] был получен критерий нильпотентности алгебр Ли посредством лейбницевых дифференцирований. А именно, было показано, что конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль нильпотентна тогда и только тогда, когда она обладает обратимым лейбницевым дифференцированием.

Естественным выглядит вопрос о выполнении аналога теоремы Моенса для других многообразий алгебр. Так, Фиаловски, Худобердыев и Омиров в [2] показали, что теорема Моенса, с некоторыми изменениями, верна для алгебр Лейбница (некоммутативного обобщения алгебр Ли). В тоже время, в случае алгебр Филиппова (обобщение алгебр Ли на случай n-арной операции), еще в 2009 году Вильямсом было установлено, что аналог результата Джекобсона (и, в частности, Моенса) не является верным.

Как оказалось (см. [3]), теорема Моенса верна также и в ассоциативном, и в альтернативном случаях:

Теорема. *Конечномерная альтернативная (в частности, ассоциативная) алгебра над полем характеристики нуль обладает обратимым лейбницевым дифференцированием тогда и только тогда, когда она нильпотентна.*

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых (МК-330.2013.1).

Литература

1. Moens W. A., *A Characterisation of Nilpotent Lie Algebras by Invertible Leibniz-Derivations* // Communications in Algebra. – 2013. – Т. 41. – № 7. – С. 2427–2440.

2. Fialowski A., Khudoyberdiyev A. Kh., Omirov B. A., *A characterization of nilpotent Leibniz algebras* // Algebra and Represention Theory. – 2013. – Т. 16. – № 5. – С. 1489–1505.

3. Kaygorodov I., Popov Yu., *Alternative algebras admitting derivations with invertible values and invertible derivations* // to appear in Izvestiya: Mathematics. – arXiv:1212.0615.

ВЫПОЛНЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ В КВАНТОВЫХ ΣΠ-НЕЙРОНАХ

М. А. Казаков

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (НИИ ПМА КБНЦ РАН), Нальчик

f_wolfgang@mail.ru

В настоящей работе рассматривается способ реализации бинарных операций логического произведения и логической суммы при помощи унитарных преобразований над кубитами.

Первый слой ΣΠ-нейронов состоит из элементов, выполняющих операцию умножения. Операцию логического произведения можно выполнить при помощи элемента Тоффоли. Этот элемент, действуя на систему трех кубитов $|x, y, z\rangle$, реализует функцию

$$T\,|x, y, z\rangle \to |x, y, z \oplus x \wedge y\rangle\,,$$

при $z = 0$ элемент Тоффоли

$$T\,|x, y, 0\rangle \to |x, y, x \wedge y\rangle\,.$$

Второй слой ΣΠ-нейронов состоит из элементов, выполняющих операцию логического сложения. Эту операцию можно выполнить через операции логического отрицания и логического умножения: $x \vee y = \neg(\bar{x} \wedge \bar{y})$.

Унитарное преобразование, соответствующее операциям отрицания можно составить из следующих однокубитовых операторов:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где 1 - тождественный оператор, σ_x представляет собой одну из матриц Паули.

Тензорное произведение этих матриц $NOT_{12} = 1 \otimes 1 \otimes \sigma_x$ образует матрицу 8×8, действующую на систему из трех кубитов. Эта матрица соответствует унитарному преобразованию, производящему инверсию первых двух кубитов.

Тензорное произведение $NOT_3 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes 1$ образует матрицу, соответствующую унитарному преобразованию, производящему инверсию третьего кубита.

Таким образом, операцию логического сложения можно выполнить последовательным действием трех унитарных операторов на систему трех кубитов. Первые два кубита - слагаемые, третий кубит - результат.

$$NOT_{12}\, T\, NOT_3 \, |x, y, 0\rangle \to |\bar{x}, \bar{y}, x \vee y\rangle$$

Литература

1. Шибзухов З. М. *Конструктивные методы обучения* $\Sigma\Pi$*-нейронных сетей.* – М: МАИК Наука, 2006. – 159 с.

2. Китаев К., Шень А., Вялый И. *Классические и квантовые вычисления.* – М: МЦМО, 1999. – 193 с.

3. Казаков М. А., Шибзухов З. М. *О квантовых логико-арифметических* $\Sigma\Pi$*-нейронах* // Материалы X школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики". Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. – 2012. С. 44–46.

ГРУППЫ С БОЛЬШИМ НЕПРИВОДИМЫМ ХАРАКТЕРОМ

Л. С. Казарин, С. С. Поисеева
ЯрГУ, Ярославль
kazarin@uniyar.ac.ru

Изучаются конечные группы, обладающие таким неприводимым характером Θ, что $|G| \leqslant 2\Theta(1)^2$. Группу G порядка больше 2, имеющую такой характер Θ, будем называть $LC(\Theta)$-группой.

Теорема 1. *Пусть G является $LC(\Theta)$-группой. Если $|G|$ не является степенью числа 2, то любой неприводимый характер группы G является конституэнтой характера Θ^2.*

Экстраспециальная 2-группа порядка 2^{2m+1} имеет характер Θ степени 2^m. Прямое произведение знакопеременной группы A_4 и группы S_3 также дает пример группы, для которой $|G| = 2\Theta(1)^2$.

Теорема 2. *Пусть G является p-разрешимой $LC(\Theta)$-группой с абелевой силовской p-подгруппой. Если $\Theta(1)$ – степень p, то либо p – простое число Мерсенна, и группа G – прямое произведение групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и G – прямое произведение некоторого количества групп Фробениуса, каждая из которых имеет порядок либо $2^{m_i}q_i$, где $q_i = 2^{m_i} + 1$ – простое число Ферма, либо порядок 72. В частности, G является p-нильпотентной группой.*

Теорема 2 будет, вообще говоря, неверна, если отказаться от абелевости силовской p-подгруппы. Группа $AGL_2(3)$ порядка $3^3 2^4$ имеет неприводимый характер степени 16, но ее 2-длина равна 2.

В общем случае задача описания группы с неприводимым характером Θ, для которого $|G| < c\Theta(1)^2$ для небольщой константы $c > 2$ представляется довольно сложной. Так группа G, изоморфная одной из групп Матье $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}$, M_{24}, спорадической простой группе Янко J_2 или группе Томпсона Th, имеет неприводимый характер Θ, для которого $|G| < 3\Theta(1)^2$. Однако любая конечная простая неабелева группа имеет неприводимый характер Θ, для которого $|G| < \Theta(1)^3$ (см. [1]).

Литература

1. Казарин Л. С., Сагиров И. А. *О степенях неприводимых характеров конечных простых групп. Алгебра. Топология* // Труды ИММ УрО РАН. – 2001. – Т. 7. – № 2. – С. 113–123.

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ХАНА–БАНАХА ДЛЯ (ПОЛУ)ГРУПП: ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕЙ ОГИБАЮЩЕЙ

Б. Н. Хабибуллин
Башкирский государственный университет, Уфа
Khabib-Bulat@mail.ru

Для пары множеств X, Y множество всех функций $f\colon X \to Y$ обозначаем Y^X. Одна из классических форм Теоремы Хана–Банаха для векторных пространств X над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$: *любая сублинейная функция* $f \in \mathbb{R}^X$ *равна поточечной точной верхней грани всех линейных функций* $\varphi \in \mathbb{R}^X$, *мажорируемых* f, *т. е.* $\varphi(x) \leqslant f(x)\,\forall x \in X$. Дадим общую постановку этой проблематики.

Пусть $(S, \leqslant)$, или S, — упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$ [1] порядково полное, т. е. каждое ограниченное сверху и снизу элементами из S подмножество $S_0 \subset S$ обладает точными верхней и нижней гранью $\inf S_0, \sup S_0$ в S. Пополним (расширим) S до $\operatorname{com} S$ добавлением символов $\inf S$ и/или $\sup S$, если в S нет $\inf S$ и/или $\sup S$, часто обозначаемых как соотв. $-\infty$ и/или $+\infty$.

Пусть X — множество, $f \in (\operatorname{com} S)^X$, $\Phi \subset (\operatorname{com} S)^X$, функция

$$x \mapsto \sup\bigl\{\varphi(x)\colon \varphi \in \Phi,\, \varphi(x') \leqslant f(x')\ \forall x' \in X\bigr\} \in \operatorname{com} S, \quad x \in X,$$

— *нижняя* Φ*-огибающая на* X функции f.

Задача. *В терминах* X, S, Φ *описать по возможности максимальный класс функции* $f \in (\operatorname{com} S)^X$, *равных своей нижней* Φ*-огибающей на* X, *и/или дать конструктивное построение нижней* Φ*-огибающей* f *на* X *через саму функцию* f.

Эту и более общую Задачу предполагается обсудить в следующие ситуациях.

1. *На* X *и* $(S, \leqslant)$ *заданы действия (полу)групп соотв.* $(H, \cdot)$ *и* $(\mathtt{H}, \cdot)$; $\mathfrak{h}$ *— гомоморфизм* H *в* $\mathtt{H}$; Φ *— класс* $\mathfrak{h}$*-однородных функций* $\varphi(hx) = \mathfrak{h}(h)\varphi(x)\ \forall x \in X, \forall h \in H$.

2. $(X, +)$ *— (полу)группа,* $(S, \leqslant, +)$ *— (полу)группа со сложением* $+$, *согласованным с* $\leqslant$; Φ *— класс аддитивных функций* $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$.

3. X *и* $(S, \leqslant)$ *обладают структурами как п.* **1**, *так и п.* **2** *в определенной согласованности, а класс* Φ *— пересечение классов* Φ *из п.* **1** *и п.* **2**.

4. X *также наделено некоторой порядковой структурой, например, структурой проективного предела векторных решеток [2], а* Φ *— разнообразные классы.*

5. X *и* S *в пп.* **1**–**4** *снабжены топологиями, согласованными со структурами, уже заданными на* X *и* S, *а* Φ *— разнообразные классы.*

Все эти результаты в той или иной степени в духе [2, Введение] могут быть применены в теории потенциала, к распределению нулевых множеств в весовых классах голоморфных функций, к экранированному уравнению Пуассона и стационарному уравнению Шрёдингера, к эллиптическим уравнениям и т. д.

Работа поддержана грантом РФФИ № 13–01–00030-а.

Литература

1. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С., *Упорядоченные векторные пространства.* – Новосибирск: Наука, 1978. – 362 с.

2. Хабибуллин Б. Н., *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций.* I // Изв. РАН, сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 4 – С. 205–224.

О ВЫЧИСЛИМОСТИ КЛАССА Σ-ОПРЕДЕЛИМЫХ СТРУКТУР

А. Н. Хисамиев

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирский государственный университет, Новосибирск

hisamiev@math.nsc.ru

В настоящее время общепризнанно, что одним из важных обобщений понятия вычислимости является Σ-определимость (обобщенная вычислимость) в допустимых множествах. Это обобщение дало возможность исследовать проблемы вычислимости над произвольными структурами, например, над полем вещественных чисел. Наиболее важные результаты по теории вычислимости в допустимых множествах и их применении в теоретической информатике (семантическое программирование, динамическая логика, теория эффективных f-пространств и.т.д.) приведены в монографии Ю. Л. Ершова «Определимость и вычислимость» [1].

Для произвольной KPU-структуры $\mathbb{A}$ напомним следующие понятия теории обобщенной вычислимости (см. [1]). Первые два определения являются естественным обобщением соответствующих понятий классической теории нумераций [2].

$\mathbb{A}$*-нумерацией* множества S назовем любое отображение ν некоторого Σ-подмножества $B \subseteq |\mathbb{A}|$ на множество S. Если S — некоторое семейство Σ-подмножеств $|\mathbb{A}|$, то $\mathbb{A}$-нумерация $\nu : B \to S$ семейства S называется *вычислимой*, если предикат $\{\langle b, a\rangle \mid b \in B, a \in |\mathbb{A}|, a \in \nu(b)\}$ является Σ-определимым.

Структура $\mathbb{A}$ называется *резольвентной*, если существует Σ-фунция f : $Ord(\mathbb{A}) \to |\mathbb{A}|^*$ такая, что $f(\alpha) \subseteq f(\beta)$, $\alpha \leqslant \beta$ и $|\mathbb{A}| = \bigcup\limits_{\alpha \in Ord(\mathbb{A})} f(\alpha)$.

Структура $\mathfrak{M}$ конечной предикатной сигнатуры $\sigma = \langle P_0, \ldots, P_{n-1}\rangle$ называется Σ*-определимой в* $\mathbb{A}$, если существуют Σ-формула $\psi_0(x_0)$ и Δ-предикаты $\eta^{\mathfrak{M}_0}, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_{n-1}^{\mathfrak{M}_0}$ на множестве $M_0 \leftrightharpoons \psi_0^{\mathbb{A}}[x_0]$ такие, что $\eta^{\mathfrak{M}_0}$ есть отношение конгруэнтности на структуре

$$\mathfrak{M}_0 = \langle M_0, P_0^{\mathfrak{M}_0}, \ldots, P_{n-1}^{\mathfrak{M}_0}\rangle$$

и структура $\mathfrak{M}$ изоморфна фактор-структуре $\mathfrak{M}_0/\eta^{\mathfrak{M}_0}$.

Приведем основной результат данного сообщения.

Теорема. *Пусть* $\mathbb{A}$ *— резольвентная KPU-структура. Тогда для произвольной конечной предикатной сигнатуры* σ *семейство* $\Sigma^\sigma(\mathbb{A})$ *всех* Σ*-определимых в* $\mathbb{A}$ *структур данной сигнатуры вычислимо.*

Литература

1. Ершов Ю. Л., *Определимость и вычислимость.* – Новосибирск: научная книга, 2-ое издание, М., Экономика, 2000. – 318с. (Сибирская школа алгебры и логики).

2. Ершов Ю. Л., *Теория нумераций.* – Москва: Наука, 1977. – 416с.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ БИПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. Н. Княгина

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель
knyagina@inbox.ru

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Собственная подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппой, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}| = p_i$ — простое число для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, [1].

В работах [1–3] описаны конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными, 2-максимальными подгруппами и примарными циклическими подгруппами соответственно. В частности, такие группы оказались дисперсивными, а значит и разрешимыми. Развивая данную тематику мы рассматриваем группы с $\mathbb{P}$-субнормальными бипримарными дисперсивными подгруппами. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G. Если в группе G все бипримарные p-замкнутые pd-подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, то $G/O_p(G)$ p-нильпотентна; в частности, группа G p-разрешима и $l_p(G) \leqslant 2$.*

Теорема 2. *Пусть q — наименьший простой делитель порядка группы G. Если в группе G все бипримарные q-нильпотентные qd-подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, то G разрешима и $l_q(G) \leqslant 1$.*

Пример 1. Требование «p — наибольший простой делитель порядка группы G» отбросить нельзя. Примером служит простая группа $PSL(2, 11)$ при $p = 2$. В этой группе каждая 2-замкнутая бипримарная подгруппа четного порядка изоморфна знакопеременной группе A_4 степени 4, которая $\mathbb{P}$-субнормальна в $PSL(2, 11)$. Соответствующая $(A_4 - PSL(2, 11))$-цепь имеет тип $(5, 11)$.

Пример 2. Оценка p-длины в теореме 1 является точной. Подтверждением служит группа $[E_{3^2}]A_4$, 3-длина которой равна 2 и в которой каждая 3-замкнутая бипримарная $3d$-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.

Пример 3. Для каждого $q \geqslant 3$ группа с $\mathbb{P}$-субнормальными q-нильпотентными бипримарными qd-подгруппами может быть простой. Для $q = 3$ это группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n \geqslant 3$, а для $q \geqslant 5$ — группа $PSL(2, q)$. Поэтому условие «q — наименьший простой делитель порядка группы» в теореме 2 отбросить нельзя.

Литература

1. Васильев, А. Ф., Васильева, Т. И., Тютянов, В. Н., *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сиб. матем. журнал. – 2010. – Т. 51. – № 6. – С. 1270–1281.

2. Kniahina, V. N., Monakhov, V. S., *Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal 2-maximal subgroups* // ArXiv. org e-Print archive. –18 May 2011. – arXiv:1105.3663.

3. Kniahina, V. N., Monakhov, V. S., *Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal primary cyclic subgroups* // ArXiv. org e-Print archive. –18 Nov 2011. – arXiv:1110.4720V2.

О ЧИСТЫХ ПОДПОЛУГРУППАХ ПОЛУГРУПП С НУЛЕМ

О. В. Князев
Омский государственный педагогический университет, Омск
knyazev50@rambler.ru

В [1] предлагаются направления исследований произвольных универсальных алгебр. В частности, ставятся задачи, (см. [1], проблемы 16-23) связанные с понятием чистоты. Нас интересуют чистые подполугруппы полугрупп с нулем.

Напомним некоторые определения. Мы смотрим на полугруппы с нулем как на алгебры с одной бинарной ассоциативной операцией — умножение, и одной нульарной операцией — выделение нуля. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп с выделенным нулем; $\mathbf{L}(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{L}(\mathbf{V})$, $A \in \mathbf{V}$. В дальнейшем под словом "полугруппа"понимается алгебра из многообразия $\mathbf{V}$. Единственным классом $\mathbf{X}-$вербальной конгруэнции $\rho(\mathbf{X}, A)$ на полугруппе A ($\rho(\mathbf{X}, A)$ — наименьшая из конгруэнций на A, фактор-полугруппы по которым принадлежат $\mathbf{X}$), являющимся подполугруппой полугруппы A, будет класс, содержащий нуль. Обозначают его через $\mathbf{X}(A)$ и называют $\mathbf{X}-$ *вербалом* полугруппы A.

Подполугруппу B полугруппы A называют *чистой* в A, если равенство $\mathbf{X}(B) = \mathbf{X}(A) \cap B$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $\mathbf{L}(\mathbf{V})$.

Если для любых $a, b \in A$ существует такое натуральное число n, что $a^n \in \in AbA$, то полугруппу A называют архимедовой.

Элемент a полугруппы A называют групповым, если порожденная им подполугруппа есть группа с присоединенным нулем.

Пусть $A^2 = \{a \cdot b \mid a, b \in A\}$ и GrB — множество всех групповых элементов полугруппы B. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть A есть связка архимедовых полугрупп, B — подполугруппа полугруппы A. Тогда включения $A^2 \cap B \subseteq GrB$ достаточно для того, чтобы полугруппа B являлась чистой подполугруппой полугруппы A.*

Литература

1. Мартынов Л. М., *О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр* // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. – Волгоград: Перемена,2000. – С. 179–190.

RADICAL PROPERTIES OF NILPOTENT ALGEBRAS

J. V. Kochetova
Moscow Pedagogical State University, Moscow
jkochetova@mail.ru

Let F be a partially ordered field and let $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ be a linear algebra over a field F. By $\leqslant$ we denote a partial order of a set A. Suppose an algebra A satisfies the following conditions:

(1) $\langle A; + \rangle$ is a lattice ordered group with respect to the order $\leqslant$ (see [1]);

(2) if $a \leqslant b$, then $\gamma a \leqslant \gamma b$ for all $a, b \in A$ and $\gamma > 0$, $\gamma \in F$;

(3) from $a \geqslant 0$ it follows that $a \geqslant ab$ and $a \geqslant ba$ for any elements $a, b \in A$.
Then this algebra A over a partially ordered field F is said to be a *lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra* and a lattice order $\leqslant$ is called a lattice *$\mathcal{K}$-order* (see, for example, [2]).

Suppose an associative algebra (a Lie algebra) A over a linearly ordered field is a finite-dimentional algebra; then it is known that the following conditions are equivalent (see [4]): a) for A there exists a lattice $\mathcal{K}$-order; b) A is a nilpotent algebra.

Let us remember that the *l-prime radical* of a lattice $\mathcal{K}$-ordered algebra A is the intersection of all l-ideals B in A such that for any nonzero l-ideals I and J of the factor–algebra A/B we have $IJ = \{z = \sum\limits_{k=1}^{n=n(z)} x_k y_k \mid x_k \in I,\ y_k \in J\} \neq \{B\}$ (see [2]).

In this paper, following [5], we say that algebra is a $\mathfrak{B}$-*radical algebra* if this algebra and its prime radical are equal. Using results of [4], we shall say that a $\mathcal{K}$-ordered algebra is called a $\mathfrak{B}_l$-*radical algebra* if its l-prime radical is equal to this algebra.

Theorem. *Let A be a finite–dimentional nilpotent algebra over a linearly ordered field. If either A is an associative algebra or A is a Lie algebra then A is a $\mathfrak{B}$-radical algebra and A is a $\mathfrak{B}_l$-radical algebra.*

Moreover, if a finite–dimentional nilpotent algebra A is an associative algebra then A is a radical by Jacobson algebra.

References

1. Kopytov V.M. *Lattice ordered groups.* – Moscow: Nauka, 1984. – 320 p.

2. Kochetova J.V. *On l-prime radical of lattice ordered algebras* // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. – 2011/2012. – vol. 17. – no. 5. – pp. 55–68.

3. Kopytov V.M. *The ordering of Lie algebras* // Algebra and Logic. – 1972. – vol. 11. – no. 3. – pp. 295–325.

4. Kochetova J.V., Shirshova E.E. *Prime radicals of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras* // Fundamentalnaya i prikladnaya matematika. – 2013. – vol. 18. – no. 1. – pp. 85–158.

5. Andrunakievich V.A., Ryabuhin Yu.M. *Radicals of algebras and the structural theory.* – Moscow: Nauka, 1979. – 496 p.

О КОНЕЧНЫХ ПОЧТИ ПРОСТЫХ 6-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

В. А. Колпакова, А. С. Кондратьев
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург; Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург
leralid@mail.ru, a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $Soc(G)$ — её цоколь. Группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq.

Наше внимание привлекает задача подробного изучения класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. В рамках этой задачи А. С. Кондратьев и И. В. Храмцов [1–3] изучали конечные группы, имеющие несвязный граф простых чисел с числом вершин, не превосходящим 4. В недавней работе А. С. Кондратьева были определены *почти простые* (т. е. группы с простым неабелевым цоколем) 5-примарные группы вместе с их графами простых чисел. Мы продолжаем эти исследования, имея целью определить сначала почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга — Кегеля. Для этого мы используем и уточняем список простых 6-примарных групп, полученный в [4]. Нами доказана

Теорема. *Пусть G — конечная почти простая 6-примарная группа. Тогда*

(1) *Если $Soc(G) \cong PSp_4(q)$, то либо $q \in \{3^3, 3^4, 17^2\}$, либо $q = 2^m$, где m и $q-1$ — простые числа, $m \geqslant 5$, $(q+1)/3$ — степень простого числа и m не делит $q(q^2-1)$, либо q — простое число, $17 \neq q \geqslant 11$, либо q — квадрат простого числа, $q \geqslant 11^2$, либо $q = 3^m$, где m и $(q-1)/2$ — нечетные простые числа, $m \geqslant 5$, $|\pi((q+1)/4)| = 1$ и m не делит $q(q^2-1)$;*

(2) *Если $Soc(G) \cong G_2(q)$, то либо $q \in \{9, 17\}$, либо q — простое число, $q \geqslant 13$, $|\pi(q^2-1)| = 3$, $|\pi(\frac{q+\epsilon q+1}{(3,q-\epsilon 1)})| = 1$ для $\epsilon \in \{+,-\}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Литература

1. Кондратьев А. С., Храмцов И. В., *О конечных трипримарных группах* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16. – № 3. – С. 150—158.

2. Кондратьев А. С., Храмцов И. В., *О конечных четырепримарных группах* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – № 4. – С. 142—159.

3. Кондратьев А. С., Храмцов И. В., *О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел* // Сиб. эл. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 472–477.

4. Jafarzadeh A., Iranmanesh A., *On simple K_n-groups for $n = 5, 6$* // London Math. Soc. Lecture Note Ser. – 2007. – Vol. 340. – P. 668–680.

О КОНЕЧНЫХ ПОЧТИ ПРОСТЫХ 6-ПРИМАРНЫХ ГРУППАХ

Е. И. Компанцева

Московский государственный педагогический университет/ НИУ Высшая школа экономики, Москва

kompantseva@yandex.ru

Умножением на абелевой группе G называется гомоморфизм $G \otimes G \to G$. Абелева группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G. В [1] поставлена задача изучения абелевых групп, у которых любое умножение на периодической части однозначно продолжается до умножения на всей группе. Такие группы, называемые MT-группами, часто встречаются в работах по теории абелевых групп.

Абсолютным ниль-идеалом абелевой группы G называется ее подгруппа, которая является ниль-идеалом в любом кольце на G. Настоящая работа посвящена изучению абсолютных ниль-идеалов MT-групп, описан абсолютный ниль-радикал произвольной MT-группы. Под абсолютным ниль-радикалом абелевой группы G понимается пересечение $N^*(G)$ верхних ниль-радикалов всех ассоциативных колец на G. Очевидно, любой абсолютный ниль-идеал группы G содержится в $N^*(G)$. Проблема описания абсолютных радикалов абелевой группы сформулирована Л. Фуксом [2, проблема 94].

Как обычно, через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}_0$ обозначаются множества целых и целых неотрицательных чисел соответственно, $h_p(g)$ – p-высота элемента g (p – простое число). Согласно [3] будем говорить, что элемент g абелевой группы G удовлетворяет условию $(*)$ для действительного числа d и простого p, если существует неубывающая неограниченная функция $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ такая, что $h_p(p^i g) > d(i+f(i))$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Для произвольной абелевой группы G обозначим: $\Lambda(G)$ – множество всех простых p, для которых $T_p(G) \neq 0$, где $T_p(G)$ – p-примарная компонента группы G, G^*_Λ – множество всех $g \in G$, для каждого из которых найдутся $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и действительное $d > 1$ такие, что kg удовлетворяет условию для d и любого $p \in \Lambda(G)$.

Теорема. *Для любой MT-группы G ее абсолютный ниль-радикал* $N^*(G) = \bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$. *При этом на группе G существует ассоциативное и коммутативное кольцо, верхний ниль-радикал которого совпадает с подгруппой* $\bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda$.

Литература

1. Topics in abelian groups. – Chicago, Ill., 1963.

2. Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, т.2, М., Мир, 1977.

3. Toubassi E. H., Lawver D. A., Heigh slope and splitting length of abelian groups // Publ. Math. — 1973 — 20 — с. 63-71.

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ НЕСВЯЗНЫЙ ГРАФ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И КОМПОЗИЦИОННЫЙ ФАКТОР, ИЗОМОРФНЫЙ ГРУППЕ $L_3(17)$

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург; Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

a.s.kondratiev@imm.uran.ru, ihramtsov@gmail.com

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G *Графом простых чисел* (или *графом Грюнберга—Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G называется граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Авторы в [1] описали конечные четырепримарные группы G с несвязным графом простых чисел. К сожалению, в таблице 1 и теореме 7 из этой статьи был пропущен случай, когда G имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$. В данной работе, восполняя этот пробел, мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел и G имеет композиционный фактор, изоморфный группе $L_3(17)$, то $\overline{G} := G/F(G) \cong L_3(17)$ или $Aut(L_3(17))$, $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,17\}$ и p-главный фактор группы G может быть изоморфен 306-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю для каждого $p \in \{2,3,17\}$.*

Теорема 2. *Если G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(L_3(17))$, то $G/O_2(G) \cong L_3(17)$ или $Aut(L_3(17))$.*

Из теорем 1 и 2 следует, что группа $L_3(17)$ является нераспознаваемой по графу простых чисел, т. е. существует бесконечное множество попарно не изоморфных конечных групп с таким же графом простых чисел, как у группы $L_3(17)$.

Наши обозначения стандартны, их можно найти, например, в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), гранта Уро РАН для молодых ученых (проект 14-1-НП-27) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, грант №02.A03.21.0006).

Литература

1. Кондратьев А. С., Храмцов И. В., *О конечных четырепримарных группах* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17. – № 4. – С. 142-159.

2. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A., *Atlas of finite groups.* – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ $^2E_6(Q^2)$

В. В. Кораблева

Челябинский государственный университет, Челябинск; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

vvk@csu.ru

Одной из фундаментальных задач теории групп является изучение подгруппового строения данной группы. Группы лиева типа составляют основной массив конечных простых групп. Изучение унипотентных подгрупп группы лиева типа является ключом в понимании ее строения и свойств. В работе автора [1] было получено уточненное описание главных факторов параболических максимальных подгрупп, входящих в унипотентный радикал, для всех групп нормального лиева типа, за исключением групп типов B_l, C_l, F_4, G_2 над полем четной характеристики и типа G_2 над полем характеристики 3. В данной работе продолжаются исследования в этом направлении.

В работе рассматриваются конечная простая группа (скрученного) лиева типа $^2E_6(q^2)$ и $P = UL$ — параболическая максимальная подгруппа в ней, где U — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Из статьи [2] следует, что факторы нижнего центрального ряда группы U являются главными факторами группы P и являются неприводимыми $GF(q)L$-модулями или $GF(q^2)L$-модулями. Число этих факторов не зависит от поля, а зависит только от лиева типа группы.

Если A и B — нормальные подгруппы группы P, B — подгруппа A и фактор группа A/B является минимальной нормальной подгруппой в P/B, то A/B называется *главным фактором* группы P.

В настоящей работе автором для конечной простой группы ${}^2E_6(q^2)$ уточняется описание главных факторов каждой ее параболической максимальной подгруппы, входящих в унипотентный радикал. Приводится таблица, в которой указываются размерности и порождающие элементы соответствующих модулей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469) и Лаборатории квантовой топологии Челябинского госуниверситета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

Литература

1. Кораблева В. В., *О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа* // Сиб. мат. журн. (принята в печать).

2. Azad H., Barry M., Seitz G., *On the structure of parabolic subgroup* // Comm. Algebra. – 1990. – V. 18. – № 2. – P. 551–562.

ПРОСТЫЕ ЛИЕВЫ ПУЧКИ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Н. А. Корешков
Казанский федеральный университет, Казань
Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru

Пусть L – векторное пространство над полем P. Обозначим через K пространство всех кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. *Лиевым пучком $L(S)$ называется пара векторных пространств L и S, когда $S \subseteq K$, если для любого отображения s из S имеет место соотношение: $(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0,\ a, b, c \in L$. (Здесь xsy – образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s.)*

Примером лиева пучка является сэндвичева алгебра.

Определение 2. *Сэндвичевой алгеброй $M_r(L, S)$ называется пара пространств L и S, содержащихся в пространстве матриц M_r, удовлетворяющих условию $asb - bsa \in L$, когда $a, b \in L, s \in S$. (Здесь asb и $bsa \in L$ – обычные произведения матриц.)*

Теорема. *Любой простой лиев пучок $L(S)$ размерности, не превосходящей четырех, над алгебраически замкнутым полем P характеристики, отличной от двух и трех, совпадает с одним из следующих:*

1. $L(S) = M_3(R, T)$, где R — пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, T — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E \rangle$ (E — единичная матрица). В частности, когда $T = \langle E \rangle$, пучок $L(S)$ — это простая трехмерная алгебра Ли.

2. $L(S) = M_k(I, I^t)$, $k = 2, 3, 4$, где I — минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_k(P)$, $I^t = \{A \in M_k(P) \mid A^\top \in I\}$. (Здесь $A^\top$ — транспонированная матрица).

3. $\dim L = 4$, $\dim S = 2$. В пространстве умножений S существует базис s, $\overline{s}$ такой, что $L(s) = \bigoplus_{i=0}^{3} L_i$, $L(\overline{s}) = \bigoplus_{i=0}^{3} \overline{L}_i$, $\dim L_i = \dim \overline{L}_i = 1$, $i = 0, \ldots, 3$, $\overline{L}_i = L_i$, $i = 1, 2$, $\overline{L}_i = L_{3-i}$, $i = 0, 3$. Алгебры Ли $L(s)$ и $L(\overline{s})$ — градуированные алгебры Ли с условием $L_i s L_j = L_{i+j}$, $\overline{L}_i \overline{s}\, \overline{L}_j = \overline{L}_{i+j}$, $i, j = 0, \ldots, 3$, $i + j \leqslant 3$.

4. $L = M_2(P)$, $\mathcal{D} \subseteq S \subseteq M_2(P)$, где $\mathcal{D}$ — подпространство диагональных матриц, и умножения задаются формулой $\langle A, B\rangle C - \langle A, C\rangle B - \langle B, C\rangle A$, $B, C \in \in M_2(P)$, $A \in S$, и $\langle X, Y\rangle$ — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $M_2(P)$.

5. $L(S) = M_2(M_2(P), S)$, $\mathcal{D} \subseteq S \subseteq M_2(P)$.

6. $\dim L = 4$, $\dim S = 3$ или 4. Пространство умножений S имеет вид $S = = \widetilde{S} \oplus \overline{S}$, $\dim \widetilde{S} = 2$, $\dim \overline{S} = 1$ или 2, причем $L(\widetilde{S}) = M_2(M_2(P), \mathcal{D})$. Пусть $L(s_0) = H \oplus L_1 \oplus L_2$ — картановское разложение алгебры Ли $L(s_0)$, где s_0 — умножение, входящее в регулярную пару (x_0, s_0), которая определяет картановскую подалгебру H в лиевом пучке $L(S)$, и $\dim H = 2$, $\dim L_1 = \dim L_2 = 1$. Тогда $H\overline{S}H = 0$, $H\overline{S}\mathcal{L} = 0$, $\mathcal{L}\overline{S}\mathcal{L} \subseteq H$, причем $\dim(\mathcal{L}\overline{S}\mathcal{L}) = \dim \overline{S}$, где $\mathcal{L} = = L_1 \oplus L_2$.

АВТОМАТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЕФИКСНО РАЗРЕШИМЫХ СВЕРХСЛОВ

Н. Н. Корнеева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

Natalia.Korneeva@kpfu.ru

Одним из направлений исследований в теории автоматов является изучение действия автоматов с выходом (синхронных и асинхронных) на бесконечные последовательности символов конечного алфавита или, другими словами, на сверхслова над конечным алфавитом. В данной работе рассматривается вопрос о действии указанных автоматов на префиксно разрешимые сверхслова.

Пусть Σ – конечный алфавит, x – сверхслово над алфавитом Σ. Обозначим через $Pref(x)$ – множество всех префиксов сверхслова x.

Сверхслово x называется префиксно разрешимым ([1]), если для любого регулярного языка L в алфавите Σ разрешима задача $Pref(x) \cap L \neq \emptyset$. Другими словами, сверхслово x префиксно разрешимо, если для любого детерминированного автомата можно определить проходит он при чтении сверхслова x, начиная с начального состояния, через финальное состояние или нет.

Определим действие конечного автомата с выходом на сверхслово.

Асинхронным автоматом (см. [2]) называется набор $S = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' – конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \longrightarrow S$ – функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow (\Sigma')^*$ – функция выходов. Если областью значений функции выхода являются только символы выходного алфавита, а не слова из символов выходного алфавита, то есть $\omega : S \times \times \Sigma \longrightarrow \Sigma'$, то получаем конечный автомат Мили. Если выделено начальное состояние s_0, то автомат называется инициальным.

Действие функции выхода автомата естественным образом продолжается на множество сверхслов. Пусть (S, s_0) – конечный асинхронный инициальный автомат. Образом сверхслова $x = \{x(i)\}$ при действии автомата S называется сверхслово $\omega(s_0, x(0))\omega(s_1, x(1))\omega(s_2, x(2))\ldots$, где $s_{i+1} = \delta(s_i, x(i))$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть $S = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega, s_0)$ – конечный инициальный автомат Мили или конечный асинхронный инициальный автомат, x – префиксно разрешимое сверхслово над алфавитом Σ. Тогда $\omega(s_0, x)$ – префиксно разрешимое сверхслово над алфавитом Σ'.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-31200 мол_а).

Литература

1. Вялый М. Н., Рубцов А. А., *Алгоритмическая разрешимость задач о поведении автоматов на сверхсловах* // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19. – № 2. – С. 3–18.

2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.,*Введение в теорию автоматов.* – М.: Наука, 1985. – 320 с.

LATTICE ISOMORPHISMS OF THE DIRECT SUMS OF GALOIS RINGS

S. S. Korobkov

Ural State Pedagogical University, Ekateringburg

ser1948@gmail.com

Let R be an associative ring. We denote by $L(R)$ the lattice of all subrings of R. By a lattice isomorphism of the ring R onto a ring S we mean an isomorphism $\varphi : L(R) \to L(S)$ of $L(R)$ onto $L(S)$. We write the mapping down exponentially; thus the image of R under the map φ will be denoted by R^φ.

Among different questions that arise in studying lattice isomorphisms the most important is the question as to which properties of rings are preserved under lattice isomorphisms. It is very interesting to know what kinds of rings the next implication: $L(R) \cong L(R^\varphi) \Rightarrow R^\varphi \cong R$ holds? According to [1] if R isomorphic to the Galois ring $GR(p^n, m)$, where $n > 1, m > 1$ then $R^\varphi \cong R$. The next step may be a passage to the direct sums of Galois rings.

It is well-known that Galois rings have different properties. For example if $n = 1$ then the ring $GR(p^n, m)$ is isomorphic to the Galois field $GF(p^m)$. Lattice isomorphisms of direct sums Galois fields were regarded in [2]. For such rings it was proved that a ring, lattice isomorphic to the direct sum of k finite fields $(k > 2)$ is the direct sum of k finite fields too. If $m = 1$ then the ring $GR(p^n, m)$ is generated by identity element and the direct sum of such type rings is generated by orthogonal idempotents.

The main results of this thesis are Theorems 1 – 4. There theorems describe lattice isomorphisms of direct sums of different types of Galois rings.

Theorem 1. *Let* $R = R_1 \dotplus R_2 \dotplus \cdots \dotplus R_k$, *where* $k \geqslant 2$. *Suppose* $R_i \cong GR(p^{n_i}, 1)$ $(i = \overline{1,k})$, $n_1, n_2 > 1$. *Then* $R^\varphi \cong R$.

Theorem 2. *Let* $R = R_1 \dotplus R_2$. *Suppose* $R_1 \cong GR(p^{n_1}, m)$ *and* $R_2 \cong GR(p^{n_2}, 1)$, $n_i > 1$, $m > 1$. *Then* $R_i^\varphi \cong R_i$ $(i = 1, 2)$ *and either* $R^\varphi = R_1^\varphi \dotplus R_2^\varphi$ *or* $R^\varphi = R_1^\varphi \oplus R_2^\varphi$, $n_1 \leqslant n_2$ *and the identity element of* R_2^φ *is the same in* R^φ. *In all cases* $R^\varphi \cong R$.

Theorem 3. *Let* $R = R_1 \dotplus R_2$. *Suppose* $R_1 \cong GR(p^n, m)$, $n > 1$, $m > 1$ *and* $R_2 \cong GF(p^k)$. *Then* $R^\varphi = R_1^\varphi \dotplus R_2^\varphi$, $R_1^\varphi \cong R_1$, $R_2^\varphi \cong GF(p^l)$ *and either* $k = l = 1$ *or* $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ *and* $l = q_1^{\alpha_1} \cdots q_t^{\alpha_t}$.

Theorem 4. *Let* $R = R_1 \dotplus R_2 \dotplus \cdots \dotplus R_k$. *Put* $R_i \cong GR(p^{n_i}, m_i)$, $n_i > 1$, $m_i > 1$. *Then* $R_i^\varphi \cong R_i$ *and* $R^\varphi = R_1^\varphi \dotplus R_2^\varphi \dotplus \cdots \dotplus R_k^\varphi$.

References

1. Korobkov S. S. *Projections of Galois rings* // International Conference "Mal'tsev Meeting"November 11–15, 2013. Collection of Abstacts. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, P. 119.

2. Korobkov S. S. *Lattice isomorphisms of finite rings without nilpotent elements* // Izvestia Ural State Univ., Mathematics and Mechanics. – 2002. – № 22. – V. 4.– P. 81–93.

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЙ ПРЕДТАБЛИЧНЫХ СУПЕРИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИК С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КОНСТАНТАМИ

А. К. Кощеева

ФГБОУ ВПО "УдГУ", Ижевск; ГБОУ ВПО "МГППУ", Москва

kannakst@mail.ru

Суперинтуиционистской логикой называется произвольное подмножество L множества Fm, формул пропозиционального языка, включающее логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. Добавим к языку конечный набор логических констант $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$.

$\bar{\varphi}$-*Логикой* называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил модус поненс и подстановки. $\bar{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subset \mathcal{L}$ и для любой формулы $A \in Fm$ из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$. $\bar{\varphi}$-Логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П.С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\bar{\varphi}) \setminus \mathcal{L}$, $\bar{\varphi}$-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

Под проблемой *распознавания консервативности* будем понимать следующую массовую проблему: пусть даны L и $A(\bar{\varphi})$; будет ли $\bar{\varphi}$-логика $\mathcal{L} = L + A(\bar{\varphi})$ консервативным расширением логики L?

Для случая $L = Int$ эта проблема рассматривалась в работах [1], [2].

Для исследуемых предтабличных с.и.л., которых согласно работе Л. Л. Максимовой [3] ровно три: логика конечных цепей, или логика Даммета (LC, L1); логика корневых шкал глубины 2, или *вееров* (L2); логика корневых шкал глубины 3 с наибольшим элементом, или *даймондов* (L3), получены следующие результаты.

Утверждение. *Существует эффективный негативный тест для проблемы консервативности.*

Для разрешимости проблемы консервативности необходим эффективный позитивный тест. Здесь используется понятие полного по Новикову расширения.

Установлено, что в языке с несколькими дополнительными константами все полные по Новикову расширения указанных предтабличных с.и.л. разрешимы.

Предложение. *Алгоритмическая проблема распознавания консервативности полных по П.С. Новикову расширений предтабличных суперинтуиционистских L1, L2, L3 в языке с дополнительными константами разрешима.*

Литература

1. А.Д. Яшин. О новой константе в интуиционистской логике высказываний, Фунд. прикл. матем., 1999, т.5, № 3, с. 903–926.

2. A.D. Yashin. New intuitionistic logical constants: undecidability of the conservativeness problem, In: Lecture Notes in Computer Science, 1997, v.1258, p. 460–471.

3. Максимова Л. Л., *Предтабличные суперинтуиционистские логики*// Алгебра и логика. –1972. – Т. 11. – № 5. –С. 558–570.

SOME PROPERTIES OF FOX'S DERIVATIONS FOR LIE ALGEBRAS

A. F. Krasnikov
Omsk State University, Omsk
phomsk@mail.ru

Let F be a free sum of Lie algebras A_i $(i \in I)$ and a free Lie algebra G with basis $\{g_j | j \in J\}$; $U(F)$ the universal enveloping algebra of F; u an element of $U(F)$. Then we can find unique elements $D_k(u) \in U(F)$ such that

$$u = \sum_{i \in I} D_i(u) + \sum_{j \in J} g_j D_j(u),$$

where $D_i(u) \in A_i U(F)$, $i \in I$. We call the elements $D_k(u)$ $(k \in I \cup J)$ the Fox derivatives of u. If M is an ideal in F then we denote by M_U the ideal in $U(F)$ which is generated by M. One of the results of [2] may be stated as follows:
Let $F = (\sum\limits_{i \in I}^{*} A_i) * G$ be a free sum of Lie algebras A_i $(i \in I)$ and a free Lie algebra G with basis $\{g_j | j \in J\}$ and its ideal N has trivial intersection with each summand A_i; v an element of F. Then

$$D_k(v) \equiv 0 \mod N_U, \ k \in I \cup J,$$

if and only if $v \in [N, N]$.
Further theorem extends this result.
Theorem 1. *Let $F = (\sum\limits_{i \in I}^{*} A_i) * G$ be a free sum of Lie algebras A_i $(i \in I)$ and a free Lie algebra G with basis $\{g_j | j \in J\}$ and its ideal N has trivial intersection with each summand A_i; K a subset of $I \cup J$, F_K the subalgebra of F, generated by $\{g_j | j \in K \cap J\}$ and $\{A_i | i \in K \cap I\}$; v an element of F. Then*

$$D_k(v) \equiv 0 \mod N_U, \ k \in (I \cup J) \backslash K,$$

if and only if there are an elements v_0 of F_K and v_1 of $id_F(F_K \cap N)$ such that $v \equiv \equiv v_0 + v_1 \mod [N, N]$.
This is used to extend Shirshov's theorem on freedom [1] as follows:
Theorem 2. *Suppose $F = (\sum\limits_{i \in I}^{*} A_i) * G$ is a free sum of Lie algebras A_i $(i \in I)$ and a free Lie algebra G with basis $\{g_j | j \in J\}$; r a nonzero element of F, $R = id_F(r)$ and R has trivial intersection with each summand A_i. Let s be an element of $I \cup \cup J$, $K = (I \cup J) \setminus \{s\}$, F_K the subalgebra of F, generated by $\{g_j | j \in K \cap J\}$ and $\{A_i | i \in K \cap I\}$. Then $F_K \cap R = 0$ if and only if $D_s(r) \not\equiv 0 \mod R_U$.*

References

1. Shirshov A. I., *Some algorithmic problems for Lie algebras* // Sibirsk. Mat. Ž. – 1962. – V. 3. – No. 2. – P. 292–296.

2. Shmel'kin A. L., Syrtsov A. V., *On embeddings of some quotient algebras of free sums of Lie algebras* // Fundam. Prikl. Mat. – 2004. – V. 10. – No. 4. – P. 235–241.

SOME PROPERTIES OF FOX'S DERIVATIONS FOR GROUPS

A. F. Krasnikov
Omsk State University, Omsk
phomsk@mail.ru

a free product of groups A_i $(i \in I)$ and a free group G with basis $\{g_j | j \in J\}$ and its normal subgroup N has trivial intersection with each factor A_i. By a derivation in a group ring $\mathbf{Z}(F)$ will be meant any mapping ∂ of $\mathbf{Z}(F)$ into itself which for any $u,\ v \in \mathbf{Z}(F)$ satisfies $\partial(u+v) = \partial(u) + \partial(v)$, $\partial(uv) = \partial(u)v + \varepsilon(u)\partial(v)$, where $\varepsilon:\ \mathbf{Z}(F) \to \mathbf{Z}$ is the natural augmentation.
We denote by D_k $(k \in I \cup J)$ the Fox derivations of the group ring $\mathbf{Z}(F)$. They are uniquely defined by the conditions
$D_j(g_j) = 1,\ D_k(g_j) = 0,\ k \neq j;$ if $a_i \in A_i$
then $D_i(a_i) = a_i - 1,\ D_k(a_i) = 0,\ k \neq i.$

One of the results of [2] may be stated as follows:
Let $F = (\underset{i \in I}{*} A_i) * G$ be a free product of groups A_i $(i \in I)$ and a free group G with basis $\{g_j | j \in J\}$ and its normal subgroup N has trivial intersection with each factor A_i; v an element of F. Then

$$D_k(v) \equiv\ 0 \mod N,\ k \in I \cup J,$$

if and only if $v \in [N, N]$.
Further theorem extends this result.
Theorem. *Let $F = (\underset{i \in I}{*} A_i) * G$ be a free product of groups A_i $(i \in I)$ and a free group G with basis $\{g_j | j \in J\}$ and its normal subgroup N has trivial intersection with each factor A_i; K a subset of $I \cup J$, F_K the subgroup of F, generated by $\{g_j | j \in K \cap J\}$ and $\{A_i | i \in K \cap I\}$; v an element of F. Then*

$$D_k(v) \equiv\ 0 \mod N,\ k \in (I \cup J) \backslash K,$$

if and only if there are an elements v_0 of F_K and v_1 of $(F_K \cap N)^F$ such that $v \equiv v_0 v_1 \mod [N, N]$.
Now the Freiheitssatz due to Magnus [1] may be stated as follows:
Let F be a free group with basis $\{g_j | j \in J\}$; s an element of J, $K = J \backslash \{s\}$, F_K the subgroup of F, generated by $\{g_j | j \in K\}$; r an element of F, $r \neq 1$, R the normal closure of r in F. Then the following conditions are equivalent:

- $F_K \cap R = 1$,
- *r is not conjugate to any element of F_K,*
- $D_s(r) \not\equiv 0 \mod R$.

References

1. Magnus W., *Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz)* // J. Reine Angew. Math. – 1930. – V. 1930. – No. 163. – P. 141–165.

2. Romanovskii N. S., *Shmel'kin embeddings for abstract and profinite groups* // Algebra i Logika. – 1999. – V. 38. – No. 5. – P. 598–612.

ПОДГРУППА АВТОТОПИЗМОВ ПОЛУПОЛЕВОЙ ПЛОСКОСТИ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА, ИЗОМОРФНАЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЕ A_4

О. В. Кравцова
Сибирский федеральный университет, Красноярск
ol71@bk.ru

Хорошо известна гипотеза [1]: *полная группа автоморфизмов всякой конечной полуполевой недезарговой плоскости разрешима.* К настоящему моменту эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей. В силу теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости любой группы нечетного порядка для подтверждения гипотезы достаточно рассматривать только полуполевые плоскости, допускающие автоморфизмы порядка 2. В соответствии с классическим результатом [1], инволюции в группе автоморфизмов всякой проективной плоскости являются либо перспективностями, либо бэровскими коллинеациями.

В 90-х годах опубликован ряд работ ([2] и другие), посвященных построению и исследованию полуполевых плоскостей ранга 2, допускающих бэровскую инволюцию. Построения использовали векторное пространство размерности 4 и специальное семейство линейных преобразований – регулярное множество, представленное 2×2-матрицами над полем порядка p^n. В этом случае функции, задающие регулярное множество плоскости, есть многочлены степени $\leqslant p^{n-1}$.

Автор рассматривает полуполевую плоскость, допускающую бэровскую инволюцию, с использованием линейных пространств произвольной четной размерности над полем простого порядка, следствием чего является переход к линейным функциям. Построено [3] матричное представление бэровской инволюции и регулярного множества полуполевой плоскости нечетного порядка p^{2n} ($p > 2$ – простое).

Доказано [4], что полуполевая плоскость нечетного порядка p^{2n} с левым ядром порядка p^n не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной знакопеременной группе A_4. Для порядка левого ядра менее p^n построено матричное представление регулярного множества в $GL_n(p) \cup \{0\}$ и линейных автотопизмов, образующих группу A_4.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00968.

Литература

1. Hughes D. R., Piper F. C., *Projective planes.* – Springer–Verlag New–York Inc., 1973. – 324 с.

2. Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G., *A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2* // Geom. Dedicata. – 1989. – V. 29. – P. 7–43.

3. Кравцова О. В., *Полуполевые плоскости четного порядка, допускающие бэровскую инволюцию* // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2013. – Т. 6. – № 2. – с. 26–37.

4. Кравцова О. В., Прамзина В. О., *О подгруппе полуполевой плоскости, изоморфной A_4* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2011. – Т. 4. – № 4. – с. 498–504.

TROPICAL OPTIMIZATION PROBLEMS

N. Krivulin
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg
nkk@math.spbu.ru

We consider optimization problems that are formulated and solved in the tropical (idempotent) algebra setting. The problems are to minimize or maximize functions defined on vectors of a finite-dimensional semimodule over an idempotent semifield, and may involve constraints in the form of linear vector equations and inequalities. The objective function can be either a linear function or a nonlinear function calculated by means of multiplicative conjugate vector transposition.

We give an overview of known tropical optimization problems and solution methods. The overview starts with problems with linear objective functions, which present idempotent analogues of the usual linear programming problems. Then, we consider problems with nonlinear objective functions, including Chebyshev and Chebyshev-like approximation problems, problems with minimization and maximization of span seminorm, tropical "linear-fractional" programming problems, and problems with the evaluation of spectral radius. Some of these problems can be completely solved, and the solution is found in an explicit vector form. The existing solutions given for other problems are obtained in the form of iterative algorithms that produce a particular solution if any or indicate that there is no solution.

Furthermore, we present recent results on the solution of new optimization problems that extend known problems by introducing more general objective functions and taking into account additional linear constraints. To solve the problems, several approaches are proposed that offer direct explicit solutions in a compact vector form suitable for further analysis and applications. For many problems, the results obtained are complete solutions.

The solution of the some problems without constraints involves the evaluation of sharp lower or upper bounds for the objective function and the solution of an equation to find all vectors that yield the bound. To find solutions to the problems with linear equation and inequality constraints, we first obtain a general solution to the equation or inequality, and then substitute it into the objective function to get an unconstrained problem with known solution.

To solve other problems, we introduce an auxiliary variable, which indicates the minimum value of the objective function. The problem is then reduced to the solving of a linear inequality with a parameterized matrix, where the above variable plays the role of parameter. We exploit the existence condition for solutions of the inequality to evaluate the parameter, and then take the general solution of the inequality as the solution to the initial optimization problem.

Applications of the results to solve real-world problems in job scheduling, location analysis, decision making and other fields are also discussed.

СВОЙСТВА СЧЕТНО-КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУР

Б. Ш. Кулпешов
Международный университет информационных технологий, Алматы
b.kulpeshov@iitu.kz

Циклический порядок описывается тернарным отношением K, которое удовлетворяет следующим условиям:

(co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x,y,z) \rightarrow K(y,z,x))$;

(co2) $\forall x \forall y \forall z(K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \leftrightarrow x=y \vee y=z \vee z=x)$;
(co3) $\forall x \forall y \forall z(K(x,y,z) \to \forall t[K(x,y,t) \vee K(t,y,z)])$;
(co4) $\forall x \forall y \forall z(K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$.

Циклически упорядоченная структура $M = \langle M, =, K^3, \ldots \rangle$ называется *слабо циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств.

В работах [1]– [3] были исследованы счетно-категоричные слабо циклически минимальные структуры, являющиеся 1-транзитивными. В настоящем докладе мы исследуем поведение 2-формул в счетно-категоричных слабо циклически минимальных структурах, не являющихся 1-транзитивными.

Пусть $p \in S_1(\emptyset)$ и $F(x,y)$ — $\emptyset$-определимая формула такая, что для каждого $b \in p(M)$ $F(M,b) \subset p(M)$ и $F(M,b)$ — выпуклое бесконечное кобесконечное множество. Пусть $F^l(y)$ — формула, говорящая, что y является левой концевой точкой множества $F(M,y)$. Мы говорим, что $F(x,y)$ является *p-стабильной выпуклой вправо*, если для любого $b \in p(M)$

$$M \models \forall x[F(x,b) \to F^l(b) \wedge \forall z(K(b,z,x) \to F(z,b))]$$

Будем говорить, что p-стабильная выпуклая вправо формула $F(x,y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in (M)$ таких, что $F(\beta,\alpha)$, имеет место следующее: $M \models \forall x(K(\beta,x,\alpha) \wedge x \neq \alpha \to [F(x,\alpha \leftrightarrow F(x,\beta)])$.

Теорема. *Пусть M — счетно-категоричная слабо циклически минимальная структура, не являющаяся 1-транзитивной, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо формула является эквивалентность-генерирующей.*

Следствие. *Пусть M — счетно-категоричная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1, не являющаяся 1-транзитивной, $p \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраический. Тогда не существует p-стабильной выпуклой вправо формулы.*

Литература

1. B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson, *Minimality conditions on circularly ordered structures* // Mathematical Logic Quarterly. –2005. –vol. 51. –pp. 377–399.

2. B.Sh. Kulpeshov, *On $\aleph_0$–categorical weakly circularly minimal structures* // Mathematical Logic Quarterly. –2006. –vol. 52. –pp. 555–574.

3. Б.Ш. Кулпешов, *Определимые функции в $\aleph_0$–категоричных слабо циклически минимальных структурах* // Сибирский математический журнал. –2009. –Т. 50. –№ 2. –С. 356–379.

ON FINITE RINGS AT WHICH ZERO-DIVISOR GRAPHS SATISFY THE DIRAC'S CONDITION

A. S. Kuzmina, Yu. N. Maltsev

Altai State Pedagogical Academy, Barnaul

akuzmina1@yandex.ru, maltsevyn@gmail.com

The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is the graph whose vertices are all nonzero zero-divisors (one-sided and two-sided) of R, and two distinct vertices x and y are joined by an edge iff either $xy = 0$ or $yx = 0$.

In the present paper, we give full description of finite rings of order p^n such that their zero-divisor graphs satisfy the Dirac's condition (p is a prime number), i.e. degree of each vertex is more or equal to a half of order of the graph.

Firstly, we fix some notations. Let R be a ring. For any $a \in R$ we will denote

$$l(a) = \{x \in R; xa = 0\}, r(a) = \{x \in R; ax = 0\}.$$

We denote the Jacobson radical of R by $J(R)$. If R is a direct sum of two non-zero ideals I, J of R, then we write $R = I \oplus J$. We denote order of R by $|R|$.

A finite ring R with identity is called *local*, if the factor-ring $R/J(R)$ is a field. Finally, $GF(q)$ is a finite field with q elements.

The main result of the work is the next theorem.

Theorem. *Let R be a finite ring of order p^n, where p is prime number and $n \geqslant 1$. Then $\Gamma(R)$ satisfies the Dirac's condition iff one of the following conditions holds:*

A. $R^2 = (0)$, $|R| \geqslant 3$;

B. $|R| = 3^n$, $n \geqslant 3$; *moreover, for any element* $a \in R$ *either* $aR = (0)$, *or* $Ra = (0)$, *or* $|l(a)| = |r(a)| = 3^{n-1}$, $l(a) \neq r(a)$;

C. $|R| = 2^n$, $n \geqslant 3$; *moreover, for any element* $a \in R$ *either* $aR = (0)$, *or* $Ra = (0)$, *or* $|r(a)| = 2^{n-1}$, $l(a) \not\subset r(a)$, *or* $|l(a)| = 2^{n-1}$, $r(a) \not\subset l(a)$;

D. $R \cong GF(q) \oplus GF(q)$, $q \geqslant 2$;

E. R *is a local ring and* $\Gamma(J(R))$ *satisfies the Dirac's condition (i.e.* $J(R)$ *satisfies one of the conditions (1)–(3) of this theorem);*

F. $R \cong e_1Fe_1 \oplus e_2Fe_2 \dotplus e_1Fe_2$, *where* e_1, e_2 *are orthogonal idempotents,* $1 = e_1 + e_2$ *and* F *is a finite field;*

G. $R \cong e_1Fe_1 \oplus e_2Fe_2 \dotplus e_2Fe_1$, *where* e_1, e_2 *are orthogonal idempotents,* $1 = e_1 + e_2$ *and* F *is a finite field.*

The work is supported by RFFI (grant 12-01-00329) and a grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project No. 2014/418 for the implementation of State order in the research field (fundamental component).

VAUGHAN-LEE ALGEBRA $V8$ AS A FORM OF LIE ALGEBRA OF THE TYPE A_2

M. I. Kuznetsov, A. A. Shmelev
Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod
kuznets-1349@yandex.ru

In [1] M. Vaughan-Lee using computer calculations obtained the classification of simple Lie algebras over $\mathbb{F}_2$ of dimension less then 10. It contains 8-dimensional Lie algebra $V8$ realized as 8×8-matrices with a special basis $\{X_1, \dots, X_8\}$. This algebra was not identified Lie algebras proved that $V8$ is a form of classical Lie algebra A_2. Here we announce an elementary proof of the fact and give an isomorphism of $L\otimes_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_4$ and A_2, $L = V8$ ([2]) . Namely, by direct calculations in the basis $\{X_1, \dots, X_8\}$ it may be shown that $L\otimes_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_{64}$ is isomorphic to A_2. In such a case it follows from the theory of forms for A_2 that $L\otimes_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_4$ is isomorphic to A_2. The following map is an isomorphism

$$\varphi(h_1) = X_1 + X_5 + X_6,\ \varphi(h_2) = t^{-1}X_1 + X_3 + X_4 + X_7,$$

$$\varphi(e_{\alpha_1}) = X_1 + X_3 + X_4 + X_7,\ \varphi(e_{-\alpha_1}) = X_2 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8,$$
$$\varphi(e_{\alpha_2}) = X_1 + t^{-1}X_2 + tX_3 + X_4 + X_5 + t^{-1}X_6 + t^{-1}X_7 + X_8,$$
$$\varphi(e_{-\alpha_2}) = t^{-1}X_1 + t^{-1}X_2 + t^{-1}X_3 + tX_4 + X_5 + t^{-1}X_6 + X_8,$$
$$\varphi(e_{\alpha_1+\alpha_2}) = tX_1 + tX_2 + tX_3 + t^{-1}X_4 + X_5 + tX_6 + X_8,$$
$$\varphi(e_{-\alpha_1-\alpha_2}) = X_1 + tX_2 + t^{-1}X_3 + X_4 + X_5 + tX_6 + tX_7 + X_8,$$
$$t \in \mathbb{F}_4,\ t^2 + t + 1 = 0.$$

Note that we use matrices X_i transposed to those given in [1].

References

1. Vaughan-Lee M. *Simple Lie algebras of low dimension over $GF(2)$* // London Math. Soc. J. Comput. Math. – 2006. – V. 9 – P. 174-192.

2. Kuznetsov M. I., Shmelev A. A. *On Vaughan-Lee algebra $V8$* // Vestnik of Nizhny Novgorod State University. – 2014. –No. 2 (Russian) (to appear).

О ГРУППАХ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ФИЗИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ РАНГА (N+1,2)

В. А. Кыров
Горно-Алтайский госуниверситет, Горно-Алтайск
KyrovVA@yandex.ru

Рассмотрим гладкое многообразие B, $\dim B = s$, а также гладкое отображение $f : B\times\Omega_{B^n} \to B$, причем $\Omega_{B^n} \subset B^n$ — открытое и плотное подмногообразие. Построим гладкое отображение $F : B^n \times \Omega_{B^n} \to B^n$:

$$F(i^1, \dots, i^n; \alpha^1, \dots, \alpha^n) = (f(i^1, \alpha^1, \dots, \alpha^n), \dots, f(i^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)).$$

Пусть выполняются аксиомы [1]:

Б1. $\forall\langle i^1,\ldots,i^n\rangle,\langle b^1,\ldots,b^n\rangle\in\Omega_{B^n}$, $(\exists!)$ $\langle\alpha^1,\ldots,\alpha^n\rangle\in\Omega_{B^n}$ такая, что

$$F(i^1,\ldots,i^n;\alpha^1,\ldots,\alpha^n)=\langle b^1,\ldots,b^n\rangle.$$

Б2. $\forall\langle\alpha^1,\ldots,\alpha^n\rangle\in\Omega_{B^n}$ и $\forall b\in B$, $(\exists!)$ $i^1\in B$:

$$f(i^1,\alpha^1,\ldots,\alpha^n)=b.$$

Б3. $\forall\langle i^0,i^1,\ldots,i^n\rangle\in B\times\Omega_{B^n}$ и $\forall\alpha_0=\langle\alpha_0^1,\ldots,\alpha_0^n\rangle,\alpha_1=\langle\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^n\rangle\in B$ существует функциональная связь:

$$f_{00}=g(f_{01},f_{10},\ldots,f_{n0},f_{11},\ldots,f_{n1}),$$

где, например, $f_{00}=f(i^0;\alpha_0)$.

Определение. [2] Отображение $f:B\times\Omega_{B^n}\to B$, удовлетворяющее аксиомам Б1 – Б3, задает на многообразиях B и Ω_{B^n} *физическую структуру ранга* $(n+1,2)$.

Теорема 1. *Многообразие Ω_{B^n} является группой Ли с бинарной операцией $F_{\Omega_{B^n}}:\Omega_{B^n}\times\Omega_{B^n}\to\Omega_{B^n}$. Многообразие B^n является частичной лупой с бинарной операцией $F:B^n\times\Omega_{B^n}\to B^n$. Ее будем обозначать $(B^n,\circ,e)$.*

Теорема 2. *Частичная лупа $(B^n,\circ,e)$ является группой Ли преобразований с почти эффективным и почти просто транзитивным действием на многообразии B^n группы Ли $(\Omega_{B^n},\circ,e)$.*

Терминология в этих утверждениях взята по книгам [3, 4].

Литература

1. Симонов А. А., *Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур// Приложение к книге Кулакова Ю. И.*Теория физических структур, – М.: ООО "Компания Юниверс Контракт 2004. – С. 675–705.

2. Кыров В. А., *Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства R^s //* Изв. вузов. Матем.. – 2009. – № 7. – С. 10–21.

3. Понтрягин Л. С., *Непрерывные группы.* – М.: Наука, 1973. – 520 с.

4. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп.* – М.: Наука, 1967. – 223 с.

ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА ПРАКТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

И. В. Латкин, Л. П. Латкина

Восточно-Казахстанский Государственный Технический университета им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

lativan@yandex.ru, ludalat@yandex.ru

В [2] введены определения числовых и практических алгоритмов и начато их изучение (см. также [3]). При этом оказалось удобным задавать классы реализаций таких алгоритмов и их подклассы, в частности подкласс $\mathcal{A}lgpr(f)$ реализаций практических алгоритмов с ограниченной сложностью программ и вычислений, определением их индексных множеств. Последний подкласс достаточно широк — при подходящей ограничивающей функции f почти все применимые на практике алгоритмы обладают реализациями из этого класса. В то же время он вполне обозрим, так как его индексное множество принадлежит классу

Σ^0_2. При введении более жёстких ограничений получаются подклассы с Π^0_1- или вычислимо перечислимыми индексными множествами.

Подкласс $\mathcal{P}\mathcal{A}lgpr(f)$ (или $\mathcal{E}^{(k)}\mathcal{A}lgpr(f)$) реализаций алгоритмов с полиномиальной (или экспоненциальной уровня k) сложностью вычислений, получаются из класса $\mathcal{A}lgpr(f)$ добавлением к ограничению на величину результата алгоритма в определении 3 из [2] полиномиального (или экспоненциального уровня k) ограничения на время его вычисления. Эти подклассы также имеют индексные множества из Σ^0_2. Из определения имеем, что для всех $n\in\omega$ верно

$$\mathcal{P}\mathcal{A}lgpr(f)=\mathcal{E}^{(0)}\mathcal{A}lgpr(f)\subseteq\mathcal{E}^{(1)}\mathcal{A}lgpr(f)\subseteq\ldots\subseteq\mathcal{E}^{(n+1)}\mathcal{A}lgpr(f).$$

В связи с этим фактом, иерархия Ершова Σ^m_n разностей вычислимо перечислимых множеств, изученная в [1], естественным образом продолжена в [2] до иерархии $\Sigma^m_{2,n}$ разностей Σ^0_2-множеств (считаем, что $\Sigma^m_{1,n}$ — это Σ^m_n): множество $M\in\Sigma^m_{2,n}$ при $n>0$ в том и только том случае, когда существует такая упорядоченная n-ка $\langle R_0,R_1,\ldots,R_{n-1}\rangle$ Σ^0_2-множеств $R_0\supseteq R_1\supseteq\ldots\supseteq R_{n-1}$, что $M=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant k}(R_{2i}\setminus R_{2i+1})$, где k — целая часть от деления $n-1$ на 2, и $R_n=\emptyset$, если n — нечётное. Положим $\Sigma^m_{2,0}=\Pi^m_{2,0}=\Delta^m_{2,0}$, и $M\in\Pi^m_{2,n}\Leftrightarrow\omega\setminus M\in\Sigma^m_{2,n}$.

Теорема. *Имеется такая вычислимая функция f, что при всяком $n>0$ множество $M_n=\bigcup_{0\leqslant i\leqslant k}(\mathcal{E}^{(n-1-2i)}\mathcal{A}lg(f)\setminus\mathcal{E}^{(n-2i-2)}\mathcal{A}lgpr(f))$ (где k — целая часть от деления $n-1$ на 2, и $\mathcal{E}^{(-1)}\mathcal{A}lgpr(f)=\emptyset$, если n — нечётное) — m-универсально (m-полно) в классе $\Sigma^m_{2,n}$. Более того, последовательность $\langle\mathcal{E}^{(n-1)}\mathcal{A}lgpr(f)$, $\mathcal{E}^{(n-2)}\mathcal{A}lgpr(f),\ldots,\mathcal{E}^{(0)}\mathcal{A}lgpr(f)\rangle$ — m-универсальна (m-полна) в классе последовательностей $\langle C_0,C_1,\ldots,C_{n-1}\rangle$ Σ^0_2-множеств таких, что $C_0\supseteq C_1\supseteq\ldots\supseteq C_{n-1}$.*

Литература

1. Ершов Ю. Л., *Теория нумераций.* – М.: Наука, 1977. – 416 с.

2. Латкин И. В., Латкина Л. П., *Разности Σ^0_2-множеств и практические алгоритмы* // Матер. II междунар. научно-практ. конф. «Тенденции и перспективы развития современного научного знания». – М., Инстит. стратег. исследований., 2012. – С. 44–56.

3. Латкин И. В., *Геделевские номера — мера сложности программ* // Настоящий сборник.

ГЕДЕЛЕВСКИЕ НОМЕРА — МЕРА СЛОЖНОСТИ ПРОГРАММ

И. В. Латкин

Восточно-Казахстанский Государственный Технический университета им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск, Казахстан

lativan@yandex.ru

В теории вычислимости алгоритмом часто называют реализацию на машине Тьюринга какой-то вычислимой функции, а номером алгоритма — номер этой машины, т.е. алгоритм понимается как n-местная функция. На практике алгоритм обычно трактуется как процедура общего характера, производящая вычисления при всех n и любых данных $x_1,\ldots,x_{\alpha(n)}$ (не обязательно $\alpha(n)=n$), т.е. как функция из $\bigcup_{t\in\omega}\omega^t$ в ω. В [1] для согласования этих подходов предложено считать, что *реализация числового алгоритма* $\mathcal{A}$, с номером $t=c(l,r)$ и работающего с наборами длины $\varphi_r(n)=\alpha(n)$, это — функция φ_l такая, что для всякого n число

$m = \varphi_l(n)$ — гёделевский номер $\alpha(n)$-местной вычислимой функции, которая при любых $x_1, \dots, x_{\alpha(n)}$ выдаёт результат применения алгоритма $\mathcal{A}$ к $x_1, \dots, x_{\alpha(n)}$.

Этот подход позволяет найти средство для косвенной оценки *комплексной меры сложности* для подкласса числовых алгоритмов — так называемых *практических алгоритмов* [1], когда вводятся ограничения на величину $\varphi_m(x_1, \dots, x_{\alpha(n)})$ и время её получения, т.е. число элементарных шагов машины Тьюринга P_m.

Проблема в том, что простейшая мера сложности реализации алгоритма — время работы — в чистом виде далеко не всегда адекватно отображает истинную сложность алгоритма, как показывают несложные примеры [1]. Истинная мера сложности должна быть *комплексной*, т.е. учитывать и время работы машины, и сложность её программы. Известно несколько подходов к оценке сложности программ (сложности описания алгоритма): это может быть число внутренних состояний или число внешних символов, или число команд. Как правило, гёделевская нумерация машин Тьюринга строится с учётом всех этих параметров и монотонно зависит от них, поэтому сам номер является неплохой оценкой сложности программы, в случае подобной монотонной гёделевской нумерации.

Для практических алгоритмов имеется возможность делать оценки их истинной сложности, а не просто времени работы, довольно просто: можно также оценивать величины номеров m или число шагов необходимых для их вычисления.

Делается упрощение определений из [1], в частности, теперь числовые и практические алгоритмы рассматриваются как вычислимые функции двух аргументов: наборы $x_1, \dots, x_{\alpha(n)}$ сливаются в один аргумент-цепочку, а вторым аргументом является параметр n, который играет роль *структурной размерности*. Все доказанные в [1] свойства при этом сохраняются и получаются новые.

Литература

1. Латкин И. В., Латкина Л. П., *Разности Σ_2^0-множеств и практические алгоритмы* // Матер. II междунар. научно-практ. конф. «Тенденции и перспективы развития современного научного знания». – М., Инстит. стратег. исследований., 2012. – С. 44–56.

ABOUT BINARY BEHAVIORS OF EUCLIDEAN PLANE

A. G. Lozhkin

M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Izhevsk

lag@istu.ru

Hilbert formulating axioms for Euclidean plane $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ suggested that must be considered construction of linguistic rules. In the present study [1] hypothesis extended to the plane itself, which is proposed as text. Levels of study of the text are its internal relations. As basic postulates were used: Dieudonne symmetries; table automorphisms and transfer symmetry H. Weyl; definition of symmetry M. Born, binary automorphisms F. Bachman.

The theory is based on the permutation symmetry, which has non-algebraic properties. For further constructions used automorphic definition A. Frenkel $a \in A$ for ZF-set theory, the Cartesian product of the relational algebra and semiotic analysis by A.P. Ershov. Next, using the method of inference built table symmetries Dieudonne. Table joined the internal relations of set theory and universal algebra, which alternate with each other. Such a relationship between automorphisms called symmetry of knowledge. Table symmetries is: the existence of the set (Zermelo); the existence of relations (Codd); membership element of set (Frankel); the universal relation (implication $f : \Omega \to \Omega'$); saving cardinality (Lagrange); saving power relations (Klein); linguistic order (Descartes); mathematical order (Cantor); permutation; mirror. Symmetry of knowledge as well be called Hilbert symmetry, since it was he who first made the connection. Dedekind axiom called Klein automorphism, as the inverse element axiom determined by mirror symmetry.

The rule interactions automorphisms any relationship mapping function, operation, operator, transformation is performed in the Euclidean plane so that perform symmetry with minor number with possible preservation of symmetries following her. Symmetries defining Erlangen program should be between implication and Lagrange symmetries. It was symmetry power conservation of cortege and symmetry of Euler formula ($e^{i\pi} = -1$) previously. Inductive method is easy to prove the sufficiency of the hierarchy in the table.

References

1. Lozhkin A. G., *Set-theoretical and informatics analyzes of methods of geometrical modeling in machine-building CAD* // Abstract of Doc. Deg. thesis. – Izhevsk: UdSU, 2013. – 48 p. (Rus)

О ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ ЗНАНИЯ И ВРЕМЕНИ LTK_R С ИНТРАНЗИТИВНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

А. Н. Лукьянчук

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

a.lukyanchuk@inbox.ru

В работе исследуется вопрос допустимости правил вывода линейной много-модальной логики знания и времени LTK_r с рефлексивным и интранзитивным отношением времени. Логика определяется семантически как множество формул, истинных на фреймах специального вида. Время рассматривается как линейная дискретная последовательность моментов. Каждый момент содержит в себе набор информационных узлов, связанных между собой кортежем модальных операций R_i, имитирующих знание агентов (подробнее со строением LTK_r-фреймов можно ознакомится в [1]).

Определим специальный много-модальный LTK_r-фрейм Крипке $\mathcal{F}_{SP}$, следующим образом:

(a) Рассмотрим LTK_r-фрейм

$$\mathcal{F}_P = \left\langle W_{\mathcal{F}_P}, R_T^P, R_\sim^P, R_1^P, \dots, R_k^P \right\rangle$$

такой, что $W_{\mathcal{F}_P}$ состоит только из одной точки @, то есть $W_{\mathcal{F}_P} := \{@\}$, и отношения R_T, $R_\sim$, $R_1, \dots, R_k$ являются отношениями эквивалентности.

(b) Пусть $\mathcal{F}_S = \left\langle W_{\mathcal{F}_S}, R_T^S, R_\sim^S, R_1^S, \dots, R_k^S \right\rangle$ – конечный LTK_r-фрейм. Где $W_{\mathcal{F}_S} = \bigcup_{i=0}^d C_i$ и $C_0 R_T C_1 R_T \dots R_T C_d$.

(c) Пусть $\mathcal{F}_i = \langle W_{\mathcal{F}_i}, R_T^i, R_\sim^i, R_1^i, \dots, R_k^i \rangle$ $(0 \leqslant i \leqslant d)$ - LTK_r-фреймы конечной длины, состоящие только из одноэлементных R_T^i-сгустков. То есть $W_{\mathcal{F}_i} = \{w_1^i, \dots$ $\dots, w_{m_i}^i\}$ и $w_1^i R_T w_2^i R_T \dots R_T w_{m_i}^i$.

SP-фрейм - это кортеж $\mathcal{F}_{SP} = \langle W_{SP}, R_T, R_\sim, R_1, \dots, R_k \rangle$, где

1) $W_{SP} = W_{\mathcal{F}_P} \cup W_{\mathcal{F}_S} \cup \bigcup_{i=0}^d W_{\mathcal{F}_i}$;

2) $R_T = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup_{i=0}^d R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \,|z \in C_d\} \cup \bigcup_{i=0}^d \{\left\langle w_{m_i}^i, z\right\rangle |w_{m_i}^i R_T$-максимальный элемент$\mathcal{F}_i, z \in C_i \subseteq \mathcal{F}_S\}$;

3) $R_{\sim} = R^P_{\sim} \cup R^S_{\sim} \cup \bigcup_{i=0}^{d} R^i_{\sim}$;

4) $R_j = R^P_j \cup R^S_j \cup \bigcup_{i=0}^{d} R^i_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

Теорема 1. *Правило r_{nf} не допустимо в логике LTK_r тогда и только тогда, когда существует конечный LTK_r-фрейм $\mathcal{F}_{SP}$, ограниченный размером r_{nf}, и означивание V переменных правила r_{nf} на $\mathcal{F}_{SP}$ такие, что:*

(1) $\mathcal{F}_{SP} \not\models_V Con(r_{nf})$;

(2) $\mathcal{F}_{SP} \models_V \vee Pr(r_{nf})$;

(3) $(\mathcal{F}_{SP}, w^i_1) \models_V \theta_a \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, w^i_2) \models_V \theta_a \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a$ для некоторого $\theta_a \in \vee Pr(r_{nf})$, где $(0 \leqslant i \leqslant d)$.

Литература

1. A. Lukyanchuk, *Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge* // Journal of Siberian Federal University. – 2013 . – № 6(2). – C. 220–226.

О ПОИСКЕ ОПРОВЕРЖЕНИЯ В ИСЧИСЛЕНИЯХ К-ДИЗЪЮНКТОВ

А. В. Ляледкий

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

lav@unicyb.kiev.ua

Для поиска опровержения в классической логике 1-го порядка предлагается резолюционная техника, базирующаяся на обобщении понятия дизъюнкта (clause) из [1] (см. также [2]), названного конъюнктивным дизъюнктом (к-дизънктом) и имеющего вид $(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,m_1}) \vee \ldots \vee (L_{n,1} \wedge \ldots \wedge L_{n,m_n})$, где $L_{1,1}, \ldots, L_{n,m_n}$ — атомарные формул или их отрицания. $\Box$ обозначает к-дизъюнкт, не содержащий ни одного конъюнкта.

К-дизъюнкты допускают два различных правила вывода произвольной арности: CR, являющееся обобщением правила латентной клаш-резолюции из [3], и IR, служащее резолюционным обобщением правила **B** обратного метода из [4].

Теорема 1. *Исходное множество S к-дизъюнтов невыполнимо в классической логике 1-го порядка без равенства тогда и только тогда, когда в исчислении к-дизъюнктов с правилом CR (IR) из S выводим $\Box$.*

Для случая логики с равенством в рассматриваемые исчисления можно ввести аналог PP правила парамодуляции, предложенного в [5] (см. также [2]).

Теорема 2. *Исходное множество S к-дизъюнтов, содержащих, быть может, знак равенства, невыполнимо в классической логике 1-го порядка с равенством тогда и только тогда, когда в исчислении к-дизъюнктов с правилами CR и PP $(IR$ и $PP)$ без каких бы то ни было ограничений на поиск вывода и/или правила вывода из $S \cup \{x = x\}$ выводим $\Box$.*

Теоремы 1 и 2 имеют место, даже если ограничиться только бинарными применениями CR и IR. В случае логики с равенством, когда на процесс поиска вывода и/или на применения правил CR и PP $(IR$ и $PP)$ накладываются дополнительные или иные ограничения, может оказаться, что для полноты исчислений с вводимыми ограничениями в S нужно добавлять аксиомы функциональной рефлексивности (как, например, при требовании линейности поиска в смысле [2]).

Литература

1. Robinson J. A. *A machine-oriented logic based on the resolution principle* // Communications of the ACM. – 1965. – V. 5. – P. 23–41.

2. Lee Ch. and Chang R. Ch. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.* New York: Academic Press, 1973. – 331 p.

3. Robinson J. A. *An overview of mechanical theorem proving.* Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems. – 1970. – V. 28. – P. 2–20.

4. Маслов С. Ю. *Обратный метод установления выводимости в классическом исчислении предикатов* // ДАН СССР. – 1964. – Т. 159. – № 1. – С. 17–20.

5. Robinson G. and Wos L. *Paramodulation and theorem-proving in first-order theories with equality* // Machine Intelligence. – 1969. – V. 4. – P. 135–150.

$\{2,3\}$-GROUPS WITHOUT ELEMENTS OF ORDER 6

D. V. Lytkina, V. D. Mazurov
SibSUTIS, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk
daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru

I. N. Sanov in [1] proved that groups of period 12 without elements of order 6 are locally finite. The full description of groups was ontained by D. V. Lytkina in [2]. Later on V. D. Mazurov in [3] proved that groups of period 24 without elements of order 6 are locally finite. Next, the structure of a periodic group all of whose elements have orders dividing one of the numbers 4 or 9 was found by E. Jabara and Lytkina [4]. Recently Jabara, Lytkina and Mazurov proved that groups of period 72 without elements of order 6 are also locally finite [5].

Our goal is to generalize all listed results.

Let G be a group. We cal its subgroup H *forbidden* if H possesses the following properties*:*

(a) H is generated by an involution, i. e. an element of order 2, and an element of order 3, and is a $\{2,3\}$-group; (b) H contains no elements of order 6; (c) every maximal 2-subgroup of H is an infinite locally cyclic group.

Authors are not aware of examples of groups with forbidden subgroups.

Theorem. *Suppose that G is a $\{2,3\}$-group without elements of order 6 and forbidden subgroups. If for every two elements of G whose orders are at most 4, the order of their product is at most 9, then one of the following statements holds:*

(1) *$G = O_3(G)T$, where $O_3(G)$ is Abelian, and T is either a locally cyclic 2-group, or a quaternion group of order at most 16.*

(2) *$G = O_2(G)R$, where $O_2(G)$ is nilpotent of class at most 2, and R is a 3-group with the unique subgroup of order 3, acting freely on $O_2(G)$.*

(3) *$G = O_2(G)D$, where D contains a locally cyclic subgroup R of index 2, and $O_2(G)R$ satisfies* (2).

(4) *G is a 2-group or a 3-group.*

Here $O_p(G)$ for a prime p is the largest normal p-subgroup of a group G.

Note that there exist examples of groups that satisfy item (2) of the Theorem and are not locally cyclic .

References

1. Sanov I. N., *Solution of Burnside's problem for exponent 4 (in Russian)* // Leningrad State University Annals (Uchenye Zapiski) Math. Ser. –1940. – No. 55. – P. 166–170.

2. Lytkina D. V., *Structure of a group with elements of order at most 4* // Siberian math. journal. – 2007. – V. 48. – No. 2. – P. 283–287.

3. Mazurov V. D., *Groups of exponent 24* // Algebra and Logic. –2010. – V. 49. – No. 6. – P. 515–525.

4. Jabara E., Lytkina D. V., *On groups of period 36* // Siberian math. journal. – 2013. – V. 54. – No. 1. – P. 29–32.

5. Jabara E., Lytkina D. V., Mazurov V. D., *On groups of exponent 72* // to appear in J. Group Theory.

ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫЕ ФАКТОРНО ДЕЛИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С UA–КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

О. В. Любимцев
Нижегородский государственный архитектурно–строительный университет, г. Нижний Новгород
oleg_ lyubimcev@mail.ru

Кольцо K есть кольцо с однозначным сложением (UA–кольцо), если на его мультипликативной полугруппе $(K, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(K, \cdot, +)$ (см., например, [1]). Абелеву группу назовем End–UA–группой, если ее кольцо эндоморфизмов является UA–кольцом. Абелева группа A называется факторно делимой, если она не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F —периодическая делимая группа [2]. Факторно делимая группа является вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. В работе найдены End–UA–группы в классе вполне разложимых факторно делимых абелевых групп.

Пусть $A = A_1 \bigoplus A_2 \bigoplus ... \bigoplus A_n$ — фиксированное разложение вполне разложимой факторно делимой группы в прямую сумму групп ранга 1; $\chi(A_i) = (m_p^i)$ — множество кохарактеристик [3] данного разложения, $i = 1, 2, ..., n$. Обозначим $\Omega_p = \{m_p^i, i = 1, 2, ..., n\}$, $\Omega_p^t = \{m_p^i : 0 < m_p^i < \infty, i = 1, 2, ..., n\}$. Если $\Omega_p^t = \emptyset$ для всех $p \in P$, то группа A является End–UA–группой тогда и только тогда, когда она не содержит изолированных прямых слагаемых [4]. Такой же ответ получим, если периодическая часть $t(A) = t_2^e(A) \bigoplus t_3^e(A)$, где $t_2^e(A)$ и $t_3^e(A)$ — элементарные 2 и 3–группы. Далее полагаем, что $t(A) \neq t_2^e(A) \bigoplus t_3^e(A)$.

Множество простых чисел, для которых множество $\Omega_p^t \neq \emptyset$ обозначим через P^t. Для группы A_i положим $P_{A_i}^t = \{p \in P : 0 < m_p^i < \infty\}$, $P_{A_i}^\infty = \{p \in P : m_p^i = = \infty\}$.

Теорема *Пусть A — вполне разложимая факторно делимая группа. Тогда группа A является End–UA–группой в точности тогда, когда выполнены условия:*

1) для любого $p \in P^t$ множество Ω_p^t содержит по крайней мере два максимальных элемента или множество Ω_p содержит хотя бы один символ ∞;

2) всякое изолированное прямое слагаемое A_i (если такие имеются) не расщепляется или найдется прямое слагаемое A_j, такое что множество $P_{A_i}^\infty \cap P_{A_j}^t$ бесконечно.

Литература

1. Михалев А. В., *Мультипликативная классификация ассоциативных колец* // Математический сборник. – 1988. – Т. 135. – № 2. – С. 210–224.

2. Fomin A. A., Wickless W., *Quotient divisible abelian groups* // Proc. Amer. Math. Soc. –1998. – V. 126. – №1. – P. 45–52.

3. Давыдова О. И., *Факторно делимые группы ранга 1* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13. – № 3. – С. 25–33.

4. Любимцев О. В., *Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA–кольцами эндоморфизмов* // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 1419–1422.

О РАЗДЕЛЕНИИ КЛОНОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ГИПЕРТОЖДЕСТВАМИ

И. А. Мальцев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск.
malcev@math.nsc.ru

Пусть $f_1^{n_1},\ldots,f_k^{n_k}$ — все функциональные символы и $x_1,\ldots,x_n$ — все предметные символы, входящие в термы T_1 и T_2, $g_1^{m_1},\ldots,g_s^{m_s}$ — все функциональные символы и $x_1,\ldots,x_r$ — все предметные символы, входящие в термы $Q_1,\ldots,Q_u$. Первое из выражений

$$\forall f_1^{n_1}\ldots\forall f_k^{n_k}\,\forall x_1\ldots\forall x_n\,(T_1=T_2),$$

$$\forall g_1^{m_1}\ldots\forall g_s^{m_s}\,\forall x_1\ldots\forall x_r\,(Q_1=Q_2\vee\ldots\vee Q_{u-1}=Q_u)$$

называется гипертождеством, второе — гиперформулой. Говорят, что гипертождество (гиперформула) разделяет два клона, если оно (она) истинно (истинна) на одном из них, но ложно (ложна) на другом.

Изучается проблема разделения клонов, образованных одноместными функциями и функциями, представимыми в виде $f(g_1(x_1)\oplus\ldots\oplus g_n(x_n))$, где $n\geqslant 1$, все функции определены на множестве $\{0,1,2\}$, их значения принадлежат множеству $\{0,1\}$, сложение ведется по модулю 2. Такие функции принадлежат классу функций, называемых квазилинейными. Назовем функцию указанного вида не креативной, если при подстановке в нее любой другой квазилинейной функции со значениями в множестве $\{0,1\}$ число существенных переменных не возрастает. Существует бесконечно много клонов, в которых все отличные от селекторов функции не креативны. Подробно эти клоны, образуемая ими решетка и функции, порождающие такие клоны, описаны в работах [1, 2].

Теорема. *Любые два клона, образованные не креативными квазилинейными функциями, определенными на множестве $\{0,1,2\}$, со значениями в множестве $\{0,1\}$, можно разделить либо гипертождеством, либо гиперформулой. Существуют пары клонов указанного вида, не разделимые гипертождествами с унарными функциональными переменными.*

Литература

1. Деметрович Я., Мальцев И. А. *О существенно минимальных TC-клонах на трехэлементном множестве* // MTA SZTAKI Kozl. – 1984. – № 32. – С. 115-151.

2. Деметрович Я., Мальцев И. А. *О строении клона Бурле на трехэлементном множестве* // Acta cybernetica. – 1989. – V. 9. – № 1. – P. 1–25.

НАСЛЕДУЕМОСТЬ СВОЙСТВА D_π НАДГРУППАМИ π-ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП

Н. Ч. Манзаева
НГУ, Новосибирск
manzaeva@mail.ru

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа G называется π-группой, если множество простых делителей её порядка лежит в π. Подгруппа H конечной группы G называется π-холловой, если H является π-группой и все простые делители её индекса не лежат в π. Следуя Ф.Холлу [1], будем говорить, что группа G обладает свойством D_π (или, короче, $G \in D_\pi$), если все её максимальные π-подгруппы сопряжены. Группу со свойством D_π будем также называть D_π-группой.

В «Коуровской тетради» [1] под номером 17.44(б) записана следующая

Проблема. *Всегда ли в D_π-группе надгруппа π-холловой подгруппы является D_π-группой?*

С помощью классификации конечных простых групп доказана следующая

Теорема. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — конечная группа, обладающая свойством D_π, H — π-холлова подгруппа группы G. Тогда любая подгруппа M группы G, содержащая H, является D_π-группой.*

Таким образом, получено положительное решение данной проблемы.

Литература

1. Hall P., *Theorems like Sylow's* // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. – 1956. – T. 6. – № 22. – C. 286–304.

2. Mazurov V. D., Khukhro E. I. (editors), *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory* // RAS Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk. – 2010. – T. 17.

ПРИМЕНЕНИЕ ПИРСОВСКИХ ЦЕПЕЙ ПОЛУКОЛЕЦ

Р. В. Марков
ВятГГУ, Киров
makovrv@yandex.ru

В работах автора [1, 2] вводится понятие пирсовской цепи полуколец — аналога пирсовской цепи колец [3], и доказываются некоторые свойства этой конструкции. Показано, в частности, что некоторые свойства полуколец могут "подниматься" (наследоваться) от неразложимых факторполуколец, mi-факторов (максимальных неразложимых факторполуколец) и пирсовских слоев к исходному полукольцу. Небходимые определениями, связанные с полукольцами и их пучковыми представлениями, можно найти в [4]; определениям хорновской формулы и её интерпретаций — в [5].

Мультипликативный идемпотент $e \in S$ называется *центральным дополняемым идемпотентом*, если: $(\forall x \in S)(ex = xe)$; $(\exists e^{\perp} \in S)(e + e^{\perp} = 1 \wedge ee^{\perp} = 0)$.

Идеал A полукольца S назовем *регулярным*, если он порожден некоторым множеством дополняемых идемпотентов. Конгруэнцию ϕ вида $a \ \phi \ b \ \Leftrightarrow \ ae^{\perp} = be^{\perp}$, где $a,\ b \in S$, $e^{\perp}$ — дополнение к центральному дополняемому идемпотенту e из некоторого максимального регулярного идеала A, назовем *конгруэнцией Пирса.*

Факторполукольцо S/ϕ называется *пирсовским слоем* полукольца S.

Сильной хорновской формулой назовем хорновскую формулу без конъюнктивно входящих отрицаний.

Главным результатом статьи [2] является теорема 1 о наследовании истинности строгих хорновских формул исходного полукольца его факторами. Продемонстрируем ее применение на примере pf-полуколец (псевдофробениусовых).

Полукольцо S с 1 называется *pf-полукольцом*, если для любых таких $x, y \in S$, что $xy = 0$, существуют такие $a, b \in S$, что $a + b = 1$, $xa = 0$ и $by = 0$.

Это определение записывается в виде формулы:

$$(\forall x, y \ \exists a, b) \ ((xy \neq 0 \vee a + b \neq 1) \vee (xa = 0 \wedge by = 0)), \tag{1}$$

равносильной строгой хорновской формуле.

Теорема. *Формула (1) удовлетворяет условиям теоремы 1, т. е. свойство псевдофробениусовости "переносится" от неразложимых факторполуколец, пирсовских слоев и $mi-$факторов к исходному полукольцу и обратно.*

Литература

1. Марков Р. В., *Пирсовские цепи полуколец* // Вестник Сыктывкарского университета. – 2013. – №16. – с. 88—103.

2. Марков Р. В., *Пирсовские цепи полуколец и хорновские формулы* // Чебышевский сборник. – 2013. – №14. – Вып.4. – с. 159—165.

3. Burgess W. D., Stephenson W. *An analogue of the Pearce sheaf for noncommutative rings* // Comm. Algebra. – 1978. – Vol. 6. – No/ 9. P. 863—886.

4. Чермных В. В., *Функциональные представления полуколец.* – Киров: Изд–во ВятГГУ, 2010.

5. Мальцев А. И., *Алгебраические системы.* – Москва: Наука, 1970. – 392 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ПИРСОВСКИХ ЦЕПЕЙ ПОЛУКОЛЕЦ

Л. М. Мартынов
Омский госудпрственный педагогический университет, г. Омск
l.m.martynov@yandex.ru

Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль там играют понятия полноты (делимости) и редуцированности. Оказалось, что к определениям этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Это дало возможность автору определить в [1] их аналоги для произвольных алгебр. Приведем определения обсуждаемых понятий применительно к полугруппам и напомним определения некоторых понятий теории полугрупп. Полугруппа называется *полной*, если у нее нет гомоморфизмов на неодноэлементные полугруппы из атомов решетки всех многообразий полугрупп. Если полугруппа не имеет неодноэлементных полных подполугрупп, то она называется *редуцированной*. Понятно, что одноэлементная полугруппа является одновременно полной и редуцированной. Будем говорить, что многообразие $\mathbf{X}$ полугрупп обладает *полным радикалом*, если на любой полугруппе S из $\mathbf{X}$ существует такая конгруенция ρ, что факторполугруппа S/ρ редуцирована, а все ρ–классы, являющиеся подполугруппами полугруппы S, являются полными. Говорят, что многообразие $\mathbf{X}$ полугрупп имеет *конечный индекс нильпотентности*, если ступени нильпотентности нильпотентных полугрупп из $\mathbf{X}$ ограничены в совокупности; в противном случае говорят, что многообразие $\mathbf{X}$ имеет *бесконечный индекс нильпотентности*. Полугруппы, удовлетворяющие тождеству $x_1x_2...x_k = 0$ $[x^k = 0]$ для некоторого $k > 0$, будем называть *k-нильпотентными полугруппами* [*k-нильполугруппами*]. Полугруппы с единственным идемпотентом называются *унипотентными*.

Основным результатом заметки является следующее утверждение.

Теорема. *Многообразие $\mathbf{X}$ коммутативных полугрупп обладает полным радикалом тогда и только тогда, когда, либо $\mathbf{X}$ — периодическое многообразие бесконечного индекса нильпотентности, состоящее из периодических унипотентных полугрупп, либо $\mathbf{X}$ — любое многообразие конечного индекса нильпотентности. В первом [втором] случае полугруппы из $\mathbf{X}$ являются k–нильрасширениями [полурешетками k–нильпотенных расширений] абелевых групп с тождеством $x^n = x$ для некоторых $k > 0$ и $n > 1$.*

Литература

1. Мартынов Л. М., *О понятиях примарности, полноты, редуцированности и чистоты для произвольных алгебр* // Универсальная алгебра и ее приложения: Труды междунар. семинара. – Волгоград: Перемена, 2000. – С. 179–190.

ON THE COINCIDENCE OF GRUENBERG–KEGEL GRAPHS OF A FINITE SIMPLE GROUP AND ITS PROPER SUBGROUP.

N. V. Maslova
IMM UB RAS, Ekaterinburg
butterson@mail.ru

Let G be a finite group. The *spectrum* of G is the set $\omega(G)$ of element orders of G. The subset of prime elements of $\omega(G)$ is denoted by $\pi(G)$. The spectrum $\omega(G)$ of a group G defines its *prime graph* (or *Gruenberg–Kegel graph*) $\Gamma(G)$ with the vertex set $\pi(G)$, in which any two different vertices r and s are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$.

In [1] all the pairs (G, H) where G is a finite simple group and $H < G$ with $\pi(G) = \pi(H)$ were described. We describe all the cases when the prime graphs of a finite simple group and of its proper subgroup coincide. We prove the following

Theorem. *Let G be a finite simple group and H be a proper subgroup of G. Then $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ if and only if one of the following conditions holds*:

(1) $G = A_n$ *and* $H \cong A_{n-1}$ *where* n *and* $n-4$ *are odd and are not prime*;

(2) $G = PSp_4(q)$ *and* $H \cong PSL_2(q^2).\langle t\rangle$ *where* q *is even and* t *is the field automorphism of order* 2 *of the group* $PSL_2(q^2)$;

(3) $G = PSp_8(2^w)$ *and* $H \cong SO_8^-(2^w)$;

(4) $G = P\Omega_8^+(q)$ *and* $H \cong P\Omega_7(q)$;

(5) $G = PSL_6(2)$ *and* H *is the stabilizer of a subspace of dimension* 1 *or* 5 *of the natural projective module of* G;

(6) $G = A_6$ *and* $H \cong A_5$;

(7) $G = A_{10}$ *and* $H \cong (S_7 \times S_3) \cap A_{10}$;

(8) $G = PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ *and* $H \in \{2^4 : A_5, S_6, S_5\}$;

(9) $G = PSp_6(2)$ *and* $H \cong S_8$;

(10) $G = PSU_4(3)$ *and* $H \cong A_7$;

(11) $G = G_2(3)$ *and* $H \cong PSL_2(13)$;

(12) $G = M_{11}$ *and* $H \cong PSL_2(11)$;

(13) $G \cong P\Omega_8^+(2)$ *and* $H \in \{2^6 : A_8, A_9, S_8\}$.

The item (1) *is obtained with using of extended binary Goldbach hypothesis.*

The research was supported by RFBR (project 13-01-00469), by the Program of the Joint Investigations of the UB RAS with SB RAS (project 12-C-1-10018) and with Belorussian NAS (project 12-C-1-1009), by the grant of the President of the Russia for young scientists (project MK-3395.2012.1), by the Dmitry Zimin Foundation "Dynasty", by the grant of UB RAS for young scientists (project 14-1-НП-27) and by the Program of the State support of leading universities of the Russia (agreement no. 02.A03.21.0006 of 27.08.2013).

References

1. Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J., *Transitive subgroups of primitive permutation groups* // J. Algebra. – 2000. – V. 234. – P. 291–361.

КОНЕЧНАЯ БАЗИРУЕМОСТЬ КЛАССОВ ГЛУБИНЫ 2 В РЕШЕТКЕ L_3

Е. А. Михеева
УлГУ, Ульяновск
melalex05@rambler.ru

Данная работа посвящена описанию решетки (по включению) L_3 всех замкнутых классов трехзначной логики P_3 с указанием, когда это возможно, базисов и порядков.

Множество различных классов из L_3 называется цепью, если оно линейно упорядочено по включению. Цепь $F_0 \supset F_1 \supset ... \supset F_n$ называется неуплотняемой цепью длины n между F и P_3, если $F_0 = P_3$, $F_n = F$ и F_{i+1} - предполный класс в F_i для каждого $i < n$. Длина наименьшей конечной неуплотняемой цепи называется глубиной класса F в решетке L_3.

Классы глубины 1 в L_3 - это предполные классы в P_3. Их всего 18, они все описаны С.В. Яблонским в работе [1]. Позже В.М. Гниденко показал [2], что они все имеют конечные базисы. Классы глубины 2 в L_3 - это классы, предполные в предполных классах. Они полностью описаны в [3] Д. Лау через предикаты, таких классов оказалось 161.

Теорема. *Все классы глубины 2 в решетке L_3 имеют конечные базисы.*

Литература

1. Яблонский С. М., *Функциональные построения в k-значной логике* // Труды МИАН. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.

2. Гниденко В. М., *Нахождение порядков предполных классов в трехзначной логике* // Проблемы кибернетики. – 1958. – вып. 8, – С. 341–346.

3. Lau D., *Submaximalle klassen von P_3* // Electron. Informationsverarb. und Kybern. – 1982. – B. 18. – № 4-5. – S. 227–243.

ON ISOMORPHISMS OF UNIVERSAL HYPERGRAPHICAL AUTOMATA

V. A. Molchanov

Saratov State University, Saratov, Russia

V.Molchanov@inbox.ru

A hypergraph is a system $H = (X, R)$, where X is a non-empty set and R is a family of arbitrary subsets of X. The elements of X and R are called vertices and edges.

Following [1], by automaton we mean a system $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ consisting of a state set X, a semigroup S of input signals, a set Y of output signals, a transition function $\delta : X \times S \to X$ and an exit function $\lambda : X \times S \to Y$ such that $\delta(x, s_1 s_2) = \delta(\delta(x, s_1), s_2)$ and $\lambda(x, s_1 s_2) = \lambda(\delta(x, s_1), s_2)$ for any $x \in X$, $s_1, s_2 \in S$. An automaton A is said to be hypergraphical if its sets X and Y endowed with a structure of hypergraphs $H = (X, R)$ and $H' = (Y, R')$ such that, for any $s \in S$, the mappings $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$ $(x \in X)$ are homomorphisms of the corresponding hypergraphs. In this case we denote the automaton $A = (H, S, H', \delta, \lambda)$.

For hypergraphs H, H', the universal hypergraphical automaton is the system $\mathrm{Atm}(H, H') = (H, S(H, H'), H', \delta, \lambda)$, where $S(H, H') = \mathrm{End}(H) \times \mathrm{Hom}(H, H')$ and, for every $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H, H')$, $\delta(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$.

It was proved in [2] that a wide class of such sort of automata are determined up to isomorphism by their semigroups of input symbols. In this talk we investigate a connection between isomorphisms of these automata and isomorphisms of their components – semigroups of input symbols, hypergraphs of states and hypergraphs of output symbols.

References

1. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A.,*Algebraic structures in automata and databases theory.* – Singapore; River Edge, NJ : World Scientific, 1992. – 277 p.

2. Molchanov V. A., *A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols,* // Semigroup Forum. – 2011. – V. 82. – No. 1. – P. 1–9.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОЛЬЦА КЛАССОВ ВЫЧЕТОВ

В. С. Монахов, И. К. Чирик

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель;
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель
Victor.Monakhov@gmail.com; chyrykira@mail.ru

Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1]– [2].

Пусть m — натуральное число и $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ — кольцо классов вычетов по модулю m, где $0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$ — наименьшие неотрицательные вычеты. Мультипликативная группа $\mathbb{Z}_m^*$ обратимых элементов абелева порядка $\varphi(m)$ и состоит из тех классов, наименьшие неотрицательные вычеты которых взаимно просты с модулем m, [1, теорема 4.1, стр. 86]. Здесь $\varphi(m)$ — функция Эйлера. Заметим, что класс $\overline{m-1}$ принадлежит группе $\mathbb{Z}_m^*$ при любом $m > 1$ и является элементом порядка 2. Группа $\mathbb{Z}_m^*$ циклическая ([1, теорема 7.4, стр. 168]) тогда и только тогда, когда $m \in \mathbb{A}$, где

$$\mathbb{A} = \{2, 4, p^t, 2 \cdot p^t \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{2\},\ t \in \mathbb{N}\}.$$

Здесь $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, а $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

В настоящей заметке доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Произведение всех обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_m$ равно $\overline{m-1}$ при $m \in \mathbb{A}$ и $\overline{1}$ при $m \notin \mathbb{A}$.*

Следствие 1.1. (Теорема Вильсона) *Натуральное число p является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.*

Для натурального числа k через $k!_\varphi$ будем обозначать произведение всех тех чисел от 1 до k, которые взаимно просты с k.

Следствие 1.2. *Пусть m — натуральное число. Если $m \in \mathbb{A}$, то $m!_\varphi \equiv -1 \pmod m$. Если $m \notin \mathbb{A}$, то $m!_\varphi \equiv 1 \pmod m$.*

Теорема 1 является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G — конечная абелева группа с единичным элементом e и P — ее силовская 2-подгруппа. Если P нециклическая, то $p(G) = e$. Если P циклическая и $P \neq \{e\}$, то $p(G) = i$, где i — элемент порядка 2.*

Здесь $p(G)$ — произведение всех элементов группы G. Заметим, что если в абелевой группе G четного порядка силовская 2-подгруппа циклическая, то элемент i порядка 2 в группе G единственный.

Литература

1. Нестеренко Ю. В. Теория чисел. Москва: Издательский центр «Академия». 2008.

2. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

ON PRODUCTS OF $F(G)$-SUBNORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

V. I. Murashka, A. F. Vasil'ev
Francisk Skorina Gomel State University, Gomel
mvimath@yandex.ru, formation56@mail.ru

All considered groups. One of the problems of group theory is the structural study of a finite group which can be factorized as a product of two or more pairwise permutable subgroups. The origin of the theme may be tracked back to Burnside who in 1903 discovered that a finite group cannot be simple if it factorises as a product of a Sylow subgroup and the centraliser of non-trivial element.

In the context of the previous problem in many papers classes of groups which are closed under taking products of certain types (normal, subnormal, abnormal and etc.) of subgroups were studied. In [1] Amberg, Hofling and Kazarin studied classes of groups which are closed under taking products of arbitrary subgroups. Bryce and Cossey [2] described all soluble formations which are closed under taking products of normal subgroups. Vasil'ev [3] studied formations of groups which are closed under taking soluble products of abnormal subgroups.

A formation $\mathfrak{F}$ is called lattice [4, p. 248] if the set of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups of every group G is a sublattice of the lattice of subgroups of G. It is known [4, p. 254] that a soluble subgroup closed saturated lattice formation is a class of soluble groups whose elements are the direct product of Hall subgroups corresponding to pairwise disjoint sets of primes. For example formation of all nilpotent groups is lattice .

Recall that $F(G)$ is the Fitting subgroup of G. A subgroup H of a group G is called $F(G)$-subnormal if H is subnormal in $HF(G)$. In [4] was shown that a group $G = AB$ is nilpotent if and only if A and B are nilpotent $F(G)$-subnormal subgroups of G. Here we proved the following theorem in the soluble universe.

Theorem. *For a normally hereditary saturated formation $\mathfrak{F}$ the following statements are equivalent:*

(1) *$\mathfrak{F}$ contains every group $G = AB$ where A and B are $F(G)$-subnormal subgroups of G.*

(2) *$\mathfrak{F}$ is lattice formation.*

References

1. Amberg B., Kazarin L. S. and Hofling B. *Finite groups with multiple factorizations* // Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika. – 1998. –V. 4. – P. 1251–1263.

2. Bryce R. A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups* // Math. Z. – 1972. – V. 127. – P. 217-223.

3. Vasil'ev A. F. *On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Soluble Groups* // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – V. 85. – P. 305-311.

4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M, *Classes of Finite Groups.* – Dordrecht: Sprinder, 2006. – 385 p.

5. Murashka V. I., Vasil'ev A. F, *On the products of partially subnormal subgroups of finite groups* // Vestnik VSU. – 2012. – No. 70 (4). – P. 24–27. (In Russian)

ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. В. Нагул

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

sapling@icc.ru

В докладе освещаются методы исследования динамических систем, разработанные на стыке алгебры и логики. Так, в 1974 году для обеспечения алгоритмического формирования критериев сохранения свойств динамических систем на основе логических методов В. М. Матросов предложил *метод сравнения*, получивший в дальнейшем широкое развитие в его научной школе (Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев, Р. И. Козлов и др.). Одним из основных применений критериев сохранения является сведение на их основе задачи изучения сложной модели к изучению более простой, поэтому метод используется для исследования наличия в динамической системе, описываемой, например, дифференциальными уравнениями, свойств устойчивости ее решений, диссипативности и т.д.

С другой стороны, сохранение свойств является важной проблемой при изучении алгебраических систем. Целый ряд утверждений классической теории моделей, так называемые *теоремы устойчивости*, или *характеристические теоремы*, устанавливают связь между семантическими и синтаксическими свойствами формул языка логики первого порядка (Р. Линдон, Е. Лось, А. Тарский, С. Феферман и др.). В развитие теоремы Р. Линдона о сохранении позитивных формул при гомоморфизмах и критериев переносимости термов и соотношений в теории структур Н. Бурбаки в 2005 году С. Н. Васильевым был предложен *метод представимости*, лежащий на пересечении динамики систем, алгебры и логики. Для применения метода представимости изучаемую модель динамической системы следует перевести в форму многоосновной алгебраической системы (МАС), а определение изучаемого свойства представить в некотором классе свойств, для которого имеется критерий сохранения.

К сожалению, задача представимости формулы изучаемого свойства в требуемом классе является, вообще говоря, алгоритмически неразрешимой. Для решения этой проблемы и получения критериев сохранения свойств динамических систем, состоящих из условий типа сохранения операций или отношений, предложен метод логико-алгебраических уравнений (Н.В. Нагул, 2008), который обеспечивает гибкое формирование критериев сохранения по конкретному виду изучаемого свойства. Динамическая система представляется в виде МАС с дополнительными расширениями, введение которых было мотивировано стремлением охватить интересный класс динамических систем — дискретно-событийные системы.

Работа выполнена при частичной поддержке Президиума РАН (программа №15) и РФФИ (проекты 14-07-00740, 14-07-31192-Мол-а).

ПРОЕКТИВНОСТЬ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ПЛОСКИХ МОДУЛЕЙ В КАТЕГОРИИ ВИСБАУЭРА

М. Ф. Насрутдинов
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
Marat.Nasrutdinov@kpfu.ru

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними. Пусть M правый R-модуль. Через $\sigma[M]$ обозначается категория Висбауэра модуля M, то есть полная подкатегория категории правых R-модулей, состоящая из всех подмодулей и гомоморфных образов прямых сумм копий модуля M. Отметим, что $\sigma[R]$ совпадает с категорией всех модулей.

Хорошо известно, что гомологические свойства категории правых R-модулей позволяют охарактеризовать свойства самого кольца. Классический пример подобного рода – каждый R-модуль проективен тогда и только тогда, когда кольцо R является прямой суммой колец матриц над телами. В книге [1] Висбауэром было показано, что многие результаты гомологической классификации могут быть перенесены на категорию $\sigma[M]$.

В докладе рассматриваются свойства модуля M, при которых в категории $\sigma[M]$ проективен каждый конечно порожденный плоский модуль.

Отметим, что кольца, в которых всякий конечно порожденный плоский модуль проективен впервые рассматривались проф. кафедры алгебры Казанского университета И.И. Сахаевым (см. [2]) и изучались многими авторами (см., например, [3]). В частности, остается отрытым вопрос о том выполняется ли условие проективности всех правых конечно порожденных плоских модулей, если проективны все левые конечно порожденные плоские модули.

Литература

1. Wisbauer R., *Foundations of Module and Ring Theory.* –Philadelphia: Gordon and Breach, 1991

2. Сахаев И. И. *О конечной порожденности проективных модулей* // Изв.ВУЗов. Математика. – 1977. – № 9. – С. 69–79.

3. Puninski G. Rothmaler Ph. *When every finitely generated flat modules projective* // J. Algebra. – 2004. – V 277. – P. 542–558.

О ВЫЧИСЛИМЫХ ПОДГРУППАХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

М. К. Нуризинов, Р. К. Тюлюбергенев, Н. Г. Хисамиев
Восточно-Казахстанский государственный университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск
marat.nurizinov@gmail.com

Изучение конструктивных (вычислимо нумерованных) групп начато в [1], где А.И. Мальцев поставил общую задачу: "определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы". В этой же работе было дано описание вычислимых абелевых групп без кручения.

Пусть $UT_n(Q)$ – группа всех унитреугольных матриц размерностей $n \times n$ над полем рациональных чисел Q, $n \in \omega$, ω – множество всех натуральных чисел, γ_n – ее некоторая геделева нумерация, т.е. по данному числу $m \in \omega$ эффективно находится матрица $\gamma_n m$ и, наоборот, по данной матрице – ее γ_n-номер.

В данной работе получены критерии вычислимости нильпотентных групп без кручения конечных размерностей. Как следствие получено существование главной вычислимой нумерации класса всех вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей. Построен пример группы $G \leqslant UT_3(Q)$, которая невычислима, но секции любого ее центрального ряда вычислимы.

Теорема 1. *Пусть подгруппа $G \leqslant UT_n(Q)$ вычислима, ν – некоторая ее вычислимая нумерация и*

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_{k-1} = G$$

— ее некоторый центральный ряд, секции которого не имеют кручения. Тогда каждая погруппа G_i вычислима перечислима в $(UT_n(Q), \gamma_n)$ и $\nu \leqslant_m \gamma_n$, где γ_n – геделева нумерация группы $UT_n(Q)$.

Следствие 1. *Нильпотентная группа без кручения конечной размерности вычислима тогда и только тогда, когда она изоморфна вычислимо перечислимой подгруппе $(UT_n(Q), \gamma_n)$ при некотором n.*

Следствие 2. *Существует главная вычислимая нумерация семейства всех вычислимых нильпотентных групп без кручения конечных размерностей.*

Теорема 2. *Пусть G – подгруппа $(UT_n(Q), \gamma_n)$, $1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_{k-1} = G$ — ее центральный ряд, секции которого без кручения, и $\bar{g}_{i0}, \ldots, \bar{g}_{in_i-1}$ – базис группы $\overline{G}_i = G_i/G_{i-1}$. Тогда G вычислима если и только если справедливы:*

1. для любого $i < k$ характеристика $\chi(\bar{G}_i)$ секции $\bar{G}_i$ – вычислимо перечислимое множество;

2. существует частично вычислимая функция выбора.

Теорема 3. *Существует невычислимая подгруппа $G \leqslant UT_3(Q)$ такая, что все секции любого ее центрального ряда вычислимы.*

Отсюда следует, условие 2 теоремы 2 не зависит от условия 1.

Литература

1. *А.И. Мальцев,* О рекурсивных абелевых группах, Доклады АН СССР, **46**, №4, 1962, 1009—1012.

δ-DERIVATIONS OF SEMISIMPLE FINITE-DIMENSIONAL STRUCTURABLE ALGEBRAS

E. Okhapkina
Novosibirsk State University, Russia
eliza_okhapkina@mail.ru

The concept of δ-derivation first appeared in papers by V. Filippov, as a generalization of ordinary derivations. Recall that for a fixed δ of the main field F, under δ-derivation of algebra A we mean a linear mapping ϕ, which satisfies the condition

$$\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y)) \tag{2}$$

for arbitrary elements $x, y \in A$. V. Filippov proved that every prime Lie algebra has no nonzero δ-derivations, if $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. The big cycle of articles according to the description of δ-derivations can be found in works of I. Kaygorodov such as δ-derivations of semisimple finite-dimensional Jordan algebras [1].

The class of structurable algebras was introduced in 1978 by B. Allison. This class of algebras is of interest because it contains such objects as tensor multiplication of composition algebras, a 35-dimensional algebra $T(C)$. Structurable algebras are algebras with the unit e and involution $\bar{\ }$, which satisfy the identity:

$$[T_z, V_{x,y}] = V_{T_z x,y} - V_{x,T_{\bar{z}} y}, \text{ where } T_z, V_{x,y} \in End(A), \tag{3}$$
$$V_{x,y}(z) = (x\overline{y})z + (z\overline{y})x - (z\overline{x})y, T_z = V_{z,e} \text{ for } x, y, z \in A.$$

In the work [2] O. Smirnov proved that the whole class of simple finite-dimensional structurable algebras is isomorphic to six specific algebras like an unital associative algebra with the involution, the algebra of Hermitian form and some other. Jordan algebras with the unit and identical involution are also structurable, so we will receive the generalization of the results of I. Kaygorodov in more general (structurable) case.

Let us note that the linear mapping χ is called a generalized δ-derivation if it is related with δ-derivation ϕ by the following correlations

$$\chi(xy) = \delta(\chi(x)y + x\phi(y)) = \delta(\phi(x)y + x\chi(y)).$$

Now we can pass to the main results of this paper.

Theorem 1. *A semisimple finite-dimensional structurable algebra over an algebraically closed field of characteristic $p \neq 2, 3, 5$ has no nontrivial δ-derivations.*

Theorem 2. *Let χ be the generalized δ-derivation of the semisimple finite-dimensional structurable algebra A over an algebraically closed field of the characteristic $p \neq 2, 3, 5$, then $\chi \in Der(A) + \Gamma(A)$. Here $\Gamma(A)$ is centroid of A.*

References

1. *Kaygorodov I.,* On δ-derivations of simple finite-dimensional Jordan superalgebras, Algebra and Logic, **46** (2007), 5, 318–329.
2. *Smirnov O.*, Simple and semisimple structurable algebras, Algebra and Logic, **29** (1990), 5, 377–394.

ON QUOTIENTS FOR STRUCTURES OF DISTRIBUTIONS OF BINARY FORMULAS

E. V. Ovchinnikova, S. V. Sudoplatov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk; Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk

eovchin@ngs.ru; sudoplat@math.nsc.ru

Structures $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\varnothing\}; \cdot \rangle$ (for types $p \in S^1(\varnothing)$ and labelling functions $\nu(p)$), $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$, $\mathfrak{SI}_{\nu(R)}$, and $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ (for nonempty families $R \subseteq S^1(\varnothing)$ and corresponding families $\nu(R)$ of labelling functions) of distributions for binary formulas and basic properties of these algebras are defined and investigated in [1–3, 3]. Deterministic structures $\mathfrak{P}_{\nu(p),\mathrm{da}}$ for acyclic graphs with unary predicates and colored arcs are described in [5].

Quotients of $\mathfrak{P}_{\nu(p),\mathrm{da}}$ produce the class of structures $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ as well as quotients of graph representations [1] for $\mathfrak{P}_{\nu(p),\mathrm{da}}$ produce graph representations for $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$:

Theorem 1. *Any structure $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ is a quotient of a structure $\mathfrak{P}_{\nu(p),\mathrm{da}}$.*

Theorem 2. *For any structure $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ there is a structure $\mathfrak{P}_{\nu(p),\mathrm{da}}$ and its graph representation $\Gamma_{\nu(p),\mathrm{da}}$ such that a quotient of $\Gamma_{\nu(p),\mathrm{da}}$ is a graph representation for $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.*

Similar results are obtained for structures $\mathfrak{P}_{\nu(R)}$, $\mathfrak{SI}_{\nu(R)}$, and $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$.

The research is supported by RFBR grant No. 12-01-00460-a.

References

1. Shulepov I. V., Sudoplatov S. V., *Algebras of distributions for binary isolating formulas of a complete theory* // arXiv:1205.3473v1 [math.LO]. – 2012.

2. Sudoplatov S. V., *Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas of a complete theory* // arXiv:1210.4049v1 [math.LO]. – 2012.

3. Sudoplatov S. V., *Algebras of distributions of formulas with respect to generalized semi-isolation* // Algebra and Model Theory 9. Collection of papers / Eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko. – Novosibirsk : NSTU, 2013. – P. 67–100.

4. Sudoplatov S. V., *Classification of Countable Models of Complete Theories.* — Novosibirsk, 2014.

5. Ovchinnikova E. V., Sudoplatov S. V., *Structures of distributions of isolating formulas as derivative structures: for acyclic graphs* // 9th Panhellenic Logic Symposium, July 15-18, 2013, National Technical University of Athens, Greece. – Athens : NTUA, 2013. – P. 74–79.

АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Г. Н. Пащенко

РГП "Институт проблем информатики и управления" Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, Алматы

galina_pashenko@mail.ru

Интеллектуальные системы управления в последнее время считаются одним из самых перспективных направлений в научных исследованиях. Особый интерес вызывают принципы построения интеллектуальных систем управления на базе различных технологий и создание современных интеллектуальных технологий в приложении к задачам управления сложными динамическими объектами [1-3].

Сложным динамическим объектам, как правило, присущи такие качества, как запаздывание, большая размерность объекта управления, нестационарность, нелинейность, а также, параметры объекта могут находится в пределах некоторых интервалов. Следовательно, разрабатываемые системы управления сложными объектами должны быть такими, чтобы обеспечивалось их функционирование при любых условиях с заданным показателем качества.

Разработан алгоритм для построения интеллектуальных систем управления интервально-заданным объектом с запаздыванием на основе искусственных нейронных сетей. Построена интеллектуальная система управления интервально-заданным объектом с запаздыванием на основе искусственных нейронных сетей.

Литература

1. Масютина Г. В., *Методика решения многокритеальной задачи выбора структуры каскадной САУ в условиях неопределенности* // Фундаментальные исследования. – 2010. – № 12. – С. 119–126.

2. Червяков Н. И., Лубенцов В. Ф., Рудакова Т. А., *Нейросетевая система автоматического управления с переменной структурой* // Инфокоммуникационные технологии. – 2008. – № 1. – С. 8–12.

3. Пащенко Г. Н., *Построение нейросетевой модели для технологического процесса варки стекла* // Проблемы информатики. – 2013. – № 4. – С. 56–59.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия
parvatov@mail.tsu.ru

Через $\lambda(f,m,a)$ и $\tau(f,m,a)$ обозначим соответственно предпериод и период рекуррентной последовательности

$$a \mod p^m\mathbb{Z}^n, \quad f(a) \mod p^m\mathbb{Z}^n, \quad f(f(a)) \mod p^m\mathbb{Z}^n, \ \dots,$$

где a из $\mathbb{Z}^n$, p — простое, m и n — целые положительные, $f(x) = (f_1(x),\dots$ $\dots, f_n(x))$ для любого x из $\mathbb{Z}^n$ и $f_1,\dots,f_n$ — многочлены из кольца $\mathbb{Z}[x_1,\dots$ $\dots, x_n]$. Будем интресоваться условиями, при которых для любого набора a из некоторого множества $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ эта последовательность чисто периодическая, то есть с нулевым предпериодом $\lambda(f,m,a)=0$, а также возможными её периодами $\tau(f,m,a)$ при растущем m. Далее эта задача решена для $A = a + p\mathbb{Z}^n$.

Пусть $M_n(\mathbb{Z})$ — кольцо целочисленных квадратных матриц размера n, E — единичная матрица, $|A|$ — определитель матрицы A и $ord_p(A)$ — её мультипликативный порядок по модулю $pM_n(\mathbb{Z})$, то есть наименьшее положительное k, такое, что $A^k \equiv E \mod pM_n(\mathbb{Z})$, существующее, если $|A| \mod p \neq 0$. Обозначим через D_f матрицу Якоби системы многочленов f, где $\mathrm{D}_{f\,i,j} = \frac{df_j}{dx_i}$. Для натуральных k положим $\mathrm{D}_f^k(a) = \mathrm{D}_f(a)\cdot \mathrm{D}_f(f(a))\cdots \mathrm{D}_f(f^{k-1}(a))$, где $f^k(a) = f(f^{k-1}(a))$ при $k>0$ и $f^0(a)=a$.

Теорема.

Пусть $\lambda(f,1,a)=0$, $\tau(f,1,a)=\tau$ и $m>1$. Тогда равносильны условия.

(1) $\lambda(f,m,b)=0$ для любого b из $a+p\mathbb{Z}^n$.

(2) $\lambda(f,2,b)=0$ для любого b из $a+p\mathbb{Z}^n$.

(3) $|D_f^\tau(a)| \mod p \neq 0$.

(4) $|D_f(b)| \mod p \neq 0$ для любого b из $\{a, f(a),\ f^2(a),\dots f^{\tau_1-1}(a)\}$.

При выполнении этих условий для любого b из $a+p\mathbb{Z}^n$ выполняется соотношение $\tau(f,m,b) \mid \tau\cdot p^{m-1}\cdot ord_p(D_f(a))$; а если при этом $|D_f^{\tau_1}(a)-E| \mod p \neq 0$, то и соотношение $\tau(f,m,b) \mid \tau\cdot p^{m-2}\cdot ord_p(D_f(a))$.

Сформулированная теорема даёт условия периодичности и оценивает сверху периоды для полиномиальной вектор-функции над кольцом $\mathbb{Z}_{p^m}$. Подобные условия были известны ранее для полиномиальной функции одной переменной над конечным коммутативным кольцом, см. [1], оценки периодов — для полиномиальной функции одной переменной над кольцом Галуа, см. [2].

Литература

1. Jiang Jianjun. *A note on polynomial functions over finite commutative ring* // Advances in Mathematics. – 2010. – V. 39. – № 5. – P. 555–560.

2. Ермилов Д. М., Козлитин О. А. *Цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа* // Матем. вопр. криптогр. – 2013. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 27–57.

О ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЧЕРНИКОВСКИМ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОМ НЕКОТОРОГО ЭЛЕМЕНТА

И. И. Павлюк
Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова, г.Павлодар, Казахстан
ivan.pavlyuk@mail.ru

Вопрос 13.7 (Б.Хартли) из [1] решен утвердительно, т.е. имеет место следующая

Теорема. *Локально-конечная группа, содержащая элемент с черниковским централизатором, почти локально разрешена.*

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2014 год по приоритету Интеллектуальный потенциал страны, по теме "Разработка теории сравнений в группах".

Литература

1. *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь* // Новосибирск, Новосибирский университет. – 2002. – 172 с.

О КЛАССАХ НОРМАЛИЗАТОРНО-ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

Ин. И. Павлюк Л. И. Теняева
Павлодарский государственный университет им.С.Торайгырова, г.Павлодар, Казахстан
inessa777@mail.ru

Мощность класса эквивалентности группы - это количественная характеристика компоненты групповой структуры. Ее знание дает информацию о структуре самой группы, поскольку она выражается через количественные характеристики других объектов группы. Понятие класса нормализаторно-эквивалентных элементов принадлежит И.И.Павлюку [1]. Исследования некоторых вопросов по этой теме можно найти в работах [2,3].

Определение. *Элементы $x, y \in G$ нормализаторно сравнимы в группе G относительно некоторого множества $M \subseteq G$, если $M^x = M^y$, т.е.*

$$(\forall M \subseteq G)(\exists x, y \in G)\left(\left(x \overset{M}{\equiv} y\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (M^x = M^y)\right).$$

Нетрудно показать [1,2], что отношение "$\overset{M}{\equiv}$"относительно некоторого подмножества M группы G является отношением эквивалентности.

Теорема. *Мощность множества нормализаторных классов $\left|\left\{\overset{M\equiv}{x}\right\}\right|$ группы G относительно подмножества $M \subset G$ равна $|G : N(M)|$, а мощность каждого нормализаторного класса $\left|\overset{M\equiv}{x}\right|$ равна $|N(M)|$.*

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан на 2014 год по приоритету Интеллектуальный потенциал страны, по теме "Разработка теории сравнений в группах".

Литература

1. Павлюк Ин. И., *О нормализаторной сравнимости элементов группы.* // Материалы Международной научной конференции "IV Сатпаевские чтения". Павлодар. – 2004. – Т. 6. – С. 114–117.

2. Павлюк И. И., Унгер Н.В., Шунков В.П. *О сопряжении подмножеств в группе.* // Весник ПГУ им.С.Торайгырова . – Серия физико-математическая. Павлодар, 2008. – Т. 3-4. – С. 66–80.

3. Абишев М.У., *О законе сокращения для подмножеств группы.* // Сборник докладов Первой Республиканской студенческой научно-практической конференции по математики и информатики. Астана. – 2008. – С. 24–25. (Научный руководитель И.И.Павлюк).

ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫЕ $L_3(P^N)$

К. А. Филиппов, А. Н. Филиппова

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

filippov_kostya@mail.ru

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [6].

Произвольная группа называется *группой Шункова*, если в каждом ее сечении по конечной подгруппе любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.

В [2], вопр. 14.101 высказана гипотеза о том, что периодическая группа, насыщенная группами из множества простых конечных групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа над локально конечным полем. В [3–5] эта гипотеза подтверждена для случаев, когда $\mathfrak{R}$ состоит, соответственно, из групп Ри, проективных специальных линейных групп размерности 2 и групп Сузуки.

В работе [1] был доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\{L_3(2^m)|m = 1, 2, \ldots\}$, изоморфна группе $L_3(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.

В общем случае когда характеристика конечного поля отлична от 2, доказать аналогичный результат не удаётся. Однако, в классе периодических групп Шункова это имеет место.

Пусть $\mathfrak{M} = \{L_3(q)\}$, $q = p^n$, p – фиксированное нечётное простое число, а n – нефиксированное натуральное.

Теорема. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна группе $L_3(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q хартеристики p.*

Литература

1. Лыткина Д. В., *Периодические группы, насыщенные $L_3(p^n)$* // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 64. – № 5. – С. 606–626.

2. *Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 16-е изд.*. – Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2006.

3. Рубашкин А. Г., Филиппов К. А. *О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$* // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46. – № 6. – С. 1388–1392.

4. Филиппов К. А., *Группы, насыщенные конечными неабелевыми простыми группами и их центральными расширениями.* – дисс. канд. физ-мат. наук, 2005.

5. Шлёпкин А. К., *О некоторых периодических группах, насыщенных конеч- ными простыми подгруппами* // Матем. труды. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 129–138.

6. Шлёпкин А. К., *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы* // III межд. конф. по алгебре, тезисы докладов, Красноярск. – 1993.

ОБ ОПРЕДЕЛИМЫХ И АВТОУСТОЙЧИВЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ

А. Г. Пинус

Новосибирский гос. технический университет

ag.pinus@gmail.com

Конгруэнцию θ универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *автоустойчивой*, если для любых $a, b \in A$ и любого автоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ ($\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{A}$) из включения $\langle a, b \rangle \in \theta$ вытекает включение $\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle \in \theta$.

Непосредственно замечается, что совокупность $\mathrm{AutCon}\mathfrak{A}$ всех автоустойчивых конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ замкнута относительно операций $\wedge$ и $\vee$ решетки $\mathrm{Con}\mathfrak{A}$. То есть $\mathrm{AutCon}\mathfrak{A}$ является подрешеткой решетки $\mathrm{Con}\mathfrak{A}$.

Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *алгеброй с автоустойчивыми конгруэнциями*, если все ее конгруэнции автоустойчивы.

Теорема 1. *Любое нетривиальное многообразие V включает в себя как алгебры с автоустойчивыми конгруэнциями, так и не являющиеся таковыми.*

Пусть L некоторый логический язык. *Конгруэнцию θ алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем точечно L-определимой*, если для любого $a \in A$ существует L-формула $\Phi_a(x, y)$ такая, что для любых $b, c \in A$, любого $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{A}$ таких, что $b \in \varphi(a)/\theta$, условия $\langle b, c \rangle \in \theta$ и $\mathfrak{A} \models \Phi_a(b, c)$ равносильны.

Совокупность всех точечно L-определимых конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим как L-$\mathrm{PDefCon}\mathfrak{A}$. Имеет место включение L-$\mathrm{DefCon}\mathfrak{A} \subset \mathrm{AutCon}\mathfrak{A}$.

Через $\exists^2 \wedge L_2$ обозначим логический язык, формулами которого являются конъюнкции (возможно, бесконечные) L_2-формул с возможным последующим навешиванием квантора $\exists$ по предикатным переменным. Здесь L_2 – язык логики второго порядка.

Теорема 2. ($V = L$). *Для любой не более чем счетной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ конечной сигнатуры имеет место равенство $\exists^2 \wedge L_2$-$\mathrm{PDefCon}\mathfrak{A} = \mathrm{AutCon}\mathfrak{A}$.*

Следствие 1 ($V = L$). *Если $\mathfrak{A}$ не более чем счетная алгебра конечной сигнатуры с автоустойчивыми конгруэнциями, то все конгруэнции алгебры $\mathfrak{A}$ точечно $\exists^2 \wedge L_2$-определимы ($\mathrm{Con}\mathfrak{A} = \exists^2 \wedge L_2$-$\mathrm{PDefCon}\mathfrak{A}$).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

ОБЩЕЕ СТРОЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ГРУПП ПОЛЕЙ

К. Н. Пономарев
НГТУ, г.Новосибирск
ponomaryov@ngs.ru

Установлена структура расширения мультипликативных групп полей при таких расширениях полей F/K, в которых поле K алгебраически замкнуто в поле F.

Для множества простых чисел π обозначаем Z_{π^∞} аддитивную группу рациональных дробей знаменатели которых являются степенями простых чисел из множества π. Эта группа получается π-пополнением группы Z. Абелевы группы, изоморфные таким группам, называем *пополнениями* (циклической группы Z.) Также считаем $p = 1$ простым числом, в этом случае в этих обозначениях при $\pi = \{1\}$ получается сама аддитивная группа целых чисел Z.

Теорема. *Пусть поле K алгебраически замкнуто в поле F.*

Утверждается, что мультипликативная группа F^* представляется прямым произведением абелевых групп

$$F^* = K^* \times C,$$

в котором группа C – прямая сумма некоторых пополнений циклической группы Z.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию №2014/138, проект 1052

О ЧИСЛЕ ПРОСТЫХ И ПРЕДЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ АДДИТИВНОЙ ГРУППЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Р. А. Попков
Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск
r-popkov@yandex.ru

Известно [1], что для полной счётной малой теории без конечных моделей любая счётная модель является простой над некоторым конечным множеством или предельной. Для произвольной полной счётной теории могут существовать счётные модели, не являющиеся ни простыми, ни предельными [2]. Интересным является вопрос о распределении моделей естественных теорий, одной из которых является теория группы $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$. В работе [3] показано, что данная теория не имеет простой модели над $\varnothing$. Следуя [2], мощности множеств типов изоморфизма простых над конечными множествами, предельных и остальных счётных моделей теории T будем обозначать через $P(T)$, $L(T)$, $\mathrm{NPL}(T)$ соответственно. С использованием предложенных в [3] моделей показано, что для данной теории имеет место $P(T) = 2^\omega$, $L(T) = 2^\omega$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию № 2014/138, проект 1052.

Литература

1. Судоплатов С. В. Проблема Лахлана : Монография. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009 – 336 с.

2. Popkov R. A., Sudoplatov S. V. Distributions of countable models of theories with continuum many types // arXiv:1210.4043v1 [math.LO]

3. Baldwin J. T., Blass A. R., Glass A. M. W., Kueker D. W. A 'natural' theory without a prime model. Algebra universalis, December 1973, Volume 3, Issue 1, pp. 152-155.

ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ НА МНОЖЕСТВЕ ВТОРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ АЛГЕБРЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет, Саратов

poplavskivb@mail.ru

Рассматриваются множество так называемых вторичных идемпотентных матриц над произвольной булевой алгеброй относительно конъюнктного (или дизъюнктного) частичного произведения в частичной полугруппе матриц произвольных размеров [1]. Такие вторичные идемпотенты играют главную роль в вопросах разрешимости простейших матричных уравнений, делимости, регулярности матриц, характеризации идеалов полугрупп, поиска транзитивно-рефлексивных замыканий и пр. Мы доказываем, что решёточный частичный порядок совпадает с натуральным частичным порядком [?] на множестве вторичных идемпотентов в случае полугруппы с дизъюнктным произведением и является обратным для натурального частичного порядка на множестве вторичных идемпотентов в случае полугруппы с конъюнктным произведением.

Литература

1. Поплавский В.Б. *О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, вып. 4. – С. 181-192. (Translation: Poplavski V.B. *On applications of associativity of dual compositions in the algebra of Boolean matrix* // Journal of Mathematical Sciences. Springer, New York. – Vol. 191, 5 (2013). –P. 718- 725.)

2. Mitsch H. *A Natural Partial Order for Semigroups*// Proceedings of the Amer. Math. Society. – Vol.97, –N3 (1986). – P. 384-388.

ON CONGRUENCE LATTICES OF NILSEMIGROUPS

A. L. Popovich

Ural Federal University, Ekaterinburg

alexander.popovich@usu.ru

Studying congruence lattices is one of the well-established directions in semigroup theory. A survey of this area was given in [3] and [4]. One of the central questions here is the following representation problem: what lattices are isomorphic to congruence lattices of semigroups? This problem is known to be extremely hard and it is not likely that it would be solved soon.

Recall that an element a of a complete lattice L is *compact* if for every $X \subseteq \subseteq L$ such that $a \leqslant \bigvee X$ there exists a finite subset $X' \subseteq X$ such that $a \leqslant \bigvee X'$. A complete lattice L is called *algebraic* if every its element is a join of compact elements.

The congruence lattice of any semigroup is an algebraic lattice. The converse is not true. Freese, Lampe and Taylor have proved in [1] that there exists a modular algebraic lattice which is not isomorphic to the congruence lattice of any algebra of finite type. As for distributive algebraic lattices, the question of whether or not every such lattice can be represented as the congruence lattice of a semigroup is still open.

A semigroup with zero is called a *nilsemigroup* if, for every its element x, there exists a positive integer n such that $x^n = 0$. It is proved in [2] that the congruence lattice of a nilsemigroup is strictly semimodular. In the present note we show that many lattices, even finite distributive ones, cannot arise as the conrguence lattices of nilsemigroups. The *width* of $(X, \leqslant)$ is the least number n such that X contains an antichain with n elements.

We present the following result:

Theorem. *Let S be a nilsemigroup. Then:*

1) Con S cannot have width 2, but all other values are possible;

2) if Con S is distributive, then it is a chain.

Also we show some necessary conditions for finite modular lattice to be the congruence lattice of some nilsemigroup.

References

1. Freese R., Lampe W. A., Taylor W., *Congruence lattices of algebras of fixed similarity type I* // Pacific J. Math. – 1979. – V. 82. – P. 59–68.

2. Jones P., *Congruence seimodular varieties of semigroups.* // Lecture Notes Math. – 1988. – V. 1320. – P. 18–39.

3. Mitsch H., *Semigroups and their lattice of congruences.* // Semigroup Forum. – 1983. – V. 26. – P. 1–63.

4. Mitsch H., *Semigroups and Their Lattice of Congruences II.* // Semigroup Forum. – 1997. – V. 54. – P. 1–42.

ON VARIETIES OF PARTIALLY ORDERED SEMIGROUPS OF RELATIONS WITH DESCRIPTOR OF FIXED POINT AND OPERATION OF REFLEXIVE DOUBLE CYLINDRIFICATION

A. V. Popovich

SSTU, Saratov

popovich_al@mail.ru

A set of binary relations Φ closed with respect to some collection Ω of operations on relations forms an algebra (Φ, Ω) called an *algebra of relations*. These algebras can be considered as partial ordered by set-theoretical inclution $\subset$. For any set Ω of operations on relations, denote by $R\{\Omega, \subset\}$ the class of partial ordered algebras isomorphic to ones whose elements are binary relations and whose operations are members of Ω. Let $Var\{\Omega, \subset\}$ be the variety generated by $R\{\Omega, \subset\}$.

We shall concentrate our attention on the operation of relation product $\circ$, the descriptor of fixed point ∇_1 and operation of reflexive double cylindrification ∇_2 defined as follows:

$$\nabla_1(\rho) = \{(x,x) : (\exists y)(y,y) \in \rho\}, \qquad \nabla_2(\rho) = \{(x,y) : (\exists z)(z,z) \in \rho\}.$$

The basis of identities for the varietiy $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ is found in [1].

The following theorem give the basis of identities for the varieties $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2, \subset\}$.

Theorem 1. *An algebra $(A, \cdot, ^\star, ^*, \leqslant)$ of the type (2,1,1) belongs to the variety $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2, \subset\}$ if and only if it satisfies the identities:*

$$(xy)z = x(yz), \quad (x^\star)^2 = x^\star, \quad xy^\star = y^\star x,$$
$$x^*xx^* = x^*, \quad (x^*y)^2 = x^*y, \quad (xy^*)^2 = xy^*, \quad xy^\star \leqslant x,$$
$$(xy)^\star = (yx)^\star, \quad (xy)^* = (yx)^*, \quad x^*yz^* = z^*yx^*, \quad (xy^\star)^\star = y^\star x^\star,$$
$$(xy^*z)^* = y^*zxy^*, \quad x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*, \quad x^{\star\star} = x^\star, \quad x^{\star *} = x^*,$$
$$(xy^\star)^* = x^*y^\star, \quad (x^*y^*)^\star = x^\star y^\star, \quad (x^*yz^*)^\star = x^\star(yz^*)^\star,$$
$$xy^* \leqslant y^*, \quad x^*y \leqslant x^*, \quad (xy^*z)^\star = (xy^*)^\star(y^*z)^\star, \quad x^* \leqslant (x^n)^*$$

for any natural number p.

The basis of identities found in the Theorem 1 is infinite. Is there a finite basis for this variety? The answer to this question is given by the Theorem 2.

Theorem 2. *The variety $Var\{\circ, \nabla_1, \nabla_2\}$ is not finitely based.*

References

1. Bredikhin D. A., Popovich A. V., *On ordered semigroups of relations with the fixed point deskriptor* // Vestnik Saratov State Technical University. – 2011. – V. 1. – No. 4. – P. 53–56.

CHARACTERIZATION OF JORDAN ALGEBRAS BY SPECIAL KIND OF DERIVATIONS

Y. Popov

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

yuri.ppv@gmail.com

For algebra A with unit, we denote by $U(A)$ the set of all multiplicatively invertible elements of A. A nonzero derivation d of A is called a derivation with invertible values, if $d(x) \in U(A) \cap (0)$ for every $x \in A$. In the paper [1] Bergen, Herstein and Lanski classified associative rings admitting derivations with invertible values. They proved that such ring must be either a division ring, or the ring of 2×2 matrices over a division ring, or a factor of a polynomial ring over a division ring of characteristic 2. They also characterized division rings such that the 2×2 matrix ring over them has an inner derivation with invertible values. Further, associative rings with derivations with invertible values (and also their generalizations) were discussed in variety of works. Our goal is to generalize the result of Bergen, Herstein and Lanski to algebras in classical non-associative varieties, such as Jordan algebras.

An algebra J is called Jordan if it satisfies the following identities:

$$xy = yx, x^2(yx) = (x^2y)x.$$

In our work we generalize the result of Bergen, Herstein and Lanski, describing Jordan algebras that allow derivations with invertible values.

Theorem. *Let J be a Jordan algebra of characteristic $\neq 2, 3$ with unit element 1, and let J admits a derivation with invertible values d. Then one of the following holds:*
1) J is a simple Jordan algebra;
2) J is an extension of a simple Jordan algebra by $M = \mathbb{P}(J)$ — the prime radical of $J, M \subseteq ker(d)$, M is the largest ideal of J.

Also, for types of algebras appearing in our classification, we also obtain necessary and sufficient conditions for them to admit a derivation with invertible values.

References

1. Bergen J., Herstein I.N., Lanski C., *Derivations with invertible values* // Canad. J. Math. – 1983. – V. 35. – No. 2. – P. 300–310.

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Е. Н. Порошенко
Новосибирский государственный технический университет
Новосибирск, Россия
auto_stoper@ngs.ru

Пусть R — область целостности и пусть $G = \langle X; E\rangle$ — граф с множеством вершин X и множеством ребер E. Ребро графа, соединяющее вершину a с вершиной b будем обозначать через $\{a, b\}$.

Частично коммутативная метабелева алгебра Ли с множеством порождающих X и определяющим графом G (будем обозначать ее $M(X; G)$) — это R-алгебра Ли $M(X)/I$, где $M(X)$ — свободная метабелева R-алгебра Ли, а I — ее идеал, порожденный множеством соотношений

$$\{[x_i, x_j] = 0 \,|\, x_i, x_j \in X, \text{ такие что } \{x_i, x_j\} \in E\}.$$

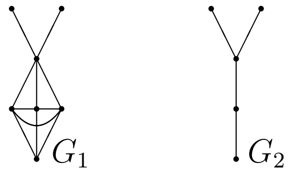
Через C_n обозначим граф на n вершинах, являющийся циклом.

Теорема 1. *Пусть R — область целостности, содержащая $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$ — множества вершин графов C_n и C_m соответственно. Частично коммутативные метабелевы алгебры Ли $M(X; C_n)$ и $M(Y; C_m)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Для вершины $x \in X$ графа G введем обозначение $x^{\perp} = \{y \,|\, d(x, y) \leqslant 1\}$, где $d(x, y)$ —это реберное расстояние между вершинами x и y. Введем на вершинах графа G отношение $\sim_{\perp}$, полагая $x \sim_{\perp} y$ в том и только том случае, когда $x_{\perp} = y_{\perp}$. Это отношение, очевидно, является отношением эквивалентности. Класс $\sim_{\perp}$-эквивалентности, содержащий элемент x будем обозначать $\widetilde{X}_x$. Наконец, пусть $Y \subseteq X$, и $G(X, E)$ — граф со множеством вершин X. Через $G(Y)$ обозначим подграф графа G, построенный на вершинах множества Y.

Теорема 2. *Пусть X — конечное множество вершин графа G. Предположим, что существует $x \in X$, такой что класс $\sim_{\perp}$-эквивалентности $\widetilde{X}_x$ содержит более одного элемента. Наконец, пусть $X' = X\backslash\{x\}$ и $G' = G(X')$. Тогда алгебры $M(X; G)$ и $M(X'; G')$ универсально эквивалентны.*

Ниже приведен пример двух графов, имеющих одинаковые универсальные теории, один из которых является деревом, а второй — нет.



О РЕШЕТКАХ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЦИКЛОВ

А. Л. Расстригин
Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград
rasal@fizmat.vspu.ru

Формацией называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений ([1]). Формация, состоящая из конечных (не более чем счетных) систем, называется *конечной* (*не более чем счетной*) формацией.

Унаром называется унарная алгебра с одной операцией. Основные определения можно найти в [2]. Объединение (конечного числа) попарно непересекающихся унаров называется их (*конечной*) *прямой суммой*. Унар, содержащий лишь конечное число попарно неизоморфных циклов, называется унаром *с конечным числом циклов*.

В работе [2] автора было дано абстрактное описание решетки конечных формаций унаров. Из него следует, что решетка подформаций произвольной конечной формации унаров дистрибутивна.

Для решетки всех формаций унаров это не так. В частности, верно

Предложение. *Решетка всех не более чем счетных формаций унаров не модулярна.*

Таким образом, решетка всех формаций унаров не модулярна.

Для данной формации $\mathfrak{F}$ множество всех ее подформаций образует полную решетку $L_F(\mathfrak{F})$ по отношению теоретико-множественного включения.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров с конечным числом циклов. Тогда решетка $L_F(\mathfrak{F})$ дистрибутивна в тех и только тех случаях, когда*

A. либо $\mathfrak{F}$ содержит только конечные прямые суммы,

B. либо $\mathfrak{F}$ содержит только прямые суммы циклов.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров с конечным числом циклов. Тогда решетка $L_F(\mathfrak{F})$ дистрибутивна в том и только том случае, когда она модулярна.*

Литература

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.

2. Расстригин А. Л. *Формации конечных унаров* // Чебышевский сборник. – 2011. – Т. XII. – № 2 (38). – С. 102–109.

О ПРОСТРАНСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ПУАССОНА

С. М. Рацеев
Ульяновский государственный университет, Ульяновск
RatseevSM@mail.ru

Векторное пространство A над полем K с двумя K-биллинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница: $\{a\cdot b, c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b,\ a,b,c\in A$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$. Определим подпространство R_n в P_n, которое является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$R_n = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\}\cdot\{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\}\cdot ... \cdot\{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\}\cdot x_{\tau(2m+1)}\cdot ...\cdot x_{\tau(n)} \mid$$
$$\tau\in S_n,\quad 0\leqslant 2m\leqslant n,\quad \tau(1)<\tau(2),\ \tau(3)<\tau(4), ...,$$
$$\tau(2m-1)<\tau(2m), \tau(1)<\tau(3)<...<\tau(2m-1),$$
$$\tau(2m+1)<\tau(2m+2)<...<\tau(n)\rangle_K.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим $R_n(\mathbf{V}) = R_n/(R_n\cap Id(\mathbf{V}))$, $r_n(\mathbf{V}) = dim\ R_n(\mathbf{V})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда либо*

1) $r_n(\mathbf{V})\geqslant 2^{n-1}$ *для любого* n,

либо

2) *найдется такой многочлен* $a_{2N}x^{2N}+...+a_1x+a_0$ *степени* $2N\geqslant 0$ *из кольца* $\mathbb{Q}[x]$, *что для любого* $n\geqslant 2N$ *будет выполнено равенство* $r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N}+...+ a_1n+a_0$, $a_{2N}\neq 0$, *причем*

либо 2a) $r_n(\mathbf{V})\geqslant 1+\dfrac{n(n-1)}{2}$, $n\geqslant 1$, *и* $\frac{1}{(2N)!}\leqslant a_{2N}\leqslant \frac{1}{N!2^N}$,

либо 2b) $r_n(\mathbf{V}) = 1$ *для любого* n.

Пусть Λ_2 — алгебра Грассмана с единицей, образующими элементами e_1, e_2 и операцией умножения $\wedge$. Введем в алгебре Λ_2 два новых умножения:

$$a\cdot b = \frac{1}{2}(a\wedge b + b\wedge a),\ \{a,b\} = a\wedge b - b\wedge a,\quad a,b\in\Lambda_2.$$

Обозначим полученную алгебру Пуассона $(\Lambda_2, +, \cdot, \{,\})$ через G_2.

Теорема 2. *В случае основного поля нулевой характеристики многообразие $var(G_2)$, порожденное алгеброй G_2, является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ растет не ниже полинома.*

О ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ГРУПП

И. В. Сабодах
Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнёва, Красноярск
sabodax@mail.ru

Понятие насыщенности группы заданным множеством групп появилось в 1993 году в работах А.К. Шлёпкина [1]: Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечных простых неабелевых групп, в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит элемент нечетного порядка. Как показали А.С. Кондратьев и В.Д. Мазуров [2], множеству $\mathfrak{F}$ принадлежат только группы: $E_6^\delta(q)$ и $L_n^\delta(q)$.

В [3, 4] доказан следующий результат: Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами из конечного множества $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$.

В работе [3] описаны периодические группы, насыщенные конечным подмножеством множества $\mathfrak{S}$ всех конечных простых групп S, обладающих тем свойством, что нечетные порядки элементов централизатора силовской 2-подгруппы из S не превосходят числа 3.

Цель настоящей работы – объединить и обобщить эти результаты. Пусть $\mathfrak{L}_3 = \{L_3(q), U_3(q), q \text{ нечетно}\}$. Пусть $\mathfrak{E}$ – множество конечных элементарных абелевых 2-групп и $\mathfrak{M} = \{L \times E | L \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{L}_3, E \in \mathfrak{E}\}$.

Теорема. *Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{M}$, то $G \in \mathfrak{M}$.*

Следствие. *Пусть $\mathfrak{N} = \{L \times E | E \in \mathfrak{E}\}$, где L – простая группа лиева типа ранга 1. Если G – периодическая группа, насыщенная конечным множеством групп из $\mathfrak{N}$, то $G \in \mathfrak{N}$.*

Литература

1. Шлепкин А. К., *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы* // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре: Красноярск. – 1993. – С. 369.

2. Кондратьев А. С., Мазуров В. Д., *2–сигнализаторы конечных простых групп* // Алгебра и логика. – 2003. – Т. 42 – № 5 – С. 594-623.

3. Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г., *О группах, насыщенных конечным множеством групп* // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45 – № 6 – С. 1397-1400.

4. Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г., *О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами* // Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ. – 2004. – № 2 – С. 96-100.

АБСОЛЮТНО ЗАМКНУТЫЕ ГРУППЫ В КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

С. А. Шахова
Алтайский государственный университет, г. Барнаул
sashakhova@gmail.com

Для произвольного квазимногообразия $\mathfrak{M}$ групп, группы G из $\mathfrak{M}$ и её подгруппы H определим, следуя [1, 2], множество $dom_G^{\mathfrak{M}}(H)$, называемое доминионом подгруппы H группы G в квазимногообразии $\mathfrak{M}$, следующим образом:

$$dom_G^{\mathfrak{M}}(H) = \{g \in G \mid \forall M \in \mathfrak{M}\ \forall \varphi, \psi : G \to M,$$

$$\text{если } \varphi\mid_H = \psi\mid_H, \text{то } \varphi(g) = \psi(g)\},$$

где $\varphi, \psi : G \to M$ — гомоморфизмы группы G в группу M; $\varphi\mid_H$, $\psi\mid_H$ — сужение гомоморфизмов φ, ψ на подгруппу H; $\varphi(g)$, $\psi(g)$ — образы элемента g при φ, ψ.

Группа $H \in \mathfrak{M}$ называется абсолютно замкнутой в $\mathfrak{M}$, если $dom_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$ для любой группы G из $\mathfrak{M}$, содержащей H в качестве подгруппы.

Настоящая работа посвящена исследованию групп, абсолютно замкнутых в квазимногообразиях абелевых групп.

Обозначим $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{P}$ — множество простых чисел, Z_n — циклическая группа порядка n.

Каждому квазимногообразию $\mathfrak{M}$ абелевых групп поставим в соответствие множество

$$\xi(\mathfrak{M}) = \left\{p \in \mathbf{P} \mid (\exists k \in \mathbf{N})(Z_{p^{k-1}} \in \mathfrak{M} \ \&\ Z_{p^k} \notin \mathfrak{M})\right\}$$

и для $p \in \xi(\mathfrak{M})$ зафиксируем $k = k(p)$ из определения $\xi(\mathfrak{M})$.

Хорошо известно [3], что произвольная абелева группа H разлагается в прямую сумму полной и редуцированной подгрупп. Обозначим через H_r редуцированную подгруппу группы H. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное квазимногообразие абелевых групп, $H \in \mathfrak{M}$. Группа H абсолютно замкнута в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента g бесконечного порядка из H_r, любого $p \in \xi(\mathfrak{M})$ и соответствующего ему $k = k(p)$ выполнено: $g^{p^{k-1}} \in H_r^{p^k}$, где $H_r^{p^k}$ — подгруппа, порождённая p^k-ми степенями элементов группы H_r.*

Литература

1. Isbell J. R., *Epimorphisms and dominions, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra.* – New York: Springer-Verlag, 1966.

2. Budkin A. I., *Dominions in quasivarieties of universal algebras* // Stud. Log.. – 2004. – V. 78. – № 1-2. – C. 107–127.

3. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп.* – М.: Наука, 1982, – 240 с.

МОДУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

В. Ю. Шапрынский
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
vshapr@yandex.ru

Элемент x решетки называется *модулярным*, если

$$y \leqslant z \to (y \vee x) \wedge z = y \vee (x \wedge z)$$

для любых элементов y и z этой решетки. В докладе рассматриваются модулярные элементы решетки всех полугрупповых многообразий. Такие элементы будем называть *модулярными многообразиями*. Задаче описания модулярных многообразий и родственным ей задачам посвящен § 14 обзора [1]. Тождества вида $w = 0$ называются 0-*приведенными*. Тождество называется *подстановочным*, если обе его части содержат одни и те же буквы и правая часть получается из левой взаимно однозначным переобозначением букв. В работах [2, 3] задача описания модулярных многообразий была полностью сведена к рассмотрению нильмногообразий, заданных только 0-приведенными и подстановочными тождествами. Нами получено полное описание модулярных нильмногообразий, что завершает описание модулярных многообразий в целом. Полная формулировка полученного результата требует введения целого ряда определений и обозначений, и потому не может быть приведена здесь по соображениям объема. Отметим, однако, что наше описание близко по духу к полученному в [4] описанию специальных элементов ряда типов в решетке надкоммутативных многообразий полугрупп. В общих чертах его можно сформулировать так: вводится некоторое счетное множество конечно базируемых многообразий и доказывается, что нильмногообразие модулярно тогда и только тогда, когда оно является пересечением многообразий из этого множества, при условии, что некоторые многообразия пересекать между собой запрещается.

Литература

1. Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В., *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

2. Jezek J., McKenzie R. N., *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46. – № 2. – P. 199–245.

3. Vernikov B. M., *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. – 2007. – Vol. 48. – № 4. – P.595–606.

4. Vernikov B. M., Shaprynskiˇi V. Yu., *Special elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Order. – 2011. – Vol. 28. – № 1. – P. 139–155.

МОДУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

А. И. Шестаков
Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск
shestalexy@mail.ru, shestalexy@yandex.ru

Тернарные дифференцирования, а также связанные с ними обобщенные дифференцирования изучались в различных классах алгебр, см. например [1] - [3]. В настоящей работе эта задача изучается для конечномерных йордановых супералгебр.

Пусть A — супералгебра над полем Φ, т. е. $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная Φ-алгебра.

Тройка (D, F, G) однородных линейных отображений $D, F, G \in \mathrm{End}(A)$ называется *тернарным дифференцированием* супералгебры A, если для любых $x, y \in A$ выполняется равенство

$$D(xy) = F(x)y + (-1)^{deg(x)deg(G)}xG(y).$$

Первая компонента D тернарного дифференцирования (D, F, G) называется также *обобщенным дифференцированием*. Понятие тернарного/обобщенного дифференцирования обобщает обычные дифференцирования при $D = F = G$, а также δ-дифференцирования при $F = G = \delta D$, $(\delta \in \Phi)$, см. например [4]- [5].

Заметим, что тройки отображений следующего вида, очевидно, являются тернарными дифференцированиями в любой супералгебре:

$$\Delta = (\phi + \psi + D^0,\ \phi + D^0,\ \psi + D^0), \tag{4}$$

где ϕ, ψ — произвольные элементы центроида супералгебры A, а D^0 — любое обыкновенное дифференцирование в A, т. е.

$$D^0(xy) = D^0(x)y + (-1)^{deg(x)deg(D^0)}xD^0(y),$$

при этом $deg\,\phi = deg\,\psi = deg\,D^0 = deg\,\Delta$. Назовем приведенные тернарные дифференцирования вида (4) — *стандартными.* Соответственно, определяются и стандартные обобщенные дифференцирования как главные компоненты стандартных тернарных дифференцирований.

Показано, что за определенным исключением, всякое тернарное (обобщенное) дифференцирование в простых йордановых супералгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль является стандартным, а также в случае произвольной характеристики поля не равной 2, но при условии полупростоты четной части. Исключение же связано с простой супералгеброй невырожденной билинейной формы f, определенной на полностью нечетном двухмерном векторном пространстве V, т. е.

$$J(V, f) = \Phi \cdot 1 + V_0 + V_1 \ \text{ при } \ V_0 = 0,\ V_1 = V, \ \ dim\,V = 2. \tag{5}$$

Все четные дифференцирования данной супералгебры являются стандартными, а все нечетные дифференцирования находятся во взаимно однозначном соответствии с векторами из V, следующим образом:

$$\{\, \Delta_v \mid \Delta_v(1) = (v, \tfrac{v}{2}, \tfrac{v}{2}), \ \ \Delta_v(x) = (\tfrac{f(x,v)}{2}, f(x,v), f(x,v)) \quad \forall\, x \in V \,\}_{v \in V}.$$

Это единственный случай простых йордановых супералгебр с нестандартными тернарными (обобщенными) дифференцированиями.

Литература

1. Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M. *Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras* // Linear Algebra Appl. – 2008. – Т. 428. – № 8-9. – С. 2192–2219.

2. Leger G., Luks E. *Generalized derivations of Lie Algebras* // J. of Algebra. – 2000. – № 228, С. 165–203.

3. Шестаков А. И., *Тернарные дифференцирования сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр* // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53. – № 5. – С. 1178—1195.

4. Филиппов В. Т. *О δ-дифференцированиях альтернативных первичных и мальцевских алгебр* // Алгебра и Логика. – 2000. – № 39.

5. Желябин В.Н., Кайгородов И.Б. *О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки* // Алгебра и Анализ. – 2011. – Т. 23. – № 4. – С. 40–58.

КОРРЕКТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД АЛГОРИТМАМИ

З. М. Шибзухов

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

szport@gmail.com

В настоящей работе обсуждается класс алгебраических корректных операций над алгоритмами [1–5], возникающих в связи с проблемой построения корректных алгоритмов [6] машинного обучения. Корректные операции обладают важным свойством: они сохраняют свойство корректности алгоритмов. Типичная задача поиска корректной операции возникает, когда используемый метод построения алгоритма по выборочной информации в рамках выбранной модели алгоритмов позволяет строить множество различных алгоритмов, корректных на обучающей информации, но имеющих недостаточный уровень обобщающей способности. Значительное внимание уделено исследованию алгебраических поточечно корректных и агрегированно корректных операций над алгоритмами. Поточечно корректные операции сохраняют свойство поточечной корректности, когда алгоритм дает верные ответы для всех примеров из обучающего множества. Агрегированно корректные операции сохраняют свойство агрегированной корректности, когда агрегирующая оценка качества функционирования алгоритма принимает оптимальное значение.

Описана обоснованная схема построения поточечно корректных и агрегированно корректных операций для задач регрессии и задач классификации. Большое внимание также уделено исследованию применения агрегирующих функций типа среднего для построения корректных операций над алгоритмами.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00162-а.

Литература

1. Shibzukhov Z. M. *Aggregationally correct operations on algorithms.* – Proceedings of XI International Conference “Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies” (PRIA-2013). – 2013. – Samara. Vol. 1 – PP. 130-132.

2. Шибзухов З. М. *О поточечно корректных операциях над алгоритмами распознавания и прогнозирования.* // Доклады Академии наук. – М.: МАИК “Наука”. – 2013. – Т. 450 – №1 – С. 24–27.

3. Шибзухов З. М. *Поточечно корректные операции над алгоритмами* // Доклады Международной конференции ИОИ-10. М: Торус-Пресс. – 2012. – С. 90–93.

4. Шибзухов З. М. *Корректные расширения корректных* ΣΠ *-алгоритмов* // Доклады 15-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов". М.: Макс-Пресс. – 2011. – С. 116–119.

5. Шибзухов З. М. *О некоторых конструктивных и корректных классах алгебраических* ΣΠ*-алгоритмов.* // Доклады Академии наук. – М.: МАИК “Наука” – 2010. – Т. 432. – № 4. – С. 465–468.

6. Журавлев Ю. И., *Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации* // Проблемы кибернетики. М.: Наука. – 1978. – Т. 33. – С. 5–68.

ON LEX-EXTENSIONS OF PL-GROUPS

E. E. Shirshova
Moscow Pedagogical State University, Moscow
shirshova.elena@gmail.com

Let G be a partially ordered group (*po*-group), and $G^+ = \{x \in G | \, e \leqslant x\}$. A subgroup M of G is said to be *convex* if the inequalities $a \leqslant g \leqslant b$ imply $g \in M$ for any $a, b \in M$ and $g \in G$. An *o-ideal* is a convex directed [1] normal subgroup of *po*-group. A *po*-group G is called a *lex-extension of a convex normal subgroup M by the partially ordered group G/M*, if the inequality $m < a$ holds for any elements $a \in G^+ \setminus M$ and $m \in M$. Elements a and $b \in G^+$ are said to be *almost orthogonal* if the inequalities $c \leqslant a, b$ imply $c^n \leqslant a, b$ for any $c \in G$ and any integer $n > 0$. A *po*-group G is an *AO-group* if each $g \in G$ has a representation $g = ab^{-1}$ for some almost orthogonal elements a and b of G^+.

Theorem 1. *Suppose an AO-group G is the lex-extension of its o-ideal M, and N is the set-theoretic intersection of all convex directed subgroups H of G, where $M \subset H$; then if $n \in N \setminus M$, then $n = ab^{-1}$ for some almost orthogonal elements a and b of G^+, where there exist integers $k > 0$ and $l > 0$ for which either the inequality $a \leqslant b^k$ or the inequality $b \leqslant a^l$ holds.*

A *po*-group G is an *interpolation group* if whenever $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ and $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$, then there exists $c \in G$ such that $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. An interpolation *AO*-group is called a *pl-group*.

Theorem 2. *Suppose a pl-group G is the lex-extension of a convex normal subgroup M, and N is the set-theoretic intersection of all convex directed subgroups H of G, where $M \subseteq H$; then the following assertions hold:*

1. N is an o-ideal of G;

2. G is the lex-extension of N by the po-group G/N;

3. if $N \neq M$, then the set $N \setminus M$ is a chain;

4. if $a, b \in N^+ \setminus M$, then there exist integers $k > 0$ and $l > 0$ for which either the inequality $a \leqslant b^k$ or the inequality $b \leqslant a^l$ holds.

References

1. Fuchs L., *Partially Ordered Algebraic Systems*. Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris; Addison-Wesley, Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1963.

ABOUT SHUNKOV GROUP SATURATED BY $PGL_2(P^N)$

A. A. Shlyopkin, I. V. Sabodakh

Russia, Krasnoyarsk

shlyopkin@gmail.com

The structure of periodic Shunkov group saturated by $PGL_2(p^n)$, was obtained in presented work.

Group G is called Shunkov group if for any finite subgroup H from G every two conjugate elements of prime order in factor-group $N_G(H)/H$ generate finite group.

Group G is saturated by the groups from set X, if any finite subgroup K from G is contained in subgroup of group G, isomorphic to some group from X [1].

We continued studies started in the articles [2–4].

Define $\mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\}$, where p is fixed prime number and n varies.

Theorem. *Periodic Shunkov group, saturated by the groups from $\mathfrak{M}$ isomorphic to $PGL_2(Q)$ for some locally finite field Q.*

References

1. Shlyopkin A. K., *Shunkov groups, contains finite unsolvable subgroups* // Books of abstracts of the third international conference on algebra, Krasnoyarsk, Russia. – 1993. – P. 363.

2. Panushkin D. N., *Shunkov Groups, saturated by direct products of different groups* // PhD. Dissertation, Krasnoyarsk. – 2010. – P. 66.

3. Shlyopkin A. A., *About groups, saturated by groups* $\{GL_2(p^n)\}$ // Books of abstracts of the international conference on algebra, Kiyv, Ukraine. – 2012. – P. 144.

4. Shlyopkin A. A., *Groups saturated by groups* $\{GL_2(p^n)\}$ // Journal of SibSAU. – 2013. – No. 1. – P. 96–100.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО В РАМКАХ K-ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА

Е. В. Шматова

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (НИИ ПМА КБНЦ РАН), Нальчик

lenavsh@yandex.ru

В данной работе рассмотрена задача нахождения аналога среднего по Колмогорову для переменных k-значной логики, так как в задачах распознования с целью уменьшения вычислительных затрат при обработке больших объемов данных требуется нахождение средней величины анализируемых параметров. В работе [1] предложено построение регулярных конечных сумм по Колмогорову, которое обобщает многие известные частные случаи суммирования.

Пусть задан набор значений $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, где $x_i\in\{0,1,...,k-1\}, k\in N$. Требуется определить их среднее $\mu(x_1,...,x_n)$.

Функция $\mu(x_1,...,x_n)$ определяет среднее дискретных значений $x_1,...,x_n$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. μ - симметрическая функция;
2. μ - монотонная функция;
3. $\mu(x,x,...,x)=x$;
4. $\mu\left(x_1,...,x_l,y_1,...,y_m\right)=\mu_{l+m}\left(x,...,x,y_1,...,y_m\right)$, где $x=\mu(x_1,...,x_l)$.

Эти условия, следуя Колмогорову А.Н. [2] будем называть аксиомами среднего для дискретных величин.

Случай $k=2$ рассмотрен в работе [3]. Рассмотрим задачу k -значной логики, где $k>2$.

Верхним средним двух величин k-значной логики назовем функцию $g(x_1,x_2)=max(x_1,x_2)$, а нижним средним - $h(x_1,x_2)=min(x_1,x_2)$.

Теорема. *Аналог среднего по Колмогорову для n дискретных величин $x_1,x_2,...,x_n\in\{0,1,...,k-1\}$ k-значной логики представим в виде:*

для n — четного

$$\mu_{max}(x_1,...,x_n)=max(min[g(x_n,x_{n-1}),\mu(x_1,...,x_{n-2})],\\ max[h(x_n,x_{n-1}),\mu(x_1,...,x_{n-2})])$$

$$\mu_{min}(x_1,...,x_n)=min(min[g(x_n,x_{n-1}),\mu(x_1,...,x_{n-2})],\\ max[h(x_n,x_{n-1}),\mu(x_1,...,x_{n-2})])$$

для n — нечетного

$$\mu(x_1,...,x_n)=\\ =max(min(x_n,\mu_{max}(x_1,...,x_{n-1})),\mu_{min}(x_1,...,x_{n-1}))=\\ =min(max(x_n,\mu_{min}(x_1,...,x_{n-1})),\mu_{max}(x_1,...,x_{n-1})),$$

где $\mu(x_1,...,x_n)\in\{0,1,...,k-1\}$.

Действительно, функция $\mu(x_1,...,x_n)$ является аналогом среднего, т.е. удовляют аксиомам среднего.

Замечание. При рассмотрении k-значной логики число функций отвещающих аксиомам среднего возрастает с возрастанием k.

Например, для трехзначной логики среднее двух величин кроме max и min существует еще две реализации среднего удовлетворяющих аксиомам [3].

Литература

1. Шибзухов З. М., *О регулярных конечных суммах по Колмогорову* // Материалы II Международного Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа, родственные проблемыанализа и информатики" Нальчик. – 2011. – С. 220–221.

2. Колмогоров А. Н., *Об определении среднего* // Избранные труды. Математика и механика. – М.: Наука, 1985. – С. 136–138.

3. Шматова Е. В., *О дискретном аналоге среднего по Колмогорову* // Материалы Международного симпозиума «Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели». Том 2. Нальчик: КБНЦ РАН, . – 2013. – Т. 2. – С. 70–71.

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С УСЛОВИЕМ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ $\mathfrak{S}_P\mathfrak{S}_{P'}$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А. Э. Шмигирев
УО МГПУ им. И.П.Шамякина, Мозырь
Shmigirev@tut.by

Все рассматриваемые группы конечны. Мы используем обозначения и терминологию из книги Л.А.Шеметкова [2].

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Будем говорить, что множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G плотно, если для любых двух различных подгрупп H и K группы G, из которых первая содержится во второй и не максимальна в ней, в группе G существует такая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа N, что $H \subseteq N \subseteq K$.

В работе [1] был исследован вопрос о строении группы G в которой множество всех ее $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно для случая, когда $\mathfrak{F}$ — класс всех p-замкнутых групп. Нами исследован данный вопрос в случае, когда $\mathfrak{F}$ — произвольная S-замкнутая насыщенная формация p-замкнутых групп. В частности, получена следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая S-замкнутая насыщенная p-замкнутая формация, G — группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп плотно. Тогда G либо разрешима, либо является p-замкнутой $\pi(\mathfrak{F})$-группой.*

Литература

1. Шеметков Л. А., *Формации конечных групп.* – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

2. Закревская Л. Н., *Конечные группы с плотной системой $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп*//в кн: Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1984. – С. 71–88.

ABUOT DERIVED π-LENGTH AND CENTRAL INTERSECTION OF A FINITE π-SOLVABLE GROUP

O. A. Shpyrko
The Branch of Moscow State University in Sevastopol, Sevastopol, Ukraine
shpyrko@mail.ru

All groups considered in this article are finite. All used concepts and notations correspond to [1].

Only finite groups are considered. Let $\mathbb{P}$ be the set of all primes and let π be the set of primes. Denote the complement to π in $\mathbb{P}$ by π'. Let $\pi(G)$ be the set of primes dividing an order G.

Each π-solvable group G has a subnormal series

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq ... \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1$$

whose factors G_{i-1}/G_i are π'-groups or abelian π-group. The least number of abelian π-factors of all such subnormal series of G is called the derived π-length of G and denoted by $l^a_\pi(G)$. Clearly, $l^n_\pi(G) \leqslant l^a_\pi(G)$ for any π-solvable group G and in case $\pi = \{p\}$ we will obtain $l^a_\pi(G) = l^n_\pi(G) = l_\pi(G) = l_p(G)$.

A.G.Anischenko and V.S.Monahov are noticed that many invariants of Sylow p-subgroups affecting the p-length $l_p(G)$ of a group G, can be replaced invariants central intersections of p-Sylow subgroups, see [2].

Recall, under the central intersection of π-Hall (p-Sylow) subgroups understood the intersection of two different π-Hall (p-Sylow, respectively) subgroup containing the center of one of them.

Proved the following theorem:

Theorem. *1. If a p-solvable group G has no central p-Sylow intersection, then $l_p^a(G) = d(G_p)$.*

2. If a π-solvable group G has no central π-Hall intersection, then $l_\pi^a(G) = d(G_\pi)$.

Here $d(G_\pi(G)$ $(d(G_p))$ is the derived length of a π-Hall (p-Sylow, respectively) subgroup of a group G.

References

1. V.S.Monakhov, *Introduction to the theory of finite groups and their classes,* Vysheishaya shkola, Minsk, 2006 (in Russian).

2. A.G.Anischenko, V.S.Monakhov, *Central intersections and p-length of p-solvable groups,* Dokl. AN BSSR **21**(11), 1977,968–971 (in Russian).

ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Сидоров

Вятский государственный гуманитарный университет, Киров

sedoy_vadim@mail.ru

Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{P}$ — множество положительных действительных чисел с обычной топологией, $U(X)$ — полуполе непрерывных функций из X в $\mathbb{P}$ с поточечными операциями сложения и умножения. Непустое множество $A \subseteq U(X)$ будем называть подалгеброй, если $A \cdot A \subseteq A$, $A + A \subseteq A$ и $P \cdot A \subseteq A$. Множество всех подалгебр полуполя $U(X)$ с добавленным пустым множеством (пустой подалгеброй) относительно отношения включения образует решетку $\mathbb{A}(U(X))$ всех подалгебр полуполя $U(X)$.

В 1997 г. Е. М. Вечтомов [1] доказал, что для произвольных компактов (компактных хаусдорфовых пространств) X и Y изоморфность решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$ подалгебр колец $C(X)$ и $C(Y)$ непрерывных действительнозначных функций равносильна гомеоморфности X и Y.

Доклад будет посвящен следующей гипотезе.

Гипотеза. *Для произвольных компактов X и Y решетки $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны.*

Литература

1. Вечтомов Е. М., *Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства* // Математические заметки. – 1997. – Т. 62. – Вып. 5. – С. 687–693.

О МНОГООБРАЗИИ $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Т. В. Скорая
Ульяновский государственный университет, Ульяновск
skorayatv@yandex.ru

Пусть основное поле Φ имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые ниже понятия можно найти в [1]. Напомним, что алгеброй Лейбница называется векторное пространство с билинейной операцией умножения, удовлетворяющей тождеству $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$.

Обозначим через $F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру многообразия $\mathbf{V}$ от счетного множества свободных образующих X. Пространство полилинейных элементов этой алгебры обозначим через $P_n(\mathbf{V})$. Ростом многообразия $\mathbf{V}$ называется асимптотическое поведение последовательности $c_n(\mathbf{V}) = dimP_n(\mathbf{V})$. В случае существования таких чисел $C_1 > 0, C_2 > 0,\ d_1 > 1, d_2 > 1$, что для всех чисел n выполняются неравенства $C_1 d_1^n < c_n(\mathbf{V}) < C_2 d_2^n$, говорят, что рост многообразия является экспоненциальным. Если при этом верхний и нижний пределы этой последовательности совпадают, то их значение называют экспонентой многообразия.

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ является аналогом хорошо известного многообразия $\mathbf{V}_3$ алгебр Ли. Ранее, в работе [2] относительно многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ была доказана почти полиномиальность его роста, в работе [3] были определены его кратности и кодлина, а в работе [4] доказана целочисленность экспоненты этого многообразия.

Теорема. *Экспонента многообразия $\widetilde{\boldsymbol{V}}_3$ равна 3.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-31084).

Литература

1. Giambruno A., Zaicev M.V., Polynomail identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs. – 2005. – V. 122. – P. 352

2. Mishchenko S.P., Varieties of linear algebras with almost polynomial growth // Polynomial identities and combinatorial methods. Pantelleria. – 2001. – P. 383–395.

3. Скорая, Т.В. Строение полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2012. – № 6(50). – С. 203–2012.

4. Шишкина Т.В., О целочисленности экспоненты подмногообразий многообразия ${}_3\mathbf{N}$ // Ученые записки Ульяновского Государственного Университета. Сер. Математика и информационные технологии. – 2011. – С. 18–23.

СПЕЦИАЛЬНАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ АРИФМЕТИКЕ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Д. М. Смелянский
МПГУ, Москва
dmsolardens@gmail.com

Метод реализуемости, предложенный С. Клини в 1945 г. в качестве конструктивной интерпретации интуиционистской арифметики HA, также является (в различных модификациях) одним из основных средств доказательства совместности формальных теорий, основанных на интуиционистской логике с рядом конструктивных принципов, первым из которых следует назвать тезис Черча CT:$\forall a(\psi(a) \to \exists b\varphi(a,b)) \to \exists e\forall a[\psi(a) \to \exists b(\varphi(a,b) \wedge e(a) = b)]$. В первоначальном варианте Клини эта модель показывает совместность арифметики HA с тезисом Черча (и даже усиленным его вариантом ECT), а также принципом конструктивного подбора Маркова M:$\forall x(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \wedge \neg\neg\exists x\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$. (Сама теория HA+ECT+M носит название "традиционный конструктивизм"). Для обоснования же другого принципа - P:$(\neg\psi \to \varphi(x)) \to \exists x(\neg\psi \to \varphi(x))$ - требуется более сложная модель, так называемой специальной реализуемости, при которой в качестве реализаций могут быть использованы не все возможные вычислимые функции, а лишь определенный класс.

Важнейшими характеристическими свойствами конструктивных теорий являются дизъюнктивность и экзистенциальность. Для проверки этих свойств в случае HA и HA+M созданы штрих-реализумость, требующую в своем определении для формул вида $\varphi \vee \psi$ и $\exists a\varphi(a)$ также выводимости формул φ, ψ или $\exists a\varphi(\bar{a})$. В случае же HA+CT+M требуется соединить штрих-реализуемость с эффективной реализуемостью Клини — такая модель известна как q-реализуемость. Если произвести такое же соединение штрих-реализуемости со специальной реализуемостью, то получим возможность доказать свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для HA+CT+P.

Следующей задачей построение подобных моделей для интуиционистской теории множеств в соединении с указанными конструктивными принципами и проверка наличия свойств эффективности таких теорий. В настоящей работе предлагаются такие усиленные с помощью выводимости варианты специальной реализуемости для арифметики и теории множеств.

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЙ

Е. В. Соколов

Ивановский государственный университет, г. Иваново

ev-sokolov@yandex.ru

Напомним, что согласно общему определению группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$, если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует такой гомоморфизм ψ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$, что $x\psi \neq 1$. Напомним также, что подгруппа Y группы X называется p'-изолированной в X для заданного простого числа p, если для любого простого числа q, не равного p, и для любого элемента $x \in X$ из соотношения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Д. Н. Азаровым и Е. А. Ивановой был получен следующий результат.

Теорема 1 [1]. *Пусть P — свободное произведение некоторого семейства локально нильпотентных групп с одной объединенной подгруппой Q. И пусть подгруппа Q хотя бы в двух свободных множителях содержится собственным образом. Если группа P аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что подгруппа Q p'-изолирована в каждом свободном множителе.*

Автором установлено, что аналогичное утверждение имеет место и для HNN-расширений групп.

Теорема 2. *Пусть $G = \langle A, t_i;\ t_i^{-1}H_it_i = H_{-i},\ \varphi_i\ (i \in \mathcal{I})\rangle$ — HNN-расширение локально нильпотентной группы A с проходными буквами t_i и подгруппами*

H_i, H_{-i}, связанными при помощи изоморфизмов φ_i $(i \in \mathcal{I})$. И пусть $H_i \neq A \neq$ $\neq H_{-i}$ для каждого $i \in \mathcal{I}$. Если группа G аппроксимируется нильпотентными группами, то существует такое простое число p, что для любых $i \in \mathcal{I}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon i}$ p'-изолирована в группе A.

Отметим, что если в условии теоремы 2 отказаться от требования несовпадения каждой из связанных подгрупп с базовой группой, то утверждение данной теоремы перестанет быть верным. Группа Баумслага-Солитера $\langle a, b;\ a^{-1}ba =$ $= b^6\rangle$, представляющая собой нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы с порождающим b, аппроксимируется конечными 5-группами [2, теорема 3], но ее подгруппа, порожденная элементом b^6, очевидно, не является p'-изолированной в базовой группе ни для какого простого числа p.

Литература

1. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. *К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп* // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. – Вып. 2 (1999). – С. 5–7.

2. Молдаванский Д. И. *Аппроксимируемость конечными p-группами HNN-расширений* // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. – 2000. – Вып. 3. – С. 129–140.

КОНЕЧНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ ОБОБЩЕННЫЕ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ КЭЛИ

Д. В. Соломатин, П. О. Мартынов

Омский государственный педагогический университет, Омск

denis_2001j@bk.ru, marv98@gmail.com

Изучаются конечные свободные коммутативные полугруппы, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли. Найдено следующее характеристическое свойство:

Теорема. *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих обобщенно внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

(1) $S = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m – любые натуральные числа;

(2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных r, m, h, t выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $h = 1$, $t = 1$, $m \leqslant 2$; или $r = 1$, $m = 1$, $t \leqslant 2$;

б) $((h \leqslant 2, t = 2)$ или $(h \leqslant 3, t = 1))$, при $r + m = 3$; или
$((r \leqslant 2, m = 2)$ или $(r \leqslant 3, m = 1))$, при $h + t = 3$;

(3) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c \rangle$.

Литература

1. Zelinka B., *Graphs of Semigroups* // Časopis. Pěst. Mat. – 1981. – V. 106. – P. 407–408.

2. Харари Ф., *Теория графов.* – М: Мир, 1973. – 300 с.

3. Sedláček J., *On a generalization of outerplanar graphs (in Czech)* // Časopis. Pěst. Mat. – 1988. – V. 113. – № 2. – P. 213–218.

4. Sedláček J., *On local properties of graphs again* // Časopis. Pěst. Mat. – 1989. – V. 114. – № 4. – P. 381–390.

5. Cáceres J., Márquez A., *A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs* // Mathematica Bohemica. – 1997. – V. 122. – № 3. – P. 225–230.

6. Соломатин Д. В., *Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли* // Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник.– Омск: Изд-во ОмГПУ. – 2003. – Вып. 3. – С. 32–38.

7. Соломатин Д. В., *Строение полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли* // Сибирские Электронные Математические Известия. – 2011. – Т. 8. – С. 191–212.

О τ-ЗАМКНУТОСТИ Ω_1-РАССЛОЕННЫХ ФОРМАЦИЙ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ T-ГРУПП

М. М. Сорокина

Брянский государственный университет имени И.Г. Петровского, Брянск

mmsorokina@yandex.ru

Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп были введены в рассмотрение В.А. Ведерниковым в 2009 году (см. [1]). Пусть $\mathfrak{M}$ - класс всех мультиоператорных T-групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T-подгрупп, $\mathfrak{I}_1$ - класс всех простых $\mathfrak{M}$-групп, $\emptyset \neq \Omega_1 \subseteq \mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{K}(G)$ - класс всех $\mathfrak{M}$-групп, изоморфных композиционным факторам $\mathfrak{M}$-группы G, $f : \Omega_1 \cup \{\Omega_1'\} \to \{$формации $\mathfrak{M}$-групп$\}$ - $\Omega_1 F$-функция, $\varphi : \mathfrak{I}_1 \to \{$непустые формации Фиттинга $\mathfrak{M}$-групп$\}$ - FR-функция. Формация $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{M} : G/O_{\Omega_1}(G) \in \in f(\Omega_1')$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ для всех $A \in \mathfrak{K}(G) \cap \Omega_1)$ называется Ω_1-расслоенной $\mathfrak{M}$-формацией с Ω_1-спутником f и направлением φ [1,2].

Пусть τ - подгрупповой $\mathfrak{M}$-функтор. $\mathfrak{M}$-формация $\mathfrak{F}$ называется τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$. Ω_1-спутник Ω_1-расслоенной $\mathfrak{M}$-формации называется τ-замкнутым, если все его значения являются τ-замкнутыми $\mathfrak{M}$-формациями [2].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ - Ω_1-расслоенная $\mathfrak{M}$-формация с направлением φ, $\varphi_0 \leqslant \varphi$, τ - регулярный $\Omega_1\varphi$-радикальный подгрупповой $\mathfrak{M}$-функтор, замкнутый относительно композиционных факторов. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает τ-замкнутым Ω_1-спутником, то $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутой формацией.*

Литература

1. Ведерников В. А., Демина Е. Н. *Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп* // Сиб. матем. ж. – 2010. – Т. 51. – № 5. – С. 990–1009.

2. Демина Е. Н. *Решетки n-кратно Ω_1-расслоенных τ-замкнутых формаций мультиоператорных T-групп* // Дискретная математика. – 2012. – Т. 24. – № 1. – С. 3–25.

О ГРУППАХ С H-ФРОБЕНИУСОВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

А. И. Созутов, А. М. Попов
Сибирский фелеральный университет, Красноярск; Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск
sozutov_ ai@mail.ru, vm_popov@mail.sibsau.ru

Элемент a группы G называется *H-фробениусовым*, если H — собственная подгруппа в G и все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ ($g \in G \setminus H$) являются группами Фробениуса с дополнением, содержащим элемент a.

Пусть $|a| > 2$ и a — H-фробениусовый элемент группы G. Является ли объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$ подгруппой? (См. вопрос 10.61 из Коуровской тетради [1]). Для случая четного порядка элемента a этот вопрос решен положительно в [2].

Теорема 1. *Пусть a — H-фробениусовый элемент группы G, $|a| < \infty$ и ядра всех подгрупп L_g ($g \in G \setminus H$) нильпотентны. Тогда для любого $g \in G \setminus H$ ядро F_g группы L_g локально конечно и для некоторого элемента $f \in F_g \setminus H$ подгруппа $H_g = \langle a, a^{gf} \rangle$ содержится в H и является дополнением группы L_g.*

Элемент x группы X называется *конечным*, если все подгруппы $\langle x, x^y \rangle$ ($y \in \in X$) в X конечны.

Теорема 2. *Пусть a — H-фробениусовый элемент группы G, $|a| > 5$, ядра всех подгрупп L_g ($g \in G \setminus H$) нильпотентны и $\langle a \rangle$ содержит неединичный конечный в H элемент. Тогда обьединение F ядер всех фробениусовых подгрупп из G с дополнением $\langle a \rangle$ является нормальной в G подгруппой и $G = FH$.*

Литература

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп.— Изд-е 14-е., Новосибирск, 1999.

2. Попов А. М., Созутов А.И. *О группах с H-фробениусовым элементом четного порядка* // Алгебра и логика.— 2005.— Т. 44.— № 1, С. 70–81.

ON THE SET OF COMMUTATORS IN PERFECT GROUPS

A. M. Staroletov
IM SB RAS and NSU, Novosibirsk
astaroletov@gmail.com

Let G be a group and a, $b \in G$. The element $a^{-1}b^{-1}ab$ of G is denoted by $[a, b]$ and is called the commutator of a and b. It is known that the set of all commutators may not be a subgroup of G. The smallest example of group with such property has order 96.

There are many different problems about the set of commutators. In particular, D. MacHale (see [1, question 17.76]) formulated the following question:
Does there exist a finite group G, with $|G| > 2$, such that there is exactly one element in G which is not a commutator?

We obtain the following properties of a group with unique non-commutator if such group exists.

Theorem. Let G be a finite group and $|G| > 2$. If $z \in G$ is the unique element which is not a commutator in G then

1) G is perfect, $|z| = 2$, and $z \in Z(G)$;

2) $Z(G)$ — is a 2-group;
3) $G/<z>$ is not a simple nonabelian group;
4) if $k(H)$ denotes the number of conjugacy classes in a finite group H then $k(G) = 2 \cdot k(G/<z>)$.

References

1. Mazurov V. D., Khukhro E. I. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook.* – Novosibirsk: Sobolev Inst. Mat., 18th edition., 2014. – 226 p.

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА ИНЪЕКТИВНЫХ ПОЛИГОНОВ

А. А. Степанова, П. А. Заморова
ДВФУ, Владивосток
stepltd@mail.ru

В работах [1, 2] приводится описание моноидов S, класс плоских, проективных, свободных и регулярных S-полигонов над которыми аксиоматизируем. В данной работе решена задача описания коммутативного моноида S, над которым класс инъективных S-полигонов аксиоматизируем.

Для формулировки данного результата напомним некоторые определения из теории моделей и теории полигонов (см. [3, 4]). Под левым S-полигоном $_SA$ над моноидом S (или просто S-полигоном) понимается множество A, на котором моноид S действует слева, причем единица S действует тождественно. Инъективным S-полигоном называется S-полигон $_SQ$ такой, что для любых S-полигонов $_SA$ и $_SB$, любого мономорфизма $\imath\colon {_SA} \to {_SB}$ и для любого гомоморфизма $f\colon {_SA} \to {_SQ}$ существует гомоморфизм $f'\colon {_SB} \to {_SQ}$ такой, что $f = f' \circ \imath$. Класс инъективных S-полигонов обозначается Inj. Класс K структур языка L называется аксиоматизируемым, если существует множество предложений Σ языка L такое, что структура $\mathcal{A}$ принадлежит классу K тогда и только тогда, когда каждое предложение из Σ истинно в $\mathcal{A}$.

Теорема. *Пусть S – конечно порожденный коммутативный моноид. Класс Inj инъективных S-полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда S – конечно порожденный моноид.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-01-00460-а.

References

1. Гоулд В., Михалёв А,В., Палютин Е. А., Степанова А. А. *Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских s-полигонов* // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. – Т. 14. – №7. – С. 63–110.

2. Михалёв А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. *Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов* // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. – Т. 10. – №4. – С. 107–157.

3. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, Acts and Categories* // Walter De Gruyter. Berlin. New York., 2000.

4. Кейслер Г., Чен Ч. *Теория моделей* // М.: Мир., 1977.

ON CLASSES OF STRUCTURES AND THEIR GENERIC LIMITS

S. V. Sudoplatov
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk
sudoplat@math.nsc.ru

In series of papers, semantic generic structures and their applications for model-theoretic purposes are defined. In [1], syntactic generic constructions are presented and they were applied for the classification of countable models of complete theories [2, 3]. In this talk, we consider topologies for classes of potential structures corresponding to generic constructions and investigate properties and cardinalities of neighborhoods in these topologies, both for countable and uncountable powers.

Let $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ be a self-sufficient generic class of a language Σ and $\Phi(A)$ be a diagram in $\mathbf{T}_0$. Denote by $[\![\Phi(A)]\!]$ the class $\{\mathcal{M}\mid\mathcal{M}\models\Phi(A)\}$ of all *potential* structures $\mathcal{M}$, of the language Σ, containing A and satisfying $\Phi(A)$. For a diagram $\Phi(A)\in\mathbf{T}_0$ we denote by $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso}}$ the quotient of $[\![\Phi(A)]\!]$ by the isomorphism relation; by $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},\lambda}$ the the restriction of $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso}}$ to the isomorphism types of structures of cardinality $\leqslant\lambda$; by $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},h}$ the restriction of $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso}}$ to the isomorphism types of ω-homogeneous structures; by $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},h,\lambda}$ the restriction of $[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},h}$ to the isomorphism types of structures of cardinality $\leqslant\lambda$.

Theorem 1. *Let $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ be a complete self-sufficient generic class and $\mathcal{M}$ be a countable $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-generic structure. The following conditions are equivalent:* (1) $\bigcap\limits_{\Phi(A)\in\mathbf{T}_0}[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},h,\omega}$ *is a singleton* (*consisting of the isomorphism type of generic limit* $\mathcal{M}$)*;* (2) *the structure $\mathcal{M}$ is saturated.*

Theorem 2. *Let $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$ be a complete self-sufficient generic class and $\mathcal{M}$ be a countable $(\mathbf{T}_0;\leqslant)$-generic structure. The following conditions are equivalent:* (1) $\bigcap\limits_{\Phi(A)\in\mathbf{T}_0}[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},\omega}$ *is a singleton* (*consisting of the isomorphism type of* $\mathcal{M}$)*;* (2) *the structure $\mathcal{M}$ is saturated and the theory $T=\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ is either countably categorical or there are no powerful types of T and there is unique, up to isomorphism, union of elementary chains of prime models over tuples which realizes all types in $S(T)$.*

Using the classification of countable models and spectrum functions for uncountable models of countable complete theories we investigated cardinalities and links for intersections $\bigcap\limits_{\Phi(A)\in\mathbf{T}_0}[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},h,\lambda}$ as well as for $\bigcap\limits_{\Phi(A)\in\mathbf{T}_0}[\![\Phi(A)]\!]_{\mathrm{Iso},\lambda}$.

The research is supported by RFBR grant No. 12-01-00460-a.

References

1. Sudoplatov S. V., *Syntactic approach to constructions of generic models* // Algebra and Logic. – 2007. – V. 46. – No. 2. – P. 134–146.

2. Sudoplatov S. V., *The Lachlan problem.* – Novosibirsk: NSTU, 2009. – 336 p.

3. Sudoplatov S. V., *Classification of Countable Models of Complete Theories.* — Novosibirsk, 2014.

О СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ КОЛЕЦ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Д. Т. Тапкин
Казань, КФУ
danil.tapkin@yandex.ru

Пусть R_1, R_2, ..., R_n - кольца, а M_{ij} - (R_i, R_j)-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ будут (R_i, R_k)-бимодульными гомоморфизмами, с оговоркой что $\varphi_{iij} : R_i \otimes_{R_i} M_{ij} \to M_{ij}$ и $\varphi_{ijj} : R_{ij} \otimes_{R_j} R_j \to M_{ij}$ - канонические изоморфизмы для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. За K обозначим множество всех $n \times n$-матриц (m_{ij}) с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения, K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leqslant i, k, l, j \leqslant n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ijk}\})$.

Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ijk}\})$ порядка n, в котором $M_{ij} = R$, для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, называется *кольцом формальных матриц над* R порядка n и обозначается $K_n(R)$ или $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$.

Пусть $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ - кольцо формальных матриц над R порядка n. Обозначим $\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$. Тогда $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$, для всех $a, b \in R$ и η_{ijk} лежит в центре кольца R. Также выполняются условия:
1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$,
2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}$, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

В то же время, для любого набора $\{\eta_{ijk} \,|\, 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ центральных элементов R, удовлетворяющих первому и второму условию, можно положить $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$, $a, b \in R$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ будем обозначать через $K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$.

Рассмотрим специальный случай колец формальных матриц над R порядка n. Для центральных элементов $\beta_1, ..., \beta_n$ положим $\eta_{ijk} = \beta_i^{\delta_{ik} - \delta_{ij}} \beta_j^{1 - \delta_{jk}}$. Непосредственная проверка показывает, что набор $\{\eta_{ijk} \,|\, 1 \leqslant i, j, k \leqslant n\}$ удовлетворяет условиям 1 и 2, представленным ранее, и, следовательно, определяет кольцо формальных матриц над R. Полученное кольцо будем обозначать $\mathbb{M}_{\beta_1, ..., \beta_n}(R)$. Верны следующие теоремы:

Теорема. *Пусть R - коммутативное кольцо, $n \geqslant 3$, $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n \in R$ и $\mathrm{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, ..., 0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n}(R)$, если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$ для каждого $i = \overline{1, n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_i \in U(R)$ и $1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$ - разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов.*

Теорема. *Пусть R - коммутативное кольцо, такое что $Z(R) \subseteq J(R)$. Пусть также $n \geqslant 3$ и $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n \in R$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, ..., \beta}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n}(R)$, если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i$ для каждого $i = \overline{1, n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v_i \in U(R)$.*

AMALGAM FOR AFFINE GROTHENDIECK' SCHEMES OF FINITE TYPE

N. V. Timofeeva
Yaroslavl' State University, Yaroslavl'
ntimofeeva@list.ru

The talk will be a continuation of the presentation given by the author on July 2013 at Krasnoyarsk [1] where the analogous result concerning zero-dimensional schemes [2] was presented.

We construct the amalgamated sum for so called affine Grothendieck' schemes of finite type over a field k. These are prime spectra of finitely generated commutative associative k-algebras with unity. Algebras of our interest are now not supposed to have Krull dimension equal to 0. For example, if such an algebra has no nilpotent elements then it is isomorphic to the coordinate ring (= ring of regular functions) of some closed algebraic subvariety X in some affine space $X \subset \mathbb{A}^n$.

The construction of the amalgamated sum $X_1 \coprod_{X_0} X_2$ of two schemes $X_1,\ X_2$ with respect to the scheme X_0 provides a systematic way to glue them together even in the case when X_0 is not an open subscheme in both $X_1,\ X_2$. We assume only that there are two morphisms $X_1 \leftarrow X_0 \rightarrow X_2$. Amalgam $X_1 \coprod_{X_0} X_2$ is a scheme defined by universality as a coproduct.

The dual picture in the category of k-algebras is formation of a product algebra defined by universality. If $X_i = \operatorname{Spec} A_i,\ i = 0, 1, 2$ and there are two k-algebra homomorphisms $A_1 \rightarrow A_0 \leftarrow A_2$ then $X_1 \coprod_{X_0} X_2 = \operatorname{Spec} A_1 \times_{A_0} A_2$ where the product of algebras $A_1 \times_{A_0} A_2$ behaves functorially like fibred product in the category of Grothendieck' schemes.

We do all the construction in the category of k-algebras and prove the following theorem.

Theorem. *The category of commutative associative algebras with unity of finite type over a field k can be supplied with universal products. Dually, the category of affine Grothendieck' schemes of finite type over k is supplied with amalgamated sums.*

References

1. Timofeeva N. V. *Amalgam for 0-dimensional schemes // Алгебра и логика: Теория и приложения. Международная конференция, посвященная памяти В.П. Шункова, Красноярск, 21 – 27 июля 2013 года. Тезисы докладов* – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. – С. 171.

2. Timofeeva N. V. *Amalgam for 0-dimensional schemes // preprint ArXiv:1307.2192v2 [math.AG]*

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ЭНДОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко
НГТУ, Новосибирск
eitim45@gmail.com

Пусть G – некоторая группа и $G' = [G, G]$ – её коммутант. Эндоморфизм φ группы G называется $IA-$эндоморфизмом, если он индуцирует тождественный эндоморфизм на группе $G_{ab} = G/[G, G]$.

Пусть F_n – свободная группа конечного ранга n. Группа $M_n = F_n/[F_n', F_n']$ называется свободной метабелевой группой ранга n.

Элемент $g \in G$ называется неподвижной точкой эндоморфизма φ, если $g\varphi = g$.

Неединичная неподвижная точка называется нетривиальной.

В [1] сформулирован следующий вопрос:

Верно ли что, что любой $IA-$ автоморфизм свободной метабелевой группы M_n имеет нетривиальные фиксированные точки?

Если ранг n группы M_n равен двум, то ответ утвердительный [2].

Однако при $n \geqslant 3$ в [3] указан $IA-$автоморфизм группы M_n, у которого нет нетривиальных неподвижных точек.

В [1], приведены достаточные условия для того, чтобы $IA-$эндоморфизм группы M_n имел нетривиальные неподвижные точки. Мы укажем необходимых и достаточных условиях для того, чтобы $IA-$эндоморфизм группы M_n, $n \geqslant 2$, имел нетривиальные неподвижные точки.

Из этой теоремы легко выводим ряд следствий, доказанных в работах [1, 3]. Одним из них является пример $IA-$автоморфизма группы M_n, $n \geqslant 3$, отличный от примера из [3], который не имеет нетривиальных неподвижных точек. Другим – распознаваемость $IA-$эндоморфизмов без неподвижных точек [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 12-01-00084, а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (государственное задание №2014/138, проект 1052)

Литература

1. Shpilrain V., *Fixed points of endomorphisms of a free metabelian group* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.. – 1998. – V. 123. – no 75. – P. 75–83.

2. Bachmuth S., *Automorphisms of free metabelian groups* // Trans. Amer. Math. Soc. . – 1965. – V. 118. – P. 93–114.

3. Kassabov M. , *An automorphism of a free metabelian group without fixed points* // Communications in Algebra . – 2004. – V. 32. – P. 3297–3304.

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ НЕКОТОРЫХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

А. А. Трофимук

Брестский гос. университет им. А.С. Пушкина, Брест

alexander.trofimuk@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1]. Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B.

Идеи работ [2, 3] нашли применение в исследовании разрешимых групп, небициклические силовские подгруппы которых имеют ограниченные порядки. Так в работе [4] для разрешимой группы G, у которой небициклические силовские подгруппы имеют произвольный порядок, доказано, что производная длина группы G ограничена сверху значениями функций, зависящими от этих порядков.

Рассмотрим для группы G цепочку подгрупп вида

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G), \quad G_i \lhd G. \tag{1}$$

Здесь $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппа Фраттини и подгруппа Фиттинга группы G.

В работе [5] исследовались разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) бициклические.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, у которых факторы цепочки вида (1) имеют заданные ограничения.

Теорема. *Зафиксируем натуральное число n. Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида* (1) *такая, что порядок каждой небициклической силовской p-подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i не делится на p^{n+1}, для каждого i и каждого $p \in \pi(G)$. Тогда нильпотентная длина группы G и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышают $\rho(n)+1$.*

Здесь $\rho(n)$ — максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n,\mathbb{P})$ над полем $\mathbb{P}$, см. [6, лемма 2.4].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

Литература

1. Huppert B., *Endliche Gruppen I.* – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

2. Монахов В. С., Грибовская Е. Е., *О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп* // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

3. Монахов В. С., *Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп* // Алгебра и логика. – 2004. – 43, № 4. – С. 411–424.

4. Монахов В. С., Трофимук А. А., *Конечные группы с ограничениями на порядки некоторых силовских подгрупп* // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – №5(62). – С. 127–132.

5. Трофимук А. А., *Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3(19). – С. 304–307.

6. Berkovich Y., *Solvable permutation groups of maximal derived length* // Algebra Colloquium. – 1997. – Vol. 4(2). – P. 175–186.

VERBAL CATEGORIES AND ANALYTIC FUNCTORS

S. N. Tronin

Kazan federal university, Kazan

Serge.Tronin@kpfu.ru

Let W be a verbal category [1], [2], $\mathcal{K}$ be the category of sets, or multisorted sets, or any other sufficiently good monoidal category.

We shall say that a functor $F : W \to \mathcal{K}$ is called W*-species of structures.* For each W-species of structures F there is *analytic functor* $\widetilde{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. By definition,

$$\widetilde{F}(X) = \int^{z \in W} F(z) \otimes X^{\otimes n}.$$

Any functor isomorphic to a functor of the type $\widetilde{F}$ also is called *polynomial.*

Theorem. *Let W be a verbal category, F and G are W-species of structures; then there exists the unique up to a natural isomorphism W-species of stuctures $F \circ G$ such that*

$$\widetilde{F} \cdot \widetilde{G} \cong \widetilde{F \circ G}.$$

Corollary. *The category of W-species of structures is a monoidal category with respect to $F \circ G$. Operads over verbal category W* [1], [2] *is monoids in this monoidal category.*

The above definition and results are the generalization and development of ideas from [3], [4] and from some other papers.

The work is supported by the grant NSh-5383.2012.1 of President Grants for Government Support the Leading Scientific Schools of the Russian Federation.

References

1. Tronin S .N., *Abstract Clones and Operads* // Siberian Mathematical Journal. – 2002. –V. 43. –№ 4. –P. 746–755.

2. Tronin S. N., *Multicategories and varieties of many-sorted algebras* // Siberian Mathematical Journal. –2008. –V. 49. № 5. –P. 944–958.

3. Joyal A. *Foncteurs analitiques et espaces de structures* // Lecture Notes in Math. – 1986. –V. 1234. –P. 126–159.

4. Fiore M., Gambino G., Hyland M., Winskel G., *The cartesian closed bicategory of generalised species of structures* // J.London Math. Soc. –2008. – V. 77. – № 2. – P. 203–220.

SOME APPLICATIONS OF THE OPERAD THEORY IN PUBLIC-KEY CRYPTOGRAPHY

S. N. Tronin, A. R. Gaynullina
Kazan federal university, Kazan
Serge.Tronin@kpfu.ru, GaynullinaAlina@gmail.com

In modern mathematical cryptography we see algorithms which uses various algebraic platforms. For example, widely used groups [1]. Our goal is to show that cryptographic algorithms can be constructed by using a platform of commutative operads introduced in [2]. Definitions and designations necessary for further can also be found in [2].

Let Z be a commutative operad, A be an algebra over Z. These data is public (not secret).

Protocol 1. Creation a common secret key. Alice's secret is the $\omega \in Z(n)$. Bob's secret is the $\lambda \in Z(m)$. Public elements are $a_{i,j} \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Alice computes $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} a_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Bob computes $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Then Alice sends Bob the elements α_j, and Bob sends Alice the elements β_i. Then Alice computes $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} \beta_i$, Bob computes $\sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} \alpha_j$. By definition of commutative operad, $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} a_{i,j}$. Thus Alice and Bob receive a common secret key.

Security of protocol is based on the complexity of the task of finding $\xi \in Z(k)$ using known $b_1, \ldots, b_k \in A$ and $\sum\limits_{i=1}^{k}{}^{(\xi)} b_i \in A$.

Protocol 2. Bit string m of length ℓ is encrypted. Public data is $g \in Z(n)$ and hash function h which maps elements of the operad Z to bit strings of length ℓ. Secret key is $x \in Z(m)$. Public key is $y = xg \ldots g \in Z(mn)$.

Encryption begins with a random selection of the session key $k \in Z(d)$. The first part of the ciphertext is $c_1 = kg \ldots g \in Z(dn)$. The second part of the ciphertext is the bit string $c_2 = m \oplus h(ky \ldots y)$.

Decryption: $m = c_2 \oplus h((xc_1 \ldots c_1)\sigma)$. Here σ is the uniquely calculated substitution. Security of this protocol is based on the complexity of the task of finding element of operad x according to known g and $xg \ldots g$.

References

1. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. *Group-based Cryptography.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2008. – xv+183 p.

2. Tronin S. N., *Operads and varieties of algebras defined by polylinear identities* // Siberian Mathematical Journal. –2006. – V. 47. –No. 3. –P. 555–573

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ОПЕРАД В КРИПТОГРАФИИ С ОТКРЫТЫМ КЛЮЧОМ

С. Н. Тронин, А. Р. Гайнуллина
Казанский федеральный университет, Казань
Serge.Tronin@kpfu.ru, GaynullinaAlina@gmail.com

В современной математической криптографии строятся и исследуются криптографические алгоритмы на платформах различных алгебраических систем. Например, достаточно широко используются группы [1]. Наша цель — показать, что криптографические алгоритмы можно строить на платформе введенных в [2] коммутативных операд. Используемые определения и обозначения можно найти в [2].

Пусть Z — коммутативная операда, A — алгебра над Z. Эти данные открыты (не являются секретными).

Протокол 1. Выработка общего секретного ключа. Секрет Алисы: $\omega \in Z(n)$. Секрет Боба: $\lambda \in Z(m)$. Задаются открытые элементы $a_{i,j} \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Алиса вычисляет $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} a_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Боб вычисляет $\beta_i = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Затем Алиса посылает Бобу элементы α_j, а Боб Алисе — элементы β_i. Наконец, Алиса вычисляет $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} \beta_i$, Боб вычисляет $\sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} \alpha_j$. Ввиду того, что по определению коммутативной операды $\sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} a_{i,j} = \sum\limits_{j=1}^{m}{}^{(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{(\omega)} a_{i,j}$, Алиса и Боб получают общий секретный ключ.

Криптостойкость протокола основана на трудности задачи о нахождении элемента операды $\xi \in Z(k)$ по известным $b_1, \ldots, b_k \in A$ и $\sum\limits_{i=1}^{k}{}^{(\xi)} b_i \in A$.

Протокол 2. Шифруется битовая строка m длины ℓ. Открытые данные: $g \in Z(n)$, и хэш-функция h, сопоставляющая элементам операды Z битовые строки длины ℓ. Секретный ключ: $x \in Z(m)$. Открытый ключ: $y = xg \dots g \in \in Z(mn)$.

Шифрование начинается со случайного выбора сеансового ключа $k \in Z(d)$. Затем вычисляется первая часть шифротекста: $c_1 = kg \dots g \in Z(dn)$. Вторая часть шифротекста — битовая строка $c_2 = m \oplus h(ky \dots y)$.

Дешифрование: $m = c_2 \oplus h((xc_1 \dots c_1)\sigma)$. Здесь σ — однозначно вычисляемая подстановка. Криптостойкость этого протокола основана на сложности задачи нахождения элемента операды x по известным g и $xg \dots g$.

Литература

1. A. Myasnikov, V. Shpilrain, A. Ushakov. *Group-based Cryptography.* – Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2008.

2. S.N.Tronin. *Operads and varieties of algebras defined by polylinear identities* // Siberian Mathematical Journal, 2006, 47:3, 555-573

RSA CRYPTOSYSTEM FOR DEDEKIND RINGS

S. N. Tronin, K. A. Petukhova

Kazan Federal University, Kazan

Serge.Tronin@kpfu.ru, ksenypet@mail.ru

Suppose R is dedekind ring and we have for R:

1. If $\mathfrak{M}$ is a maximal ideal then $R/\mathfrak{M}$ is a finite field.

2. Let $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ be maximal ideals then it's possible to find a set $W \subset R$, such as:

2.1. For any $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ we have coset $R/\mathfrak{N}$ such as $R/\mathfrak{N} \cap W = \{w\}$.

2.2. Any bit line of big fixed length may be encoded by elements from W.

We can also consider the Euler's function's analog for all ideals of R as $\varphi_R(\mathfrak{A}) = = |U(R/\mathfrak{A})|$, where U is a group of all invertible elements.

We will encode some message $m \in W$. Cipertext is from W too. "RSA-modulus" is an ideal $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$, where $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ are maximal ideals, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$.

Given $\varphi_R(\mathfrak{N}) = \varphi_R(\mathfrak{M}_1)\varphi_R(\mathfrak{M}_2)$ and suppose we have encryption exponent E such as GCD(E,$\varphi_R(\mathfrak{N})$)=1.

Suppose d is decryption exponent, $Ed = 1 + \varphi(\mathfrak{N})t$.

Public key is ideal $\mathfrak{N}$ and E. Secret key is $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, d$.

Encryption:

$C = m^E \pmod{\mathfrak{N}} \in W$.

Hence we need choose unique element $C \in W$, such as $m^E + \mathfrak{N} = w + \mathfrak{N}$.

Decryption:

$m = C^d \pmod{\mathfrak{N}} \in W$.

Hence a set W must have next property:

1. We have sufficiently good ajghoritm that allow to find unique $w \in W$ such as $z + \mathfrak{N} = w + \mathfrak{N}$ for every $z \in R$.

Theorem. *Given* $R, W, \mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ *that were described early. Then* $m^{Ed} \equiv m \pmod{\mathfrak{N}}$ *for every* $m \in W$.

It's possible to find some different examples of using commutative ring theory or algebraic number theory in cryptography in [1].

References

1. Glukhov M. M., *About using ideals class groups of quadratic field for building public key cryptosystem* // Mathimatical qwestions in cryptography. – 2010. – V. 1. – No. 1. – P. 23–54.

ON AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$

L. Yu. Tsiovkina

Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg

l.tsiovkina@gmail.com

Let λ denote the number of common neighbours for any two adjacent vertices of a distance-regular graph. In [1] A.A. Makhnev and M.S. Nirova have found all feasible intersection arrays of distance-regular graphs with $\lambda = 2$ and at most 4096 vertices. In the present work, we study prime divisors of orders of automorphisms and their fixed point subgraphs for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ from this list. As a corollary we show that arc-transitive distance-regular graphs with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ do not exist.

Theorem. *Let* Γ *be a distance-regular graph with intersection array* $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— an element of* G *of prime order* p *and let* Ω *be the subgraph of* Γ *induced by* $\mathrm{Fix}(g)$. *Let* $\alpha_i(g)$ *denote the number of vertices* x *in* Γ *such that* $d_\Gamma(x, x^g) = i$. *Then* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ *and one of the following holds:*

(1) Ω *is empty graph and either* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 27m$ *and* $\alpha_1(g) = 18(2r + m)$ *for some* $m, r \in \mathbb{Z}$, *or* $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$ *and* $\alpha_1(g) = 12(2l + 3)$ *for some* $l \in \mathbb{Z}$;

(2) Ω *is contained in an antipodal fibre of* Γ *and either*

(*i*) $p = 7$, $|\Omega| = 2, 9$, *or*

(*ii*) $p = 5$, $|\Omega| = 4, 9$;

(3) $p = 3$ *and* Γ *has precisely* 9 *antipodal fibres, intersecting* Ω *by* 3 *vertices,* $\alpha_3(g) = 54$, $\alpha_1(g) = 9(4l - 15)$ *for some* $l \in \mathbb{Z}$ *and the neighbourhood of a vertex in* Ω *is either two isolated* 4*-cycles, or* 8*-cycle;*

(4) $p = 2$ *and* Γ *has precisely* t *antipodal fibres, intersecting* Ω *by* s *vertices,* $\alpha_3(g) = t(9 - s)$ *and either*

(*i*) Ω *is the union of two antipodal fibres,* $\alpha_3(g) = 0$ *and* $\alpha_1(g) = 6(4l - 13)$ *for some* $l \in \mathbb{Z}$, *or*

(*ii*) $t = 4$, $s \in \{5, 7, 9\}$ *and a connected component of the subgraph* Ω *is* 4*-clique or* $K_{4,4}$ *minus the edges of matching, or*

(*iii*) $t = 6$ *and* $s \in \{3, 5\}$ *or* $s = 3$ *and* $t \in \{8, 10\}$.

Corollary. There are no arc-transitive distance-regular graphs with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$.

Acknowledgement. This research was supported by RFBR (project 14-01-31298) and by the grant of UrB RAS for young scientists in 2014 (project 14-1-NP-278).

References

1. Makhnev A. A., Nirova M.S. *On distance-regular graphs with* $\lambda = 2$ // Vestnik of Siberian Federal University. – 2014. – V. 7. – No. 1. – P. 35–41.

2. Tsiovkina L.Yu. *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2013. – V. 10. – P. 689–698.

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОРНЕВЫМ КЛАССОМ $\mathcal{K}$ HNN-РАСШИРЕНИЯ $\mathcal{K}$-ГРУППЫ

Е. А. Туманова
Ивановский государственный университет, г. Иваново
helenfog@bk.ru

Согласно [1] содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет условию Грюнберга: если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X и фактор-группы X/Y, Y/Z принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$.

Напомним, что группа X называется аппроксимируемой классом $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм ψ группы X на некоторую $\mathcal{K}$-группу такой, что $x\psi \neq 1$.

В данной работе получено достаточное условие аппроксимируемости произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ HNN-расширения $\mathcal{K}$-группы с совпадающими нормальными связанными подгруппами.

Пусть всюду далее $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, B — некоторая группа из класса $\mathcal{K}$, H — нормальная подгруппа группы B, φ — автоморфизм подгруппы H, $G = (B, t;\ t^{-1}Ht = H,\ \varphi)$ — HNN-расширение группы B с проходной буквой t и подгруппами H и $H\varphi = H$, связанными относительно автоморфизма φ.

Так как подгруппа H нормальна в B, то она нормальна и в G, поэтому ограничение на эту подгруппу любого внутреннего автоморфизма группы G оказывается автоморфизмом группы H. Множество $Aut_G(H)$ всех таких автоморфизмов является подгруппой группы $Aut\,H$ всех автоморфизмов группы H.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. *Пусть группы B/H и $Aut_G(H)$ принадлежат классу $\mathcal{K}$. Тогда существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B, и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то данная теорема превращается в критерий, формулируемый следующим образом.

Следствие. *Пусть класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно факторизации. Тогда следующие два утверждения равносильны и при выполнении любого из них группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

1. Существует гомоморфизм группы G на группу из класса $\mathcal{K}$, инъективный на подгруппе B.

2. Группа $Aut_G(H)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Литература

1. Gruenberg K. W., *Residual properties of infinite soluble groups* // Proc. Lond. Math. Soc. – 1957. – V. 7. – P. 29–62.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МИНИМАЛЬНЫМИ $\mathbb{P}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. Н. Тютянов, П. В. Бычков

Международный институт трудовых и социальных отношений , Гомель, Беларусь; Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины , Гомель, Беларусь

tyutyanov@front.ru, pbychkov@tut.by

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] было введено следующее

Определение. *Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-субнормальной в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-sn G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.*

Естественно рассмотреть вопрос о строении конечной группы с заданной системой $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп. Так, например, в [1] было установлено строение группы с $\mathbb{P}$-субнормальными силовскими подгруппами.

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов поставили следующий вопрос [2, вопрос 2]

Вопрос. *Описать группы G, у которых минимальные подгруппы (примарные циклические подгруппы) $\mathbb{P}$-субнормальны в G.*

Строение групп, у которых все циклические примарные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, было установлено В. Н. Княгиной и В. С. Монаховым в [3]. В частности, показано, что такие группы разрешимы.

В следующей теореме рассматриваются группы с минимальными $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами.

Теорема. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, у которой любая минимальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Тогда $S(G) \neq 1$ и неабелевы композиционные факторы группы G являются группами следующего списка: $SL_3(3)$; $SL_3(5)$; $PSL_2(7)$; $PSL_2(11)$; $SL_2(2^n)$, где $2^n + 1 = p$ — простое число Ферма.*

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51. – № 6. – С. 1270–1281.

2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. *О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам* // Проблемы физики математики и техники. – 2010. – № 2(3). – С. 21–27.

3. Monakhov V. S., Kniahina V. N. *Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups* // Ricerche di Matematica. – 2013. – V. 62. – № 2. – P. 307–322.

КОНГРУЭНЦ-СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА АЛГЕБР С ОПЕРАТОРОМ, ИМЕЮЩИХ ТЕРНАРНУЮ ОПЕРАЦИЮ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев
Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград
usl2004@mail.ru

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) называется операция f, удовлетворяющая тождествам $f(x,\ldots,x,y)=f(x,\ldots,x,y,x)=\ldots=f(y,x,\ldots\ldots,x)=x$.

В [1] показано, что на любом унаре $\langle A,f\rangle$ можно так определить тернарную операцию почти единогласия $m(x,y,z)$, что алгебра $\langle A,m,f\rangle$ становится алгеброй с оператором f. В [1] дано полное описание простых и строго простых алгебр $\langle A,m,f\rangle$.

Операция m определяется следующим образом. Пусть $\langle A,f\rangle$ — произвольный унар и $x,y\in A$. Для любого элемента z унара $\langle A,f\rangle$ через $f^n(z)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу z; $f^0(z)=z$. Положим $M_{x,y}=\{n\in\mathrm{N}\cup\{0\}\mid f^n(x)=f^n(y)\}$, а также $k(x,y)=\min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y}\neq\emptyset$ и $k(x,y)=\infty$, если $M_{x,y}=\emptyset$. Положим далее

$$m(x,y,z)\overset{def}{=}\begin{cases} z, & \text{если } k(x,y)\geqslant k(y,z);\\ x, & \text{если } k(x,y)<k(y,z).\end{cases} \tag{6}$$

Получено полное описание алгебр $\langle A,m,f\rangle$, решетка конгруэнций которых будет цепью, а также таких алгебр из данного класса, для которых решетка конгруэнций их унарного редукта $\langle A,f\rangle$ совпадает с решеткой конгруэнций алгебры $\langle A,m,f\rangle$.

Теорема. *Алгебра $\langle A,m,f\rangle$, где операция m задана по правилу (6), подпрямо неразложима в том и только в том случае, если решетка ее конгруэнций является цепью.*

Литература

1. Усольцев В. Л. *О строго простых тернарных алгебрах с операторами* // Чебышевский сб. – 2013. – Т. 14. – № 4. – С. 196–204.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СВОБОДНЫХ М-ПРОИЗВЕДЕНИЙ М-ГРУПП АВТОМОРФИЗМАМИ ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

С. В. Вараксин
Алтайский госуниверситет, Барнаул
varaksins@yandex.ru

Напомним, что *m-группой* (G,φ) называется алгебраическая система G сигнатуры $m=\langle\cdot,e,^{-1},\vee,\wedge,\varphi\rangle$, которая является ℓ-группой и операция φ есть автоморфизм второго порядка группы $\langle G,\cdot,e,^{-1}\rangle$ и антиизоморфизм решетки

$\langle G, \vee, \wedge\rangle$. Пусть G — группа с частичным или правым порядком P и автоморфизмом второго порядка φ. Порядок P реверсируется φ, если из $x \underset{P}{\leqslant} y$ следует $\varphi(y) \underset{P}{\leqslant} \varphi(x)$. Назовем φ реверсией, а группу частичной или правой m-группой.

Пусть (G, φ) — частичная m-группа. Назовем m-группу (F, φ) свободной над G, если (G, φ) вложима в (F, φ) и любой o-гомоморфизм $\alpha_0 : G \to H$, устойчивый относительно φ, продолжается до m-гомоморфизма $\alpha : F \to H$.

Теорема 1. *Пусть (G, φ) — частичная m-группа. Тогда условия эквивалентны:*

1) существует свободная m-группа над (G, φ);

2) существует m-эпиморфизм τ (G, φ) в некоторую m-группу (T, φ);

3) $G^+ = \{g \in G | e \leqslant g\}$ — это пересечение правых φ-реверсируемых порядков.

Пусть (G, φ) — частичная m-группа. Тогда ее порядок P является пересечением правых порядков $P = \bigcap\limits_{\lambda} P_\lambda$. Определим $C_\lambda = Aut(G, P_\lambda) \times Aut(G, P_\lambda^{-1})$, автоморфизмы φ_{C_λ} на $C_\lambda : \varphi_\lambda(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ и φ_C на $C = \prod\limits_{\lambda} C_\lambda : \varphi_C|_{C_\lambda} = \varphi_{C_\lambda}$. Определим $\sigma_\lambda : G \to C_\lambda$ как $\sigma_\lambda(g)(x_0, x_1) = (x_0 g, x_1 \varphi_G(g))$, и $\sigma : G \to C, \sigma = \{\sigma_\lambda\}$. Пусть F — ℓ-подгруппа в C, порожденная $\sigma(G)$, и $\varphi_F = \varphi_C|_F$.

Теорема 2. *m-группа (F, φ) является свободной m-группой над (G, φ).*

Пусть теперь $\{(G_i, \varphi_i)\}$ — множество m-групп, $G = \underset{i}{*} G_i$ — их свободное произведение в классе групп, φ — продолжение φ_i на G, а частичный порядок P на G порожден порядками на G_i. Пусть H — свободная m-группа над (G, φ), существующзая по теореме 2. Тогда m-группы (G_i, φ) допускают o-вложения α_i в m-группу (H, φ), перестановочные с φ (но не ℓ-вложения). Обозначим через $J = \langle (\alpha_i(g)^-)^{-1} \wedge \alpha_i(g)^+ | g \in G_i \rangle$ m-идеал m-группы (H, φ), а через F фактор-группу H/J по этому m-идеалу.

Теорема 3. *m-группа $(F, \varphi) = (H/J, \varphi)$ является свободным произведением m-групп (G_i, φ_i) в классе m-групп.*

Литература

1. Kopytov V. M., Medvedev N. Ya. The theory of lattice-ordered groups. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994.

2. Вараксин С. В. *О свободных m-группах и свободных m-произведениях* // Изв. Алт.ГУ. – 2013. – №1-1. – P. 16–18.

О ПРЕФАКТОРИЗУЕМЫХ ПРОЕКТОРАХ КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т. И. Васильева, Е. А. Рябченко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

tivasilyeva@mail.ru, 6041131@tut.by

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором, если она сохраняет это свойство при любом эпиморфизме группы G. Понятие $\mathfrak{X}$-проектора возникло в связи с обобщением свойств силовских, картеровых и холловых подгрупп группы [1]. Для класса Шунка $\mathfrak{X}$ во всякой разрешимой группе $\mathfrak{X}$-проекторы существуют и сопряжены [1]. В [2] доказано, что это утверждение имеет место во всякой π-разрешимой группе, если класс Шунка $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{X}$.

В настоящем сообщении найдены условия существования префакторизуемого проектора в классе π-разрешимых групп.

Напомним, если группа $G = AB$ — произведение подгрупп A и B, то подгруппа $S = (S \cap A)(S \cap B)$ называется префакторизуемой относительно $G = AB$ [3]. Класс Шунка — это непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, содержащий всякую группу G, у которой все примитивные фактор-группы принадлежат $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{G}_{\pi'}$ обозначается класс всех π'-групп.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $G = AB$ — π-разрешимая группа и $A \trianglelefteq G$. Если H — $\mathfrak{X}$-проектор подгруппы B и $\pi(H) \cap \pi(A) = \emptyset$, то в G существует $\mathfrak{X}$-проектор, префакторизуемый относительно $G = AB$.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка. Если холлова подгруппа B разрешимой группы G имеет нормальное дополнение A, то G обладает $\mathfrak{X}$-проектором, префакторизуемым относительно $G = AB$.*

Следствие 2. *Пусть разрешимая группа $G = AB$, $A \trianglelefteq G$. Если H — подгруппа Картера группы B и $\pi(H) \cap \pi(A) = \emptyset$, то в G существует подгруппа Картера, префакторизуемая относительно $G = AB$.*

Литература

1. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups.* – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 с.

2. Covaci R. *Some properties of projectors in finite π-soluble groups* // Studia Univ. Babes-Bolyai. Math. – 1981. – V. 26. – № 1. – P. 5–8.

3. Amberg B., Höfling B. *On finite products of nilpotent groups* // Arch. Math. – 1994. – V. 63. – P. 1–8.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С МОДУЛЯРНЫМИ ПОДГРУППАМИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

В. А. Васильев

Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины, Гомель

vovichx@mail.ru

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Понятие модулярного элемента решётки (в смысле Куроша) приводит к понятию модулярной подгруппы группы, которое было введено в 1969 году Р. Шмидтом и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В монографии Р. Шмидта [1] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп.

Нами используются $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ для обозначения класса всех нильпотентных групп и класса всех сверхразрешимых групп соответственно. Напомним, что $\mathfrak{X}\Phi$-гиперцентром $Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G)$ [2] группы G называется произведение всех нормальных подгрупп из G, чьи нефраттиниевы G-главные факторы являются $\mathfrak{X}$-центральными в G. В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\Phi$-гиперцентр обозначают $Z_{\Phi}(G)$.

На основе понятий модулярной подгруппы и $\mathfrak{X}\Phi$-гиперцентра группы нами получен следующий результат:

Теорема. *Пусть E — нормальная подгруппа группы G, и p — простой делитель $|E|$. Предположим, что силовская p-подгруппа P из E имеет подгруппу D такую, что $1 < |D| < |P|$ и каждая подгруппа H из P с порядком $|H| = |D|$ и каждая циклическая подгруппа из P с порядком 4 (если $|D| = 2$ и P является* *неабелевой 2-группой) не имеющие p-нильпотентного добавления в G являются модулярными в G. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(I) *Если p является наименьшим простым делителем $|G|$, то*

$$E/O_{p'}(E) \leqslant Z_{\Phi}(G/O_{p'}(E)).$$

(II) *Если p является наименьшим простым делителем $|E|$, то*

$$E/O_{p'}(E) \leqslant Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/O_{p'}(E)).$$

Литература

1. Schmidt R., *Subgroup Lattices of Groups.* – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

2. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *On the $\mathfrak{X}\Phi$-hypercentre of finite groups* // Journal of Algebra. – 2009. – Vol. 322. – P. 2106–2117.

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУКОЛЕЦ С ПОЛУРЕШЕТОЧНЫМ УМНОЖЕНИЕМ

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Вятский государственный гуманитарный университет, г. Киров

vecht@mail.ru, apetrov43@mail.ru

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, такая, что $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Будем говорить, что полукольцо S обладает *полурешеточным умножением*, если полугруппа $\langle S, \cdot\rangle$ является полурешеткой (то есть коммутативной идемпотентной полугруппой). Полукольцо с тождествами $x + x = x, x + y = xy$ называется *моно-полукольцом.* Скажем, что полукольцо обладает *константным сложением*, если на нем тождественно $x + y = u + v$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех полуколец с полурешеточным умножением. Для полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ будем обозначать многообразие полуколец, порожденное этими полукольцами. Для произвольного полукольцевого тождества $f = g$ через $\mathfrak{M}(f = g)$ обозначим подмногообразие в $\mathfrak{M}$, порожденное этим тождеством.

С точностью до изоморфизма существует четыре двухэлементных полукольца с полурешеточным умножением: двухэлементная цепь $\mathbb{B}$, двухэлементное поле $\mathbb{Z}_2$, двухэлементное моно-полукольцо $\mathbb{D}$ с единицей и двухэлементное полукольцо $\mathbb{T}$ с единицей и константным сложением.

Положим $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})$.

Теорема 1. *Решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ имеет ровно 4 атома $\mathfrak{M}(\mathbb{B}), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2), \mathfrak{M}(\mathbb{D}), \mathfrak{M}(\mathbb{T})$ и является атомной.*

Теорема 2. *Произвольное полукольцо с полурешеточным умножением является подпрямым произведением полукольца с полурешеточным умножением с тождеством $3x = x$ и полукольца с полурешеточным умножением с тождеством $3x = 2x$.*

Теорема 3. *В решетке подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ имеют место следующие равенства:*

A. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 2x)$;

B. $\mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x + y = x + y) = \mathfrak{M}(2x + y = x + y) = \mathfrak{M}(2x = x) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})$;

C. $\mathfrak{M}(3x + y = x + y) = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})$;

D. $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(x + 2xy + yz = x + 2xz + yz)$;

E. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{T}) = \mathfrak{M}(x + 2xy = 3x)$;

F. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T}) = \mathfrak{M}(x + yz = (x + y)(x + z)) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(3x = 2x)$;

G. $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}) = \mathfrak{M}(x + 2xy = 3xy)$;

H. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(3x = x)$;

I. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}(2x = x)$.

Теорема 4. *Решетка подмногообразий многообразия* $\mathfrak{N}$ *является* 16-*элементной булевой решеткой.*

К ТЕОРИИ ЧАСТИЧНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ $[0, \infty]$-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов, Н. В. Шалагинова
Вятский государственный гуманитарный университет, г. Киров
vecht@mail.ru, korshunnv@mail.ru

Продолжается изучение частичных полуколец $\mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ непрерыввных функций на топологических пространствах X со значениями в полукольце $[0, \infty]$ [1]. Непустое множество $I \subseteq \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ будет идеалом в частичном полукольце C^{+} $+_{\infty}(X)$, если для любых $f, g \in I$ и $h \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ функции $f + g, fh \in I$ при условии, что fh является непрерывной функцией. Идеал $I \subseteq \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ называется: *простым*, если $fg \in I \Rightarrow f \in I$ или $g \in I$; *строгим (полустрогим)*, если $f + g \in I \Rightarrow f, g \in I$ $(f + g, f \in I \Rightarrow g \in I)$.

Пусть X — тихоновское пространство, βX — его стоун-чеховская компактификация и $f^{\beta} \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(\beta X)$ — продолжение функции $f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ на βX. Для функции $f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ обозначим $\mathrm{Z}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ и $\mathrm{H}(f) = \{x \in \in X \mid f(x) = \infty\}$.

Пусть $p \in \beta X$. Следующие множества являются идеалами в $\mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$:

$$M_p = \{f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X) \mid p \in \overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X}\},\ M_{p,\infty} = \{f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X) \mid p \in \overline{\mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{H}(f)}^{\beta X}\},$$
$$O_p = \{f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X) \mid p \in (\overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X})^0\},$$
$$O_{p,\infty} = \{f \in \mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X) \mid p \in (\overline{\mathrm{Z}(f)}^{\beta X})^0 \text{ или } p \in (\overline{\mathrm{H}(f)}^{\beta X})^0\}.$$

Имеют место включения $O_p \subseteq M_p \subset M_{p,\infty}$.

Теорема 1. *Для произвольного тихоновского пространства X любой простой идеал P частичного полукольца $\mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$ обладает следующими свойствами:*

1) P —максимальный идеал $\Longleftrightarrow$ $P = M_{p,\infty}$ для некоторой точки $p \in \beta X$;

2) P содержит идеал O_p для некоторой единственной точки $p \in \beta X$;

3) $O_p \subseteq P$, $p \in \beta X \implies P \subseteq M_{p,\infty}$;

4) P содержится в единственном максимальном идеале;

5) $P \subseteq M_p, p \in \beta X \implies P$ — строгий идеал;

6) если $O_p \subseteq P \nsubseteq M_p$, $p \in \beta X \implies P$ не полустрогий и $O_{p,\infty} \subseteq P$;

7) P — строгий $\Longleftrightarrow$ $P \subseteq M_p$ для соответствующей точки $p \in \beta X$;

8) P — максимальный среди строгих (полустрогих) простых идеалов $\Longleftrightarrow$ $P = M_p$ для некоторой точки $p \in \beta X$.

Теорема 2. *Любое хьюиттовское пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма частичным полукольцом $\mathrm{C}^{+}{}_{\infty}(X)$.*

Литература

1. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. О частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$-значных функций // Современные проблемы математики и ее приложений: труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В. И. Бердышева. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. С. 16–19.

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ НЕСУБНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ШМИДТА КОТОРЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫ

В. А. Ведерников

Московский городской педагогический университет, г. Москва

vavedernikov@mail.ru

Рассматриваются лишь конечные группы. В работе [1] О.Ю.Шмидт исследовал строение ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта. В работе [1] установлено, что группа Шмидта G бипримарна, то есть $\pi(G) = \{p, q\}$, силовская p-подгруппа G_p нормальна в G, $G_q =< x >$ – циклическая группа, $< x^q >= O_q(G) \leqslant Z(G)$, $\mid G_p/\Phi(G_p) \mid= p^m$, где m – показатель числа p по модулю q и $G_p/\Phi(G_p)$ является главным фактором группы G. Отсюда следует, что группа Шмидта G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $m = 1$.

В работе [2] получено полное описание строения ненильпотентной группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта субнормальна, в частности доказано, что $G/F(G)$ является циклической группой.

В работе [3] получено полное описание строения несверхразрешимых групп, в которых каждая собственная подгруппа сверхразрешима или субнормальна. В частности доказано, что такие группы разрешимы и их сверхразрешимый корадикал является примарной группой.

Приведем описание некоторых свойств групп из класса, объединяющего классы групп, рассмотренных в работах [2-3].

Предложение 1. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда и только тогда в группе каждая подгруппа Шмидта сверхразрешима, когда группа G дисперсивна по Оре и для любых $p, q \in \pi(G)$, $p < q$ или $q \equiv 1(mod p)$, или холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы G нильпотентна.*

Предложение 2. *Пусть G – несверхразрешимая группа. Если в группе G каждая несубнормальная подгруппа Шмидта сверхразрешима, то группа G разрешима.*

Литература

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Матем сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. Ведерников В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46. – № 6. – С. 669–687.

3. Ballester-Dolinches A., Cossey John. Finite groups with subgroups supersoluble or subnormal // J. of Algebra. – 2009. – 321. – P. 2042–2052.

О ЛОКАЛЬНОМ ЗАДАНИИ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С СИЛОВСКИМИ К-$\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. С. Вегера

Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины, Гомель

artem.vegera@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Хорошо известно, что группа нильпотентна, если ее силовские подгруппы субнормальны. В последнее время активно изучаются (см., например, [1, 2]) группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами.

В 1978 году О. Кегель ввел понятие $\mathfrak{F}$-достижимой (К-$\mathfrak{F}$-субнормальной, согласно терминологии принятой в [4]) подгруппы.

Определение [4, с. 236]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация. Подгруппа* H *группы* G *называется* К-$\mathfrak{F}$*-субнормальной подгруппой в* G *(записывается* H К-$\mathfrak{F}$-sn G*), если либо* $H = G$*, либо существует цепь подгрупп* $H = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_n = G$ *такая, что либо* $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$*, либо* $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ *для* $i = 1, \ldots, n$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. В работе [3] нами изучались свойства класса $\overline{w}\mathfrak{F}$ всех групп, у которых силовские подгруппы являются К-$\mathfrak{F}$-субнормальными.

В [3] было установлено в классе разрешимых групп, что если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то и класс $\overline{w}\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной формацией.

Согласно известной теореме Гашюца-Любедезер-Шмидта любая насыщенная формация является локальной, и наоборот.

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация и h — ее максимальный внутренний локальный экран. Обозначим через h^* — локальный экран такой, что $h^*(p) = (G \in \mathfrak{G} \mid \forall H \in \mathrm{Syl}(G) : H \in h(p)$ и H К-$\mathfrak{F}$-sn $G)$ для любого простого p. Следующая теорема устанавливает локальный экран для насыщенной формации $\overline{w}\mathfrak{F}$.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– разрешимая наследственная насыщенная формация,* h *– ее максимальный внутренний локальный экран,* $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$*. Тогда* $\overline{w}\mathfrak{F} = LF(f)$*, где* f *– максимальный внутренний локальный экран формации* $\overline{w}\mathfrak{F}$ *такой, что*

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } p \in \pi' \\ \mathfrak{N}_p h^*(p), & \text{если } p \in \pi. \end{cases}$$

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н., *О конечных группах сверхразрешимого типа* // Сибирск. матем. ж. – 2010. – Т. 51. – № 6. – С. 1270–1281.

2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., *О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами* // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

3. Вегера А. С., *О насыщенных формациях конечных групп, определяемых свойствами вложения силовских подгрупп* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 154–158.

4. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., *Classes of Finite Groups*. – Springer, 2006. – 385 p.

НОВАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

В. Ф. Велесницкий, В. Н. Семенчук
УО "Гомеский государственный университет имени Ф. Скорины", Гомель
velogos@rambler.ru

Согласно классическому результату Силова в любой конечной группе существуют силовские подгруппы. Данные подгруппы играют важную роль при изучении строения конечных групп. Например, группа, у которой все силовские подгруппы нормальны, нильпотентна. Свойство нильпотентности сохраняется и для групп с субнормальными силовскими подгруппами. В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие обобщенной субнормальности ($\mathfrak{F}$-достижимости).

Напомним, что $\mathfrak{F}$-достижимой (обобщенно субнормальной) называют подгруппу H, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

Получена характеризация сверхразрешимых групп ($\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп) с помощью обобщенно субнормальных подгрупп. Группа называется сверхразрешимой, если она имеет нормальный ряд с циклическими факторами. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда в ней любая силовская подгруппа и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа $\mathfrak{U}$-достижимы.*

Теорема 2. *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда в фактор-группе $G/\Phi(G)$ любая силовская подгруппа и любая сверхразрешимая подгруппа Шмидта $\mathfrak{U}$-достижимы.*

КОММУТАТОРНАЯ ФОРМУЛА В ГРУППАХ АЛЬПЕРИНА

Б. М. Веретенников
Уральский федеральный университет (УрФУ), Екатеринбург
boris@veretennikov.ru

Группой Альперина мы называем группу, конечную или бесконечную, в которой любая 2-порожденная подгруппа имеет циклический коммутант. Дж. Альперин в [1] доказал метабелевость конечных p-групп Альперина при нечетном простом p.

В работах [2], [3], [4] построены примеры неметабелевых конечных 2-групп и непримарных конечных групп Альперина, причем в [4] доказано, что любая конечная абелева группа может быть изоморфна второму коммутанту конечной группы Альперина.

В.Д. Мазуров на конференции в Екатеринбурге, посвященной 100-летию со дня рождения С.Н. Черникова, задал вопрос автору о какой-либо общей коммутаторной формуле в классе групп Альперина. В ответ на этот вопрос предлагается следующий результат.

Теорема. *Если G – группа Альперина, $x, y \in G$ и $[y,x]^y = [y,x]^\alpha$, $[y,x]^x = [y,x]^\beta$, где α, β – целые числа, то для любого натурального $n \geqslant 2$ имеет место формула:*

$$(xy)^n = x^n y^n [y,x]^{f(n,\alpha,\beta)},$$

где $f(n,\alpha,\beta)=\alpha(1+\alpha(1+\beta)+\alpha^2(1+\beta+\beta^2)+\dots+\alpha^{n-2}(1+\beta+\dots+\beta^{n-2}))$.

Для особо важного, как представляется, случая, когда $\alpha,\beta\in\{-1,1\}$, имеем:

1) При $\alpha=-1,\beta=-1:\ (xy)^n=x^ny^n[y,x]^{-\left[\frac{n}{2}\right]}$.

2) При $\alpha=-1,\beta=1:\ (xy)^n=x^ny^n[y,x]^{(-1)^{n-1}\left[\frac{n}{2}\right]}$.

3) При $\alpha=1,\beta=-1:\ (xy)^n=x^ny^n[y,x]^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

4) При $\alpha=1,\beta=1:\ (xy)^n=x^ny^n[y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (известная формула).

Заметим, что и в остальных случаях, пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, можно получить выражение для $f(n,\alpha,\beta)$ без многоточия.

Литература

1. Alperin J. L., *On a special class of regular p-groups* // Trans. Am. Mat. Soc.. – 1963. – V. 106. – No. 1. – P. 77–99.

2. Веретенников Б. М., *О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами* // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50. – № 3. – С. 326–350.

3. Веретенников Б. М., *О конечных 2-группах Альперина с элементарными абелевыми вторыми коммутантами* // Сиб. матем. журн.. – 2012. – Т. 53. – № 3. – С. 543–557.

4. Веретенников Б. М., *О вторых коммутантах конечных групп Альперина* // Сиб. матем. журн.. – 2014. – Т. 55. – № 1. – С. 25–43.

О ПУЧКАХ СЕРРА И АЛГЕБРЕ КУНЦА

А. Б. Верёвкин

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

abverevkin@gmail.com

Пусть $A=\oplus_{i\geqslant 0}A_i$ – градуированная ассоциативная алгебра над полем k, конечнопорождённая элементами первой степени, $gr{-}A$ – категория правых градуированных модулей над A. Обозначим C – полную подкатегорию $gr{-}A$ локально конечномерных модулей. Определим категорию $Qco(A)$, как фактор-категорию $gr{-}A/\overline{C}$, понимаемую в смысле ([1]) категории правых частных $gr{-}A[\Sigma^{-1}]$, где Σ – класс C-изоморфизмов в $gr{-}A$, то есть,– морфизмов с локально конечномерными ядрами и коядрами.

Из работы Серра ([2]) следует, что для коммутативной алгебры A категория $Qco(A)$ эквивалентна категории когерентных пучков над схемой $Proj\,(A)$, и поэтому в общем случае она была названа категорией *квазикогерентных пучков Серра* – этот термин в конце 1980-х годов предложен Ю.И. Маниным в рамках его проекта построения некоммутативной алгебраической геометрии.

Здесь удалось доказать ряд аналогов классических теорем проективной алгебраической геометрии ([3, 4 и мн. др.]). Вместе с тем, в теории стали проявляться существенно некоммутативные эффекты. Так, интересное, но пока малоизученное значение приобретает *алгебра Кунца*:

$$Q_n=k<x_1,\dots,x_n;x_1^*,\dots,x_n^*|\sum_{i=1}^n x_ix_i^*-1,x_i^*x_j-\delta_{ij}>$$

Она появилась в работе ([5]), где доказано, что Q_n является фактором типа III_λ для $\lambda{=}1/n$. Вместе с тем, Q_n является простой градуированной оболочкой свободной алгебры $T_n{=}k{<}x_1,\ldots,x_n{>}$ и $Qco(T_n) \simeq gr{-}Q_n$, что определяет её важность при изучении пучков Серра ([6]). Доклад посвящён развитию этой темы.

Литература

1. Borceaux F., *Handbook of Categorical Algebra 1. Basic Category Theory.* – Cambridge University Press, 1994. – P. 176–249.

2. Серр Ж.-П., *Когерентные алгебраические пучки*/ в сб. *Расслоенные пространства и их приложения.* – М: ИЛ, 1958. – С. 372–450.

3. Верёвкин А.Б., *Инъективные пучки Серра* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – Вып. 4. – С. 35–41.

4. Smith S.P., *Maps between non-commutative spaces* // arXiv:math/0209134v1. – 11 Sep. 2002. – 17 p.

5. Cuntz J., *Simple C^*–algebras generated by isometries* // Comm. Math. Phys. – 1977. – 57(2). – P. 173–185.

6. Верёвкин А.Б., *Точное вложение категории Серра в категорию модулей* // Изв. ВУЗ'ов. Матем. – 1993. – № 11(378). – С. 3–5.

МНОГООБРАЗИЯ ЭПИГРУПП СТУПЕНИ N

Б. М. Верников, С. В. Гусев
Уральский федеральный университет, Екатеринбург
bvernikov@gmail.com, sergey.gusb@gmail.com

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень любого элемента является групповым элементом, т. е. лежит в некоторой подгруппе полугруппы S. На всякой эпигруппе можно ввести дополнительную унарную операцию, называемую псевдообращением (см., например, [1]). Это позволяет рассматривать многообразия эпигрупп как алгебр в сигнатуре умножения и псевдообращения. Обзор полученных здесь результатов можно найти в [2, § 2]. Элемент, псевдообратный к элементу x данной эпигруппы, обозначается через $\overline{x}$. По аналогии с многообразиями полугрупп, назовем многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ *многообразием ступени* n (где n — произвольное натуральное число), если все нильполугруппы из $\mathcal{V}$ нильпотентны ступени $\leqslant n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. В частности, многообразия ступени 1 — это в точности многообразия вполне регулярных полугрупп. Из результатов работы [3] легко извлекается характеризация многообразий полугрупп ступени n на языке минимальных запрещенных подмногообразий, а в [4, предложение 2.11] эти многообразия охарактеризованы на языке тождеств. Нами получен эпигрупповой аналог этих результатов. А именно, доказана следующая

Теорема. *Пусть n — произвольное натуральное число. Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathcal{V}$ *— многообразие ступени n;*

б) $\mathcal{V}$ *не содержит многообразия* $\mathrm{var}\{x^2 = x_1x_2\cdots x_{n+1} = 0,\, xy = yx\}$;

в) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет тождеству вида* $x_1\cdots x_n = x_1\cdots x_{i-1}\cdot\overline{\overline{x_i\cdots x_j}}\cdot x_{j+1}\cdots x_n$ *для некоторых* $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$.

Литература

1. Шеврин Л. Н. *К теории эпигрупп.* I, II // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 129–160; № 9. – С. 153–176.

2. Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

3. Сапир М. В., Суханов Е. В. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 4. – С. 48–55.

4. Vernikov B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – V. 59. – № 3–4. – P. 405–428.

О ВЕРХНЕМОДУЛЯРНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

Б. М. Верников, Д. В. Скоков

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

bvernikov@gmail.com, dmitry.skokov@gmail.com

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень любого элемента является групповым элементом, т. е. лежит в некоторой подгруппе полугруппы S. На всякой эпигруппе можно ввести дополнительную унарную операцию, называемую псевдообращением (см., например, [1]). Это позволяет рассматривать многообразия эпигрупп как алгебр в сигнатуре умножения и псевдообращения. Обзор полученных здесь результатов можно найти в [2, § 2]. Мы продолжаем изучение специальных элементов различных типов в решетке многообразий эпигрупп, начатое в [3]. Напомним, что элемент x решетки L называется *верхнемодулярным*, если $(z\wedge x)\vee y = (z\vee y)\wedge x$ для всех $y, z\in L$ таких, что $y\leqslant x$. Многообразие полугрупп [эпигрупп] будем называть *верхнемодулярным*, если оно является верхнемодулярным элементом решетки всех многообразийц полугрупп [эпигрупп]. В работах [4, 5] получен ряд результатов о верхнемодулярных многообразиях полугрупп. В частности, в [4] полностью описаны коммутативные верхнемодулярные многообразия полугрупп. Нами получен аналог этого результата для многообразий эпигрупп. А именно, доказана следующая

Теорема. *Коммутативное многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *верхнемодулярно тогда и только тогда, когда либо* $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{G}\vee\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$, *либо* $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{SL}\vee\mathcal{E}$, *где* $\mathcal{G}$ *— произвольное многообразие абелевых групп,* $\mathcal{SL}$ *— многообразие полурешеток,* $\mathcal{C} = \mathrm{var}\{x^2 = x^3,\, xy = yx\}$, $\mathcal{D} = \mathrm{var}\{x^2y = 0,\, xy = yx\}$, *а* $\mathcal{E} = \mathrm{var}\{x^2y = xy^2,\, x^2yz = 0,\, xy = yx\}$.

В силу [3], многообразия эпигрупп, являющиеся модулярными элементами решетки всех многообразий эпигрупп, обязаны быть периодическими (т. е. многообразияими полугрупп). Для верхнемодулярных многообразий это уже не так: из сформулированной выше теоремы вытекает, например, что многообразие всех абелевых групп является верхнемодулярным.

Литература

1. Шеврин Л. Н. *К теории эпигрупп.* I, II // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 129–160; № 9. – С. 153–176.

2. Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 3. – С. 3–36.

3. Shaprynskiˇi V. Yu., Vernikov B. M. *Modular and neutral elements in the lattice of epigroup varieties* // Int. Conf. on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov: Abstracts. Kyiv. – 2012. – P. 137.

4. Vernikov B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – V. 59. – № 3–4. – P. 405–428.

5. Верников Б. М. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – № 7. – С. 43–51.

ГРУППЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С. В. Вершина

Московский Педагогический Государственный Университет, Москва

svetlanaverhina@gmail.com

Рассматривается категория p-локальных редуцированных абелевых групп без кручения конечного ранга. Абелева группа A называется p-локальной (p-простое число), если умножение на любое ненулевое число q, не делящееся на p, является автоморфизмом группы A. Подполе K поля p-адических чисел называется полем расщепления [1] для p-локальной группы A, если тензорное произведение $A \otimes (K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p) \cong D \oplus F$ является прямой суммой делимого R-модуля D и свободного R-модуля F, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Кольцо R в этом случае называется кольцом расщепления [1] для группы A. Группа B p-ранга 1 называется группой расщепления [2] для неразложимой p-локальной группы без кручения конечного ранга и p-ранга $\geqslant 2$, если $A \otimes B \cong A_1 \oplus B^k$, для $k \geqslant 1$.

Теорема. *Для редуцированной p-локальной группы A без кручения конечного ранга и p-ранга $\geqslant 2$ следующие условия эквивалентны:*

A. *Группа A имеет группу расщепления изоморфную аддитивной группе кольца расщепления для A;*

B. *Группа A имеет сервантную подгруппу изоморфную аддитивной группе кольца расщепления группы A;*

C. *Группа A имеет прямое слагаемое изоморфное аддитивной группе кольца расщепления группы A;*

D. *В группе A имеется элемент для которого внутренняя и внешняя p-адические характеристики совпадают;*

E. *Группа гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(R^+, A) \neq 0$, где R^+ — аддитивная группа кольца расщепления для A.*

Литература

1. Lady E. L., *Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I* // Journal of Algebra. – 1977. – Vol. 49. – № 1 – P. 261–275.

2. Вершина С. В., *Группы расщепления неразложимых p-локальных групп без кручения* // «Алгебра и логика: теория и приложения». Материалы международной конференции, посвященной 80-летию В. П. Шункова. – Красноярск – 2013. – С. 25-26.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ФАКТОРНО ДЕЛИМЫХ ГРУПП СВОИМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ

В. К. Вильданов

НГПУ им. К. Минина, Нижний Новгород

kadirovi4@gmail.com

Известно, что p-группы ($p \geqslant 3$) определяются своей группой автоморфизмов в классе p-групп (см. [1]). Вопрос определяемости вполне разложимых абелевых групп без кручения своими группами автоморфизмов рассматривается в работах [2, 3]. В настоящей работе рассматривается вопрос определяемости факторно делимой группы ранга 1 своей группой автоморфизмов в классе всех таких групп. Подробнее о факторно делимых группах можно узнать в работах [4, 5].

Пример 1. Следующие факторно делимые группы ранга 1 заданные кохарактеристиками определяются своими группами автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1. a) $cochar(A) = (3, 1, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$, b) $cochar(B) = (\infty, \infty, 1, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$.

Пусть G — абелева группа. Обозначим $P_\infty(G)$ множество простых чисел $p \in P$ для которых $pG = G$.

Теорема 1. *Пусть A — расщепляющаяся факторно делимая группа ранга 1 определяющаяся своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1. Тогда $A = A' \oplus t(A)$, где A' — факторно делимая группа без кручения ранга 1, $t(A)$ — конечная циклическая группа порядка $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ и $|P_\infty(A')| = s$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $A = A' \oplus t(A)$ — факторно делимая группа ранга 1,

2) $t(A)$ — конечная циклическая группа порядка $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$,

3) $t(A)$ — определяется своей группой автоморфизмов в классе циклических групп и $|P_\infty(A')| = s$.

Тогда группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе факторно делимых групп ранга 1.

Литература

1. Liebert W., *Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups. II* // Contemp. Math. – 1989. – Vol. 87. – P. 51–59.

2. Вильданов В. К., *Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 2 своей группой автоморфизмов* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 3(1). – С. 174–177.

3. Вильданов В. К., *Определяемость вполне разложимой блочно жёсткой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов* // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17. – № 8. – С. 13–19.

4. Фомин А. А., *К теории факторно делимых групп. I* // Фундамент. и прикл. матем. – 2012. – Т. 17. – № 8. – С. 153–167.

5. Давыдова О. И., *Факторно делимые группы ранга 1* // Фундамент. и прикл. матем. – 2007. – Т. 13. – № 3. – С. 25–33.

О ФАКТОРИЗАЦИИ П-РАЗРЕШИМЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

А. А. Ядченко, В. Е Купреенко

Институт математики НАН Беларуси, Гомель, Беларусь

yadchenko_56@mail.ru

Определение. Подгруппа X называется TI*-подгруппой* в группе Y, если $X^y \cap X = 1$ для всех элементов $x \in Y \setminus N_Y(X)$.

В продолжение работ [1] — [7] предлагается следующая теорема.

Теорема. Пусть G – π -разрешимая неприводимая комплексная линейная группа степени $n < 2|H|$ с π-холловой TI-подгруппой H нечетного порядка и $H \ntrianglelefteq G$. Тогда справедливо каждое из следующих утверждений:

(1) $n = |H|-1, |H|, |H|+1, 2(|H|-1)$ или $2|H|-1$ и n – степень простого числа q за исключением, может быть, случая, когда $n = |H|$;

(2) факторгруппа $G/O_{\pi',\pi}(G)$ абелева;

(3) если $n = |H|$, то $G = [O_{\pi'}(G), H]N_G(H)$ с абелевой подгруппой $[O_{\pi'}(G), H]$ и $[O_{\pi'}(G), H] \cap N_G(H) = 1$, если же $n \neq |H|$, то $G = O_q(G)N_G(H)$, где q из (1);

(4) если группа G неразрешима, то $n = 2(|H|-1)$ и $(C_G(H))_{\pi'}/Z(G) \cong PSL(2,5)$.

Литература

1. *Okuyama T.* On finite groups whose Sylow p-subgroup is a T.I. set // Hokkaido Math. J. 1975. V. 4. № 2. P. 303-305.

2. *Ядченко А. А.* О конечных π-разрешимых линейных группах // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника. 1986. С. 181-207.

3. *Ядченко А. А.* Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI-подгруппой // Мат. заметки. 1990. Т. 48,В. 2. С. 137-144.

4. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка. I // Труды Института математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 2. С. 118-130.

5. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка. II // Труды Института математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17. № 2. С. 94-104.

6. *Ядченко А. А.* О П-разрешимых неприводимых линейных группах с холловой $TI-$подгруппой нечетного порядка. III // Труды Института математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 99-114.

7. *Ядченко А. А.* О неприводимых линейных группах примарной степени // Труды Института математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20. № 2. С. 103-116.

ON CLASSIFICATION OF PROPERLY 2-C.E. TURING DEGREES

M. M. Yamaleev
Kazan Federal University, Kazan / Nanyang Technological University, Singapore
marsiam2@yandex.ru

A set D is computable enumerable (c.e.) if it has a computable approximation $g(x,s)$ such that $g(x,0) = 0$, $\lim_s g(x,s) = \chi_D(x)$ and for each x the assumption about x is changed at most once. A set D is 2-c.e. if the assumption about each element is changed at most twice. A Turing degree $\mathbf{d}$ is 2-c.e. if it contains a 2-c.e. set. If it also doesn't contain a c.e. set then it is a properly 2-c.e.

The existence of properly 2-c.e. degree was proved by B. Cooper in 1971. Further investigation of 2-c.e. degrees (namely, noncuppable c.e. degree of B. Cooper and M. Yates, M.M. Arslanov's Cupping Theorem [1] and R. Downey's Diamond Embedding Theorem [2]) showed that the structures of c.e. and 2-c.e. degrees are not elementarily equivalent. However, another model-theoretic question about definability of c.e. degrees in 2-c.e. degree was raised at the same time, and it still remains open. The recent result of M.M. Arslanov, I. Sh. Kalimullin and S. Lempp [3] showed that 2-c.e. and 3-c.e. degrees are not elementarily equivalent. In the same construction they found infinite definable subclass of c.e. degrees.

In our talk we will discuss a classification of properly 2-c.e. degrees based on their Lachlans' degrees. Using this classification we study a structural properties of the classes with the further goal to distinguish them from each other. The class of 2-c.e. isolated degrees of the classification is widely studied and has different applications (e.g., see G. Wu [4]), the class of exact degrees was introduced and studied by Sh.T. Ishmukhametov [5], and some other classes were investigated in our recent joint works with C. Fang, J. Liu and G. Wu, which will be presented at the talk.

The work is supported by RFBR (project 14-01-31200).

References

1. Arslanov M. M., *Structural properties of the degrees below* $\mathbf{0}'$ // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1985. – V. 283. – P. 270–273.

2. Downey R., *D.r.e. degrees and the nondiamond theorem* // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1989. – V. 21. – P. 43–50.

3. Arslanov M. M., Kalimullin I. Sh., Lempp S., *On Downey's conjecture* // Journal of Symbolic Logic. – 2010. – V. 75. – P. 401–441.

4. Wu G., *Isolation in the d.c.e. degrees* // Proceedings of the 10th Asian Logic Confenence (Eds: Arai, Brendle, Chong, Downey, Feng, Kikyo and Ono),World Scientific. – 2010. – P. 353–374.

5. Ishmukhametov I. Sh. *On predecessors of d.c.e. degrees* // Archive for Mathematical Logic. – 1999. – V. 38. – P. 373–386.

PSPACE RATIONAL GRADING WITH INVERSE RELATIONS AND INTERSECTION OF RELATIONS

M. Yanchev
Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University, Sofia, Bulgaria
yanchev@fmi.uni-sofia.bg

The graded modal language (Kit Fine, 1972) is an extension of the classical propositional modal language with counting (or *grading*) modal operators $\Diamond_n$, for any natural number $n \geqslant 0$. In a Kripke model $\mathfrak{M}$ over a frame $\mathfrak{F} = (U, R)$, $\Diamond_n\varphi$ is true in $x \in U$ iff there are more than n R-successors of x in which φ is true. In this way, $\Diamond_n$ has purely quantitative meaning. It is proven ([1]) that the satisfiability problem in the (many-relational) graded modal language is PSPACE-complete.

The language of Majority Logic (Pacuit and Salame, 2004) augments the graded modal language with some qualitative capabilities. Two more unary modal operators are added: M (Majority) and W (Weak majority). In Kripke models $M\varphi$ says that *more than half of the accessible worlds satisfy* φ—the simplest case of *rational grading.*

A natural extension of the graded and the majority languages is the *generalized graded modal language* (Tinchev and Yanchev, 2010) having both quantitative and qualitative modalities. It is obtained by adding to the graded modal language new unary 'majority' operators, M^r and (the dual) W^r, where r is a rational number taken from a fixed set in (0,1). These operators generalize to full extent the rational grading. They distinguish the part of accessible worlds having some property. The appropriate semantics has frames in which every world can see finitely many worlds. So, if $|R(x)|$ is the number of R-successors of x, and $|R_\varphi(x)|$ is the number of those of them satisfying φ, then x satisfies $M^r\varphi$ iff $|R_\varphi(x)| > r.|R(x)|$.

It is proven that the set of all valid formulae, called Generalized Graded Modal Logic, forms a decidable non-normal modal logic. A complete axiomatization (with an infinite rule of inference) is given for that logic. It is also shown (Yanchev, 2011) that the satisfiability problem for generalized graded modal language is PSPACE-complete.

In this talk we consider many-relational generalized graded modal language with *inverse relations* and *intersection of relations.* The rational grading operators are:

$$\lceil R\rceil^r \text{ and } \lfloor R\rfloor^r,$$

where R is an intersection of possibly inverse relations. We prove that the satisfiability problem in this modal language for rational grading keeps the PSPACE complexity. The proof uses *calculus for checking satisfiability* based on tableau technique. This calculus extends the one used in [1] for establishing the PSPACE completeness of the satisfiability in the language with only integer grading operators, and uses modified version of our *cluster technique*, developed for dealing with rational grading operators.

References

1. Tobies S., *PSPACE Reasoning for Graded Modal Logics* // Journal of Logic and Computation. – 2001. – V. 11. – No. 1. – P. 85–106.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ПОНЯТИЕМ НОВОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ СВЯЗКИ ПО П.С. НОВИКОВУ

А. Д. Яшин

Московский городской психолого–педагогический университет, Москва

yashin.alexandr@yandex.ru

Пусть Fm — множество формул языка логики высказываний с пропозициональными переменными $Var = \{p_i, q_j, \ldots\}$, стандартными связками $\vee, \wedge, \rightarrow, \neg$ и логическими константами 0(ложь), 1(истина).

Суперинтуиционистская (*с.и.*) *логика* — произвольное подмножество $L \subset$ $\subset Fm$, включающее интуиционистскую пропозициональную логику Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки. Через $L + A$ обозначается наименьшая логика, включающая логику L и содержащая формулу A.

Обогатив язык дополнительной логической связкой $\varphi(\cdot)$, получим множество $Fm(\varphi)$ формул расширенного языка. Формулы из Fm называем *чистыми.*

Подстановкой на $Fm(\varphi)$ называется отображение $s\colon Fm(\varphi) \rightarrow Fm(\varphi)$, сохраняющее константы и согласованное со всеми логическими связками: $s(A \circ B) =$ $= s(A) \circ s(B)$, $s(\varphi(A) = \varphi(s(A))$, $s(\neg A) = \neg s(A)$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Под φ*-логикой* понимается множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int, содержащее *аксиому замены эквивалентных для связки* φ: $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\varphi(A) \leftrightarrow \varphi(B))$ и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

φ*-Логика* $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* с.и. логики L, если $L \subseteq \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

Проблема новой одноместной логической связки в Int была поставлена П. С. Новиковым и впервые приведена в статьях Я. С. Сметанича [1], [2].

φ*-Логика* $\mathcal{L}$ называется *полным по П. С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi)$, не принадлежащей $\mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L (т.е. $\mathcal{L}$ *не допускает присоединения* никакой новой формулы).

Под *проблемой Новикова для с.и. логики* L понимается описание класса всех полных по П.С. Новикову расширений L.

Известно, что семейство с.и. логик имеет мощность континуума, поэтому естественным представляется рассмотрение проблемы П.С. Новикова для таких с.и. логик, которые по тем или иным причинам уже находились в поле зрения исследователей.

Предлагается ряд конкретных задач, связанных с проблемой П.С. Новикова.

Литература

1. Сметанич Я. С. *О полноте исчисления высказываний с дополнтельной операцией от одной переменной* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1960. – Т. 9. – С. 357–371.

2. Сметанич Я. С. *Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 139 – № 2. – С. 309–312.

СИНТАКСИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ

А. Р. Ешкеев
Карагандинский государственный университет им.академика Е.А.Букетова,Институт прикладной математики, Караганда
modth1705@mail.ru

Пусть задан произвольный язык L . Пусть T- йонсоновская совершенная теория полная для экзистенциальных предложений в языке L и ее семантическая модель есть C. Мы говорим, что множество X - $\sum$-определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. X есть $\sum$-определимое подмножество C;
2. $dcl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. X есть $\sum$ -определимое подмножество C;
2. $acl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

С помощью введенных определений йонсоновских множеств мы сможем перенести инвариантные свойства относительно подобия йонсоновских теорий на произвольные подмножества семантической модели. Будем говорить, что два йонсоновских множества (эквивалентны, косемантичны, категоричны, синтаксически подобны, семантически подобны) между собой, если соответственно будут (йонсоновски эквивалентны, косемантичны, категоричны, синтаксически подобны, семантически подобны) модели которые получаются при соответствующим замыкании этих множеств. Два йонсоновских множества синтаксически подобны между собой, если синтаксически подобны будут элементарные теории их соотвествующих замыканий. Если $\forall\exists$-следствия этих элементарных теорий будут йонсоновскими теориями, то в этом случае мы сможем рассмотреть их йонсоновское синтаксическое подобие, т.е., в силу инвариантности семантической модели наше определение корректно. В рамках данных нововведенных определений, можно рассмотреть и попытаться описать сильно минимальные йонсоновские множества. Это в свою очередь повлечет за собой целый ряд новых постановок задач, например уточнение теоремы Лахлана-Болдуина в рамках данной нововведенной тематики. Все неопределенные в данном тезисе понятия можно извлечь в [1].

Литература

1. Ешкеев А.Р., *Йонсоновские теории.* – Караганда: Издательство КарГУ, 2009. – 250 с.

О ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННОЙ СВОДИМОСТИ Σ_2^0-МНОЖЕСТВ

Д. Х. Зайнетдинов, И. Ш. Калимуллин
Казанский (Приволжский) Федеральный университет, г. Казань
damir.zh@mail.ru

Одно из направлений современной теории вычислимости сосредоточено на изучении свойств предельно монотонных функций и предельно монотонных множеств. Функция $f:\omega\to\omega$ называется *предельно монотонной*, если существует вычислимая функция $\varphi(x,s)$ такая, что для всех $x\in\omega$:

1) $f(x) = \lim\limits_{s} \varphi(x, s)$

2) $\varphi(x, s) \leqslant \varphi(x, s+1) \ \ \forall s \in \omega$

Множество $A \subseteq \omega$ будем называть *предельно монотонным*, если A совпадает с областью значений некоторой предельно монотонной функции или $A = \emptyset$.

Мы имеем дело с множествами и функциями, заданными на множестве неотрицательных целых чисел $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Для обозначения множества всех конечных последовательностей над ω используется запись $\omega^{<\omega}$. На множестве $\omega^{<\omega}$ для любых двух строк x и y определим их покомпонентный порядок, а именно, $x_1 x_2 \ldots x_n \preccurlyeq y_1 y_2 \ldots y_n \iff x_1 \leqslant y_1 \ \& \ x_2 \leqslant y_2 \ \& \ \ldots \ \& \ x_n \leqslant y_n$. После этого, мы можем вычислимо отождествить множество всех строк, заданных на ω, с множеством натуральных чисел, т.е. можем задать взаимно-однозначное отображение $\omega^{<\omega} \rightleftharpoons \omega$. Тогда под обозначением $B^{<\omega}$ будем понимать множество номеров строк $x_1 x_2 \ldots x_n$ таких, что $x_1 \in B, \ x_2 \in B, \ \ldots, \ x_n \in B$.

В работе [1] вводится понятие сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, согласованное с понятием Σ-определимости в допустимых множествах. Обозначим через $\mathcal{F}_A$ семейство начальных сегментов $\{\{x \mid x < n\} \mid n \in \in A\}$. В соответствии с работой [1], определим lm-сводимость множеств, как Σ-сводимость соответствующих начальных сегментов, а именно, $A \leqslant_{lm} B \Leftarrow \Longrightarrow \mathcal{F}_A \leqslant_{\Sigma} \mathcal{F}_B$. Отсюда легко можно вывести эквивалентное понятие lm-сводимости, а именно, $A \leqslant_{lm} B \iff_{\text{dfn}} A = \{\theta(x), \ x \in B^{<\omega}\}$, где $\theta(x)$ – предельно монотонная функция, которая является монотонной по своим аргументам, т.е. если $\theta(y)\downarrow$ и $x \preccurlyeq y$, тогда $\theta(x)\downarrow$ и $\theta(x) \leqslant \theta(y)$.

Мы докажем существование пары несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости, а также построим бесконечную равномерную последовательность несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости.

Лемма. *Если A является бесконечным Σ^0_2-множеством и существует бесконечное множество B, содержащееся в A, то $A \leqslant_{lm} B$.*

Теорема 1. *Существуют такие бесконечные Σ^0_2-множества A и B, что $A \nleqslant_{lm} B$ и $B \nleqslant_{lm} A$.*

Теорема 2. *Существует такая равномерная последовательность бесконечных Σ^0_2-множеств $\{A_i\}_{i \in \omega}$, что $A_i \nleqslant_{lm} \bigcap_{j \neq i} A_j$, причём $\bigcap_{j \in \omega} A_j$ бесконечно и $x \in A_i$ при $x < i$.*

Определим $A \equiv_{lm} B$, если $A \leqslant_{lm} B$ и $B \leqslant_{lm} A$. Предельно монотонной степенью (или, иначе, lm-степенью) множества A назовем класс эквивалентности $\deg(A) = \{B : B \equiv_{lm} A\}$. Через $\mathbf{D}_{lm}$ обозначим класс всех lm-степеней. Степени из $\mathbf{D}_{lm}$ образуют частичный порядок относительно отношения $\deg(A) \leqslant \deg(B) \iff_{\text{dfn}} A \leqslant_{lm} B$. Пишем $\deg(A) < \deg(B)$, если $A <_{lm} B$, т.е. если $A \leqslant_{lm} B$ и $B \nleqslant_{lm} A$.

Мы хотим показать, что для любого счётного частично-упорядоченного множества $\mathcal{P} = (P, \leqslant_P)$ существует сохраняющее порядок 1:1 – отображение из P в $\mathbf{D}_{lm}$, где $\mathbf{D}_{lm}$ – это класс всех lm-степеней. Поскольку каждое счётное частично-упорядоченное множество вкладывается в вычислимый частичный порядок, то можно считать, что $P = \omega$ и $\leqslant_P$ является вычислимым отношением.

Определим отображение $f : \omega \to \mathbf{D}_{lm}$, полагая

$$f(i) = \mathbf{b}_i = \deg(B_i) = \deg(\cap A_k : k \leqslant_P i),$$

где через B_i обозначим $\bigcap_{k \leqslant_P i} A_k$.

Мы покажем, во-первых, что если $i \leqslant_P j$, то $B_i \leqslant_{lm} B_j$, и во-вторых, если $i \nleqslant_P j$, то $B_i \nleqslant_{lm} B_j$. Таким образом, доказан следующий результат:

Теорема 3. *Каждый счетный частичный порядок вкладывается в* $\mathbf{D}_{lm}$.

Литература

1. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 1. – С. 31—53.

2. *Kalimullin I., Khoussainov B., Melnikov A.* Limitwise monotonic sequences and degree spectra of structures // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – V. 141, No 9. – P. 3275–3289.

3. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* Computable models of theories with few models // Notre Dame J. Formal Logic. – 1997. – V. 38, No 2. – P. 165–178.

ON STRUCTURE OF SEMIARTINIAN RINGS

Jan Žemlička

Department of Algebra, Charles University in Prague, Faculty of Mathematics and Physics Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Czech Republic

zemlicka@karlin.mff.cuni.cz

Let R be a right semiartinian ring with the right socle chain $\mathcal{L} = (S_\alpha \mid \alpha \leqslant \sigma + 1)$, i.e. $S_{\alpha+1}/S_\alpha = \mathrm{Soc}(R/S_\alpha)$ and $S_{\sigma+1} = R$. Furthermore, if R is regular and all right primitive factors of R are artinian, then for every $\alpha \leqslant \sigma$ there exists a cardinal λ_α and for all $\beta < \lambda_\alpha$ there are integers $n_{\alpha\beta} > 0$ and skew fields $K_{\alpha\beta}$ such that $S_{\alpha+1}/S_\alpha \cong \bigoplus_{\beta<\lambda_\alpha} M_{n_{\alpha\beta}}(K_{\alpha\beta})$ as rings without unit [1, Theorem 2.1]. The sequence $(\lambda_\alpha | \ \alpha \leqslant \sigma)$ forms an invariant of class of all regular semiartinian rings with primitive factors artinian, which is proved to satisfy strong cardinality properties. In particular, a necessary condition in the abelian regular case will be presented [2, Proposition 3.1 and Theorem 3.5]:

Theorem. *Suppose GCH holds and let R be an abelian regular semiartinian ring with the socle chain $\mathcal{L} = (S_\alpha \mid \alpha \leqslant \sigma + 1)$ such that $\lambda_\alpha = \mathrm{gen}(S_{\alpha+1}/S_\alpha)$, and α, δ are ordinals satisfying $\alpha + \delta \leqslant \sigma$. Then*

A. $|\langle\alpha, \sigma\rangle| \leqslant 2^{\lambda_\alpha}$,

B. if $cf(\lambda_\alpha) > \max(|\delta|, \omega)$, *then* $\lambda_{\alpha+\delta} \leqslant \lambda_\alpha$ *and*

C. $\lambda_{\alpha+\delta} \leqslant \lambda_\alpha^+$ *otherwise.*

On the other hand, commutative regular semiartinian rings which satisfy conditions close to the necessary ones are constructed [2, Theorem 5.1]:

Theorem. *Let σ be an ordinal and $(\lambda_\alpha | \ \alpha \leqslant \sigma)$ a family of cardinals such that for every $\alpha \leqslant \beta \leqslant \sigma$*

(a) $\lambda_\beta \leqslant \lambda_\alpha^+$ *if* $cf(\lambda_\alpha) = \omega$, *and* $\lambda_\beta \leqslant \lambda_\alpha$ *otherwise,*

(b) $\lambda_\alpha < \omega$ *iff* $\alpha = \sigma$,

(c) $|\langle\alpha, \sigma\rangle| \leqslant \lambda_\alpha$.

Then there exists a commutative regular semiartinian ring with socle chain $\mathcal{L} = (S_\alpha \mid \alpha \leqslant \sigma + 1)$ such that such that $\lambda_\alpha = \mathrm{gen}(S_{\alpha+1}/S_\alpha)$.

Possible generalizations and examples illustrating boundaries of applied tools will be presented as well.

References

1. Ružička, P., Trlifaj, J., Žemlička, J., *Criteria of steadiness* // In: Abelian Groups, Module Theory, and Topology. – New York: Marcel Dekker, 1998, P. 359–372.

2. Žemlička, J., *Socle chains of abelian regular semiartinian rings* // J. Pure Appl. Algebra. – 2013. – V. 217. – No. 6. – P. 1018–1025.

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ПАР ПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЦОКОЛЕМ $L_N(2^M)$

В. И. Зенков

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург; Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

v1i9z52@mail.ru

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G, M — множество минимальных по включению подгрупп вида $A \cap B^g$, где $g \in G$, и множество m состоит из всех элементов из M, порядок которых минимален. По определению $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M \rangle$ и $\mathrm{min}_G(A,B) = \langle m \rangle$, поэтому $\mathrm{Min}_G(A,B) \geqslant \mathrm{min}_G(A,B)$. Заметим, что если в группе G для любого ее элемента g справедливо неравенство $A \cap B^g \neq 1$, то это эквивалентно тому, что $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$.

В работе [1] доказано, что $\mathrm{Min}_G(A,B) \leqslant F(G)$ для любой пары абелевых подгрупп A и B из G, а в работе [2] доказано, что в простой неабелевой группе G подгруппа $\mathrm{Min}_G(A,B)$ единична для любой пары примарных подгрупп A и B.

Если в группе G с цоколем, изоморфным $L_n(2^m)$, подгруппа $\mathrm{min}_G(A,B)$ неединична для любой пары (A,B) примарных подгрупп из G, то по [3, т. (2б2)] либо $m = 1$, либо $m = 2$ и $n = 3$. В данной работе рассматривается случай $m = 2$, $n = 3$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа с цоколем, изоморфным $L_3(4)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{min}_G(A,B) \neq 1$;

(2) *группа G содержит подгруппу G_1 индекса не более двух, которая является расширением подгруппы G' с помощью подгруппы $\langle t \rangle$ порядка 2, где t индуцирует на G' графовый автоморфизм, и для силовской 2-подгруппы S_1 из G_1 справедливо равенство $\mathrm{min}_{G_1}(S_1,S_1) = \langle S_1', t \rangle$, причем для подгрупп $A_1 = A \cap G_1$ и $B_1 = B \cap G_1$ (с точностью до сопряжения) пара (A_1,B_1) принадлежит множеству $\{(S_0,S_0),(S_0,S_1),(S_1,S_0),(S_1,S_1)\}$, где S_0 — максимальная подгруппа из S_1, содержащая $\mathrm{min}_{G_1}(A_1,B_1)$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00476), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси.

Литература

1. Зенков В. И., *Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах* // Мат. заметки. – 1994. Т. 1. – № 2. – С. 32–34.

2. Мазуров В. Д., Зенков В. И. *О пересечении силовских подгрупп в конечных группах* // Алгебра и логика. – 1996. – Т. 35. – № 4. – С. 424–432.

3. Зенков В. И., *Пересечение нильпотентных подгрупп в конечных группах* // Фунд. и прикл. мат. – 1996. – Т. 2. – № 1. – С. 1–92.

ПОЧТИ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ С ГРАФАМИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ВСЕ СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ КЛИКАМИ

М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург; Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

zinovieva-mr@yandex.ru, a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Графом простых чисел (или *графом Грюнберга—Кегеля*) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq.

Лучидо и Могхаддамфар [1] определили конечные простые неабелевы группы с графами простых чисел, все связные компоненты которых являются кликами (т. е. полными графами). А. В. Васильев и Е. П. Вдовин [2] устранили ошибки и неточности, допущенные в этой статье. Первый автор совместно с В. Д. Мазуровым [3] определили конечные простые неабелевы группы, графы простых чисел которых совпадают с графами простых чисел групп Фробениуса или двойных групп Фробениуса.

Наши обозначения стандартны, их можно найти, например, в [4]. В данной работе мы рассматриваем конечные почти простые группы (т. е. группы с простым неабелевым цоколем) и получаем следующий результат.

Теорема. *Пусть G – конечная почти простая, но не простая, группа и все связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются кликами. Тогда граф $\Gamma(G)$ не связен и G изоморфна одной из групп S_6, M_{10}, $PGL_2(9)$, S_8, S_{12}, $Aut(L_2(8))$, $L_2(2^m):\mathbb{Z}_{2^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $PGL_2(p)$, где $p > 3$ – простое число Ферма или Мерсенна, $L_2(p^m)\langle df\rangle$, где p – нечетное простое число, m четно, d и f – диагональный и инволютивный полевой автоморфизмы группы $L_2(p^m)$ соответственно, $L_3(8):2$, $L_3(8):3$, $Aut(L_3(8))$, $Aut(U_5(2))$, $Aut(^3D_4(2))$, $Aut(Sz(32))$, $G_2(3^m):\mathbb{Z}_n$, где $1 < n \in \mathbb{N}$ и $\pi(n) \subseteq \{2,3\}$, $L_3^{\pm}(q):\mathbb{Z}_n$, где $1 < n \in \mathbb{N}$ и $\pi(n) \subseteq \{2,3\}$, $PSp_4(q):\mathbb{Z}_{2^k}$, где $k \in \mathbb{N}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Литература

1. Lucido M. S., Moghaddamfar A. R., *Groups with complete prime graph connected components* // J. Group Theory. – 2004. – V. 7. – № 3. – С. 373–384.

2. Васильев А. В., Вдовин Е. П., *Критерий смежности в графе простых чисел* // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44. – № 6.. – С. 682–725.

3. Зиновьева М. Р., Мазуров В. Д., *О конечных группах с несвязным графом простых чисел* // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – № 3. – С. 99-105.

4. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A., *Atlas of finite groups*. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

ON THE LEAST SEMIGROUP CONGRUENCES ON DIMONOIDS

Y. V. Zhuchok.
Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine
yulia.mih@mail.ru

Following J.-L. Loday [1], a *dimonoid* is an algebra with two binary associative operations $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the axioms $(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z)$, $(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z)$, $(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$.

For a given relation ρ on a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$, the congruence generated by ρ will be denoted by $\rho^\star$. If ρ is a congruence on $(D, \dashv, \vdash)$ such that operations of $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ coincide and it is a semigroup, then we say that ρ is a semigroup congruence.

Consider a relation

$$\theta = \{(a \vdash b, a \dashv b) \mid a, b \in D\}$$

on a dimonoid $(D, \dashv, \vdash)$. It is clear that $\theta^\star$ is the least semigroup congruence on $(D, \dashv, \vdash)$.

Observe that the least semigroup congruences on dimonoids are used in [2] to construct a free product of arbitrary dimonoids.

We investigate the least semigroup congruences on some relatively free dimonoids and use them to give exact representations of free products of dimonoids from given classes.

References

1. Loday J.-L., *Dialgebras* // In: Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin. – 2001. – 1763. – P. 7–66.

2. Zhuchok A. V., *Free products of dimonoids* // Quasigroups and Related Systems. – 2013. – V. 21. – No. 2. – P. 273–278.

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ ЙОРДАНОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРАМИ НОВИКОВА-ПУАССОНА

В. Н. Желябин, А. С. Захаров
НГУ, ИМ СОРАН, г. Новосибирск
antzakh@gmail.com,vicnic@math.nsc.ru

Одним из важнейших вопросов в теории йордановых алгебр и супералгебр является специальность или исключительность этих алгебр или супералгебр. Алгебра (супералгебра) называется специальной, если она вложима в алгебру (супералгебру), полученную из ассоциативной алгебры (супералгебры), заменой умножения на симметричное (суперсимметричное). Классический способ получения йордановых супералгебр это процесс, называемый дубль Кантора. Пусть $J(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ — изоморфная копия A. Введем на $J(A)$ умножение $\bullet$ следующим образом:

$$a \bullet b = ab,\, a\xi \bullet b = a \bullet b\xi = (ab)\xi, a\xi \bullet b\xi = \{a, b\},$$

где $a, b \in A$, а ab — произведение элементов a и b в алгебре A. Полученную супералгебру обозначим через $J(A, \{\,,\})$. Скобка $\{\,,\}$ называется йордановой, если $J(A, \{\,,\})$ является йордановой супералгеброй. Четная часть супералгебры $J(A, \{\,,\})$ — пространство A, нечетная — $A\xi$.

Рассмотрим алгебраическую систему $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ такую, что $\langle A, \cdot\rangle$ — ассоциативная коммутативная алгебра и верны тождества (мы полагаем, что операция $\cdot$ имеет приоритет перед $\circ$. При этом символ $\cdot$ мы будем опускать):

$$xy \circ z = x(y \circ z);$$

$$zx \circ y - x \circ yz = zy \circ x - y \circ xz.$$

Рассмотрим произвольную обобщенную алгебру Новикова-Пуассона $\langle A, \cdot, \circ\rangle$. Тогда в качестве скобки можно взять коммутатор относительно умножения Новикова, то есть

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Теорема. *Пусть $\langle A, \cdot, \circ\rangle$ — обобщенная алгебра Новикова-Пуассона. Тогда $J(A, \{\,,\})$ — специальная йорданова супералгебра.*

О РАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ С ОПЕРАТОРОМ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ

А. С. Золотов
Тверской государственный университет, Тверь
yesbody2@gmail.com

Изучение проблемы разрешимости является одной из центральных задач математической логики, получены многие результаты о разрешимости и неразрешимости для классических теория первого порядка [1]. В последнее время активно изучаются расширения классической логики различными операторами, в частности, оператором транзитивного замыкания.

Мы исследуем разрешимость теории целых чисел с функцией следования, предикатами делимости, равенством и оператором транзитивного замыкания. В такой теории выражается также отношение «меньше» при помощи транзитивного замыкания отношения следования.

Если допускать оператор транзитивного замыкания хотя бы по двум парам переменных, то становится возможным выразить сложение и умножение, что делает теорию неразрешимой.

Мы рассматриваем оператор транзитивного замыкания только лишь по одной паре переменных. Для таких формул мы предлагаем метод элиминации оператора транзитивного замыкания.

Основной технический результат, который мы используем, заключается в следующем:

Лемма. *При построении «пути» при помощи оператора транзитивного замыкания из точки x в точку y всегда можно считать, что все промежуточные точки этого «пути» лежат в интервале $(min(x, y) - h, max(x, y) + h)$, где h – константа, зависящая от формулы под оператором транзитивного замыкания.*

С использованием данной леммы мы получаем наш основной результат:

Теорема. *Теория целых чисел с функцией следования, предикатами делимости, равенством и оператором транзитивного замыкания только по одной паре переменных является разрешимой.*

Литература

1. Boolos G. S. *Computability and logic.* / Geogre S. Boolos, Richard C. Jefferey. — Cambridge University Press, 1994. – P. 397.