

УДК 519.716

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ В P_k

О.С. Дудакова

Аннотация

Рассматривается задача о конечной порожденности классов монотонных функций k -значной логики. Найдены условия конечной порожденности классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств специального вида.

Ключевые слова: функции k -значной логики, классы монотонных функций, конечно порожденные замкнутые классы.

В работе исследуются замкнутые классы монотонных функций k -значной логики. Известно, что каждый замкнутый класс булевых функций имеет конечный базис [1], а для любого $k \geq 3$ в P_k существуют замкнутые классы как со счетным базисом, так и не имеющие базиса [2]. К настоящему времени отсутствует полное описание всех конечно порожденных классов функций многозначной логики даже для семейства всех предполных классов. При $k \leq 7$ все предполные классы в P_k являются конечно порожденными [3], а начиная с $k = 8$, существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса [4] (см. также [5]). В данной работе получены условия конечной порожденности замкнутых классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств специального вида.

Пусть \mathcal{Q}, \mathcal{R} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{Q}' \subset \mathcal{Q}$, $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$. Обозначим через $f|_{\mathcal{Q}'}$ отображение $\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{R}$, совпадающее с f на всех элементах множества \mathcal{Q}' . Пусть f' – некоторое отображение $\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{R}$. *Доопределением* отображения f' на множество \mathcal{Q} будем называть отображение $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ такое что отображение $f|_{\mathcal{Q}'}$ совпадает с f' .

Пусть \mathcal{P} – частично упорядоченное множество. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ будем обозначать класс всех функций, монотонных относительно множества \mathcal{P} . Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(n)$ будем обозначать множество всех функций от n переменных из класса $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$.

Пусть \mathcal{A} – конечная система функций из P_k , Φ – формула над \mathcal{A} . Положим $D(\Phi) = 0$, если Φ – тривиальная формула (то есть является символом переменной), $D(\Phi) = 1 + \max D(\Phi_i)$, если формула Φ имеет вид $\varphi(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)$, где $\varphi \in \mathcal{A}$, Φ_1, \dots, Φ_k – некоторые формулы над \mathcal{A} , максимум берется по всем $i = 1, \dots, k$; величина $D(\Phi)$ называется *глубиной* формулы Φ .

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть \mathcal{P} и \mathcal{Q} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $\varphi(x) = x$. Пусть существует взаимнооднозначное монотонное отображение $\xi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}_{\xi} \subseteq \mathcal{P}^r$, $r \geq 2$, такое, что обратное отображение $\xi^{-1} : \mathcal{P}_{\xi} \rightarrow \mathcal{Q}$ доопределяется до монотонного отображения $\Xi : \mathcal{P}^r \rightarrow \mathcal{Q}$. Тогда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ всех функций, монотонных относительно

множества \mathcal{P} , имеет конечный базис в том и только том случае, когда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ всех функций, монотонных относительно множества \mathcal{Q} , имеет конечный базис.

Этот результат следует из доказанных ниже теорем 2 и 3.

Пусть \mathcal{P} и \mathcal{Q} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Обозначим через $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ семейство всех функций из $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$, принимающих значения из множества \mathcal{P} . Легко видеть, что $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ – замкнутый класс функций.

Лемма 1. Пусть \mathcal{P} и \mathcal{Q} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется соотношение $\varphi(x) = x$. И пусть класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ имеет конечный базис. Тогда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ имеет конечный базис.

Доказательство. Каждой функции $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ поставим в соответствие функцию $f_F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$: положим $f_F = F|_{\mathcal{P}^n}$. Очевидно, что каждой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ соответствует ровно одна функция $f_F \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Кроме того, для каждой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ такая, что $f = f_F$. Действительно, рассмотрим функцию $F(x_1, \dots, x_n)$, заданную на каждом наборе $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ равенством $F(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_n))$. Легко видеть, что определенная таким образом функция F монотонна, не принимает значений из множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ и совпадает с функцией f на всех наборах из \mathcal{P}^n . Следовательно, $f = f_F$.

Пусть некоторая функция $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ представляется формулой над множеством $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$:

$$F = F_0(\Phi_1, \dots, \Phi_m),$$

где $F_0 \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(m)$, формула Φ_i либо является символом переменной, либо реализует некоторую функцию $F_i \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, $i = 1, \dots, m$. Покажем, что соответствующая функция $f_F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ представляется формулой над $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$:

$$f_F = f_{F_0}(\Theta_1, \dots, \Theta_m), \quad (1)$$

где формула Θ_i выражает функцию f_{F_i} , если формула Φ_i реализует функцию F_i , и Θ_i является символом переменной x_{j_i} , если формула Φ_i является символом переменной x_{j_i} , $i = 1, \dots, m$, $x_{j_i} \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Действительно, обозначим функцию, реализуемую формулой $f_{F_0}(\Theta_1, \dots, \Theta_m)$, через $g(\tilde{x})$. Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\sigma} \in \mathcal{P}^n$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ выполняется равенство $F_i(\tilde{\sigma}) = f_{F_i}(\tilde{\sigma})$, а значит, наборы $(\Phi_1(\tilde{\sigma}), \dots, \Phi_m(\tilde{\sigma}))$ и $(\Theta_1(\tilde{\sigma}), \dots, \Theta_m(\tilde{\sigma}))$ совпадают. Кроме того, эти наборы не содержат элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому выполняется равенство

$$F_0(\Phi_1(\tilde{\sigma}), \dots, \Phi_m(\tilde{\sigma})) = f_{F_0}(\Theta_1(\tilde{\sigma}), \dots, \Theta_m(\tilde{\sigma})),$$

а значит, $F(\tilde{\sigma}) = g(\tilde{\sigma})$. Последнее равенство выполняется для каждого набора $\tilde{\sigma}$ из \mathcal{P}^n , следовательно, $g = f_F$.

Пусть $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{A}]$, где $\mathfrak{A} = \{G_1, \dots, G_k\} \subset \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Обозначим через \mathfrak{B} множество функций $\{f_{G_1}, \dots, f_{G_k}\}$. Рассмотрим произвольную функцию $F(\tilde{x})$ из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Индукцией по глубине формулы над \mathfrak{A} , выражающей функцию F , с использованием соотношения (1) нетрудно показать, что $f_F(\tilde{x}) \in [\mathfrak{B}]$. Далее, как показано выше, для каждой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ такая, что $f = f_F$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = [\mathfrak{B}]$. \square

Теорема 2. Пусть \mathcal{P} и \mathcal{Q} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $\varphi(x) = x$. Пусть также существует

взаимно-однозначное монотонное отображение $\xi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}_\xi \subseteq P^r$, $r \geq 2$, такое, что обратное отображение $\xi^{-1} : \mathcal{P}_\xi \rightarrow \mathcal{Q}$ доопределяется до монотонного отображения $\Xi : \mathcal{P}^r \rightarrow \mathcal{Q}$. И пусть класс $\mathcal{M}_\mathcal{Q}$ является конечно порожденным. Тогда класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ является конечно порожденным.

Доказательство. Покажем, что класс $\mathcal{M}'_\mathcal{Q}$ является конечно порожденным. По лемме 1 отсюда будет следовать, что и класс $\mathcal{M}_\mathcal{P}$ является конечно порожденным.

Рассмотрим произвольную функцию $F(\tilde{x}) \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Покажем, что существует функция $\alpha F \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(rn)$ такая, что для каждого набора $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ выполняется равенство

$$\alpha F(\xi(\sigma_1), \dots, \xi(\sigma_n)) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n). \quad (2)$$

Действительно, соотношение (2) задает на множестве \mathcal{Q}^{rn} частичную функцию $\alpha F''$, определенную на всех наборах из $\mathcal{P}_\xi^n \subseteq \mathcal{P}^{rn} \subset \mathcal{Q}^{rn}$ вида

$$(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r),$$

где $(\varrho_i^1, \dots, \varrho_i^r) = \xi(\sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$. Определим на множестве \mathcal{Q}^{rn} частичную функцию $\alpha F'$: для каждого набора из \mathcal{P}^{rn} положим

$$\begin{aligned} \alpha F'(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r) &= \\ &= F(\Xi(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r), \Xi(\varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r), \dots, \Xi(\varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r)). \end{aligned}$$

Из определения отображения Ξ следует, что $\alpha F' \upharpoonright_{\mathcal{P}_\xi^n} = \alpha F''$, то есть функция $\alpha F'$ является доопределением частичной функции $\alpha F''$. Кроме того, из монотонности функции F и отображения Ξ следует, что функция $\alpha F'$ монотонна. Далее определим функцию $\alpha F'$ на множестве \mathcal{Q}^{rn} : для каждого набора из \mathcal{Q}^{rn} положим

$$\alpha F(\sigma_1, \dots, \sigma_{rn}) = \alpha F'(\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_{rn})).$$

Легко видеть, что функция αF монотонна и является доопределением частичной функции $\alpha F'$, а значит, и доопределением частичной функции $\alpha F''$. Следовательно, для нее выполняется соотношение (2).

Пусть $\sigma \in \mathcal{Q}$ и выполнено равенство $\xi(\sigma) = (\varrho_1^\sigma, \dots, \varrho_r^\sigma)$, где $(\varrho_1^\sigma, \dots, \varrho_r^\sigma) \in \mathcal{P}_\xi \subseteq \mathcal{P}^r$. Определим r отображений $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$: для каждого $\sigma \in \mathcal{Q}$ положим $\xi_i(\sigma) = \varrho_i^\sigma$, $i = 1, \dots, r$. Из монотонности отображения ξ следует, что все отображения ξ_1, \dots, ξ_r монотонны.

В силу включения $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ монотонные отображения $\xi_1, \dots, \xi_r, \varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ можно рассматривать как функции из $\mathcal{M}'_\mathcal{Q}(1)$. Пусть $F(\tilde{x})$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Для каждого $i = 1, \dots, r$ обозначим через $\xi_i F(\tilde{x})$ функцию $\xi_i(F(\tilde{x}))$. Обозначим через $\varphi F(\tilde{x})$ функцию $\varphi(F(\tilde{x}))$. Заметим, что $\xi_1 F, \dots, \xi_r F, \varphi F \in \mathcal{M}'_\mathcal{Q}(n)$.

Пусть для некоторой функции $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$ имеет место представление

$$F(\tilde{x}) = F_0(F_1(\tilde{x}), \dots, F_m(\tilde{x})),$$

где $F_0 \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(m)$, $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{M}_\mathcal{Q}(n)$. Пусть $\tilde{\sigma}$ – произвольный набор из \mathcal{Q}^n . Положим $\gamma_i = F_i(\tilde{\sigma})$, $i = 1, \dots, m$. Согласно соотношению (2) и определению функций $\xi_1(x), \dots, \xi_r(x)$

$$\begin{aligned} F_0(\gamma_1, \dots, \gamma_m) &= \alpha F_0(\xi(\gamma_1), \dots, \xi(\gamma_m)) = \\ &= \alpha F_0(\xi_1(\gamma_1), \dots, \xi_r(\gamma_1), \dots, \xi_1(\gamma_m), \dots, \xi_r(\gamma_m)), \end{aligned}$$

а значит, выполняется равенство

$$F(\tilde{\sigma}) = \alpha F_0(\xi_1 F_1(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_r F_1(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_1 F_m(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_r F_m(\tilde{\sigma})). \quad (3)$$

Таким образом, функция $F(\tilde{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$ представляется в виде

$$F(\tilde{x}) = \alpha F_0(\xi_1 F_1(\tilde{x}), \dots, \xi_r F_1(\tilde{x}), \dots, \xi_1 F_m(\tilde{x}), \dots, \xi_r F_m(\tilde{x})). \quad (4)$$

Рассмотрим некоторую функцию $F(\tilde{x}) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$. Пусть имеет место представление $F(\tilde{x}) = F_0(F_1(\tilde{x}), \dots, F_m(\tilde{x}))$, где $F_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(m)$, $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$. Покажем, что выполняется равенство

$$F(\tilde{x}) = \varphi \alpha F_0(\xi_1 F_1(\tilde{x}), \dots, \xi_r F_1(\tilde{x}), \dots, \xi_1 F_m(\tilde{x}), \dots, \xi_r F_m(\tilde{x})). \quad (5)$$

Действительно, пусть $\tilde{\sigma}$ – произвольный набор из \mathcal{Q}^n . Имеет место равенство (3). Обозначим набор $(\xi_1 F_1(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_r F_1(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_1 F_m(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_r F_m(\tilde{\sigma}))$ через $\tilde{\beta}_{\sigma}$. Так как функция $F(\tilde{x})$ не принимает значений из $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$, то $\alpha F_0(\tilde{\beta}_{\sigma}) \in \mathcal{P}$ для каждого набора $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$. Поэтому равенство (3) останется верным, если функцию αF_0 заменить на $\varphi \alpha F_0$. Таким образом, соотношение (5) установлено.

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{C}]$, где $\mathfrak{C} = \{G_1, \dots, G_k\} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$. Обозначим через G'_1, \dots, G'_s функции из \mathfrak{C} , принадлежащие классу $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ ($0 \leq s < k$). Обозначим через \mathfrak{D} множество $\{G'_1, \dots, G'_s, \xi_j(x), \xi_j G_i, \xi_j \alpha G_i, \varphi \alpha G_i\}$, где $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, r$; очевидно, что $\mathfrak{D} \subset \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$.

Покажем, что $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{D}]$. Рассмотрим произвольную функцию $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Если F – одна из функций G'_1, \dots, G'_s , то очевидно, что $F \in \mathfrak{D}$. В противном случае рассмотрим формулу над множеством \mathfrak{C} , реализующую функцию F : $F = G(F_1, \dots, F_m)$, где $G \in \mathfrak{C}$, $F_1, \dots, F_m \in [\mathfrak{C}]$. В силу соотношения (5) выполняется равенство

$$F = \varphi \alpha G(\xi_1 F_1, \dots, \xi_r F_1, \dots, \xi_1 F_m, \dots, \xi_r F_m).$$

Нетрудно показать, что для любой функции $F \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ и для любого $j = 1, \dots, r$ выполняется включение $\xi_j F \in [\mathfrak{D}]$ (доказательство проводится индукцией по глубине формулы над \mathfrak{C} , выражающей функцию F , с использованием соотношения (4)). Поэтому $\xi_j F_i \in [\mathfrak{D}]$ для всех $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$. Кроме того, $\varphi \alpha G \in \mathfrak{D}$. Следовательно, $F \in [\mathfrak{D}]$. Таким образом, класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным. \square

Теорема 3. Пусть \mathcal{P} и \mathcal{Q} – частично упорядоченные множества, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Пусть существует монотонное отображение $\varphi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$ такое, что для каждого элемента $x \in \mathcal{P}$ выполняется равенство $\varphi(x) = x$. Пусть также существует взаимно-однозначное монотонное отображение $\xi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}_{\xi} \subseteq \mathcal{P}^r$, $r \geq 2$, такое, что обратное отображение $\xi^{-1} : \mathcal{P}_{\xi} \rightarrow \mathcal{Q}$ доопределяется до монотонного отображения $\Xi : \mathcal{P}^r \rightarrow \mathcal{Q}$. И пусть класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ является конечно порожденным. Тогда класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Доказательство. Покажем сначала, что класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Рассмотрим функцию $f(x_1, \dots, x_s) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Очевидно, что найдутся такие числа n и p , $n \geq 1$, $0 \leq p < r$, что $s = (n-1)r + p$. Будем считать, что $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$, добавив, если нужно, в функцию f несущественные переменные (не более чем $r-p$ переменных). Определим функцию ψ_f следующим образом: для каждого набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ положим

$$\psi_f(\tilde{\sigma}) = f(\xi(\sigma_1), \dots, \xi(\sigma_n)). \quad (6)$$

Легко видеть, что $\psi_f \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$.

Покажем, что для каждой функции $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$ найдется функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$ такая, что $F = \psi_f$. Действительно, рассмотрим функцию $F(x_1, \dots, x_n)$. Для каждого набора из \mathcal{P}^{rn} вида

$$(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r)$$

положим

$$\begin{aligned} f(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r, \varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r, \dots, \varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r) &= \\ &= F(\Xi(\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r), \Xi(\varrho_2^1, \dots, \varrho_2^r), \dots, \Xi(\varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r)). \end{aligned} \quad (7)$$

Из монотонности функции F и отображения Ξ следует, что так определенная функция f монотонна. Для этой функции f рассмотрим соответствующую функцию ψ_f . В соответствии с соотношениями (6) и (7) для каждого набора $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ выполняются равенства

$$\psi_f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = f(\xi(\sigma_1), \dots, \xi(\sigma_n)) = F(\Xi(\xi(\sigma_1)), \dots, \Xi(\xi(\sigma_n))) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Таким образом, $F = \psi_f$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Обозначим через \widehat{f} функцию из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(m)$ такую, что $\widehat{f}|_{\mathcal{P}^m} = f$ (легко видеть, что для любой функции $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ найдется функция $\widehat{f} \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ с таким свойством; заметим, что функция \widehat{f} определяется неоднозначно).

Пусть для некоторой функции $f(\tilde{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$ имеет место представление

$$f(\tilde{x}) = f_0(f_1(\tilde{x}), \dots, f_m(\tilde{x})),$$

где $f_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(m)$, $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}(rn)$. Покажем, что выполняется равенство

$$\psi_f(y_1, \dots, y_n) = \widehat{f}_0(\psi_{f_1}(y_1, \dots, y_n), \dots, \psi_{f_m}(y_1, \dots, y_n)). \quad (8)$$

Установим сначала справедливость соотношения

$$\psi_f(y_1, \dots, y_n) = f_0(\psi_{f_1}(y_1, \dots, y_n), \dots, \psi_{f_m}(y_1, \dots, y_n)). \quad (9)$$

Рассмотрим произвольный набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{Q}^n$. Обозначим через $\tilde{\varrho} = (\varrho_1^1, \dots, \varrho_1^r, \dots, \varrho_n^1, \dots, \varrho_n^r)$ набор $(\xi(\sigma_1), \dots, \xi(\sigma_n))$, $\tilde{\varrho} \in \mathcal{P}^{rn}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_0(\psi_{f_1}(\tilde{\sigma}), \dots, \psi_{f_m}(\tilde{\sigma})) &= f_0(f_1(\tilde{\varrho}), \dots, f_m(\tilde{\varrho})) = \\ &= f(\tilde{\varrho}) = f(\xi(\sigma_1), \dots, \xi(\sigma_n)) = \psi_f(\tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (9) установлено.

Далее, так как $\psi_{f_1}, \dots, \psi_{f_m} \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, то для любого набора $\tilde{\sigma} \in \mathcal{Q}^n$ набор $(\psi_{f_1}(\tilde{\sigma}), \dots, \psi_{f_m}(\tilde{\sigma}))$ не содержит элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому равенство (9) останется верным, если функцию $f_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ заменить на функцию $\widehat{f}_0 \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$, совпадающую с f_0 на всех наборах из \mathcal{P}^m .

Итак, соотношение (8) установлено.

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = [\mathfrak{A}]$, где $\mathfrak{A} = \{g_1, \dots, g_k\} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Обозначим через \mathfrak{B} множество функций $\{\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_k, \psi_{g_1}, \dots, \psi_{g_k}, \psi_{e_1}, \dots, \psi_{e_r}\}$, где e_i — r -местные селекторные функции в $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, то есть $e_i(x_1, \dots, x_r) = x_i$, $i = 1, \dots, r$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$. Индукцией по глубине формулы над \mathfrak{A} , выражающей функцию f , с использованием соотношения (8) нетрудно показать, что выполняется соотношение $\psi_f \in [\mathfrak{B}]$. Далее, как было показано ранее,

для любой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ найдется такая функция $f \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, что $F = \psi_f$. Поэтому для любой функции $F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ выполняется $F \in [\mathfrak{B}]$.

Таким образом, $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} = [\mathfrak{B}]$.

Покажем теперь, что класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Пусть $\sigma \in \mathcal{Q}$ и выполнено равенство $\xi(\sigma) = (\varrho_1^\sigma, \dots, \varrho_r^\sigma)$, где $(\varrho_1^\sigma, \dots, \varrho_r^\sigma) \in \mathcal{P}_\xi \subseteq \mathcal{P}^r$. Определим r отображений $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$: для каждого $\sigma \in \mathcal{Q}$ положим $\xi_i(\sigma) = \varrho_i^\sigma$, $i = 1, \dots, r$. Из монотонности отображения ξ следует, что все отображения ξ_1, \dots, ξ_r монотонны. В силу включения $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ эти отображения можно рассматривать как функции из $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(1)$.

Пусть $F(\tilde{x})$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(n)$. Для каждого $i = 1, \dots, r$ обозначим через $\xi_i F(\tilde{x})$ функцию $\xi_i(F(\tilde{x}))$. Заметим, что $\xi_1 F, \dots, \xi_r F \in \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}(n)$.

Определим функцию $\chi(x_1, \dots, x_r)$ следующим образом: для каждого набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathcal{Q}^r$ положим $\chi(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \Xi(\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_r))$. Из монотонности отображений φ и Ξ следует, что функция χ монотонна. Кроме того, для любого набора $\tilde{\varrho} = (\varrho_1, \dots, \varrho_r) \in \mathcal{P}^r$ выполняется равенство $\chi(\tilde{\varrho}) = \Xi(\tilde{\varrho})$.

Покажем, что для произвольной функции $F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ выполняется равенство

$$F(\tilde{x}) = \chi(\xi_1 F(\tilde{x}), \dots, \xi_r F(\tilde{x})). \quad (10)$$

Действительно, легко видеть, что для функции F имеет место представление

$$F(\tilde{x}) = \Xi(\xi_1 F(\tilde{x}), \dots, \xi_r F(\tilde{x})). \quad (11)$$

Далее, для каждого набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{Q}^n$ набор $(\xi_1 F(\tilde{\sigma}), \dots, \xi_r F(\tilde{\sigma}))$ не содержит элементов множества $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$. Поэтому равенство (11) останется верным, если заменить отображение Ξ на функцию $\chi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}(r)$.

Таким образом, соотношение (10) установлено.

Из соотношения (10) следует, что любая функция $F \in \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ представляется формулой над множеством $\{\chi\} \cup \mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$. Следовательно, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} = [\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}} \cup \{\chi\}]$. Согласно предыдущим рассуждениям, класс $\mathcal{M}'_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным.

Таким образом, класс $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}$ является конечно порожденным. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00863) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-4470.2008.1).

Summary

O.S. Dudakova. Classes of Functions of the k -valued Logic Monotone with respect to Partially Ordered Sets.

A criterion for the property of being finitely generated is obtained for classes of functions monotone with respect to partially ordered sets of certain type.

Key words: k -valued logic, monotone functions of the k -valued logic, monotone clones, finite basis.

Литература

1. Post E.L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. – 1921. – V. 43, No 3. – P. 163–185.
2. Янов Ю.И., Мучник А.А. О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
3. Lau D. Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k -wertigen Logik // Z. Math. Logik u. Grundl. Math. – 1978. – Bd. 24. – S. 79–96.

4. *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // *Order*. – 1986. – V. 3. – P. 211-218.
5. *Дудакова О.С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // *Матем. вопр. кибернетики*. – М.: Физматлит, 2008. – Вып. 17. – С. 13-104.

Поступила в редакцию
06.04.09

Дудакова Ольга Сергеевна – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Франко-русского центра по прикладной математике и информатике им. А.М. Ляпунова МГУ им. М. В. Ломоносова.

E-mail: *olga.dudakova@gmail.com*