На правах рукописи

Файзрахманов Марат Хайдарович

Тьюринговые скачки в иерархии Ершова

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена на *кафедре алгебры и математической логики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"*.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Калимуллин Искандер Шагитович,
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Селиванов Виктор Львович, доктор физико-математических наук, профессор Ишмухаметов Шамиль Талгатович.
Ведущая организация :	Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Новосибирский государственный университет".

Защита состоится «17» февраля 2011 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет" по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35., конференц-зал библиотеки им. Н. И. Лобачевского.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан «____»____________ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.24
к.ф.-м.н., доцент Еникеев А.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Работа посвящена изучению множеств, скачки которых принадлежат уровням иерархии Ершова, а также изучению их тьюринговых степеней и степеней по перечислимости.

Одним из важных понятий в теории вычислимости является понятие низкого множества, которое, интуитивно, выражает, что множество слабо вычислимо. Это связано с тем, что при изучении алгоритмических свойств множеств натуральных чисел часто возникает вопрос, при отсутствии подходящего вычислимого множества, о нахождении низкого множества, удовлетворяющего данному свойству. Например, согласно с теоремой Джокуша и Соара о низком базисе[1], каждый непустой Π^0_1-класс содержит низкое множество; по теореме Амбос-Шпииса, Джокуша и других[2], каждая быстро простая степень имеет низкое дополнение наверх. С другой стороны, существует большое количество литературы, посвященной низким множествам и их свойствам, которые напоминают свойства вычислимых множеств. Например, Соар[3] установил, что решетка вычислимо перечислимых (в.п.) надмножеств низкого в.п. множества изоморфна решетке всех в.п. множеств; согласно с теоремой Робинсона[4], теорема Сакса о разложении справедлива в верхнем конусе любой низкой в.п. степени.

Множество A называется *низким*, если $A' \equiv_T \emptyset'$. Таким образом, оператор скачка не может различать вычислимые и низкие множества. В известной

---

[1]Jockusch C. G., Soare R. I. Π^0_1-*classes and degrees of theories.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 173. – P. 33–56.

[2]Ambos-Spies K., Jockusch C. G., Shore R. A., Soare R. I. *An algebraic decomposition of the recursively enumerable degrees and the coincidence of several degree classes with the promptly simple degrees.* // Transaction of the American Mathematics Society – 1984. – V. 281. – P. 109–128.

[3]Soare R. *Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets Part II: Low sets.* // Annals of of Math. Logic. – 1982. – V. 22 – P. 69–107.

[4]Robinson R W. *Jump restricted interpolation in the recursively enumerable degrees.* // Annals of Math. – 1971. – V. 93. – P. 586–596.

работе Бикфорда и Миллса[5] введено понятие *супернизких* множеств, которое естественным образом усиливает понятие низких множеств: множество A называется супернизким, если $A' \equiv_{tt} \emptyset'$. Стандартное построение низкого простого множества уже дает супернизкое множество (как и теорема о низком базисе). Однако не каждое низкое множество является супернизким. Одним из следствий теоремы Сакса о разложении[6] является существование таких низких в.п. множеств A_0, A_1, что $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ и $A_0 \cup A_1 = \emptyset'$. Согласно с результатом Бикфорда и Миллса[7], одно из таких множеств A_0, A_1 не супернизкое. Более того, Доуней, Гринберг и Вебер[8] установили, что упорядоченные множества низких в.п. и супернизких в.п. степеней не элементарно эквивалентны.

В работах Ершова[9] построена иерархия множеств $A \leqslant_T \emptyset'$, исчерпывающая весь класс множеств $A \leqslant_T \emptyset'$ и получившая в литературе название "иерархия Ершова". Каждый следующий уровень иерархии содержит все предыдущие и не совпадает ни с одним из них. В представленной работе изучаются новые усиленные понятия низких множеств, а именно множества, тьюринговые скачки которых лежат в фиксированных бесконечных уровнях иерархии Ершова. По результату Карстенса[10], множества A из первого бесконечного (Δ^{-1}_{ω}-) уровня иерархии Ершова характеризуются условием $A \leqslant_{tt} \emptyset'$. Поэтому первым уровнем такой иерархии скачков будет класс супернизких множеств.

[5]Bickford M., Mills F. *Lowness properties of r.e. sets* // Manuscript, UW Madison. – 1982.

[6]Sacks G. E. *On the degrees less than* $0'$ // Ann. of Math. – 1963. – V. 2. – № 77. – P. 211-231.

[7]там же

[8]Downey R., Greenberg N., Weber R. *Totally ω-computable enumerable degrees and bounding critical triples* // J. Math. Logic – 2007. – V. 7. – № 2. – P. 145–171.

[9]Ершов Ю. Л. *Об одной иерархии множеств, I* // Алгебра и Логика. – 1968. – Т. 7. – №3. – С. 47–75.

Ершов Ю. Л. *Об одной иерархии множеств, II* // Алгебра и Логика. – 1968. – Т. 7. – №4. – С. 15–48.

Ершов Ю. Л. *Об одной иерархии множеств, III* // Алгебра и Логика. – 1970. – Т. 9. – №1. – С. 34–52.

[10]Carstens H. G. *Δ^0_2-mengen.* // Arch.Math.Log.Grundlagenforsch. – 1976. – V. 18. – P. 55–65.

Цель диссертационной работы. Описание уровней иерархии Ершова, содержащих тьюринговые скачки и скачки по перечислимости, а также изучение структурных свойств низких тьюринговых и e-степеней.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер, её результаты могут использоваться в дальнейших исследованиях в области низких множеств. Материалы диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов в университетах.

Основные результаты диссертации.

1. Получено описание уровней иерархии Ершова в естественной системе обозначений, содержащих тьюринговые скачки и скачки по перечислимости.

2. Установлено наличие Σ^{-1}_{ω}-вычислимой нумерации у семейства всех супернизких множеств.

3. Установлено существование низкой в.п. степени, неразложимой на супернизкие в.п. степени.

4. Доказано, что никакая низкая Π^0_1-e-степень не имеет полных дополнений в локальной структуре степеней по перечислимости.

Апробация работы.

По результатам диссертации были сделаны доклады:

- на международной конференции “Мальцевские чтения 2007” (Новосибирск, 2007 г.);

- на международной конференции “Logic Colloquium 2009” (София, Болгария, 2009 г.);

- на международной конференции “Мальцевские чтения 2009” (Новосибирск, 2009 г.);

- на международной конференции “Воображаемая логика Н.А. Васильева и современные неклассические логики” (Казань, 2010 г.)

- на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Казанского (Приволжского) федерального университета 2007–2010 гг.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[5]

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации получены автором. Результаты §3.2 получены совместно с И. Ш. Калимуллиным [4] в процессе нераздельного сотрудничества.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 91-й странице и состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, и списка литературы, содержащего 50 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, приведен обзор результатов исследований по ее тематике. Приведены необходимые определения и обозначения.

Глава 1 посвящена изучению классов множеств, скачки которых принадлежат уровням иерархии Ершова. Изучаются вопросы об описании уровней, собственно содержащих тьюринговые скачки, и о существовании вычислимых нумераций семейств множеств, скачки которых принадлежат фиксированным уровням иерархии Ершова.

В §1.1 приведены определения уровней иерархии Ершова и их основные свойства. Пусть $\langle \mathcal{O}, <_O \rangle$ – клиниевская система обозначений для конструктивных ординалов.

Определение 1. *Пусть дано обозначение $a \in \mathcal{O}$. Множество A принадлежит Σ_a^{-1}-уровню иерархии Ершова, если существует частично вычислимая функция от двух переменных ψ такая, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\psi(b, x) \downarrow$ для некоторого $b <_O a$ и $\psi(b_0, x) = 1$ для $<_O$-наименьшего элемента b_0 множества $\{x : x <_O a\}$.*

Определим Π_a^{-1}- и Δ_a^{-1}-*уровни*, полагая

$$\Pi_a^{-1} = \{A : \overline{A} \in \Sigma_a^{-1}\},$$

$$\Delta_a^{-1} = \Sigma_a^{-1} \cap \Pi_a^{-1}.$$

В §1.2 приводится полное описание уровней иерархии Ершова в естественной системе обозначений, содержащих тьюринговые скачки.

Определение 2. *Пара $\langle D_C, \nu_C \rangle$, где множество D_C и функция ν_C, отображающая D_C в отрезок ординальных чисел меньших ω^ω, определены следующим образом:*

$$D_C = \{x : \exists m, k_0, ..., k_m(x = \langle m, k_0, ..., k_m \rangle \ \& \ m \neq 0 \Rightarrow k_0 \neq 0)\},$$

$$\nu_C(\langle m, k_0, ..., k_m\rangle) = \omega^m k_0 + \omega^{m-1} k_1 + ... + k_m,$$

называется естественной системой обозначений.

Так как система D_C унивалентна, мы отождествляем ординалы, меньшие ω^ω, с их обозначениями.

Теорема 1. *Если множество A и ординал $\alpha < \omega^\omega$ такие, что $A' \in \Pi^{-1}_\alpha$, тогда $A' \in \Delta^{-1}_\alpha$.*

На самом деле доказательство теоремы 1 можно провести в любой системе обозначений, в отличие от следующих результатов второго параграфа.

Теорема 2. *Пусть $A' \in \Sigma^{-1}_{\omega^n}$, где $n > 0$. Тогда $A' \in \Delta^{-1}_{\omega^n}$.*

Из теорем 1 и 2 следуют отрицательные ответы на вопросы о существовании множеств, скачки которых лежат в $\Sigma^{-1}_\omega - \Delta^{-1}_\omega$ и в $\Pi^{-1}_\omega - \Delta^{-1}_\omega$, поставленные в работе Калимуллина[11] (2007).

Теорему 2 можно использовать как базис индукции для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Если множество A такое, что $A' \in \Sigma^{-1}_{\omega^n m}$ для некоторых $n,\ m > 0$, тогда $A' \in \Delta^{-1}_{\omega^n}$.*

Следствие 1. *Если $n > 0$, $\omega^n \leqslant \alpha < \omega^{n+1}$ и $A' \in \Sigma^{-1}_\alpha$, то $A' \in \Delta^{-1}_{\omega^n}$.*

Следствие 2. *Множество A супернизкое тогда и только тогда, когда $A' \in \Sigma^{-1}_{\omega\cdot n}$ для некоторого n.*

Следующая теорема характеризуют уровни, собственно содержащие скачки.

Теорема 4. *Для каждого $n > 0$ существует множество A, такое что $A' \in \Delta^{-1}_{\omega^{n+1}} - \Delta^{-1}_{\omega^n}$.*

[11] Kalimullin I. Sh. *Some Notes on Degree Spectra of the Structures.* // Lecture Notes in Computer Science. – 2007. – V. 4497. –P. 389–398.

Таким образом какой-либо бесконечный уровень иерархии Ершова в естественной системе обозначений собственно содержит тьюрингов скачок некоторого множества тогда и только тогда, когда этот уровень есть $\Delta^{-1}_{\omega^n}$ для некоторого $n > 0$.

В §1.3 изучается вопрос о существовании вычислимых нумераций семейств низких множеств, в частности, семейства всех супернизких множеств. *Нумерацией* семейства множеств $\mathcal{S}$ называется произвольное сюрьективное отображение $\nu : \omega \to \mathcal{S}$.

Определение 3. *Нумерация ν называется вычислимой, если множество*

$$G_\nu = \{\langle x, y\rangle : y \in \nu(x)\}$$

вычислимо перечислимо.

Семейства, которые имеют вычислимые нумерации, называются *вычислимыми*. В работе Гончарова и Сорби[12] была введена общая концепция вычислимой нумерации, согласно которой для произвольного обозначения $a \in \mathcal{O}$ понятие Σ^{-1}_a-*вычислимой* нумерации можно ввести так.

Определение 4. *Нумерация ν называется Σ^{-1}_a-вычислимой, если*

$$G_\nu = \{\langle x, y\rangle : y \in \nu(x)\} \in \Sigma^{-1}_a.$$

Нумерация ν называется Δ^0_2-*вычислимой*, если $G_\nu \in \Delta^0_2$. Таким образом нумерация Δ^0_2-вычислима тогда и только тогда, когда она Σ^{-1}_a-вычислима для некоторого $a \in \mathcal{O}$. Для данных обозначения $a \in \mathcal{O}$ и семейства $\mathcal{S}$ определим семейство

$$J_a(\mathcal{S}) = \{X \in \mathcal{S} : X' \in \Sigma^{-1}_a\}.$$

[12] Гончаров С. С., Сорби А. *Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса* // Алгебра и Логика. – 1997. – Т. 36. – № 6. – С. 621–641.

Рассмотрим случай, когда $|a|_O = \omega$ и $\mathcal{S}$ - семейство всех в.п. множеств, то есть $J_a(\mathcal{S})$ состоит из всех супернизких в.п. множеств. Чтобы доказать, что семейство $J_a(\mathcal{S})$ вычислимо, в силу теоремы Ейтса[13] достаточно доказать, что индексное множество

$$I(\boldsymbol{SL}_1) = \{e : W_e \text{ супернизкое}\}$$

имеет Σ^0_3-уровень в арифметической иерархии. Однако, оценивая уровень $I(\boldsymbol{SL}_1)$ по алгоритму Тарского-Куратовского, удается доказать только принадлежность $I(\boldsymbol{SL}_1)$ Σ^0_4-уровню.

Определение 5. *Множество A называется множеством с трассируемым скачком, если существует вычислимая функция h и равномерно вычислимо перечислимая последовательность множеств $\{T_e\}_{e\in\omega}$, такая что для всех e выполнено*

(i) $|T_e| \leqslant h(e)$,

(ii) $\Phi_e(A; e)\downarrow \Rightarrow \Phi_e(A; e) \in T_e$.

Легко проверить, что индексное множество всех в.п. множеств с трассируемым скачком принадлежит Σ^0_3-уровню арифметической иерархии. Согласно с результатом Нииса[14], класс в.п. множеств с трассируемым скачком совпадает с классом супернизких в.п. множеств. Таким образом, семейство всех супернизких в.п. множеств имеет вычислимую нумерацию. Однако в общем случае не удается описать супернизкие множества в терминах множеств с трассируемым скачком. Из результатов §1.3 удается получить достаточные условия вычислимости семейств низких множеств и установить наличие Σ^{-1}_ω-вычислимой нумерации у семейства всех супернизких множеств. Центральным результатом в этом параграфе является следующая теорема.

[13]Yates C. E. M. *On the degrees of index sets II* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 135. – P. 249–266.

[14]Nies A. *Reals which compute little* // Lecture Notes in Logic. – 2002. – V. 27. –P. 261–275.

Теорема 5. *Пусть даны Δ^0_2-вычислимые нумерации ν, μ семейств $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ соответственно. Тогда предикат*

$$P(e,i) \Leftrightarrow \nu(e)' \neq \mu(i)$$

является Σ^0_2-предикатом.

С использованием теоремы 5 устанавливается искомое достаточное условие.

Теорема 6. *Пусть даны обозначения $a, b \in O$, такие что $|a|_O > 0$, $|b|_O > 0$, и семейство множеств $\mathcal{S}$, которое содержит все конечные множества. Тогда если семейство $\mathcal{S}$ имеет Σ^{-1}_a–вычислимую нумерацию, то семейство $J_b(\mathcal{S})$ так же имеет Σ^{-1}_a–вычислимую нумерацию.*

Заметим, что уровень в иерархии Ершова вычислимой нумерации семейства $J_b(\mathcal{S})$ зависит только от уровня нумерации семейства $\mathcal{S}$.

Следствие 3. *Семейство всех супернизких множеств имеет Σ^{-1}_ω-вычислимую нумерацию.*

Глава 2 посвящена изучению структурных свойств тьюринговых степеней низких множеств. В §2.1 изучается полурешетка, порожденная супернизкими в.п. степенями (обозначаем через $\mathcal{J}$). По теореме Сакса о разложении, полурешетка $\mathcal{C}$ всех в.п. степеней состоит из всевозможных объединений пар низких в.п. степеней. Следующая теорема показывает, что $\mathcal{J}$ состоит из всевозможных объединений пар супернизких в.п. степеней.

Теорема 7. *Пусть даны супернизкие в.п. степени $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Тогда существуют супернизкие в.п. степени $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, такие что*

$$\mathbf{b}_0 \cup \mathbf{b}_1 \cup \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2.$$

Центральным результатом §2.1 является утверждение о различии элементарных теорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{J}$. Для доказательства этого утверждения используются понятия слабых критических троек в в.п. степенях и тотально ω-в.п. степеней, введенные Доуни[15].

Определение 6. *Тройка несравнимых элементов* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ *и* $\mathbf{b}$ *из верхней полурешетки образует слабую критическую тройку, если* $\mathbf{a}_0 \cup \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}$ *и не существует элемента* $\mathbf{c} \leqslant \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$, *такого что* $\mathbf{a}_0 \leqslant \mathbf{b} \cup \mathbf{c}$.

Определение 7. *Степень* $\mathbf{a}$ *называется тотально* ω*-в.п., если каждая функция* $g \leqslant_T \mathbf{a}$ ω*-в.п.*

Нетрудно проверить, что каждая супернизкая в.п. степень тотально ω-в.п. Доуни, Гринберг и Вебер[16] доказали, что тотально ω-в.п. степени не ограничивают критических троек. Поэтому следующее предложение является элементарным различием между $\mathcal{C}$ и $\mathcal{J}$.

Теорема 8. *Существует в.п. степень* $\mathbf{b}$, *такая что если в.п. степени* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *удовлетворяют соотношению*

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 \cup \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{a}_2,$$

то по крайней мере одна из степеней $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *не тотально* ω*- в. п.*

Следствие 4. $\mathcal{C} \not\equiv \mathcal{J}$.

Следствие 5. *Существует низкая в.п. степень, которая не является наименьшей верхней гранью никаких двух супернизких в.п. степеней.*

---

[15] Downey R., Greenberg N., Weber R. *Totally ω-computable enumerable degrees and bounding critical triples* // J. Math. Logic – 2007. – V. 7. – № 2. – P. 145–171.

[16] там же

В §2.2 изучается вопрос о различии элементарных теорий упорядоченных множеств низких в.п. (обозначается D_1^{low}) и низких 2-в.п. (обозначается D_2^{low}) степеней. Впервые, различие элементарных теорий структур D_1 и D_2 (в.п. и 2-в.п. степеней соответственно) было установлено Арслановым[17]: каждая 2-в.п. степень имеет относительное 2-в.п. дополнение наверх. Другие элементарные различия были найдены Купером, Лемппом и другими[18] и Доунеем[19]. Однако ни одно из них не влечет различие элементарных теорий D_1^{low} и D_2^{low}. Искомое элементарное различие получается из следующей теоремы.

Теорема 9. *Для каждого обозначения конструктивного ординала существует низкая 2-в.п. степень, не являющаяся разложимой на две меньшие 2-в.п. степени, скачки которых принадлежат Δ-уровню иерархии Ершова, соответствующему этому обозначению.*

Согласно с теоремой Велша[20], полурешетка в.п. степеней порождется двумя главными идеалами из низких в.п. степеней. Следовательно $D_1^{low} \not\equiv D_2^{low}$ (также этот результат другими методами независимо получил Ямалеев[21]).

Глава 3 посвящена распространению результатов §3.2 на степени по перечислимости, кроме того, исследуется проблема существования дополнений низких степеней в локальной структуре степеней по перечислимости. Первый параграф носит в основном технический характер, в нем приведены опре-

[17] Арсланов М. М. *О структуре степеней ниже* $\mathbf{0}'$. // Известия вузов. Математика. – 1988. – № 7. – С. 27—34.

[18] Cooper S. B., Harrington L., Lachlan A. H., Lempp S., Soare R. I. *The d.r.e. degrees are not dense.* // Ann. Pure Appl. Logic – 1991. – V. 55. – P. 125—151.

[19] Downey R. *D.r.e. degrees and the nondiamond theorem.* // Bull. London Math. Soc. – 1989. – V . 21. – P. 43—50.

[20] Welch L. *A herarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem of founding minimal pairs.* // Ph.D. Diss. University of Illions. Urbana. – 1980.

[21] Ямалеев М. М. *Структурные свойства тьюринговых степеней множеств из иерархии Ершова* // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Казанский государственный университет. Казань. – 2009.

деления сводимости по перечислимости, e-степеней и их фундаментальные свойства.

В §3.2 изучаются уровни иерархии Ершова, содержащие e-скачки. Все результаты этого параграфа получены совместно с И. Ш. Калимуллиным.

Определение 8. *Множество $K(A) = \{z : z \in \Theta_z(A)\}$ называется скачком по перечислимости или e-скачком множества A, где Θ_z – это оператор перечисления с геделевским номером z.*

Легко видеть, что для каждого множества A

$$K(A \oplus \overline{A}) \equiv_1 A'.$$

Поэтому, если уровень иерархии Ершова содержит тьюринговый скачок, то он содержит и e-скачок. Используя технику работы с e-сводимостью, часто удается обощить известные результаты о тьюринговых степенях. Так следующая теорема обобщает теоремы 1-3 главы 1.

Теорема 10. *Пусть даны множество A и обозначения $a, b \in \mathcal{O}$, такие что $K(A) \in \Sigma^{-1}_{a+_O b}$. Тогда либо $K(A) \in \Sigma^{-1}_a$, либо $K(A) \in \Sigma^{-1}_b$.*

Определение 9. *Обозначение $a \in \mathcal{O}$ называется нормальным, если $|a|_O \neq 0$ и существует частично вычислимая функция*

$$h : \{x : x <_O a\} \times \{x : x <_O a\} \longrightarrow \{x : x <_O a\},$$

которая строго $<_O$-возрастает относительно первого и второго аргументов.

Например, каждое естественное обозначение для ω^n, $n > 0$, является нормальным. В самом деле, в качестве h можно взять функцию, индуцированную натуральной суммой:

$$\alpha(+)\beta = \omega^{n_1}(m_1 + m_1') + \omega^{n_2}(m_2 + m_2') + \cdots + \omega^{n_k}(m_k + m_k'),$$

где

$$\alpha = \omega^{n_1} m_1 + \omega^{n_2} m_2 + \cdots + \omega^{n_k} m_k,$$

$$\beta = \omega^{n_1} m_1' + \omega^{n_2} m_2' + \cdots + \omega^{n_k} m_k',$$

$n_k \leqslant \cdots \leqslant n_2 \leqslant n_1$ и $m_i, m_i' < \omega$, которая, очевидно, строго возрастает с ростом как α, так и β. Отметим также, что если обозначение $a \in \mathcal{O}$ нормальное, тогда $|a|_O = \omega^\alpha$ для некоторого α.

Согласно с теоремой 2, если e-степень множества A тотальна и $K(A) \in \Sigma^{-1}_{\omega^n}$, тогда $K(A) \in \Delta^{-1}_{\omega^n}$. Как показывает следующая теорема, условие "$deg_e(A)$ тотальна" можно заменить на "$deg_e(A)$ не квазиминимальна".

Теорема 11. *Если $a \in \mathcal{O}$ – нормальное обозначение и e-степень множества A не квазиминимальна, тогда*

$$K(A) \in \Sigma^{-1}_a \Rightarrow K(A) \in \Delta^{-1}_a.$$

Следующая теорема показывает, что в отличии от тьюринговых скачков Σ-уровни (в нормальных системах) могут быть собственными для e-скачков.

Теорема 12. *Пусть дано нормальное обозначение $a \in \mathcal{O}$. Тогда существует такое множество A, что $K(A) \in \Sigma^{-1}_a - \Delta^{-1}_a$.*

Таким образом, если уровень Γ иерархии Ершова в естественный системе обозначений собственно содержит $K(A)$, тогда либо $\Gamma = \Sigma^{-1}_1$, либо Γ является $\Sigma^{-1}_{\omega^n}$- или $\Delta^{-1}_{\omega^n}$-уровнем для $n > 0$. Для произвольных обозначений можно только сказать, что если $a \in \mathcal{O}$ нормальное, то Σ^{-1}_a содержит $K(A)$; если один из уровней Σ^{-1}_a или Δ^{-1}_a содержит $K(A)$ и $|a|_O > 0$, тогда $|a|_O = \alpha \cdot \omega^2$, где $\alpha > 0$.

В §3.3 изучаются дополнения низких степеней в структуре $D_e(\leqslant \mathbf{0}_e')$, состоящей из всех Σ^0_2-e-степеней. Элемент $\mathbf{b}_e \leqslant \mathbf{0}_e'$ называется *дополнением* элемента $\mathbf{a}_e \leqslant \mathbf{0}_e'$, если $\mathbf{a}_e \cup \mathbf{b}_e = \mathbf{0}_e'$ и $\mathbf{a}_e \cap \mathbf{b}_e = \mathbf{0}_e$. Рассмотрим отображение

$A \mapsto A \oplus \overline{A}$. Оно индуцирует однозначное отображение тьюринговых степеней в тотальные степени по перечислимости:

$$\imath : \mathcal{D}_T \longrightarrow \mathcal{D}_e.$$

Более того, для любых тьюринговых степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедливо

$$\imath(\mathbf{a} \cup \mathbf{b}) = \imath(\mathbf{a}) \cup \imath(\mathbf{b}),$$

и $\imath(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_e$. Поэтому отображение $\imath$ является мономорфизмом из верхней полурешетки тьюринговых степеней в степени по перечислимости, сохраняющим наименьший элемент. Выясним какие e-степени соответствуют тьюринговым в.п. степеням относительно этого мономорфизма. Очевидно, что если A в.п., тогда $\overline{A} \equiv_e A \oplus \overline{A}$. Таким образом класс Π^0_1-e-степеней образует верхнюю полурешетку, изоморфную полурешетке в.п. тьюринговых степеней.

Впервые вопрос о существовании дополнений в степенных структурах был изучен Эпштейном[22]: он показал, что в структуре тьюринговых степеней ниже $\mathbf{0}'$ каждая в.п. степень имеет дополнение. Однако это уже не так в $D_e(\leqslant \mathbf{0}'_e)$: Калимуллиным[23] было установлено существование Π^0_1-e-степени, не имеющей Σ^0_2-дополнений. В следующей теореме устанавливается, что свойством недополняемости обладает каждая низкая Π^0_1-e-степень.

Теорема 13. *Если $\mathbf{a}_e$ – ненулевая низкая Π^0_1-e-степень, $\mathbf{b}_e$ – ненулевая Σ^0_2-e-степень и $\mathbf{0}'_e \leqslant \mathbf{a}_e \cup \mathbf{b}_e$, то существует такая ненулевая e-степень $\mathbf{c}_e$, что $\mathbf{c}_e \leqslant \mathbf{a}_e$ и $\mathbf{c}_e \leqslant \mathbf{b}_e$.*

Как показывает следующая теорема, условие “$\mathbf{a}_e$ низкая” необходимо, и существуют дополняемые Π^0_1-e-степени.

[22]Epstein E. L. *Minimal degrees of unsolvability and the full approximation construction* // Memoirs of the American Mathematical Society. – 1974. – № 162. American Mathematical Society, Providence, RI.

[23]Калимуллин И. Ш. *Структурные свойства верхней полурешетки степеней по перечислимости* // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н. Казанский государственный университет. Казань. – 2001.

Теорема 14. *Существуют* Π^0_1*-е-степень* $\mathbf{a}_e > \mathbf{0}_e$ *и* Δ^0_2*-е-степень* $\mathbf{b}_e > \mathbf{0}_e$, *такие что* $\mathbf{a}_e \cap \mathbf{b}_e = \mathbf{0}_e$ *и* $\mathbf{a}_e \cup \mathbf{b}_e = \mathbf{0}'_e$.

В заключение, автор выражает глубокую признательность научному руководителю Искандеру Шагитовичу Калимуллину и руководителю научной школы, заведующему кафедрой алгебры и математической логики Марату Мирзаевичу Арсланову за постановку задач, поддержку в работе и интерес к исследованиям автора, а также своим коллегам Андрею Николаевичу Фролову, Марсу Мансуровичу Ямалееву и Максиму Витальевичу Зубкову за внимание к исследованиям автора и активное и плодотворное обсуждение.

Публикации автора по теме диссертации

1. Файзрахманов М. Х. *Разложимость низких 2-вычислимо перечислимых степеней и тьюринговые скачки в иерархии Ершова* // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 12. – С. 58–66.

2. Файзрахманов М. Х. *Вычислимые нумерации семейств низких множеств и тьюринговые скачки в иерархии Ершова* // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51. – № 6. – С. 1435–1439.

3. Файзрахманов М. Х. *О полурешетке, порожденной супернизкими вычислимо перечислимыми степенями* // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 1. – С. 85–90.

4. Faizrahmanov M. Kh., Kalimullin I. Sh. *Turing and enumeration jumps in the Ershov hierarchy* // Journal of Logic and Computation. – 2010. doi: 10.1093/logcom/exq039.

5. Faizrahmanov M. Kh. *Splitting and antisplitting theorems in classes of low degrees* // Bull. Symbolic Logic. – 2010. – V. 16. – P. 116.