На правах рукописи

Расстригин Александр Леонидович

ФОРМАЦИИ УНАРОВ

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Волгоградский государственный социально-педагогический университет».

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВПО «Волгоградский государственный социально-педагогический университет» *Карташов Владимир Константинович.*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский университет "МИЭТ"» *Кожухов Игорь Борисович*;
	кандидат физико-математических наук, доцент ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» *Ильин Сергей Николаевич.*
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Новосибирский государственный технический университет».

Защита состоится 4 декабря 2014 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, корпус 2, ауд. 1011.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Автореферат разослан 22 октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Еникеев А. И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. *Формацией* называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Понятие формации впервые было определено в 1963 году В. Гашюцом (Gaschütz W.) в работе [10], в которой разрабатывались методы нахождения некоторых подгрупп (подгрупп Холла, Картера) конечных разрешимых групп. Первые значительные результаты использования формаций были получены уже в первые годы после выхода работы [10] и вошли в посвященную конечным группам книгу Б. Хупперта (Huppert B.) [11]. Появление большого количества работ, в которых формации применялись при изучении подгрупп различных конечных групп, привело к выделению теории формаций в обособленное направление. Монография Л. А. Шеметкова [12] аккумулировала результаты по формациям конечных групп, полученные к концу 1970-х годов. Монография Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [13] посвящена применению формационных методов в исследовании не только класса групп, но и других алгебраических систем. В ней было обращено внимание на методы изучения самих формаций уже как самостоятельных объектов исследования.

В докладах на IV Всесоюзном математическом съезде (Ленинград, 1961 г.) и Международном конгрессе математиков 1966 г. в Москве академик АН СССР А. И. Мальцев указывает одно из важнейших направлений — теорию классов алгебраических систем, в частности теорию классов, близких аксиоматизируемым (т. е. характеризуемым некоторым набором формул) классам. В [13] авторы обращают внимание на то, что среди классов алгебраических систем наиболее исследованными являются многообразия и квазимногообразия, рассмотрение которых не всегда оправдано при изучении конечных систем или систем с иными условиями конечности, так как все многообразия и квазимногообразия (за исключением тривиальных) обязательно содержат бесконечные системы. Формации обладают схожими свойствами с такими классами, например допускают характеризацию с помощью последовательностей тождеств [13, §4–5] (ср. [14]: промногообразия, псевдомногообразия), но могут состоять лишь из конечных систем. В связи с этим изучение формаций алгебраических систем, отличных от групп, привлекает внимание все большего числа алгебраистов.

Степень разработанности темы исследования. Теория формаций алгебраических систем в настоящее время не является сильно разработанной теорией. Исторически формации получили широкое применение при изучении конечных групп, и до сих пор применение формаций в теории конечных групп имеет важное значение [12; 15–17]. Изначально особое место здесь играли локальные формации, рассмотрение которых начато еще Гашюцом в [10]. Основная идея заключается в рассмотрении для данного класса групп таких его подклассов, члены которых удовлетворяют заданным ограничениям (определяемым специальной функцией) на их группы автоморфизмов [18]. Затем рассматривались различные обобщения локальных формаций (см., напр.: [19]). В [13] подход, использованный для групп, обобщается на другие объекты — мультькольца. Обобщение конструкции для мультиколец и идеалов на универсальные алгебры мальцевского многообразия и конгруэнции возможно с использованием понятия централизаторов конгруэнций [20]. Таким образом, одним из естественных направлений продолжения развития теории формаций алгебраических систем можно считать изучение формаций универсальных алгебр различных сигнатур, отличных от групповой.

Тот факт, что произвольное теоретико-множественное пересечение формаций является формацией, позволяет строить наименьшие формации, содержащие данную совокупность алгебраических систем, — формации, *порожденные* совокупностью систем. Изучение свойств порожденной данной совокупностью систем формации, а также различных порождающих совокупностей данной формации и операторов, ставящих в соответствие совокупности систем порожденную ею формацию [21], является одним из направлений теории формаций.

В теории формаций активно применяются теоретико-решеточные методы [13, гл. 4; 22–24]. Для данной формации любой ее подкласс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений, называется *подформацией* данной формации. Изучение решеток подформаций является одним из направлений в изучении формационных свойств. Важную роль, как и в других областях, играют решеточные тождества (модулярности, дистрибутивности). Например, в [13] установлено, что из конгруэнц-модулярности всех алгебр формации следует модулярность решетки ее подформаций. Отсюда непосредственно следует модулярность решетки формаций групп. Относящиеся к исследованию решеток формаций групп вопросы рассмотрены А. Н. Скибой также в монографии [22].

Унарной алгеброй называется универсальная алгебра, все операции которой унарны. *Унаром* (*моноунарной алгеброй*, *1-уноидом* и т. п.) называют унарную алгебру с одной операцией. Унарные алгебры в целом и унары в частности привлекали внимание многих математиков. Простота унарных алгебр заключается в возможности изображать их в виде ориентированного графа (возможно, с реберной раскраской), отождествляя элементы с вершинами такого графа, а действие операций — с ребрами. Рассматриваются и другие варианты, устанавливающие в соответствие унарам неориентированные графы [25; 26]. Также возможна интерпретация унарной алгебры как автомата без выхода [27–30]. Элементы алгебры при этом рассматриваются в качестве внутренних состояний такого автомата, а операции — как входные сигналы. Данный подход не только опирается на методы теории полугрупп, но и сам оказал влияние на изучение конечных полугрупп, языков и теории автоматов. Унарная алгебра может рассматриваться как полигон над моноидом [31; 32], порожденным множеством унарных операций; как множество с заданными на нем бинарными отношениями. Унарные алгебры являются богатым источником примеров и контрпримеров в алгебре. Доказательством тому является внушительный список работ по данной тематике, включая монографии [33] (более 185 позиций в библиографическом списке) и [34].

Исследования унаров и их классов формируют одно из направлений по теме унарных алгебр. В монографии по теории алгебраических систем [35] А. И. Мальцев уделяет внимание унарным алгебрам, в частности им показано, что любое многообразие унаров определимо одним тождеством. Описания свойств строения конкретных унаров, строения их моноида эндоморфизмов приводит серия работ [36; 37]. Описание подпрямо неразложимых унаров приведено в [38; 39]. Получение характеристик для подпрямо неразложимых унарных алгебр, имеющих неодноэлементное множество сигнатурных операций, — намного более сложная задача [40; 41], решаемая для конкретных видов алгебр [27; 28; 42; 43]. Разложимые в подпрямое произведение конечных унаров унары и их квазимногообразие охарактеризованы в [44]. Квазимногообразия унаров и решетки квазимногообразий унаров исследовались В. К. Карташовым в [45–47]. Даны критерии дистрибутивности, булевости, полудистрибутивности решетки квазимногообразий унаров. Было доказано наличие конечного базиса квазитождеств у конечного унара и независимого базиса квазитождеств у конечно порожденного унара. В [48] доказано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры имеет конечный базис тождеств. Антимногообразия унаров и решетки антимногообразий унаров изучались А. В. Карташовой в [49]. Приводится необходимое и достаточное условие наличия у конечного унара независимого или конечного базиса антитождеств. Также ею изучались решетки топологий унаров и унарных алгебр [50]. В работе [51] был найден критерий элементарной эквивалентности унаров. Ретракты унаров и связанные с ними вопросы исследовали Д. Якубикова-Студеновска (Jakubíková-Studenovská D.) и со-авторы, чему посвящена серия работ и одна из глав монографии [33]. В [52] описаны псевдомногообразия унаров. Приведено структурное описание псевдомногообразий унаров, а также показано, что каждое эквациональное (характеризуемое набором тождеств) псевдомногообразие порождено конечным числом унаров (ср. предложение 1.2.1 и результаты раздела 1.2 диссертации).

Исследование алгебр, родственных унарным алгебрам, является одним из направлений по теме унарных алгебр. В докладе на коллоквиуме по универсальной алгебре в Эстергоме (1977 г.) [53] Л. А. Скорняков цитирует более 40 работ, в которых исследуются решетки конгруэнций, решетки подунаров, моноид эндоморфизмов, группа автоморфизмов унаров, тем самым подчеркивая важность исследований в данном направлении. Более поздний обзор [54], посвященный результатам изучения алгебр, родственных унарным, составлен В. К. Карташовым.

В [55] описаны унары с полумодулярной или атомарной решеткой конгруэнций. В [56] Д. П. Егорова и Л. А. Скорняков описали унары, у которых решетка конгруэнций обладает дополнениями, модулярна и с дополнениями или булева. В [57] Д. П. Егорова описала унары, решетка конгруэнций которых модулярна, дистрибутивна или цепь. В [58] А. П. Бощенко описал унары, решетка конгруэнций которых является решеткой с псевдодополнениями.

В [59] найдены условия коммутативности моноида эндоморфизмов унаров с некоторыми ограничениями, а также описаны вполне инвариантные (вполне характеристические, то есть сохраняющиеся при эндоморфизме) конгруэнции. В [60] описаны унары с обратимыми эндоморфизмами, а также все абелевы группы автоморфизмов унаров. В [61–63] описаны некоторые классы унаров, определяемых своей полугруппой эндоморфизмов. В [64] описаны все унары, определяемые своей решеткой конгруэнций.

Унары используются при изучении других алгебраических систем. В [65] В. Л. Усольцевым изучаются свойства алгебр с операторами (дополнительной системой унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно сигнатурных операций), в [66] изучаются простые универсальные алгебры с (унарными) операторами. Обзор [67] М. Новотны (Novotný M.) посвящен работам о гомоморфизмах унаров и приложениях. В [68] с помощью гомоморфизмов подходящих унаров описываются все гомоморфизмы произвольных алгебр конечной сигнатуры.

Изучение формаций унарных алгебр имеет смысл как в рамках отмеченного А. И. Мальцевым направления по изучению различных классов алгебраических систем, так и в рамках развития теории формаций по пути использования идей, носящих универсальный характер, применительно к алгебраическим системам в широком смысле. Как уже отмечено, формации рассматриваются для различных алгебраических систем [13]. Например, в работе [69] исследуются решеточно упорядоченные группы (ℓ-группы, то есть алгебра со структурой решетки и групповой структурой, сохраняющей порядок) и GMV-алгебры. В работе [23] авторы Ю. Лигова (Lihová J.) и Й. Поцс (Pócs J.) описывают атомы решетки формаций решеток. В работе [24] Д. Якубикова-Студеновска и Й. Поцс доказывают результат для формаций унаров, аналогичный доказанному автором в [1] (см. теорему 3.1.1 в диссертации).

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационного исследования являлись описание решетки конечных формаций унаров, описание строения конечных формаций унаров, получение структурных характеристик формаций, содержащих бесконечные унары, а также характеристик решеток таких формаций.

Для достижения поставленной цели в ходе диссертационного исследования были решены следующие задачи:

1) Описать порождающие множества конечных формаций унаров, состоящие лишь из конечных подпрямо неразложимых унаров.

2) Найти удобные для полного описания порождающие множества не более чем счетных формаций унаров с конечным числом циклов.

3) Найти критерий модулярности, дистрибутивности решетки подформаций данной не более чем счетной формации унаров с конечным числом циклов.

Объектом исследования являются конечные и не более чем счетные формации унаров, а также решетки подформаций таких формаций.

Предметом исследования являются структурные характеристики конечных и не более чем счетных формаций унаров, а также характеристики решеток подформаций таких формаций.

Научная новизна. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для исследований, связанных с изучением формаций алгебраических систем, в частности формаций унарных алгебр, а также при чтении специальных курсов в высших учебных заведениях для студентов математических специальностей.

Методология и методы исследования. В работе использовались общие методы теории формаций, теории решеток и теории алгебраических систем, а также конкретные методы исследования унаров.

Положения, выносимые на защиту:

1) Доказательство факта наследственности произвольной не более чем счетной формации унаров (теорема 2.2.2).

2) Описание решетки подформаций произвольной конечной формации унаров (теорема 3.1.1), в частности описание решетки всех конечных формаций унаров.

3) Найден критерий того, что решетка подформаций не более чем счетной формации унаров является цепью (предложение 3.3.1). Найдены критерии дистрибутивности и модулярности решетки подформаций не более чем счетной формации унаров с конечным числом циклов (теорема 3.4.1).

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на VIII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 190-летию П. Л. Чебышева и 120-летию И. М. Виноградова (Саратов, 12–17 сентября 2011 г.), X Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Волгоград, 10–16 сентября 2012 г.), XI Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» (Саратов, 9–14 сентября 2013 г.), XII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной 80-летию профессора Виктора Николаевича Латышева (Тула, 21–25 апреля 2014 г.), Международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения», посвященной 210-летию Казанского университета, 80-летию со дня основания кафедры алгебры и математической логики Казанского университета Н. Г. Чеботаревым и 70-летию со дня рождения зав. кафедрой члена-корреспондента АН РТ М. М. Арсланова (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.), а также на научных конференциях и семинарах Волгоградского государственного социально-педагогического университета и, в частности, кафедры алгебры, геометрии и математического анализа.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 печатных работах [1–9], из них 2 статьи [4; 6] — в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, утвержденный ВАК Министерства образования и науки РФ.

Личный вклад автора. Диссертационное исследование выполнено соискателем самостоятельно под руководством кандидата физико-математических наук, профессора В. К. Карташова. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования.

Структура и объем диссертации. Диссертация содержит введение, 3 главы и библиографию. Общий объем диссертации — 107 страниц, из которых 96 страниц текста, содержащего 6 рисунков. Библиография включает 79 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы и сформулирована цель исследования, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1 посвящена конечным формациям унаров, описанию их строения и различных свойств.

В разделе 1.1 данной главы содержатся необходимые определения и терминология, используемые в дальнейшем тексте. Так, формация называется *конечной* (*не более чем счетной*), если она состоит лишь из конечных (не более чем счетных) систем. Формация называется *наследственной*, если она вместе с каждой своей системой содержит все ее подсистемы. Здесь доказаны некоторые вспомогательные утверждения об основных понятиях, а также процитированы необходимые известные результаты.

В разделе 1.2 описаны структурные характеристики конечных формаций унаров. Показано, что любая конечная формация порождается классом всех своих подпрямо неразложимых алгебр. Задан оператор замыкания $\mathcal{C}$ на классе всех подпрямо неразложимых унаров данной конечной формации унаров, ставящий в соответствие всякому множеству $\mathfrak{X}$ подпрямо неразложимых унаров данной формации класс всех подпрямо неразложимых унаров формации, порожденной множеством $\mathfrak{X}$. Таким образом, если рассматривать оператор $\mathcal{C}$ на классе всех подпрямо неразложимых унаров формации всех конечных унаров, то получим описание классов подпрямо неразложимых унаров для всех конечных формаций унаров. Лемма 1.2.3 настоящего раздела дает полное описание всех замкнутых множеств упомянутого оператора замыкания. Из леммы 1.2.3 получено

Следствие 1.2.3. *Любая конечная формация унаров является наследственной формацией.*

Класс конечных алгебр называется *псевдомногообразием* [70], если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и конечных прямых произведений.

Таким образом, для конечных формаций унаров верно

Предложение 1.2.1. *Произвольная конечная формация унаров является псевдомногообразием.*

Также в данном разделе приведены важные конкретные примеры формаций унаров.

Следуя [13], конгруэнция θ алгебраической системы A называется *фраттиниевой*, если для любой собственной подсистемы B системы A объединение всех θ-классов, порожденных элементами из B, отлично от A. Класс $\mathfrak{X}$ называется *насыщенным* в классе $\mathfrak{Y}$, если из $A \in \mathfrak{Y}$ и $A/\theta \in \mathfrak{X}$, где θ — некоторая фраттиниева конгруэнция A, всегда следует $A \in \mathfrak{X}$.

В разделе 1.3 выясняется, какие конечные формации унаров являются насыщенными в классе конечных унаров. Для этого в лемме 1.3.1 получено описание всех фраттиниевых конгруэнций конечного унара.

Теорема 1.3.1. *В классе всех конечных унаров насыщенными являются лишь пустая формация, формация всех конечных циклических унаров и формация всех конечных унаров.*

В разделе 1.4 данной главы для всякой конечной формации $\mathfrak{F}$ унаров рассматривается категория $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$. Здесь классом объектов $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$ данной категории $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$ является класс всех унаров формации $\mathfrak{F}$, а классом морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$ категории $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$ является класс всех гомоморфизмов унаров формации $\mathfrak{F}$.

С использованием результатов раздела 1.2 доказана следующая

Теорема 1.4.1. *Непустые конечные формации унаров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ совпадают тогда и только тогда, когда категории $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}_1$ и $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}_2$ эквивалентны.*

Глава 2 посвящена изучению формаций, содержащих бесконечные унары, и, в частности, не более чем счетным формациям унаров.

В разделе 2.1 настоящей главы исследуются порождающие совокупности не обязательно конечных формаций унаров. Как замечено в разделе 1.2 главы 1 (см. пример 1.2.1), для случая бесконечных унаров множество подпрямо неразложимых унаров, принадлежащих некоторой фиксированной формации, уже не является порождающим для данной формации и, следовательно, не подходит в качестве класса унаров для полного структурного описания таких формаций. Поэтому необходимо найти другой класс унаров, который бы однозначно определял содержащую его формацию. Здесь изучаются несколько классов, обладающих схожими свойствами. Показано, что один из рассматриваемых классов соответствует требованию.

В разделе 2.2 данной главы доказывается теорема 2.2.2, обобщающая следствие 1.2.3, полученное в разделе 1.2 главы 1.

Теорема 2.2.2. *Произвольная не более чем счетная формация унаров наследственна.*

Для доказательства теоремы 2.2.2 предварительно устанавливается истинность серии утверждений о свойствах некоторых выделенных типов унаров, что позволяет выделить удобные для изучения порождающие классы унаров для не более чем счетных формаций унаров (предложение 2.2.2).

Глава 3 посвящена изучению решеток формаций унаров по отношению включения.

Пусть фиксирована некоторая произвольная формация $\mathfrak{F}$ унаров. Множество всех подформаций формации $\mathfrak{F}$ обозначается $L_F(\mathfrak{F})$ и образует полную решетку относительно теоретико-множественного отношения включения множеств.

В разделе 3.1 данной главы для описания решетки подформаций произвольной конечной формации унаров используется оператор замыкания $\mathcal{C}$, определенный в разделе 1.2 главы 1. Оператор $\mathcal{C}$ задан таким образом, что между множеством замкнутых подмножеств этого оператора и множеством подформаций данной формации существует биективное соответствие (устанавливается с помощью оператора form, ставящего в соответствие совокупности систем порожденную ею формацию), сохраняющее отношение включения множеств. Поэтому задача описания решетки подформаций сводится к задаче описания решетки замкнутых множеств оператора замыкания на классе конечных подпрямо неразложимых унаров данной формации.

Теорема 3.1.1 данного раздела дает полное описание решетки $L_F(\mathfrak{F})$ для любой конечной формации $\mathfrak{F}$ унаров.

Обозначим для произвольной решетки L через L^* (соответственно L_*) решетку L, дополненную внешним образом наибольшим (наименьшим) элементом. Фиксированной формации $\mathfrak{F}$ определенным образом сопоставляется совокупность решеток $S_i(\mathfrak{F})$ ($i \in \mathbb{N}_0$), каждая из которых является подрешеткой цепи натуральных чисел относительно естественного порядка $\leqslant$, возможно, дополненная сверху наибольшим элементом.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая конечная формация унаров.*

Тогда, если $C_1^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$, то

$$L_F(\mathfrak{F}) \cong \left(S_0(\mathfrak{F}) \times \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i(\mathfrak{F})\right)_*\right)_*$$

Если $C_1^0 + C_1^0 \notin \mathfrak{F}$, то

$$L_F(\mathfrak{F}) \cong S_0(\mathfrak{F})_*$$

Данная теорема дает описание решетки всех конечных формаций унаров (если в качестве $\mathfrak{F}$ взять формацию всех конечных унаров), а ее доказательство также отвечает на вопрос: когда решетка реализуется в качестве решетки подформаций конечной формации унаров, то есть когда данная решетка изоморфна решетке подформаций некоторой конечной формации унаров.

Следствие 3.1.3. *Решетка L тогда и только тогда изоморфна решетке $L_F(\mathfrak{F})$ для некоторой непустой конечной формации унаров $\mathfrak{F}$, когда она изоморфна либо некоторой полной подрешетке решетки $\mathbb{N}^*$ относительно естественного порядка, либо решетке*

$$\left(S_0 \times \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i\right)_*\right)_*$$

для некоторых полных подрешеток S_i ($i \in \mathbb{N}_0$) решетки $\mathbb{N}^*$ относительно естественного порядка.

Напомним [71], что элемент a решетки L называется *компактным*, если из существования $\bigvee A$ и $a \leqslant \bigvee A$ для множества элементов $A \subseteq L$ всегда следует $a \leqslant \bigvee A_0$ для некоторого конечного подмножества A_0 множества A. Решетка L называется *компактно порожденной*, если любой элемент из L является точной верхней гранью какого-то множества компактных элементов. Полная решетка называется *алгебраической*, если она компактно порожденная.

Для конечных формаций унаров получены следующие утверждения.

Следствие 3.1.1. *Решетка подформаций любой конечной формации унаров является алгебраической решеткой.*

Следствие 3.1.2. *Решетка подформаций любой конечной формации унаров является дистрибутивной решеткой.*

Заметим, что следствие 3.1.1 здесь получается из алгебраичности используемого оператора замыкания, но, например, в [23] приводится доказательство алгебраичности решетки формаций решеток, которое, очевидно, переносится и на решетки формаций произвольных алгебраических систем (см. предложение 3.1.1).

Следствие 3.1.4 настоящего раздела отвечает на вопрос о мощности решетки подформаций $L_F(\mathfrak{F})$ для любой конечной формации унаров $\mathfrak{F}$.

В разделе 3.2 данной главы доказывается вложимость решетки многообразий унаров в решетку формаций унаров. Любое многообразие является также формацией согласно теореме Биркгофа о многообразиях (см., напр.: [72, гл. II, теорема 11.9]). В предложении 3.2.1 показано, что решетка многообразий алгебр образует подрешетку в решетке формаций. В [13, проблема 9.5] ставится вопрос о вложении решетки всех многообразий алгебраических систем произвольной сигнатуры в решетку всех конечных формаций с помощью оператора fin, ставящего в соответствие данному многообразию множество всех его конечных систем. Теорема 3.2.1 дает положительный ответ на этот вопрос для сигнатуры с одним унарным символом операции, то есть доказывает вложимость решетки всех многообразий унаров в решетку всех конечных формаций унаров с помощью оператора fin.

В разделе 3.3 обобщаются рассуждения раздела 1.2 главы 1 и раздела 3.1 данной главы относительно оператора замыкания $\mathcal{C}$.

Предложение 3.3.1 дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы решетка $L_F(\mathfrak{F})$ являлась цепью для не более чем счетной формации $\mathfrak{F}$ унаров.

В разделе 3.4, с использованием результатов раздела 3.3, выясняется, какие решеточные свойства выполняются на решетке не более чем счетных формаций унаров. По результатам раздела 3.1 известно, что решетка подформаций любой конечной формации унаров дистрибутивна. В лемме 3.4.1 показано, что решетка всех формаций не более чем счетных унаров не модулярна. Отсюда следует, что решетка всех формаций унаров также не модулярна. В частности, для формаций не более чем счетных унаров *с конечным числом циклов*, то есть унаров, содержащих лишь конечное число попарно неизоморфных циклов, верна

Теорема 3.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров с конечным числом циклов. Тогда решетка $L_F(\mathfrak{F})$ дистрибутивна в тех и только тех случаях, когда*

1) *либо $\mathfrak{F}$ содержит только конечные прямые суммы связных унаров;*

2) *либо $\mathfrak{F}$ содержит только циклические унары.*

Следствие 3.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров с конечным числом циклов. Тогда решетка $L_F(\mathfrak{F})$ дистрибутивна в том и только том случае, когда унары $\mathcal{D}_\omega$ и C_1^1 не принадлежат $\mathfrak{F}$.*

Также для таких формаций установлено следующее

Следствие 3.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров с конечным числом циклов. Тогда решетка $L_F(\mathfrak{F})$ дистрибутивна в том и только том случае, когда она модулярна.*

Для доказательства теоремы 3.4.1 используются результаты раздела 2.2. Для выделенного в предложении 2.2.2 раздела 2.2 класса унаров лемма 3.4.4 данного раздела дает полное описание всех замкнутых множеств рассматриваемого в разделе 3.3 оператора замыкания $\mathcal{C}$. Таким образом, лемма 3.4.4 дает структурное описание всех не более чем счетных формаций унаров с конечным числом циклов.

Автор выражает благодарность профессору В. К. Карташову и профессору В. А. Артамонову за постановку задач, их плодотворное обсуждение и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

1. Расстригин, А. Л. Формации конечных унаров / А. Л. Расстригин // Чебышевский сборник. — 2011. — Т. XII, № 2 (38). — С. 102–109.

2. Расстригин, А. Л. Формации конечных унаров / А. Л. Расстригин // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. VIII Междунар. конф., посвящ. 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова (Саратов, 12–17 сент. 2011 г.). — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. — С. 61–62.

3. Расстригин, А. Л. О решетках формаций унаров / А. Л. Расстригин // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. X Междунар. конф. Волгоград, 10–16 сент. 2012 г. — Волгоград : Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2012. — С. 55–56.

4. Расстригин, А. Л. О решетках формаций унаров / А. Л. Расстригин // Ученые записки Орловского государственного университета. — 2012. — № 6 (50). — С. 190–194.

5. Расстригин, А. Л. Наследственность формаций унаров / А. Л. Расстригин // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. — С. 69–70.

6. Расстригин, А. Л. О наследственности формаций унаров / А. Л. Расстригин // Известия Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 4. — С. 108–113.

7. Расстригин, А. Л. О насыщенных формациях конечных унаров / А. Л. Расстригин // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: материалы XII Междунар. конф., посвящ. 80-летию проф. Виктора Николаевича Латышева. — Тула : Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. — С. 137–138.

8. Расстригин, А. Л. О решетках формаций унаров с конечным числом циклов / А. Л. Расстригин // Материалы конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной школы «Вычислимость и вычислимые структуры». — Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2014. — С. 123.

9. Расстригин, А. Л. О насыщенных формациях конечных унаров / А. Л. Расстригин // Чебышевский сборник. — 2014. — Т. 15, № 2 (50). — С. 66–72.

Статьи [4; 6] опубликованы в журналах, входящих в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук, утвержденный ВАК Министерства образования и науки РФ.

Цитируемая литература

10. Gaschütz, W. Zur theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Mathematische Zeitschrift. — 1963. — Bd. 80, H. 1. — S. 300–305.

11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin; New York : Springer-Verlag, 1983. — Bd. 134 von Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. — S. 796.

12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М. : Наука, 1978.

13. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. — М. : Наука, 1989.

14. Ash, C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes. / C. J. Ash // J. Algebra. — 1985. — Vol. 92. — P. 104–115.

15. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. De Gruyter Expositions in Mathematics no. 4. — Berlin; New York : Walter de Gruyter, 1992. — P. 901.

16. Guo, Wenbin. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. — Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London : Science Press/Kluwer Academic Publishers, 2000.

17. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. — Dordrecht : Springer, 2006.

18. Шеметков, Л. А. Ступенчатые формации групп / Л. А. Шеметков // Математический сборник. — 1974. — Т. 94(136), № 4(8). — С. 628–648.

19. Баллестер-Болинше, А. О частично насыщенных формациях конечных групп / А. Баллестер-Болинше, К. Кальво, Л. А. Шеметков // Математический сборник. — 2007. — Т. 198, № 6. — С. 3–24.

20. Smith, J. D. H. Mal'cev Varieties / J. D. H. Smith. — Berlin; Heidelberg : Springer, 1976. — Vol. 554 of Lecture Notes in Mathematics. — P. 158.

21. Guo, Wenbin. Formation operators on classes of algebras / Wenbin Guo, K. P. Shum // Communications in Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 3457–3472.

22. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. — Минск : Беларуская навука, 1997.

23. Lihová, J. On formations of lattices / J. Lihová, J. Pócs // Acta Universitatis Matthiae Belii, series Mathematics. — 2009. — no. 15. — P. 63–72.

24. Jakubíková-Studenovská, D. Formations of finite monounary algebras / D. Jakubíková-Studenovská, J. Pócs // Algebra universalis. — 2012. — Vol. 68, no. 3-4. — P. 249–255.

25. Jakubíková-Studenovská, D. Unoriented graphs of monounary algebras / D. Jakubíková-Studenovská // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 222, no. 1. — P. 167–179.

26. Jakubíková-Studenovská, D. On a relation between monounary algebras and unoriented graphs / D. Jakubíková-Studenovská // Tatra Mt. Math. Publ. — 2003. — Vol. 27. — P. 139–152.

27. Imreh, B. On finite nilpotent automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1981. — Vol. 5, no. 3. — P. 281–293.

28. Imreh, B. On finite definite automata / B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1985. — Vol. 7, no. 1. — P. 61–65.

29. Ćirić, M. The lattice of subautomata of an automaton: A survey / M. Ćirić, S. Bogdanović, T. Petković // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 1998. — Vol. 64, no. 78. — P. 165–182.

30. Ćirić, M. Lattices of subautomata and direct sum decompositions of automata / M. Ćirić, S. Bogdanović // Algebra Colloq. — 1999. — Vol. 6, no. 1. — P. 71–88.

31. Kilp, M. Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs. A handbook for students and researchers. / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. — Berlin : Walter de Gruyter, 2000. — 529 p.

32. Кожухов, И. Б. Полугруппы, над которыми все полигоны резидуально конечны / И. Б. Кожухов // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 4. — С. 1335–1344.

33. Jakubíková-Studenovská, D. Monounary Algebras / D. Jakubíková-Studenovská, J. Pócs. — Košice : Pavol Jozef Šafárik University (UPJŠ), 2009.

34. Pitkethly, J. G. Dualisability: Unary Algebras and Beyond / J. G. Pitkethly, B. A. Davey. Advances in Mathematics. — [S. l.] : Springer, 2005.

35. Мальцев, А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. — М. : Наука, 1970.

36. Chvalina, J. Characterizations of certain monounary algebras. I. / J. Chvalina // Arch. Math. (Brno). — 1978. — Vol. 14, no. 2. — P. 85–97.

37. Chvalina, J. Characterizations of certain monounary algebras. II. / J. Chvalina // Arch. Math. (Brno). — 1978. — Vol. 14, no. 3. — P. 145–153.

38. Yoeli, M. Subdirectly irreducible unary algebras / M. Yoeli // Amer. Math. Monthly. — 1967. — Vol. 74. — P. 957–960.

39. Wenzel, G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$. / G. H. Wenzel // Archiv der Mathematik. — 1970. — Vol. 21. — P. 256–264.

40. Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras / S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petković [et al.] // Fundam. Inform. — 1999. — Vol. 38, no. 1–2. — P. 51–60.

41. Ježek, J. Homomorphic images of finite subdirectly irreducible unary algebras / J. Ježek, P. Marković, D. Stanovsky // Czechoslovak Math. J. — 2007. — Vol. 57. — P. 671–677.

42. Ćirić, M. Subdirectly irreducible definite, reverse definite, and generalized definite automata / M. Ćirić, B. Imreh, M. Styeinby // Publ. Elektroteh. Fak., Univ. Beogr., Ser. Mat. — 1999. — Vol. 10. — P. 69–79.

43. Ésik, Z. Subdirectly irreducible commutative automata / Z. Ésik, B. Imreh // Acta Cybernetica. — 1981. — Vol. 5, no. 3. — P. 251–260.

44. Сизый, С. В. Финитно аппроксимируемые унары / С. В. Сизый // Математические заметки. — 1988. — Т. 43, № 3. — С. 401–406.

45. Карташов, В. К. Квазимногообразия унаров / В. К. Карташов // Математические заметки. — 1980. — Т. 27, № 1. — С. 7–20.

46. Карташов, В. К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов / В. К. Карташов // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 2. — С. 173–193.

47. Карташов, В. К. О решетках квазимногообразий унаров / В. К. Карташов // Сибирский математический журнал. — 1985. — Т. 26, № 3. — С. 49–62.

48. Карташов, В. К. О конечной базируемости многообразий коммутативных унарных алгебр / В. К. Карташов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14, № 6. — С. 85–89.

49. Карташова, А. В. Антимногообразия унаров / А. В. Карташова // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 4. — С. 521–532.

50. Карташова, А. В. О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр / А. В. Карташова // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 3. — С. 119–131.

51. Иванов, А. А. Полные теории унаров / А. А. Иванов // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 1. — С. 48–73.

52. Jakubíková-Studenovská, D. On pseudovarieties of monounary algebras / D. Jakubíková-Studenovská // Asian-European Journal of Mathematics. — 2012. — Vol. 5, no. 1. — P. 10.

53. Skornjakov, L. A. Unars / L. A. Skornjakov // Universal algebra (Esztergom, 1977). — Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 29. — North-Holland, Amsterdam-New York : [s. n.], 1982.

54. Карташов, В. К. О некоторых результатах и нерешенных задачах теории унарных алгебр / В. К. Карташов // Чебышевский сборник. — 2011. — Т. XII, № 2 (38). — С. 18–26.

55. Berman, J. On the congruence lattice of unary algebras / J. Berman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 36. — P. 34–80.

56. Егорова, Д. П. О структуре конгруэнции унарной алгебры / Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков // Упорядоченные множества и решетки. — 1977. — Т. 4. — С. 28–40.

57. Егорова, Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры / Д. П. Егорова // Упорядоченные множества и решетки. — 1978. — Т. 5. — С. 11–44.

58. Бощенко, А. П. Псевдодополнения в решетке конгруэнций унаров / А. П. Бощенко // Межвузовский сборник научных работ ВГПИ. — Волгоград, 1989. — С. 23–26.

59. Varlet, J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras $\langle A; \Gamma \rangle$ / J. C. Varlet // Bull. Soc. R. Sci. Liege. — 1970. — Vol. 39. — P. 575–589.

60. Fried, E. On endomorphisms and automorphisms of monounary algebras / E. Fried, J. Sichler // Acta Sci. Math. — 1998. — Vol. 64, no. 1–2. — P. 13–36.

61. Popov, B. V. On characterization of monounary algebras by their endomorphism semigroups / B. V. Popov, O. V. Kovaleva // Semigroup Forum. — 2006. — Vol. 73. — P. 444–456.

62. Попов, Б. В. Полугруппы эндоморфизмов некоторых унарных алгебр / Б. В. Попов // Вестник Восточноукраинского государственного университета. — 2000. — Т. 5, № 27. — С. 19–23.

63. Позднякова, И. В. Полугруппы эндоморфизмов некоторых бесконечных моноунарных алгебр / И. В. Позднякова // Математичнi методи та фiзико-механiчнi поля. — 2012. — Т. 55, № 1. — С. 29–38.

64. Куринной, Г. Ч. Об определимости унара конгруэнциями / Г. Ч. Куринной // Известия вузов. Математика. — 1981. — № 3. — С. 76–78.

65. Усольцев, В. Л. Унары с тернарной мальцевской операцией / В. Л. Усольцев // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 201–202.

66. Усольцев, В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами / В. Л. Усольцев // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14, № 7. — С. 189–207.

67. Novotný, M. Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians / M. Novotný // Archivum Mathematicum. — 1990. — Vol. 26, no. 2. — P. 155–164.

68. Novotný, M. Homomorphisms of algebras / M. Novotný // Czechoslovak Mathematical Journal. — 2002. — Vol. 52, no. 2. — P. 345–364.

69. Jakubík, J. Formations of lattice ordered groups and GMV–algebras / J. Jakubík // Math. Slovaca. — 2008. — Vol. 58, no. 5. — P. 521–534.

70. Eilenberg, S. On pseudovarieties / S. Eilenberg, M. P. Schützenbérger // Advances in Mathematics. — 1976. — Vol. 19, no. 3. — P. 413–418.

71. Биркгоф, Г. Теория решеток: пер. с англ. / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984.

72. Burris, S. A Course in Universal Algebra / S. Burris, H. P. Sankappanavar. Graduate Texts in Mathematics no. 78. — New York; Heidelberg; Berlin : Springer-Verlag, 1981. — URL: `http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html`.

Расстригин Александр Леонидович

Формации унаров

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 02.10.14. Формат $60 \times 84/16$. Усл. печ. л. 1,0.
Тираж 120 экз. Заказ .

Типография Издательства ВГСПУ «Перемена».
400066, Волгоград, пр. им. В. И. Ленина, 27.