КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯНЕҢ САЙЛАНГАН СОРАУЛАРЫ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно методическое пособие

Казань 2013

УДК 51 (07)

Печатается по решению учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского.

Научный редактор
доцент **Л.И. Галиева**.

Рецензент
профессор КФУ. **Л.Л. Салехова**

Зарипов Ф.Ш.
Избранные вопросы проективной геометрии. Учебно-методическое пособие. /Зарипов Ф.Ш. - КАЗАНЬ: КФУ, 2013. - 67с.

Бу китапта татар телендә укучы студентлар өчен проектив геометрия дисциплинасы буенча лекцияләр һәм мисаллар чишү методлары китерелгән.

Учебное пособие предназначено для студентов отделения Педагогического образования Института математики и механики им. Н.И. Лобачевскокого КФУ, а также для студентов других ВУЗов, с татарским языком обучения. Содержит лекции и методические рекомендации к решению типовых задач по дисциплине проективная геометрия. В пособии сделана подборка вариантов для самостоятельного решения.

ЭЧТӘЛЕК

Проектив пространствоны аксиоматик рәвештә билгеләү

V – n+1 үлчәмле $\mathfrak{R}$ кыры өстеннән бирелгән векторча пространство. $V' = V \setminus \{\vec{0}\} - V$-ың $\vec{0}$ гә тигез булмаган барлык векторлары күплеге булсын.

Билгеләмә: *V* векторча пространствосы тудырган ***n* үлчәмле проектив пространство *P*** дип буш булмаган *P* күплеге атала, әгәр түбәндәге шартларны канәгатьләндергән $f: V' \to P$ чагылдыруы бирелгән булса:

1) f – сюръектив;

2) $f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{y}, \lambda \neq 0, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V', \ \lambda \in R.$

Бу очракта *P*-ң элементлары проектив пространствоның нокталары дип атала һәм *A, B, C* дип билгеләнә.

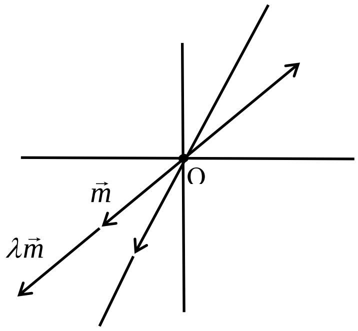
Әгәр $f(\vec{x}) = X \in P$ булса, бу очракта $\vec{x} \in V'$, X ноктасы $\vec{x}$ векторы белән тудырылган дип атала.

Әгәр векторча пространство бер үлчәмле булса, бу очракта *f* чагылдыруы бердәнбер ноктаны тудыра (бу билгеләмәдәге 2 нче шарттан килеп чыга).

Проектив пространство модельләре

1 нче модель.

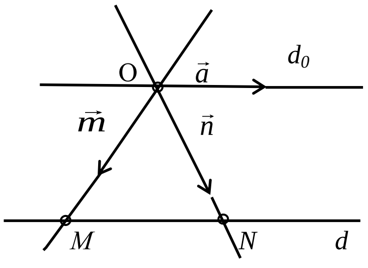
n=1 булсын һәм V_2 урынына $P = \varepsilon(O)$ яссылыктагы турылар бәйләме карыйк. V_2' нең моделе итеп шул яссылыкта ятучы О ноктасыннан чыккан барлык векторлар күплеген алабыз.



1) $\forall \vec{m} \in V_2$, $f(\vec{m}) = m \in \varepsilon(O)$, $m \parallel \vec{m}$, $\vec{m}$ векторы m турысының юнәлдерүче векторы. $f(\vec{m}) = f(\lambda\vec{m})$.

Барлык шартлар да үтәлә $\varepsilon(O)$ – бер үлчәмле проектив пространствоның моделе булып тора. Бер үлчәмле проектив пространствоны **проектив туры** дип атыйлар.

2 нче модель.



Яссылыкта турылар бәйләме һәм *d* турысын алыйк $(O \notin d)$. V_2 – О ноктасыннан чыккан барлык векторлар күплеге.

$f(\vec{m}) = M \in d, M = m \cap d, \vec{m} \parallel m, m \in \varepsilon(O).$

Коллинеар векторларга бер үк нокта туры

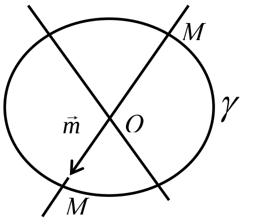
килә. Ләкин $d_0 \parallel d, \vec{a} \parallel d_0$ булса, $f(\vec{a})$ билгеләнмәгән. Димәк, беренче аксиома үтәлми. Бу каршылыктан чыгу өчен $f(\vec{a}) = M_\infty -$ d турысының **чиксезлектәге** яки **үзбулмаган ноктасы** дип аталган нокта кертәбез.

$\bar{d} = d \cup M_\infty -$ **киңәйтелгән туры** яки **проектив туры** дип атала.

$f : V_2' \to \bar{d}$. Бу очракта ике аксиома да үтәлә. Димәк, киңәйтелгән туры берүлчәмле пространствоның проектив моделе булып яки проектив туры булып тора.

Параллель турыларның үз булмаган нокталары тәңгәл килә. Һәр турыга бердәнбер үз булмаган нокта өстәлә.

3 нче модель.



d турысы урынына икенче тәртиптәге γ кәкресе алып, алдагыча фикер йөртик.

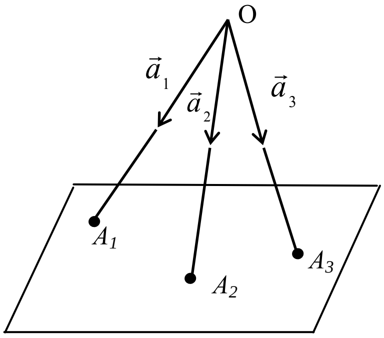
Диаметраль нокталарны тиңдәшләштерсәк, $\gamma -$ берүлчәмле проектив пространство булып тора.

Проектив координаталар

$V_{n+1} - n+1$ үлчәмле векторча пространство һәм анда ике $\vec{e}_i$, $\vec{g}_i$;$(i = \overline{0,n})$ базисларын карыйк.

Билгеләмә. V_{n+1} векторча пространствосының ике $\vec{e}_i$ һәм $\vec{g}_i$ базисы гомотетик дип атала, әгәр $\exists \lambda \in \Re \mid \vec{e}_i = \lambda \vec{g}_i$, $(i = \overline{0,n})$ үтәлсә.

Гомотетия мөнәсәбәте векторча пространствоның барлык базислары күплегендә эквивалентлык мөнәсәбәте булып тора, чөнки гомотетия үзара коллинеар булган ике векторлар күплеген бәйләп тора.



$f : V_{n+1} \to P$ чагылдыруында V_{n+1} векторча пространствосының һәрбер $\vec{a}_i$ базисы *P(V)* проектив прстранствосында $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$ $(n+1)$ нокта тудыра, ул вакытта үзара гомотетик базалар бер үк нокталарны тудыра. Икенче яктан һәрбер базис бары бер генә тәртипләштерелгән нокталар системасын тудыра.

$P(V_{n+1}) -$ проектив пространство. $f : V_{n+1} \setminus \vec{0} \to P$,

$\vec{e}_i$,$i = \overline{0,n} - V_{n+1}$ дәге ирекле базис булсын.

$f(\vec{e}_i) = A_i \in P$.

Ләкин A_i нокталарын гына проектив репер диеп атап булмый, чөнки бу нокталардан гына чыгып $\vec{e}_i$ базисын гомотетик булу төгәллеге белән табып булмый. Шуңа күрә тагын бер нокта өстиләр. Гадәттә анны $f(\vec{e}_0+\vec{e}_1+...+\vec{e}_n)=E$ рәвешендә алалар. E – **реперның берәмлекле ноктасы** дип атала, ә A_i нокталары **реперның түбәләре** дип аталалар. **Проектив репер** дип тәртипләштерелгән $R= A_0,A_1,...,A_n,E$ ноктларын атыйлар.

Мәсәлән, әгәр $\mathfrak{A}_{n+1}$ – аффинча пространствода *P* – *n*-үлчәмле аффинча яссылык булса, проектив репер дип тәртипләштерелгән $n+2$ нокта атала, әгәр аның теләсә нинди $n+1$ ноктасы n үлчәмле яссылыкта ятмаса.

Сонгы шартны канәгатьләндергән нокталар **гомуми торышлы нокталар** дип атала.

Димәк, $\overrightarrow{OA_i}=\vec{e}_i$ векторлары $\mathfrak{A}_{n+1}$ дә базис тудыралар. $O\notin P, O\in\mathfrak{A}_{n+1}$.

Теорема: *Әгәр* $\{A_i,E\}$ *P(V) проектив пространствосының тәртипләштерелгән һәм гомуми торышлы n+2 нокталары булсалар,*

$$\begin{cases} \pi(\vec{a}_\alpha)=A_\alpha \\ \pi(\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_{n+1})=E, \end{cases} \quad (1)$$

$$\alpha=\overline{1,n+1}.$$

шартын канәгатьләндерә торган бердәнбер $R=R(\vec{a}_\alpha)$ *проектив реперын табып була.*

Билгеләмә. Бер үк вакытта нульгә тигез булмаган $\vec{m}(x^0,x^1,...x^n)$ векторының координаталары $M=f(\vec{m})\in P(V)$ ноктасының проектив координаталары дип атала.

Ул вакытта аффинча геометриядәге кебек үк язабыз: $M(x^0,x^1,...,x^n)$.

V_{n+1} векторча пространствосында $\{\vec{a}_i\}$ базисы белән беррәттән, аңа гомотетик булган ($\vec{b}_i=\lambda\vec{a}_i$, $\lambda\in\Re\setminus\{0\}$, $i=\overline{0,n}$) булырлык $\{\vec{b}_i\}$ базисын карыйк.

$\vec{m}$ векторын шушы базисларның һәрберсендә таркатыйк:

$\vec{m}=x^i a_i;\ \vec{m}=y^i b_i \Rightarrow$

$\vec{m}=y^i\lambda\vec{a}_i \Rightarrow x^i=\lambda y^i;(i=\overline{0,n}).$

Моннан түбәндәге килеп чыга:

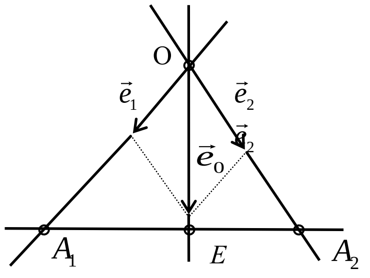
$M\in P(V)$ ноктасының проектив координаталары бердәнбер итеп билгеләнмәгән, алар уртак нульгә тигез булмаган санга тапкырлау төгәллеге белән билгеләнгән: $M(x^i)=M(\lambda x^i), \lambda\neq 0.$

Проектив туры моделе

E_2 дә киңәйтелгән $\bar d$ турысы карыйк. Бу очракта без V_2 не векторча пространствосын О ноктасыннан чыккан барлык векторлар күплеге белән тиңдәшләштерәбез.

$\bar d$ турысында $R(A_1, A_2, E)$ реперын карыйк.

Бер О ноктасы алып, $(O \notin \bar d), V_2$ дә $\vec e_1, \vec e_2$ базисын төзик. Бу базис өчен



$$\begin{cases} f(\vec e_1) = A_1 \\ f(\vec e_2) = A_2 \\ f(\vec e_1 + \vec e_2) = E \end{cases} \qquad (2)$$

үтәлергә тиеш. (2) үтәлсә $\vec e_1, \vec e_2$ базисы *R* реперы белән яраклаш-тырылган дип атала.

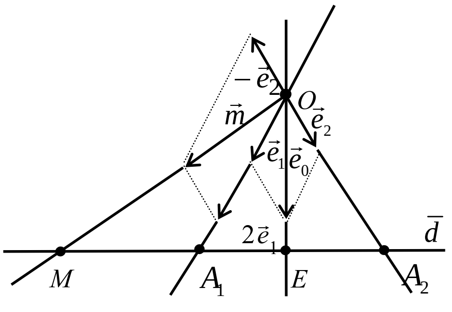
Бу базисны төзү өчен (OE) турысында бер $\vec e_0$ векторы алып, (2) шарты үтәлерлек итеп, аны ике векторга таркатабыз[1]: $\vec e_0 = \vec e_1 + \vec e_2$.

Алда әйткәнчә, $M(x^1, x^2)$ ноктасының координаталары дип бу ноктаны тудыручы $(f(\vec m) = M)$ $\vec m$ векторының *R* реперы белән яраклаштырылган координаталары атала. $\vec m = x^1\vec e_1 + x^2\vec e_2$.

Берничә мисал карап китик.

Мисал1: $\bar d$ киңәйтелгән турсындагы $R = \; A_1, A_2, E$ реперында M(2, –1) ноктасын төзергә.

Чишү:



1) Ирекле бер $O \notin \bar d$ ноктасы алыйк һәм $(OA_1), (OA_2), (OE)$ турыларын үткәрик.

2) (OE) турысында бер $\vec e_0$ векторы алыйк һәм аны ике $\vec e_1$ һәм $\vec e_2$ векторына (1) шарты үтәлә торган итеп таркатыйк.

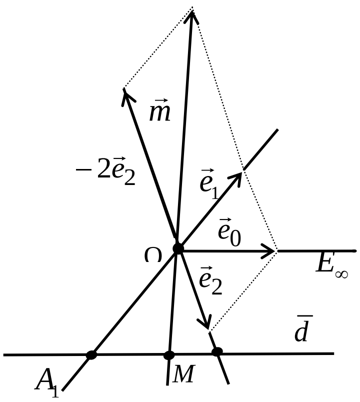
3) $\vec m = 2\vec e_1 - \vec e_2$ векторын төзик. $\vec m$ векторы белән тудырылган туры белән $\bar d$ турысының кисешү ноктасы без эзләгән М ноктасы була.

Мисал2: $\bar d$ киңәйтелгән турсындагы $R = \; A_1, A_2, E_\infty$ реперында M(1, –2) ноктасын төзергә.

Чишү:1) Ирекле бер $O \notin \bar d$ ноктасы алыйк һәм $(OA_1), (OA_2), (OE_\infty)$ турыларын үткәрик.

---

[1] Алга таба $\vec e_0$ векторын $\vec e_i$ $(i = \overline{1,n})$ векторларына (1) шартын канәгатьләндерерлек итеп таркату $\vec e_i$ $(i = \overline{1,n})$ векторларына таркату дип кыскача язылачак.



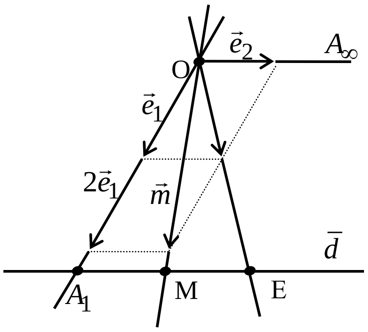
2) (OE$_\infty$) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алыйк һәм аны ике $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторына (1) шарты үтәлә торган итеп таркатыйк.

$\vec{m} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ векторын төзик. $\vec{m}$ векторы белән тудырылган туры белән $\bar{d}$ турысының кисешү ноктасы без эзләгән M ноктасы була.

Мисал3: $\bar{d}$ киңәйтелгән турсындагы $R = \ A_1, A_\infty, E$ реперында M(2, 1) ноктасын төзергә.

Чишү:

$R = \ A_1, A_\infty, E$ очрагында аффинча бериш координаталар дип аталган



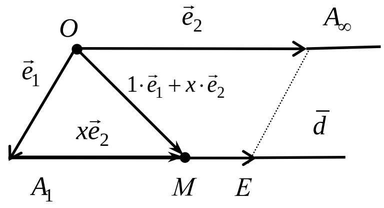
1) Ирекле бер $O \notin \bar{d}$ ноктасы алыйк һәм $(OA_1), (OA_\infty), (OE)$ турыларын үткәрик.

2) (OE) турысында бер $\vec{e}_0$ векторы алыйк һәм аны ике $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторына таркатыйк.

3) $\vec{m} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ векторын төзик. $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

4) $\vec{m}$ векторы белән тудырылган туры белән $\bar{d}$ турысының кисешү ноктасы без эзләгән M ноктасы була.

Координаталар да кертә алабыз. Моның өчен $R_{аფф.} = \ A_1, \overrightarrow{A_1E}$ – аффинча реперен билгелик. Рәсемнән күренгәнчә, $M(x^1, x^2)$ булса һәм базис вектор итеп $\vec{e} = \overrightarrow{A_1E}$ не алсак: $\overrightarrow{A_1M} = x \cdot \vec{e}_2$, M=M(x).



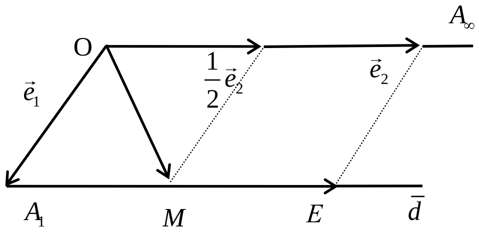
Рәсемнән күренгәнчә, $\bar{d}$ турысындагы нокталар икенче координаталары белән генә аерылачаклар. Ноктаның координаталары нольгә тигез булмаган санга тапкырлау төгәллеге белән бирелгәнгә:

$$x = \frac{x^2}{x^1}$$

Ләкин безнең x саны M ноктасының $R_{афф}$ реперындагы координатасы булып тора: M(x).

Димәк, без бу R һәм $R_{афф}$ реперларын үзара бәйләдек. Аффинча координаталар системасы киңәйтелгән турыдагы реперның бер түбәсе үзбулмаган нокта булганда килеп чыга.

Соңгы мисалны аффинча координаталар системасы кертеп чишик.



Моның өчен

1) Аффинча репер кертик

$$R_{афф} = \ A_1, \overrightarrow{A_1E}$$

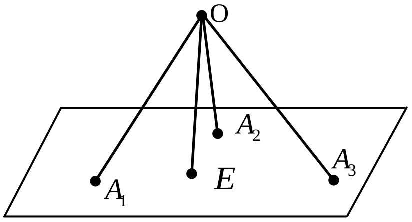
$$\vec{e} \ = \overrightarrow{A_1E}$$

2) $x = \frac{x^2}{x^1} = \frac{1}{2}$. $M(\frac{1}{2})$ ноктасын төзү өчен $\overrightarrow{A_1M} = x \cdot \vec{e}$ векторын төзик.

3) Бу векторның очы $\vec{d}$ да ята һәм ул без эзләгән М ноктасы була.

Киңәйтелгән яссылык моделе

E_3 тә $\overline{P}$ киңәйтелгән яссылыгы карыйк. Бу очракта без V_3 векторча пространствосын О ноктасыннан чыккан барлык векторлар күплеге белән тиңдәшләштерәбез.

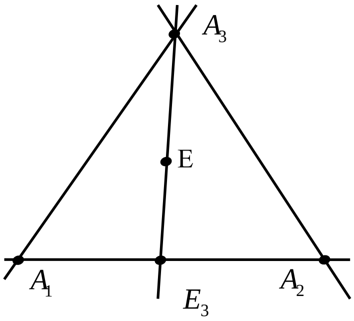


V_3 тә $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ базисы алабыз.

Нәкъ алдагыча, $\pi(\vec{m}) = M$. $\vec{m} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$

$\pi(\vec{e}_\alpha) = A_\alpha$, $\alpha = 1,2,3.$ $M = M(x^1, x^2, x^3)$.

Әгәр дәфтәр битен киңәйтелгән яссылык итеп карасак түбәндәге рәсем килеп чыга.



Шушы киңәйтелгән яссылыкта М ноктасын төзү өчен

$$R_1 = \{A_2, A_3, E_1\}$$
$$R_2 = \{A_1, A_3, E_2\}$$
$$R_3 = \{A_1, A_2, E_3\}$$

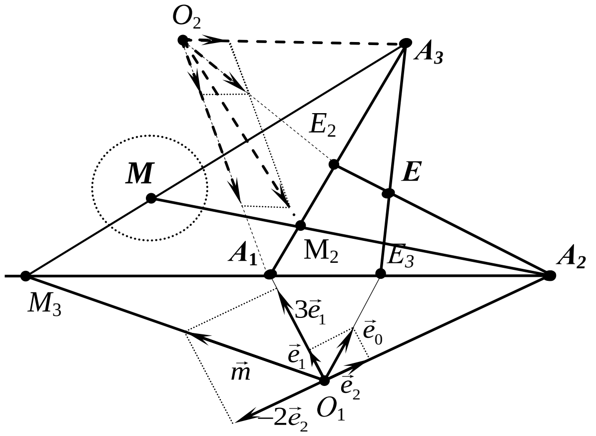
реперларының теләсә кайсы икесендә тиңдәшле рәвештә $M_1(x^2, x^3)$, $M_2(x^1, x^3)$, $M_3(x^1, x^2)$ нокталарының координаталарын табып, М ноктасын түбәндәгечә төзеп була:

$$\begin{cases} M = (M_1A_1) \cap (M_2A_2) \\ M = (M_2A_2) \cap (M_3A_3) \\ M = (M_1A_1) \cap (M_3A_3) \end{cases}, \text{ә} \begin{cases} E_1 = (A_2A_3) \cap (A_1E) \\ E_2 = (A_1A_3) \cap (A_2E) \\ E_3 = (A_1A_2) \cap (A_3E) \end{cases}$$

Димәк, М ноктасын төзү өчен бу ноктаның ике проекциясен төзү җитә.

Берничә мисал карап китик.

Мисал1. Киңәйтелгән $\overline{\pi}$ яссылыгында бирелгән $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$ реперында М(3, -2, 1) ноктасын төзергә.



1) E_3 ноктасын төзибез: $E_3=(A_1A_2)\bigcap(A_3E)$;

2) $R_3(A_1,A_2,E_3)$ реперында $M_3(3,-2)$ ноктасын төзибез:

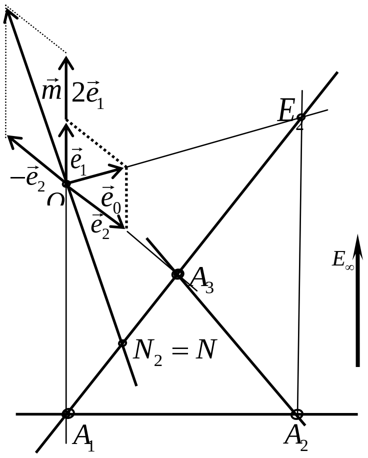
3) Аның өчен ирекле $O_1\notin(A_1A_2)$ алабыз һәм (O_1A_1), $(O_1A_2),(O_1E)$ турылары үткәрәбез. (OE_3) турысында бер $\vec{e}_0$ век-торы алабыз һәм аны ике $\vec{e}_1$ һәм $\vec{e}_2$ векторына таркатабыз. $\vec{m}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$ векторын төзибез. $\vec{m}$ векторы белән тудырылган туры белән (A_1A_2) турысының кисешү ноктасы без эзләгән M_3 ноктасы була.

4) E_2 ноктасын төзибез: $E_2=(A_1A_3)\bigcap(A_2E)$

5) $R_2(A_1,A_3,E_2)$ реперында $M_2(3,1)$ ноктасын аналогик рәвештә төзибез.

6) $M=(M_2A_2)\bigcap(M_3A_3)$ ны табабыз.

Мисал2. Киңәйтелгән $\overline{\pi}$ яссылыгында бирелгән $R=\{A_1,A_2,A_3,E_\infty\}$ реперында *N*(2,0,-1) ноктасын төзергә.



Чишү:

1) E_2 ноктасын төзибез: $E_2=(A_1A_3)\bigcap(A_2E_\infty)$

2) $R_2(A_1,A_3,E_2)$ реперында $N_2(2,-1)$ ноктасын төзибез.

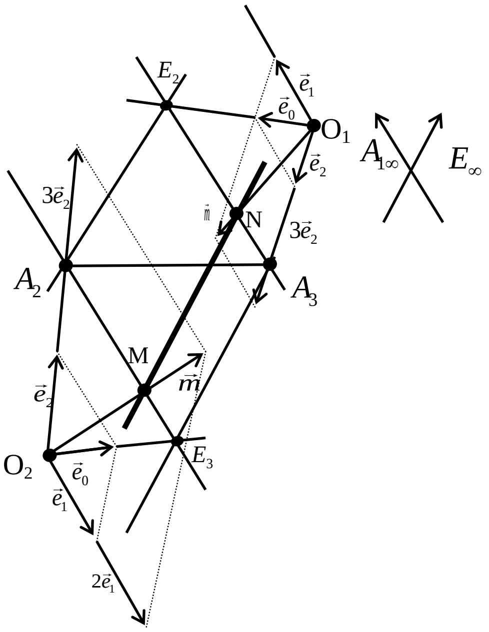
3) $N_2=N$ (чөнки икенче координата нульгә тигез).

Мисал3: Киңәйтелгән $\overline{\pi}$ яссылыгында бирелгән $R=\{A_{1\infty},A_2,A_3,E\}$ реперында *m*(3, -2, -1) турысын төзергә.

Турының тигезләмәсеннән чыгып аның ике *M* һәм *N* нокталарын табыйк.

$$1)\begin{cases}3x^1-2x^2-x^3=0\\ x^2=0\end{cases}\quad (A_{1\infty}A_3)\bigcap m \quad \begin{cases}3x^1-2x^2-x^3=0\\ x^3=0\end{cases}\quad (A_{1\infty}A_2)\bigcap m$$

$$N(1,0,3)\qquad\qquad M(2,3,0)$$



1) $R_2=(A_{1\infty},A_3,E_2)$ реперында $N=N_2(1,3)_{R_2}$,

$R_3=(A_{1\infty},A_2,E_3)$ реперында $M=M_3(2,3)_{R_3}$.

2) $(A_{1\infty}A_3)$ турысы сызабыз һәм анда $E_2=(A_{1\infty}A_3)\cap(A_2E)$ төзибез.

3) $R_2(A_{1\infty},A_3,E_2)$ реперында $N=N_2(1,3)$ ноктасын төзибез.

4) $(A_{1\infty}A_2)$ турысы сызабыз һәм анда $E_3=(A_{1\infty}A_2)\cap(A_3E_\infty)$ төзибез.

5) $R_3(A_{1\infty},A_2,E_3)$ реперында $M=M_2(2,3)$ ноктасын төзибез.

6) (MN) турысы без эзләгән m турысы була.

Проектив яссылыкта проектив туры тигезләмәсе

Проектив $\bar{\Pi}$ яссылыгын карыйк. *R* реперы бирелсен: $R=\{A_1,A_2,A_3,E\}$

Шушы реперда *m* турысын карыйк. Бу турыны билгеләү өчен аның ике ноктасын билгеләү җитә.

$$M_1(x_1^1,x_1^2,x_1^3)\in m,$$

$$M_2(x_2^1,x_2^2,x_2^3)\in m.$$

Бу турыны тудыручы ике вектор табып була.

$$f(\vec{m}_1)=M_1, f(\vec{m}_2)=M_2$$

Проектив R реперы белән яраклаштырылган $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ базисында

$$\begin{aligned}\vec{m}_1&=\{x_1^1,x_1^2,x_1^3\},\\ \vec{m}_2&=\{x_2^1,x_2^2,x_2^3\}\end{aligned}$$ була.

Хәзер шул *m* турысында ятучы ирекле M ноктасын карасак $M(x^1,x^2,x^3)\in m$, аны тудыручы $\vec{m}$ векторы бар $\vec{m}=\{x^1,x^2,x^3\}$

$M\in m\leftrightarrow\vec{m},\quad \vec{m}_1,\vec{m}_2$ векторлары үзара компланар була.

Векторлар компланар була, әгәр аларның координаталарыннан төзелгән билгеләгеч нульгә тигез булса.

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

Димәк, бу *m* проектив турысының тигезләмәсе була. Бу билгеләгчне беренче юл элементлары буенча таркатабыз

$$x^1a_1 + x^2a_2 + x^3a_3 = 0 \qquad (6)$$

Проектив туры тигезләмәсе сызыкча бериш тигезләмә булып тора. Һәм киресенчә, әгәр проектив R реперында ниндидер бериш тигезләмә (6) формасында бирелсә, бу тигезләмәне канәгать-ләндергән барлык $M(x^1, x^2, x^3)$ нокталар күплеге ниндидер турыны билгели.

Чынлап та, әгәр (6) тигезләмәсе бирелсә, бу тигезләмәне канәгатьләндергән $A(-a_2, a_1, 0)$, $B(-a_3, 0, a_1)$ нокталары алсак,

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Димәк, (6) тигезләмәсе (*AB*) турысын билгели. (*AB*) турысы тигезләмәсен (7) тигезләмәсе билгели. (6) тигезләмәсенең a_1, a_2, a_3 тәртипләштерелгән коэффициентлары $m = \{a_1, a_2, a_3\}$ турысының **координаталары** дип атала.

Мисал 1: (A_1A_2) турысы тигезләмәсен табыйк. $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x^3 = 0$$

Димәк, (A_1A_2) турысы тигезләмәсе $x^3 = 0$.

Мисал 2: M(2, -1, 3), N(4, 0, -2) нокталары аша узучы туры тигезләмәсен табарга.

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2x^1 + 12x^2 + 4x^3 + 4x^2 = 2x^1 + 16x^2 + 4x^3 = 0.$$

Димәк, (*MN*) турысы тигезләмәсе $x^1 + 8x^2 + 2x^3 = 0$.

Мисал 3: *m*(2, -1, 1) һәм *n*(1, 3, -2) турыларының кисешү ноктасын табарга.

Чишү:

Түбәндәге системаны чишәргә кирәк:

$$\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 + 3x^2 - 2x^3 = 0 \end{cases}$$

Системаны чишеп (-1, 5, 7) чишелешен табабыз. Моннан күренгәнчә, кисешү ноктасы T(-1, 5, 7).

Яссылыктагы һәм турыдагы нокта координаталарын үзгәртү

$\bar{\Pi}$ проектив яссылыгында ике проектив репер карыйк:

$$R = \{A_1, A_2, A_3, E\},\ R' = \{A'_1, A'_2, A'_3, E'\}.$$

R' реперы түбәләренең һәм берәмлек ноктасының *R* реперындагы координаталары бирелгән: $A'_1(a_{11}, a_{21}, a_{31})$; $A'_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})$; $A'_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})$; $E'(a_{10}, a_{20}, a_{30})$. Бу нокталарның координаталарыннан матрица төзибез:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \end{array}\right)$$

С матрицасы *R* реперыннан R' реперына **күчү матрицасы** дип атала.

R' реперын тудыручы базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \vec{e}'_0$, *R* реперын тудыручы базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_0$.

С матрицасына кергән квадрат матрица $\vec{e}_i \to \vec{e}'_i$ базисына күчү матрицасы булып тора. Димәк, бу очракта түбәндәгеләр килеп чыга:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_0 = a_{10}\vec{e}_1 + a_{20}\vec{e}_2 + a_{30}\vec{e}_3 \end{cases}$$

R' реперы яраклаштырылган булсын өчен

$$(*)\begin{cases} f(\vec{e}'_i) = A'_i \\ f(\breve{\vec{e}}'_0) = E' \\ \vec{e}'_0 = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \overset{\frown}{\vec{e}}{}'_3 \end{cases}$$

, ягъни (*) шарты үтәлсен өчен түбәндәге шарт үтәлергә тиеш:

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})\vec{e}_1 + (a_{21} + a_{22} + a_{23})\vec{e}_2 + (a_{31} + a_{32} + a_{33})\vec{e}_3 - a_{10}\vec{e}_1 -$$
$$-a_{20}\vec{e}_2 - a_{30}\vec{e}_3 = 0.$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{10} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{20} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = a_{30} \end{cases}$$

Димәк, С матрицасының беренче өч баганасының суммасы дүртенче багана624ы китереп чыгара. Бу – яраклаштыру өчен шарт булып тора.

Мисаллар чишкәндә базис яңа репер белән яраклаштырылган булсын өчен беренче баганаы k_1, икенчесен k_2, өченчесен k_3 кә тапкырларга кирәк. k_1, k_2, k_3 коэффициентларына түбәндәге тигезләмәләр килеп чыга:

$$\begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{12} + k_3a_{13} = a_{10} \\ k_1a_{21} + k_2a_{22} + k_3a_{23} = a_{20} \\ k_1a_{31} + k_2a_{32} + k_3a_{33} = a_{30} \end{cases}$$

Бу тигезләмәләр системасының чишелеше һәрвакыт бар, чөнки башкача $\Delta = 0$ булса, $\{\vec{e}_i\}$ базис векторларының сызыкча бәйле булуына китерер иде. k_1, k_2, k_3 коэффициентларын түбәндәгечә табалар:

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{10} & a_{13} \\ a_{21} & a_{20} & a_{23} \\ a_{31} & a_{30} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{30} \end{vmatrix}.$$

Яраклаштырылган күчү матрицасын С матрицасының юлларын k_1, k_2, k_3 коэффициентларына тапкырлап табабыз.

Әгәр ирекле *X* санының *R* һәм R' реперындагы координаталары (x^1, x^2, x^3) һәм (x'^1, x'^2, x'^3) булса, алар түбәндәгечә бәйләнгән була:

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

ρ – ниндидер сан.

Ирекле проектив туры өчен күчү матрицасы карасак, $R = \ A_1, A_2, E\ $, $R' = \ A_1', A_2', E'\ $ һәм $A_1'(a_{11}, a_{21})$, $A_2'(a_{12}, a_{22})$, $E(a_{10}, a_{20})$ бирелсә,

$C = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{array}\right)$, монда беренче ике баганаың суммасы өченче багананы бирергә тиеш.

Берничә мисал карап китик.

Мисал 1: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) ноктaларын тиңдәшле рәвештә (2, 4, 8), (2, -1, 2), (3, 2, 5), (2, 5, 7) нокталарына күчерә торган, яссылыктагы проектив үзгәртү формуласын язарга.

Чишү:

$$A_1(1,0,0) \to A_1'(2,4,8),$$

$$A_2(0,1,0) \to A_2'(2,-1,2),$$

$$A_3(0,0,1) \to A_3'(3,2,5),$$

$$E(1,1,1) \to E'(2,5,7),$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 2 \\ 4k_1 - 1k_2 + 2k_3 = 5 \\ 8k_1 + 2k_2 + 5k_3 = 7 \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 24 + 32 + 24 - 8 - 40 = 22.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 30 + 28 + 21 - 8 - 50 = 11,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 50 + 84 + 32 - 120 - 28 - 40 = -22,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 16 + 80 + 16 - 56 - 20 = 22,$$

$$k_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2} \;\; k_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1 \;\; k_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{22}{22} = 1.$$

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & k_3 a_{13} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & k_3 a_{23} \\ k_1 a_{31} & k_2 a_{32} & k_3 a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Җавап: $\begin{cases} \rho \cdot x_1' = x^1 - 2x^2 + 3x^3 \\ \rho \cdot x_2' = 2x^1 + x^2 + 2x^3 \\ \rho \cdot x_3' = 4x^1 - 2x^2 + 5x^3 \end{cases}$

Икетөрлеле принцибы

Проектив яссылыкта ноктаның һәм турының бер-берсенә керүләрен без нокта турыда ята яки туры нокта аша үтә дигән җөмләләр белән билгели идек.

Проектив $\bar{\Pi}$ яссылыгында турылар күплеген $\bar{\Pi}'$ дип алыйк һәм берәр *R* реперы алып $\varphi : \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}'$ чагылдыруын карыйк.

Бу чагылдыру һәрбер $M(a_1, a_2, a_3)$ ноктасына шул ук координаталы турыны куя:

$$\varphi : M(a_1, a_2, a_3) \to m(a_1, a_2, a_3).$$

Бу чагылдыру биекция булып тора.

A һәм *B* нокталары алсак $(A \neq B)$, аларның координаталары пропорциональ түгел. Аларга туры килгән турылар да төрле була. Димәк, φ – инъекция була.

$\forall d(a_1, a_2, a_3)$ турысына φ чагылдыруында $D(a_1, a_2, a_3)$ ноктасы табып була. Димәк, φ – сюръекция дә булып тора. Шулай булгач, φ^{-1} не бердәнбер итеп табып була. Димәк, φ, φ^{-1} – биекция булалар.

φ һәм φ^{-1} чагылдыруларында нокталар һәм турыларның бер-берсенә керүләре саклана.

Чынлап та, әгәр $A \in d$ һәм $\varphi(A) = a$ булса, $\varphi^{-1}(d) = D$ дип билгеләсәк, $D \in a$.

Әгәр $A(a_1, a_2, a_3), d(d_1, d_2, d_3), A \in d$ булса, $a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 = 0$. Димәк, $a(a_1, a_2, a_3)$, $D(d_1, d_2, d_3) \rightarrow D \in a$.

Әгәр өч нокта бер турыга керсәләр, аларның сурәтләре бер турылар бәйләменә керә

$$A, B, C \in d, \varphi(A) = a', \varphi(B) = b', \varphi(C) = c' \text{ булса, } D' = \varphi^{-1}(d) \rightarrow D' \in d'.$$

$D' \in b'$, $D' \in c'$. Алда исбатланганнан килеп чыга: D' – турылар бәйләменең үзәге.

φ – биекция булганга, φ чагылдыруында турының сурәте булып турылар бәйләме тора.

Икетөрлелек принцибы: *Әгәр яссылыктагы турының нокта-лары һәм аларның бер-берсенә керүләре турындагы ниндидер Δ җөмләсе дөрес булса, шулай ук Δ җөмләсендәге нокта сүзен туры сүзенә, туры сүзен нокта сүзенә алыштырудан килеп чыккан Δ га карата икетөрле дип аталган Δ^* җөмләсе дә дөрес була.*

Мисаллар карап китик:

Мисал 1:

Δ: “Теләсә нинди ике *A* һәм *B* нокталары өчен, бу нокталарга кергән бердәнбер *a* турысы бар”.

Δ^*: “Теләсә нинди ике *a* һәм *b* турылары өчен, бу турыларга кергән бердәнбер *A* ноктасы бар”.

Мисал 2:

Δ: “Һәрбер турының чиксез күп нокталары бар”.

Δ^*: “ Һәрбер нокта аша чиксез күп туры үтә”.

Мисал 3:

Δ: “Бер турыга кергән ким дигәндә өч нокта табып була”.

Δ^*: “Бер нокта аша үтүче ким дигәндә өч туры табып була”.

Мисал 4:

Δ: “Бер турыга кермәгән ким дигәндә өч нокта табып була”.

Δ^*:“Бер нокта аша үтмәгән ким дигәндә өч туры табып була”.

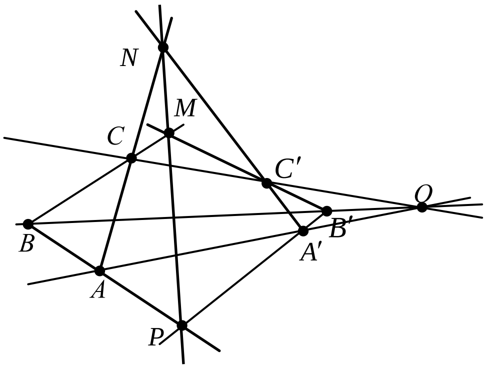
Дезарг теоремасы

Бер турыда ятмаган өч нокта һәм бу нокталарны тоташтыручы өч туры карыйк. Килеп чыккан фигура **өчтүбәлек** дип атала. Нокталар – өчтүбәлекнең **түбәләре** дип, турылар – өчтүбәлекнең **яклары** дип атала.

Өчтүбәлек ABC дип билгеләнелә.

Проектив яссылыкта ике ABC һәм $A'B'C'$ өчтүбәлекләрен карыйк. A һәм A', B һәм B', C һәм C' түбәләрен – бер-берсенә туры килгән түбәләр дип атыйк. Шулай ук AB һәм $A'B'$, BC һәм $B'C'$, CA һәм $C'A'$ якларын да бер-берсенә туры килгән яклар дип атыйк. Бу очракта түбәндәге теорема дөрес:

Теорема*:* *Әгәр ике өчтүбәлекнең бер-берсенә туры килгән түбәләрен тоташтыручы турылар бер ноктада кисешсәләр, бер-берсенә туры килгән якларның кисешү нокталары бер турыда ята.* (AA'), (BB'), (CC') *турылары* O *ноктасында кисешсен*.



$$M = (BC) \bigcap (B'C')$$

$$N = (AC) \bigcap (A'C')$$

$$P = (AB) \bigcap (A'B')$$

$$M, P, N \in d.$$

Өчтүбәлекләр төрле яссылыкларда ятсалар да теорема дөрес була.

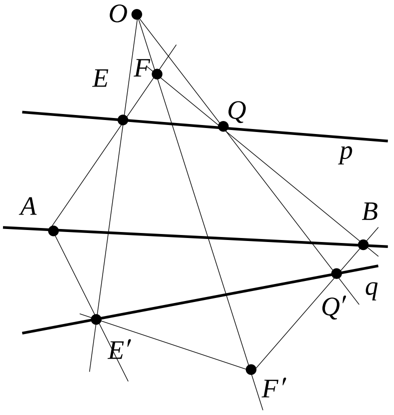
Икетөрлелек принцибын кулланып Дезарг теоремасына кире теорема языйк:

Кире теорема:

Әгәр ике өчтүбәлек-нең тиңдәш яклары кисешкән нокталар бер турыда ятсалар, бу өчтүбәлекнең тиң-дәш түбәләре аша үтүче турылар бер ноктада кисешәләр.

Дезарг теоремасына карата берничә мисал карап китик:

Мисал 1: Чикле сызымда А ноктасы һәм сызымнан читтә кисешүче p һәм q турылары бирелгән. p һәм q турыларының кисешү ноктасы P. (AP) турысының биткә кергән өлешен сызарга.



Моның өчен:

1) A ноктасыннан p һәм q турыларына ирекле нурлар төшерик һәм аларның p һәм q турылары белән кисешү нокталарын E һәм E' дип билгелик;

2) p турысын E түбәсен һәм $[AE)$ нурын кулланып ирекле EFQ өчтүбәлеге төзик;

3) (EE') турысы үткәрик һәм бу турыда ирекле O ноктасы алыйк;

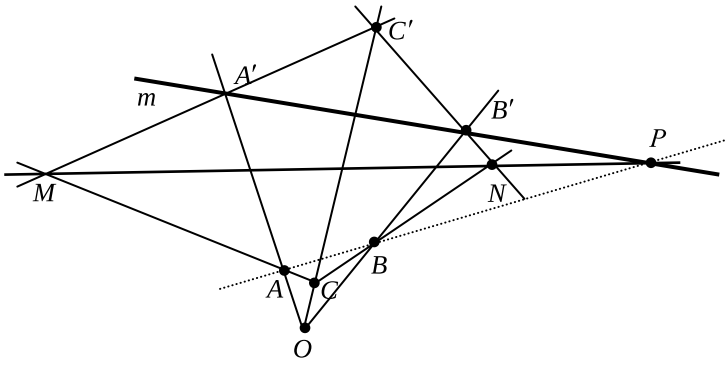
4) (*OE*), (*OF*), (*OQ*) турылары үткәрик;

5) $(OQ)\bigcap q = Q'$ дип алыйк һәм (*OF*) турысында ирекле F' ноктасы алыйк. $E'F'Q'$ өчтүбәлеге төзелде;

6) Бу ике *EFQ* һәм $E'F'Q'$ өчтүбәлекләренең бер-берсенә туры килгән түбәләрен тоташтыручы турылар бер *O* ноктасында кисешәләр. Димәк, Дезарг теоремасы буенча, бер-берсенә туры килгән яклар кисешкән нокталар бер турыда яталар. $(FQ)\bigcap(F'Q') = B.$

7) (*AB*) турысын үткәрик. Дезарг теоремасы буенча, *P* ноктасы (*AB*) урысында ятачак. Димәк, (*AB*) турысы – без эзләгән туры.

Мисал 2: *m* турысы һәм аңа кермәгән *A* һәм *B* нокталары бирелгән. *AB* турысын үткәрмичә генә, линейка гына кулланып, *AB* һәм *m* турыларының кисешү ноктасын төзергә.



Моның өчен:

1) Ирекле *O* ноктасы алыйк һәм [*OA*), [*OB*) нурлары үткәреп аларның *m* турысы белән кисешү нокталарын тиңдәшле рәвештә A' һәм B' дип билгелик;

2) *O* ноктасыннан тагын берирекле нур үткәрик һәм анда *C* һәм C' нокталарын билгелик;

3) *ABC* һәм $A'B'C'$ өчтүбәлекләренең бер-берсенә туры килгән түбәләрен тоташтыручы турылар бер *O* ноктасында кисешәләр. Димәк, Дезарг теоремасы буенча, бер-берсенә туры килгән яклар кисешкән нокталар бер турыда яталар $(AC)\bigcap(A'C') = M$ һәм $(CB)\bigcap(C'B') = N$ нокталарын табыйк;

4) $(MN)\bigcap m = P$ ноктасын төзик.

P – без эзләгән нокта була, чөнки $(AB)\bigcap m = P \in (MN)$.

Турыдагы дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы

Дүрт нокта карыйк. *A, B, C* – төрле нокталар. *D* – *A* белән туры килми. Бу турыда *R*(*A, B, C*) реперын карыйк. Әлеге реперда *D* ның координаталары $D(x^1, x^2)$ булсын.

$D \neq A \Rightarrow x^2 \neq 0.$ $\dfrac{x^1}{x^2}$ саны *A, B, C, D* нокталарының **катлаулы чагыштырмасы** дип атала һәм (AB, CD) дип языла.

<u>Теорема 1</u>: *Әгәр A, B, C – турының төрле нокталары , ә* λ *– теләсә нинди реаль сан булса,* $(AB,CX) = \lambda$ *тигезләмәсен канәгатьләндергән, бу турыда ятучы бердәнбер X ноктасын табып була.*

Бу теоремадан $(AB,CD)=(AB,CD')\Rightarrow D=D'$ килеп чыга.

Теорема 2: *Әгәр A, B, C, D нокталары бер турыда ятсалар һәм аларның $R(A_1,A_2,E)$ реперындагы координаталары*

$A(a^1,a^2),\ B(b^1,b^2),\ C(c^1,c^2),\ D(d^1,d^2),\ (A\neq D),$ *булса,*

$$(AB,CD)=\frac{\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1 & b^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b^1 & b^2\\ c^1 & c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a^1 & a^2\\ d^1 & d^2\end{vmatrix}}\ (*)$$

Катлаулы чагыштырма өчен түбәндәге үзлекләр үтәлә:

$1^0.(AB,CD)=(CD,AB).$

$2^0.(AB,CD)=\frac{1}{(AB,DC)};(AB,CD)=\frac{1}{(BA,CD)},$

(әгәр $(AB,CD)\neq 0$ булса.)

$3^0.(AB,CD)=(BA,DC).$

$4^0.(AB,CC)=1;(AB,CB)=0.$

$5^0.(AB,CD)+(AC,BD)=1.$

Билгеләмә: *A, B, C, D* – турының дүрт ноктасы һәм $(AB,CD)<0$ булса, *A, B* нокталары *C, D нокталарын бүлә* дип әйтәләр. Ә инде $(AB,CD)>0$ булса, *бүлми* дип әйтәләр.

Теорема 3: (Турыдагы дүрт ноктаның катлаулы чагыштыр-масының геометрик мәгънәсе):

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)}\qquad (1),$$

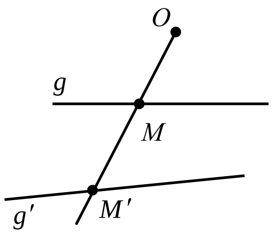
Әгәр A, B, C, D киңәйтелгән турының үз нокталары булып, P_∞ – үз булмаган ноктасы булса,

$$(AB,CP_\infty)=-(AB,C)\qquad (2)$$

формулалары дөрес. (монда (AB,C) – өч ноктаның гади чагыш-тырмасы)

Проектив яссылыкта ике g һәм g' турылары карыйк. Бу турыларда ятмаган *O* ноктасы алыйк. g ның ирекле *M* ноктасы өчен g' тагы M' ноктасын билгелик

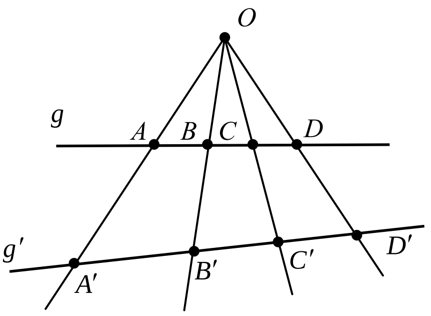
$$M'=(OM)\cap g'.$$



M' ноктасы *M* ноктасының *O* үзәгеннән ***проекциясе*** дип атала.

Теорема 4:

$A,B,C,D\in g,\ A',B',C',D'\in g'$ *булсын.*



A', B', C', D' *тиңдәшле рәвештә A, B, C, D нокталарының O үзәгеннән* g' *ка проекцияләре.*

Бу очракта $(AB,CD) = = (A'B',C'D')$.

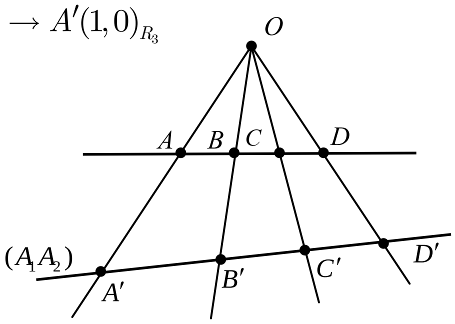
Дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасына берничә мисал карап китик:

Мисал 1: *A*(1, 0, 1), *B*(1, 1, 3), *C*(2, 1, 4), *D*(0,1, 2).

(*AB,CD*) – ?

A, B, C, D нокталарын A_3 тән A_1A_2 гә проекция-либез. Ул вакытта

$A \to A'(1,0)_{R_3}$



$B \to B'(1,1)_{R_3}$

$C \to C'(2,1)_{R_3}$

$D \to D'(0,1)_{R_3}$

$R_3 = \{A_1, A_2, E_3\}.$

$$(A'B',C'D') = \frac{\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot(-1)} = -1.$$

Алдагы теорема буенча, $(AB,CD) = (A'B',C'D')$.

(*AB, CD*) = -1. Димәк, бу нокталар – гармоник нокталар була.

Мисал 2: *A*(1, 2, -2), *B*(3, 4, -2), *C*(2, 3, -2), (*AB, D*) = 2. *D* ноктасын табарга.

Чишү: $D(d^1, d^2, d^3)$,

$$(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix}a^1&a^2\\c^1&c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b^1&b^2\\d^1&d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b^1&b^2\\c^1&c^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a^1&a^2\\d^1&d^2\end{vmatrix}}.$$

$(AB,CD) = (A'B',C'D') = (A''B'',C''D'') = 2$, кайда A', B', C', D' һәм A'', B'', C'', D'' бирелгән A, B, C, D нокталарының тиңдәшле рәвештә (A_1A_2) һәм (A_2A_3) координат турыларына проекцияләре.

$$(A'B',C'D') = \frac{\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\d^1&d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\d^1&d^2\end{vmatrix}} = \frac{(-1)\cdot(3d^2-4d^1)}{1\cdot(d^2-2d^1)} = = (AB,CD) = 2.$$

$-3d^2 + 4d^1 = 2d^2 - 4d^1 \Rightarrow \underline{8d^1 = 5d^2}.$

$$(A''B'', C''D'') = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix}} = \frac{2(4d^3 + 2d^2)}{-2(2d^3 + d^2)} = 2.$$

$4d^3 + 2d^2 = -4d^3 - 4d^2$

$\underline{4d^3 + 3d^2 = 0}$

$$\begin{cases} 8d^1 = 5d^2 \\ 4d^3 + 3d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^1 = \frac{5}{8}d^2 \\ 4d^3 + 3d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^1 = \frac{5}{8}d^2 \\ d^3 = -\frac{3}{4}d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$d^2 = 8$ булсын $\Rightarrow d^1 = 5, d^3 = -6.$

Димәк, *D*(5, 8, -6).

Мисал 3: *A, B, C* нокталарының бер турыда ятуларын ачыклап, (*BA,CD*), (*BA, DC*), (*AC, BD*), (*BD, CA*) ны табыгыз, әгәр *A*(-1, 2, 1), *B*(1, 1, 2), *C*(2, -1, 1), *D*(-1, 5, 4) булса.

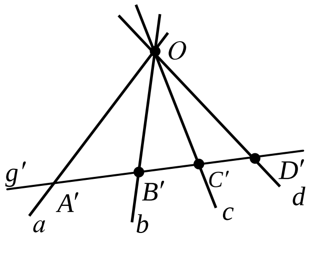
Чишү: $R_3(A_1, A_2, E_3)$ реперында *A*(-1, 2), *B*(1, 1), *C*(2, -1), *D*(-1, 5).

$$(AB,CD) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-3 \cdot 9}{3 \cdot (-3)} = 3.\ (BD,CA) = (CA,BD) = \frac{1}{(AC,BD)} = \frac{1}{3},$$

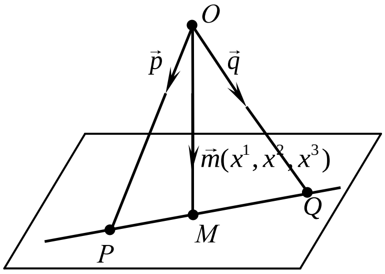
$$(BA,CD) = \frac{1}{(AB,CD)} = -\frac{1}{2},\ \ (BA,DC) = (AB,CD) = -2.$$

Дүрт турының катлаулы *чагыштырмасы*

Алда карап киткән *Теорема* 4 тән түбәндәгеләр килеп чыга: *O* ноктасы аша үтүче турылар бәйләме һәм бу турылар бәйләмен кисүче g турысы бирелсә, бу *a, b, c, d* турыларын нинди генә g турысы белән кистермик, килеп чыккан нокталарның катлаулы чагыштырмасы бер үк була һәм (*AB, CD*) =(*ab, cd*) – **турыларның катлаулы чагыштырмасы** дип атала. Бу икетөрлелек принцибынан да килеп чыга.



<u>Теорема 5</u>: Әгәр яссылыкта нииндидер бер реперда ике *P* һәм *Q* нокталары аша үтүче турының параметрик тигезләмәсе бирелсә, $R(A_1, A_2, A_3, E)$, $Q(q^1, q^2, q^3)$, $P(p^1, p^2, p^3)$ булсалар, $\vec{m} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$. Моннан (*PQ*) турысының



$$\begin{cases} x^1 = \lambda p^1 + \mu q^1 \\ x^2 = \lambda p^2 + \mu q^2 \\ x^3 = \lambda p^3 + \mu q^3 \end{cases} -$$ параметрик тигезләмәсе килеп чыга.

$M_1(\lambda_1,\mu_1),\ M_2(\lambda_2,\mu_2)$ нокталары (P*Q*) турысында ятучы ирекле ике нокта булсалар,

$(PQ, M_1M_2) = \frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_2\lambda_1}$.

Дүрт турының катлаулы чагыштырмасына берничә мисал карап китик.

Мисал 1: *a, b, c, d* турыларының бер турылар бәйләменә кергәнлеген ачыклап, (*ab, cd*) ны табарга. *a*(6, 2, -5), *b*(2, 2, 1), *c*(0, 1, 2), *d*(14, 1, -19).

Чишү:

a, b, c турылары бер бәйләмгә керсә системаның чишелеше бар. Ә сызыкча бериш тигезләмәләр системаның, нольгә тигез булмаган, чишелеше булу өчен, төп билгеләгеч (яки транспанирланган билгеләгече) нольгә тигез булырга тиеш:

$$\begin{cases} 6x^1 + 2x^2 - 5x^3 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 + x^3 = 0 \\ x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 24 - 10 - 8 - 6 = 0 \Rightarrow a,b,c \ \in \varepsilon(O_1) -$$

бәйләменә керә. Шулай ук

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & c & d \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -19 \end{vmatrix} \end{array} = -38 + 56 - 14 - 4 = 0 \Rightarrow b,c,d \ \in \varepsilon(O_2)$$ бәйләменә керә.

Әгәр $\varepsilon(O_1)$ һәм $\varepsilon(O_2)$ төрле бәйләмнәр булса, $b \cap c = O_1$ һәм $b \cap c = O_2 \Rightarrow b = c$ булыр иде. Ә $b \neq c$, димәк $O_1 = O_2$, *a, b, c, d* – бер турылар бәйләменә керә.

Бу турыларны $x_1 = 0$ турысы белән кистерсәк,

$$\begin{cases} a: 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$A'(0,5,2)$ ны табабыз.

Шулай ук $B'(0,1,-2), C'(0,2,-1), D'(0,19,1)$ нокталарын табып була.

$A'(0,2,-5), B'(0,2,1), C'(0,1,2), D'(0,1,-19),$

$$(ab,cd)=(A'B',C'D')=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\-5&2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&-19\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1\\-5&-19\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{(4+5)(-38-1)}{(-38+5)(4-1)}=\frac{13}{11}.$$

Мисал 2: *a*(2, 1, 0), *b*(0, 1, 3), *c*(2, 0, -3) турылары бирелгән. Аларның бер турылар бәйләменә керүен ачыклап, (*ab, cd*) $=-\frac{1}{3}$ булырлык *d* турысын табарга.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a&b&c\end{array}\\ \begin{vmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&3&-3\end{vmatrix}=-6+6=0\end{array}$$

Димәк, *a, b, c* – бер турылар бәйләменә керә. $d(d^1,d^2,d^3)$ булсын.

$R(A_1,A_2,E_3)$ реперында $A'(2,1), B'(0,1), C'(2,0), D'(d^1,d^2)$ – *a, b, c, d* турыларың (A_1A_2) координат турысы белән кисешү нокталары.

$$(ab,cd)=(A'B',C'D')=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\2&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\d^1&d^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\d^1&d^2\end{vmatrix}}=\frac{-2(-d^1)}{-2(2d^2-d^1)}=$$

$$=\frac{-d^1}{2d^2-d^1}=-\frac{1}{3},$$

$3d^1=2d^2-d^1\Rightarrow 4d^1=2d^2\Rightarrow 2d^1=d^2,$

$R(A_2,A_3,E_1)$ реперында $A'(1,0), B'(1,3), C'(0,-3), D'(d^2,d^3)$,

$$(ab,cd)=(A'B',C'D')=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\0&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\d^2&d^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3\\0&-3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\d^2&d^3\end{vmatrix}}=\frac{-3(d^3-3d^2)}{-3d^3}=$$

$$=\frac{d^3-3d^2}{d^3}=-\frac{1}{3}.$$

$3d^3-9d^2=-d^3\Rightarrow 4d^3=9d^2.$

$d^2=4$ булсын $\Rightarrow d^3=9, d^1=2$

Димәк, *d*(2, 4, 9).

Тулы дүрттүбәлек һәм аңа карата теорема

(A B, C D) = -1 булса, A, B, C, D нокталары ***гармоник нокталар*** дип атала яки C, D нокталары A, B нокталарын гармоник рәвештә бүлә дип әйтәләр.

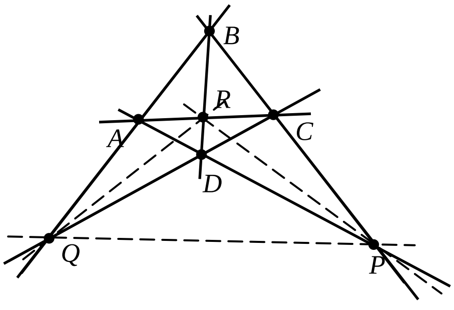
Катлаулы чагыштырманың үзлекләрен

$$(BA,CD) = -1$$

кулланып $(AB,CD) = -1 \Rightarrow (AB,DC) = -1.$

$$(CD,AB) = -1$$

Билгеләмә: *Тулы дүрттүбәлек* дип яссылыкның гомуми торышлы дүрт ноктасыннан һәм аларны тоташтыручы алты турыдан торган фигура атала. Бу нокталарны A, B, C, D дип билгеләсәк, алар *дүрттүбәлекнең түбәләре* дип, ә аларны тоташтыручы (AB), (BC), (CD), (DA), (AC), (BD) турылары *дүрттүбәлекнең яклары* дип атала. Гомуми түбәләре булмаган яклары *үзара каршы яклар* дип һәм каршы яклар кисешкән нокталар *диагональ нокталар* дип атала. Ә инде диагональ нокталарны тоташтыручы турылар *диагональләр* дип атала.



Q, P, R – өч диагональ нокта. (QP), (RP), (QR) – өч диагональ туры.

Лемма: *Диагональ нокталар бер турыда ятмый.*

Теорема (тулы дүрттүбәлек турында): *Тулы дүрттүбәлекнең һәрбер диагоналендәге диагональ нокталар бу диагональнең өченче диагональ аша үтүче яклары белән кисешүче ике ноктаны гармоник рәвештә бүләләр.*

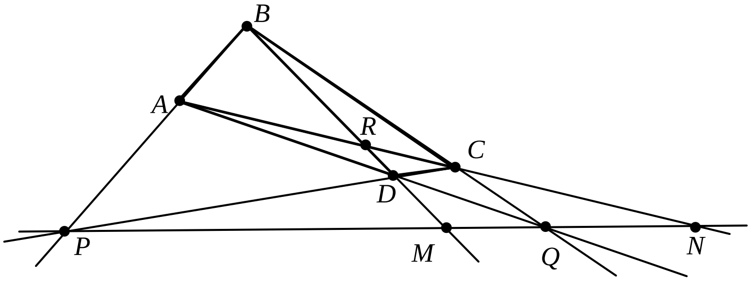
(PQ, MN) = -1

(PQ, MN) = (AC, RN) (Теорема 4 тән килеп чыга).

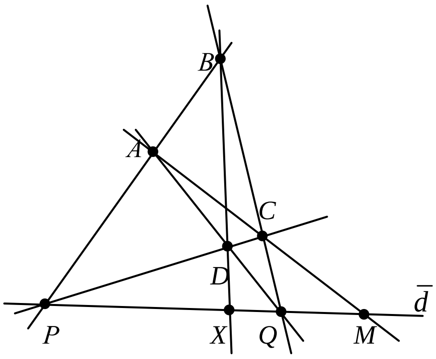
Нәтиҗә 1: (AC, RN) = -1.

Димәк, тулы дүрттүбәлекнең бер ягында ятучы ике ноктасы диагональ ноктаны һәм бу як калган ике диагональ нокта аша үтүче диагональ белән кисешкән ноктаны гармоник рәвештә бүлә.

Тулы дүрттүбәлеккә кергән турылар өчен дә



((RM) (RN), (RP) (RQ)) = -1.



<u>Нәтиҗә 2</u>: Тулы дүрттүбәлекнең ике каршы ягы бу яклар кисешкән нокта аша үтүче ике диагональне гармоник рәвештә бүлә.

Тулы дүрттүбәлеккә берничә мисал карап китик:

Мисал 1: Проектив турыда *P, Q, M* нокталары бирелгән. Бу ноктага гармоник булган дүртенче X ноктасын төзергә.

Монын өчен:

1) *P* ноктасы аша ирекле бер туры үткәрик һәм анда *A* һәм *B* нокталары алыйк.

2) *(QA), (QB), (AM) турылары үткәрик.*

3) $C=(MA)\bigcap(QB)$

4) (*PC*) ны төзик.

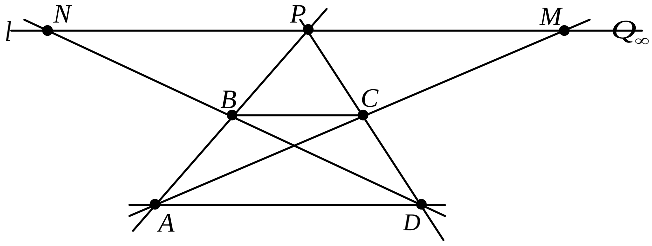
5) $D=(PC)\bigcap(AQ)$.

6) *ABCD* – тулы дүртүбәлек. $X=(BD)\bigcap d$.

Тулы дүрттүбәлек турындагы теорема буенча (*PQ, XM*) = –1 һәм *X* – без эзләгән нокта.

Мисал 2: Ирекле *ABCD* трапециясе бирелгән.

$P=(AB)\bigcap(CD)$. l – Р ноктасы аша үтүче (*AD*) га параллель туры. $M=l\bigcap(BD)$ һәм $N=l\bigcap(AC)$. *P* ноктасының *MN* кисемтәсен урталай бүлүен исбатларга.



$(AD)\bigcap l=Q_\infty$, *BCD* – тулы дүрттүбәлек.

Тулы дүрттүбәлек турындагы теорема буенча $(PQ_\infty,MN)=-1$. Ә без беләбез, әгәр *P, M, N* киңәйтелгән турының үз нокталары булып, Q_∞– үз булмаган нокта булса, $(PQ_\infty,MN)=-(MN,P)$.

үз нокталары булып, g_0– үз булмаган ноктасы булса, $(PQ_\infty,MN)=-(MN,P)$.

$-(MN,P)=-1\;\longrightarrow\;\;(MN,P)=1\;\Rightarrow MN=NP$. Шуны исбатларга кирәк иде дә.

Проектив яссылыкта проектив үзгәртүләр һәм проектив үзгәртүләр группасы

Билгеләмә 1: Әгәр киңәйтелгән яссылыкның ирекле турысының нокталары берәр туры нокталарына күчсәләр һәм ирекле турыдагы дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы сакланса, әлеге үзгәртү – *проектив үзгәртү* дип атала.

$f: d \to d', f -$ проектив үзгәртү.

$\forall M_i \in d \qquad\qquad (i = 1,2,3,4)$

$f(M_i) = M_i' \in d'.$

$(M_1M_2, M_3M_4) = (M_1'M_2', M_3'M_4').$

Тривиаль үзгәртү ноктаны үз-үзенә күчерә.

Билгеләмә 2: $R(A_1, A_2, A_3, E)$ һәм $R'(A_1', A_2', A_3', E') -$ проектив яссылыкның реперлары булсалар, шул яссылыкның ирекле М ноктасына R' реперындагы координаталары М ноктасының R реперындагы координаталарына тигез булган M' ноктасын куя торган f чагылдыруы *проектив үзгәртү* дип атала.

$\forall M \in P, \quad \exists f: M \to M'$

$M(x^i)_R \to M'(x^i)_{R'}$

f үзгәртүе бер турыда ятучы *X, Y, Z* нокталарын бер турыда ятучы X', Y', Z' нокталарына күчерә, шул ук вакытта бу үзгәртү турыдагы 4 ноктаның катлаулы чагыштырмасын саклый, чөнки

$f: A(a^i), B(b^i), C(c^i), D(d^i) \Rightarrow A'(a^i)_{R'}, B'(b^i)_{R'}, C'(c^i)_{R'}, D'(d^i)_{R'}.$ Санау формулаларына куйсак, дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы саклана икәнен күрәбез. Чөнки бу чагылдыру тулысынча нокталарның координаталары белән билгеләнә.

Теорема: Әгәр f_1 һәм f_2 проектив үзгәртүләре ниндидер g турысының өч *A, B, C* нокталарын g' турысының A', B', C' нокталарына күчерсә

$f_1: A, B, C \to A', B', C' \in g'$

$f_2: A, B, C \to A', B', C' \in g',$

A' һәм B' тәңгәл килә.

Теорема: $R\ (M_1,\ M_2,\ M_3, E),\ R'(M_1',\ M_2',\ M_3',\ E) -$ *проектив яссылыкның ике реперы булса,* R *ны* R' *ка күчерүче бердәнбер проектив үзгәртү табып була һәм бу үзгәртү белән ирекле М ноктасы,* R' *реперындагы координаталары шул ук булган* M' *ноктасына күчә.*

$\forall M(x^i)_R \to M'(x^i)_{R'}$

Нәтиҗә 1: Алдагы ике билгеләмә эквивалент.

Нәтиҗә 2: Әгәр реперның түбәләре һәм берәмлекле нокталары – инвариант нокталар булсалар, бу проектив үзгәртү *бердәй үзгәртү* дип атала.

Проектив үзгәртүнең кайбер үзлекләре

1^0. Бер турыда ятмаган 3 нокта, бер турыда ятмаган 3 ноктага күчә.

2^0. Ирекле репер реперга күчә.

3^0. Туры турыга күчә.

4^0. X_∞ Турылар бәйләме турылар бәйләменә күчә.

Бу язган характеристикалар проектив үзгәртүнең инвариант характеристикаларын билгели. Төп инвариант характеристика булып дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы тора.

Икенче төрле, проектив үзгәртүне **коллинеация** дип тә атыйлар.

Коллинеация тигезләмәсе

$\psi : P_2 \to P_2$ – коллинеация һәм $R = R(E_i), i = 1, 2, 3, 0 - P_2$ яссылыгының ниндидер проектив координаталар системасы (репер) булсын.

R реперында ирекле $X(x^1, x^2, x^3)$ ноктасының координаталары билгеле. $X' = \psi(X)$ ноктасы $X'(x'^1, x'^2, x'^3)$ ноктасының R реперындагы координаталарын табарга кирәк. $E_i' = \psi(E_i)$, R' реперында X' ның координаталары

$X'(x^1, x^2, x^3)_{R'}$

$X'(x'^1, x'^2, x'^3)_R$

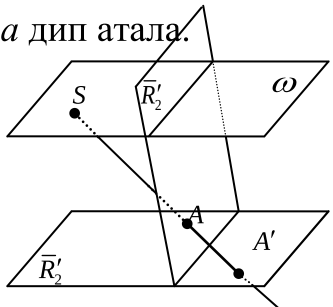
Бер үк ноктаның төрле реперындагы координаталары үзара түбәндәге формула белән бәйләнгән: $\lambda X = PX'$ – коллинеация тигезләмәсе.

Монда X – кире сурәтнең, X' – сурәтнең координаталары баганасы, P – квадрат матрица, λ – пропорциональлек коэффи-циенты.

$$\lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + p_{13}x_3'$$
$$\lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + p_{23}x_3'$$
$$\lambda x_3 = p_{31}x_1' + p_{32}x_2' + p_{33}x_3'$$

<u>Билгеләмә</u>: Киңәйтелгән евклидча пространствода ике киңәйтелгән евклидча яссылык $\overline{R}_2, \overline{R}_2'$ һәм бу яссылыкларга кермәүче S – (перспектива) үзәге бирелсә,

$\varphi : \overline{R}_2 \to \overline{R}_2' \ \forall A \in \overline{R}_2 \to A' = (SA) \cap \overline{R}'$ чагылдыруы *үзәк проекцияләү* яки *перспектива* дип атала.



Перспективаның үзлекләре

1. Перспектив чагылдыру вакытында туры турыга чагылдырыла.
2. Коллинеар нокталарның катлаулы чагыштырмасы саклана.
3. Бәйләмдәге турыларның катлаулы чагыштырмасы саклана.

Берничә мисал карап китик:

Мисал 1: φ коллинеациясенең тигезләмәсе бирелгән:

$$\mu x_1' = x_1 - 2x_2, \mu x_2' = x_2 + 3x_3, \mu x_3' = -x_2.$$

Табарга: 1) $A(3, 1, -2)$ ноктасының сурәтен;

2) $B'(-1,-2,1)$ ноктасының кире сүрәтен;

3) $l(2,0,-1)$ турысының сурәтен;

4) $m'(1,1,1)$ турысының кире сүрәтен.

Чишү: 1) A ноктасының координаталарын φ чагылдыруындагы x_1, x_2, x_3 урынына куябыз, $x_1', x_2', x_3' = 1, -5, -1$ килеп чыга. Бу $A' = \varphi(A)$ ноктасының координаталары: $A'(1, -5, -1)$.

2) B ноктасының координаталарын φ чагылдыруы тигезләмәсендәге x_1', x_2', x_3' урынына куеп чыгабыз. Табабыз:

$$\begin{cases} -\mu = x_1 - 2x_2 \\ -2\mu = x_2 + 3x_3 \\ \mu = -x_2 \end{cases}$$

Бу системаны чишеп табабыз $x_1 : x_2 : x_3 = 9 : 3 : 1$. Бу $B = \varphi^{-1}(B')$ ноктасының координаталары $B(9,3,1)$. l турысында ике ирекле нокта алыйк, мәсәлән $C(1,0,2)$, $D(0,1,0)$. Чагылдыру тигезләмәсе ярдәмендә аларның сурәтләрен табабыз: $C'(1, 6, 0), D'(-2, 1, -1)$. $(C'\ M')$ – эзләнелгән туры. Аның тигезләмәсен табабыз:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -2 \\ x_2 & 6 & 1 \\ x_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ яки } 6x_1 - x_2 - 13x_3 = 0. \Rightarrow l'(6, -1, -13).$$

4) $m = \varphi^{-1}(m')$ турысының координаталарын табу өчен, турыларны чагылдыру тигезләмәсен табарга кирәк.

Әлеге чагылдыру матрица рәвешендә түбәндәге тигезләмәгә ия:

$$\mu X' = QX,\ Q = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mu U = U'Q \Rightarrow \begin{cases} \mu u_1 = u_1' \\ \mu u_2 = -2u_1' + u_2' - u_3' \\ \mu u_3 = 3u_2' \end{cases}$$

m' турысының координаталарын әлеге тигезләмәләрдәге u_1', u_2', u_3' урынына куеп чыгып, $u_1 : u_2 : u_3 = 1 : -2 : 3$ не табабыз. $m(1, -2, 3)$.

Мисал 2: φ коллинеациясенең тигезләмәсе бирелгән:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \lambda x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \lambda x_3' = -x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Кузгалмас (инвариант) нокталарны һәм турыларны табарга.

Ивариант нокта чагылдыру нәтиҗәсендә үзгәрми, ягъни үз-үзенә күчә. Димәк, $X' = X.$ Моннан килеп чыга:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \lambda x_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \lambda x_3 = -x_1 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - (2+\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Бу системада λ ны түбәндәге билгеләгечне чишеп табабыз:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = ((-\lambda)^2 - (-2)^2)(-3-\lambda) + 3 + 2(-3-\lambda) + 5(-2-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = (\lambda+1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\begin{cases} -x_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -x_2 = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -x_3 = -x_1 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ -5x_3 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} x_3 = -1 \text{ дип алсак, } \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$$

Димәк, X(1, 1, –1) – инвариант нокта.

Инвариант турыларны табу өчен, турыларны чагылдыру тигезләмәсен табарга кирәк.

$$\lambda X' = QX$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow -X' = QX$$

$$Q = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{cases} -u_1' = 2u_1 + 5u_2 - u_3 \\ -u_2' = -u_1 - 3u_2 \\ -u_3' = 2u_1 + 3u_2 - 2u_3 \end{cases}$$

$$u' = u \Rightarrow \begin{cases} -u_1 = 2u_1 + 5u_2 - u_3 \\ -u_2 = -u_1 - 3u_2 \\ -u_3 = 2u_1 + 3u_2 - 2u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 5u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 = 0 \\ 2u_1 + 3u_2 - u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} -u_1 = 2u_2 \Rightarrow u_1 = -2u_1 \\ -4u_2 + 3u_2 - u_3 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} -u_2 - u_3 = 0 \\ u_3 = -u_2 \end{array}\right.$$

$u_2 = 1$ булсын $\Rightarrow u_1 = -2, u_3 = -1.$

Димәк, *u*(–2, 1, –1) – инвариант туры.

Мисал 3: Киңәйтелгән евклидча яссылыкта турыпочмаклы декартча координаталар системасында $(x-2)^2 + y^2 = 2$ әйләнәсе бирелгән. Үзара тиңдәшле бериш координаталарына карата түбәндәге тигезләмәләр белән бирелгән

$$\mu x_1' = x_1,\ \mu x_2' = x_2,\ \mu x_3' = x_1 - x_3$$

коллинеациягә карата бу әйләнәнең сурәтен табарга.

Чишү: Коллинеация тигезләмәләрен x_1, x_2, x_3 кә карата чишеп табабыз:

$$x_1 = \mu x_1', x_2 = \mu x_2', x_3 = \mu(x_1' - x_3')$$

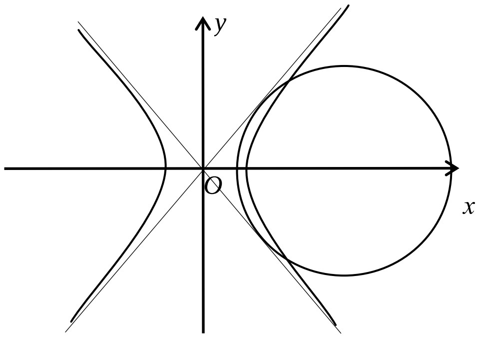
Бу аңлатмаларны $(x_1 - 2x_3)^2 + x_2^{\ 2} = 2x_3^{\ 2} -$ бирелгән әйләнәнең бериш тигезләмәсенә куеп, гадиләштерсәк, әйләнәнең сурәтенең тигезләмәсен табабыз:

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3^2$$

Бериш координаталарга кайтып, түбәндәге тигезләмәгә киләбез:

$$x^2 - y^2 = 2.$$

Шулай итеп, $y = \pm x$ ассимптоталы тигезъяклы гипербола килеп чыга.



x

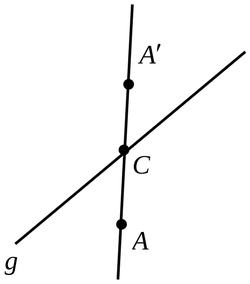
Гомология

Билгеләмә: Тривиаль булмаган проектив үзгәртү *гомология* дип атала, әгәр бу үзгәртү дә бер турыда ятучы өч булса да инвариант нокта булса.

Теорема: *Алдагы билгеләмәдәге инвариант нокталар яткан туры үзе инвариант нокталар турысы булып тора.*

Гомологиянең үзлекләре

1^0. Әгәр f гомологиясе $f : A \to A'$ булса, $(AA') -$ инвариант туры була (ягъни, туры үз-үзенә күчә).



Алда билгеләнгән инвариант нокталар яткан туры *гомологиянең күчәре* дип атала.

$g_0 -$ гомологиянең күчәре булсын, $(AA') \neq g_0$, $C = (AA') \cap g_0$ дип алыйк.

$$f(C) = C.$$

$$f(A) = A'$$

$$\begin{matrix} A \to A' \\ C \to C' \end{matrix} \Rightarrow f : (AC) \to (A'C) = (AC)$$

Димәк, (AC) турысы үз-үзенә күчә:

$$f : (AA') \to (AA')$$

$$f : (AC) \to (AC)$$

2^0. Тиңдәш нокталар аша үтче турылар бер бәйләмгә керә һәм бу бәйләмнең үзәге – *гомологиянең үзәге* дип атала.

$$f(A) = A' \; f(B) = B'$$

$$\begin{cases} B \notin (AA') \\ B \neq B' \end{cases}$$

(AA') һәм (BB') кисешкән ноктаны P дип билгелик, ягъни $(AA') \cap$ $\cap (BB') = P$. $\forall M$ алсак, $f(M) = M'$ һәм (MM') турысы P аша үтә.

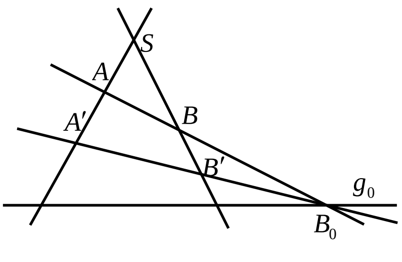
Гомология ике төрле булырга мөмкин:

1) Гомологиянең үзәге гомологиянең күчәрендә ятмаса, мондый гомология ***гиперболик гомология*** дип атала.

2) Гомологиянең үзәге күчәрдә ятса, гомология ***параболик гомология*** дип атала.

3^0. Гомологиянең үзәгеннән башка гомология күчәрендә ятмаган башка инвариант нокта юк.

Алдагыдан килеп чыга:



Әгәр гомологиянең үзәге һәм бер пар $A \to A'$ нокталары бирелсә, ирекле B ноктасының сурәте B'ны түбәндәгечә таба алабыз:

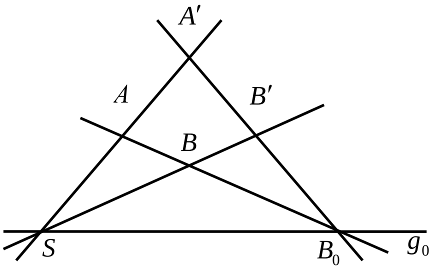
(AB) турысын үткәрәбез, $B_0 = (AB) \cap g_0$.

1) $(A'B_0)$ үткәрәбез.

2) (SB) үткәрәбез.

3) $B' = (SB) \cap (A'B_0)$.

Параболик гомология вакытында да шулай ук эшләнәлелә:



1) (AB) үткәрәбез $B_0 = (AB) \cap g_0$.

2) $(A'B_0)$ үткәрәбез.

3) (SB) үткәрәбез.

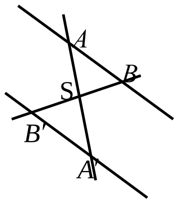
4) $B' = (SB) \cap (A'B_0)$

Гомологиянең аерым очраклары

1) s – гомологиянең күчәре – үз булмаган туры,
A' S – гомологиянең үзәге – үз булган A' нокта.

$$f : A \to A'$$

$$f : B \to B'$$

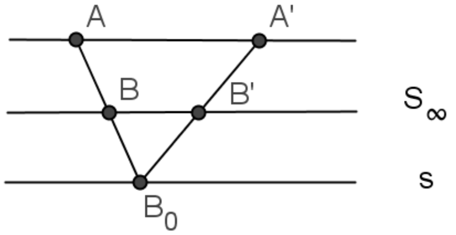


f үзгәртүе S үзәкле гомотетия булачак.

$$f : \begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \end{cases} \quad AB \| A'B'$$

Почмакларның тигезлегеннән $\dfrac{A'S}{AS} = \dfrac{B'S}{BS} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}} \Rightarrow f$ – k коэфициентлы S үзәкле гомотетия була.

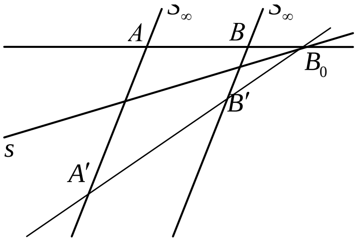
2) s күчәре – үз булган туры, S_∞ үзәге –үз булмаган нокта.



Бу очрак ***перспектив аффинча үзгәртү*** дип атала.

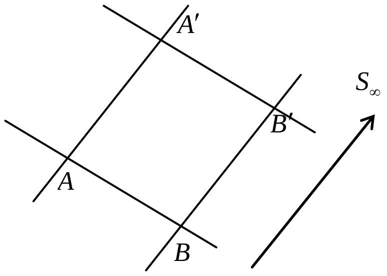
$S_\infty \in (AA')$. B ноктасының сурәте B' түбәндәге шарт нигезендә табыла:

$$B' \in (A'B_0),\ B_0 = (AB) \cap s,\ (BB') \| (AA').$$



Бу очракта тиңдәш координаталарны тоташтыручы турылар параллель турылар семьялыгына керә.

Әгәр $S_\infty \in s$ очрагын карасак, (AA') һәм $(BB') \| s$. Бу күчерүне гомология күчәренә *параллель күчерү* дип тә атыйлар.



3) s күчәре – үз булмаган туры, S_∞ үзәге –үз булмаган нокта.

Бу очракта гомология параллель күчерүгә кайтып кала. $\vec{p} = AA'$.

Гомологиягә берничә мисал карап китик.

Мисал 1: f гомологиясе S – үзәге, s – күчәре, A һәм $A' = f(A)$ нокталары белән бирелгән. Бирелгән нокталар үз булган нокталар һәм s турысы – үз булган туры. Үз булмаган турының сурәтен һәм кире сурәтен сызарга.

Чишү: Үз булмаган туры ике үз булмаган нокта белән бирелә. Ә үз булмаган нокта туры белән билгеләнә.

Үз булмаган турының сурәтен төзик:

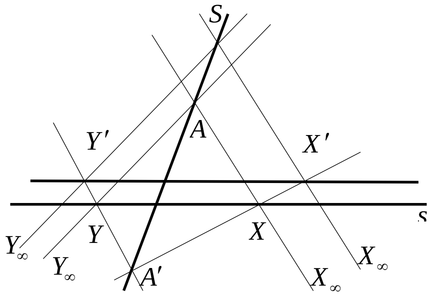
1) SX_∞ һәм SY_∞ үткәрәбез.

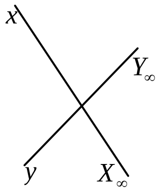
2) AX_∞ һәм AY_∞ үткәрәбез һәм $X = s \cap AX_\infty$ $Y = s \cap AY_\infty$ табабыз.

3) $A'X$ һәм $A'Y$ үткәрәбез.

4) $X' = SX_\infty \cap A'X$, $Y' = SY_\infty \cap A'Y$

5) $X'Y'$ үткәрәбез.





Ә хәзер үз булмаган турының кире сүрәтен төзик:

1) һәм SY'_∞ үткәрәбез.

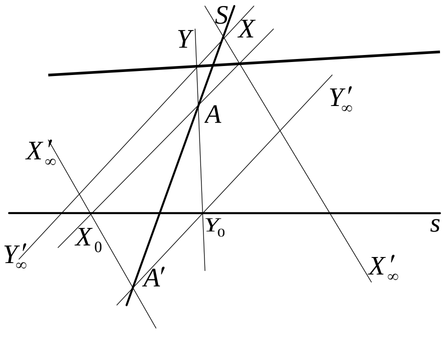
2) $A'X'_\infty$ һәм $A'Y'_\infty$ үткәрәбез һәм $X_0 = s \cap A'X'_\infty$, $Y_0 = s \cap A'Y'_\infty$ табабыз.

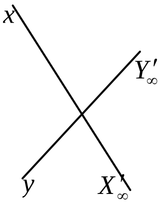
3) AX_0 һәм AY_0 үткәрәбез.

4) $X = SX'_\infty \cap AX_0$, $Y = SY'_\infty \cap AY_0$ табабыз.

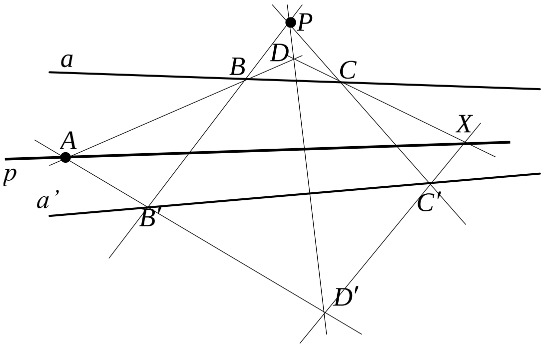
5) XY үткәрәбез.

Ул үз булмаган турының кире сурәте була.



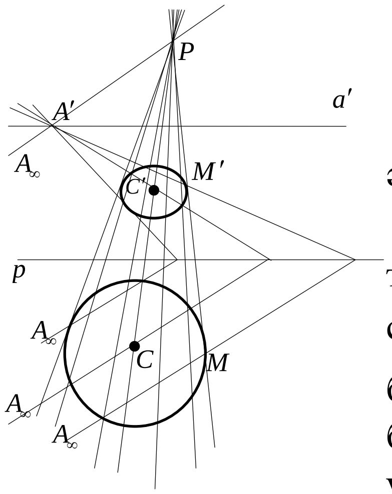


Мисал 2: Чикле сызымда A ноктасы һәм сызымнан читтә кисешүче a һәм a' турылары бирелгән. A ноктасы һәм a, a' турыларының кисешү нокталары аша узучы турыны төзергә.



Чишү: $f_{P,p}^{a\to a'}$ гомологиясен карыйк. Монда P – ирекле нокта, ә p – эзләнелгән туры. $B, C \in a$ ирекле нокталарының сурәтләрен B', C' ны төзик. (AB) турысында теләсә нинди D ноктасы алыйк һәм аның сурәте D' ны төзик.

DC турысының сурәте $D'C'$ икәнлеге ачык, шуңа күрә аларның кисешү ноктасы – X гомология күчәрендә ята. AX турысы эзләнелгән р турысы була. Бу сызымны Дезарг теоремасы ярдәмендә дә нигезләп була.



Мисал 3: $f_{P,p}^{a_\infty\to a'}$ гомологиясенә карата әйләнәнең һәм аның үзәгенең сурәтен табарга.

Чишү: Бирелгән әйләнәне A_∞ үзәкле параллель турылар бәйләме белән кистерик. A_∞ ноктасының сурәте булып $A' = a' \bigcap (PA_\infty)$ нокта-сы тора. Моннан бәйләмнең турылары-ның сурәтләрен җиңел табып була, ә бу сурәтләрдән чыгып – әйләнәнең һәм аның үзәгенең сурәтләре табыла. Табылган нокталарның сурәтләрен кәкре белән тоташтырабыз һәм эзләнелгән сурәтләрне табабыз.

Мөстәкыйль эшләү өчен күнегүләр

Тема 1: **Киңәйтелгән туры**

1.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \ A_1, A_2, E$ реперында M(1, 2) ноктасын төзергә.

1.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \ A_\infty, A_2, E$ реперында N(–1, 1) ноктасын төзергә.

2.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

2.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = \ A_1, A_2, E$ реперында N(2, –1) ноктасын төзергә.

3.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(-1, 2)$ нокталары бирелгән булса.

3.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында N(2, 3) ноктасын төзергә.

4.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында M(2, –2) ноктасын төзергә.

4.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперында N(3, 2) ноктасын төзергә.

5.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(-1, 2)$ нокталары бирелгән булса.

5.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында N(4, 1) ноктасын төзергә.

6.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында M(–3, –2) ноктасын төзергә.

6.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында N(1, 2) ноктасын төзергә.

7.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

7.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында N(–2, 1) ноктасын төзергә.

8.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында M(4, –1) ноктасын төзергә.

8.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперында N(3, –2) ноктасын төзергә.

9.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында M(2, –3) ноктасын төзергә.

9.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(1, -4)$ нокталары бирелгән булса.

10.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында M(–4, 1) ноктасын төзергә.

10.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында N(–3, 2) ноктасын төзергә.

11.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер E ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(-2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

11.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(–1, 4) ноктасын төзергә.

12.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(1, 4) ноктасын төзергә.

12.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперын-да *N*(2, 3) ноктасын төзергә.

13.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер *E* ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(3, 2)$ нокталары бирелгән булса.

13.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(4, 1) ноктасын төзергә.

14.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(–1, –4) ноктасын төзергә.

14.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(4, 5) ноктасын төзергә.

15.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер *E* ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(3, 4)$ нокталары бирелгән булса.

15.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(–5, 4) ноктасын төзергә.

16.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(2, 6) ноктасын төзергә.

16.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперын-да *N*(5, 3) ноктасын төзергә.

17.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер *E* ноктасын табар-га, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(4, -4)$ нокталары бирелгән булса.

17.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(5, 5) ноктасын төзергә.

18.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(1, –4) ноктасын төзергә.

18.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(–5, 5) ноктасын төзергә.

19.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер *E* ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(0, 4)$ нокталары бирелгән булса.

19.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперында *N*(5, 0) ноктасын төзергә.

20.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(–3, 0) ноктасын төзергә.

20.3 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(0, 5) ноктасын төзергә.

21.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(5, 0)$ нокталары бирелгән булса.

21.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(–5, 4) ноктасын төзергә.

22.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(0, –6) ноктасын төзергә.

22.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперын-да *N*(5, –4) ноктасын төзергә.

23.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер *E* ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, 3)$ нокталары бирелгән булса.

23.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(–4, 5) ноктасын төзергә.

24.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(2, –2) ноктасын төзергә.

24.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(–5, 3) ноктасын төзергә.

25.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M_\infty(1, -1)$ нокталары бирелгән булса.

25.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E_\infty$ реперын-да *N*(5, –3) ноктасын төзергә.

26.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_2, E$ реперында *M*(1, –2) ноктасын төзергә.

26.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_\infty, A_2, E$ реперында *N*(–4, 3) ноктасын төзергә.

27.1 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысында бердәнбер Е ноктасын табарга, әгәр A_1, A_2 һәм $M(2, -1)$ нокталары бирелгән булса.

27.2 $\bar{d}$ киңәйтелгән турысындагы $R = A_1, A_\infty, E$ реперында *N*(0, 3) ноктасын төзергә.

Тема 2: **Киңәйтелгән яссылык**

1. $R(A_1, A_2, A_3, E)$ **реперында *M* ноктасын төзергә**

1. *M*(1, –1, 2)
2. *M*(3, –2, –1)
10. *M*(2, –1, 0)
11. *M*(0, 2, 3)
19. *M*(–2, –1, 2)
20. *M*(–1, 3, 2)

3. $M(–1, –2, –2)$
4. $M(2, 1, 1)$
5. $M(–2, 3, 0)$
6. $M(1, 2, 1)$
7. $M(1, –1, 1)$
8. $M(1, 1, 2)$
9. $M(1, 1, –2)$
12. $M(1, 1, 1)$
13. $M(3, 1, 1)$
14. $M(–2, 1, 1)$
15. $M(1, 3, 1)$
16. $M(1, –2, 1)$
17. $M(1, 1, 3)$
18. $M(1, 1, –3)$
21. $M(2, 0, –1)$
22. $M(–1, 1, 1)$
23. $M(–3, 1, 1)$
24. $M(–1, 0, 3)$
25. $M(1, –3, 1)$
26. $M(1, 1, –1)$
27. $M(1, 2, 2)$

2. ***R*** **реперында** ***N*** **ноктасын төзергә:**

1. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E)$ $N(–1,2,2)$; 2. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E)$ $N(1, –2, –2)$; 3. $R(A_{1\infty},A_{2\infty},A_3,E)$ $N(1, –3, 2)$; 4. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E_\infty)$ $N(1, –3, –3)$; 5. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E_\infty)$ $N(–1,–2, –2)$; 6. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E)$ $N(–1,3,3)$; 7. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E)$ $N(1, 2, –2)$; 8. $R(A_{1\infty},A_{2\infty},A_3,E)$ $N(1, –3, 3)$; 9. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E_\infty)$ $N(–1, 3, 2)$; 10. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E_\infty)$ $N(1, 3, –3)$;

11. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E)$ $N(2, –1, 2)$; 12. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E)$ $N(–1, –3, 3)$; 13. $R(A_{1\infty},A_{2\infty},A_3,E)$ $N(2, 1, –2)$; 14. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E_\infty)$ $N(1, –2, 2)$; 15. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E)$ $N(1, 3, 2)$; 16. $R(A_1,A_2,A_3,E_\infty)$ $N(1, 3, 3)$; 17. $R(A_{1\infty},A_2,A_{3\infty},E)$ $N(–1,–2,2)$; 18. $R(A_1,A_{2\infty},A_{3\infty},E)$ $N(–1,–3,2)$; 19. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E_\infty)$ $N(–1, –3, –3)$; 20. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E)$ $N(–1, 3, –2)$; 21. $R(A_1,A_2,A_3,E_\infty)$ $N(2, 1, 2)$; 22. $R(A_{1\infty},A_2,A_{3\infty},E)$ $N(1, –3, –2)$; 23. $R(A_1,A_{2\infty},A_{3\infty},E)$ $N(–2, 1, 2)$; 24. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E_\infty)$ $N(–1, –3, –2)$; 25. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E)$ $N(–1, –3, –3)$; 26. $R(A_1,A_2,A_3,E_\infty)$ $N(1, 3, –2)$; 27. $R(A_{1\infty},A_2,A_{3\infty},E)$ $N(–1, 3, –)$.

3. ***R*** **реперында** m **турысын төзергә:**

1. $R(A_{1\infty},A_2,A_{3\infty},E)$ m(0, –2, –2);
2. $R(A_1,A_2,A_3,E_\infty)$ m(2, 2, 2);
3. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E)$ m(–2, 1, –3) ;
4. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E_\infty)$ m(–2, –1, 2) ;
5. $R(A_1,A_{2\infty},A_{3\infty},E)$ m(1, –1, 2) ;
6. $R(A_{1\infty},A_2,A_{3\infty},E)$ m(–2, 1, 3);
7. $R(A_1,A_2,A_3,E_\infty)$ m(0, –1, 2);
8. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E)$ m(2, –2, –1);
15. $R(A_{1\infty},A_{2\infty},A_3,E)$ m(–2, –2,);
16. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E)$ m(–2, 2, –1);
17. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E)$ m(2, –1, –2);
18. $R(A_1,A_{2\infty},A_3,E_\infty)$ m(2, 1, 3);
19. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E_\infty)$ m(2, –1, 3);
20. $R(A_{1\infty},A_{2\infty},A_3,E)$ m(–2, –1, –);
21. $R(A_1,A_2,A_{3\infty},E)$ m(2, 2, 1);
22. $R(A_{1\infty},A_2,A_3,E)$ m(–2, 2, 1);

9. $R(A_1, A_{2\infty}, A_3, E)$ m(–2, 0, 2);

10. $R(A_1, A_{2\infty}, A_{3\infty}, E)$ m(2, 1, –3) ;

11. $R(A_{1\infty}, A_2, A_{3\infty}, E)$ m(3, –2, 0);

12. $R(A_1, A_2, A_3, E_\infty)$ m(–2, –2, –1);

13. $R(A_1, A_{2\infty}, A_3, E)$ m(0, 3, 2);

14. $R(A_{1\infty}, A_2, A_3, E_\infty)$ m (2, –1, 3).

23. $R(A_1, A_{2\infty}, A_3, E_\infty)$ m(–2, –1,);

24. $R(A_{1\infty}, A_2, A_3, E_\infty)$ m(–2, 1, –6);

25. $R(A_{1\infty}, A_{2\infty}, A_3, E)$ m(2, –2, 1);

26. $R(A_1, A_2, A_{3\infty}, E)$ m(2, 2, –1);

27. $R(A_{1\infty}, A_2, A_3, E)$ m(–2, –1, 3);

Тема 3: **Проектив ясылыкта туры**

l_1, l_2 һәм m_1, m_2 турылары бирелгән. Әгәр $P = l_1 \cap l_2$ һәм $Q = m_1 \cap m_2$ булса, PQ турысының тигезләмәсен табыгыз.

1. $l_1(2, 4, 1), l_2(-2, 1, 3), m_1(1, 1, 2), m_2(-4, 2, 1)$;
2. $l_1(1, 2, -1), l_2(-3, 1, 2), m_1(3, 1, 0), m_2(1, -1, 0)$;
3. $l_1(2, 1, 4), l_2(3, 1, 3), m_1(2, -1, 2), m_2(4, 3, 1)$;
4. $l_1(-2, 2, 3), l_2(-2, 1, 1), m_1(1, -1, 2), m_2(-2, 1, 2)$;
5. $l_1(-1, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$;
6. $l_1(-2, 1, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(-1, 3, 2), m_2(0, 2, 3)$;
7. $l_1(4, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(2, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$;
8. $l_1(-2, 1, 4), l_2(1, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(-1, 0, 3)$;
9. $l_1(1, 0, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(4, 1, -2), m_2(-1, 2, 3)$;
10. $l_1(1, -1, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(3, 2, 3)$;
11. $l_1(3, 2, 0), l_2(3, 1, 1), m_1(-2, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$;
12. $l_1(4, 5, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(0, 1, 2), m_2(2, -2, 3)$;
13. $l_1(2, 1, 1), l_2(0, 1, 1), m_1(2, 1, -2), m_2(1, 4, 3)$;
14. $l_1(5, 2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(1, 4, 2), m_2(-1, 2, 3)$;
15. $l_1(1, -2, 3), l_2(3, 1, 1), m_1(2, -4, 1), m_2(-1, 2, 3)$;
16. $l_1(1, 2, -1), l_2(3, 1, 1), m_1(3, 1, 4), m_2(-1, 2, 3)$;
17. $l_1(-1, 2, 0), l_2(3, -1, 1), m_1(2, 1, -3), m_2(-1, 2, 3)$;
18. $l_1(3, 2, -3), l_2(3, 1, 1), m_1(1, 1, 2), m_2(-1, 2, 3)$;

19. $l_1(-2,2,5), l_2(3,1,1), m_1(3,\ -1,2), m_2(-1,2,3)$;

20. $l_1(-1,2,3), l_2(-3,1,1), m_1(2,1,\ -2), m_2(-1,2,3)$;

21. $l_1(-1,2,2), l_2(3,1,\ -1), m_1(4,\ -3,2), m_2(-1,2,1)$;

22. $l_1(1,2,\ -1), l_2(2,\ -1,1), m_1(3,2,\ -2), m_2(-1,2,3)$;

23. $l_1(-1,3,2), l_2(3,1,1), m_1(-4,2,1), m_2(-1,2,3)$;

24. $l_1(-5,0,3), l_2(3,1,1), m_1(-1,1,2), m_2(-1,2,3)$;

25. $l_1(3,2,2), l_2(3,1,1), m_1(3,\ -1,2), m_2(1,2,3)$;

26. $l_1(2,2,2), l_2(-2,1,3), m_1(1,1,2), m_2(-4,2,1)$;

Тема 4: **Дезарг теоремасы**

1. Евклидча яссылыкта *ABCD* параллелограммы һәм аның бер ягында яки ягының дәвамында ятучы *P* ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, *P* ноктасы аркылы бирелгән *n* турысына параллель *l* турысы үткәрергә.

2. Ике a һәм *b* параллель турылары һәм аларга кермәүче *C* ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, *C* ноктасы аркылы a һәм *b* турыларына параллель туры үткәрергә.

3. Евклидча яссылыкта бер параллелограммның каршы ятучы түбәләре тиңдәшле рәвештә икенче параллелограммның каршы ятучы якларында (яки аларның дәвамнарында) урнашканнар. Бу параллелограммнарның симметрия үзәкләре уртак икәнен исбатларга.

4. *ABC* һәм $A'B'C'$ өчпочмаклары яссылыкта $(AA_1),(BB_1),(CC_1)$ турылары бер *S* ноктасында, ә $(AB_1),(BC_1),(CA_1)$ турылары бер S_1 ноктасында кисешерлек итеп урнашканнар. $(AC_1),(BA_1),(CB_1)$ турыларының шулай ук бер ноктада кисешүен исбатларга.

5. *A* һәм *B* нокталары аркылы, озынлыгы *AB* кисемтәсеннән кыскарак булган линейка ярдәмендә туры үткәрергә.

6. Дезаргның кире теоремасын Дезаргның туры теоремасына нигезләнеп исбатларга.

7. Евклидча яссылыкта өчпочмак һәм һәркайсы өчен өчпочмакның бер ягы диагональ, ә калган ике ягы – чиктәш яклары булып торган өч параллелограмм бирелгән. Бу параллелограммнарның икенче диагональләре бер турыда кисешүен исбатларга.

8. Кисешү нокталары сызымнан читтә булган ике a һәм *b* турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, бирелгән *C* ноктасы аркылы $M = a \cap b$ ноктасын эченә алган туры үткәрергә.

9. Евклидча яссылыкта параллелограмм, *l* турысы һәм бу турыда ятмаучы *M* ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, *M* ноктасы аркылы *l* турысына параллель туры үткәрергә.

10. m турысы һәм бу турыда ятмаучы A һәм B нокталары бирелгән. Линейка гына кулланып, AB турысын үткәрмичә, AB һәм m турыларының кисешү ноктасын төзергә.

11. Евклидча яссылыкта трапециягә дүртпочмак камалган. Трапециянең параллель яклары дүртпочмакның диагоналенә параллель. Трапециянең параллель булмаган яклары дүртпочмакның икенче диагоналендә кисешүен исбатларга.

12. ABC өчпочмагының түбәләре аркылы бер S ноктасында кисешүче турылар үткәрелгән. $A' = AS \cap BC, B' = BS \cap AC, C' = CS \cap AB$. $BC \cap B'C', AC \cap A'C',$ $AB \cap A'B'$ кисешү нокта-ларының бер турыда ятуын исбатларга.

13. Дезарг өчтүбәлекләренең бер түбәсе үзбулмаган нокта булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

14. p турысы ABC өчпочмагы яссылыгында ята. $K = BC \cap p, L = CA \cap p,$ $M = AB \cap p, R = BL \cap CM, S = CM \cap AK, T = \; = AK \cap BL$. AR, BS, CT турыларының бер ноктада кисешүен исбатларга.

15. Дезарг өчтүбәлекләренең тиңдәш булмаган ике түбәсе үзбулмаган нокталар булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

16. ABC өчпочмагы һәм аның яссылыгында бер а турысында ятучы P,Q, R нокталары бирелгән. X, Y, Z түбәләре тиңдәшле рәвештә ABC өчпочмагының BC, CA, AB якларында ятучы, ә YZ, ZX, XY яклары тиңдәшле рәвештә P,Q, R нокталары аша үтүче XYZ өчпочмагы төзергә.

17. Дезарг өчтүбәлекләренең берсенең ике түбәсе үзбулмаган нокталар булган очракта Дезарг конфигурациясенең сызымын сызарга.

18. $A_1A_2A_3$ өчпочмагы яссылыгында M Ÿәм N нокталары бирелгән. A_1M, A_2M, A_3M турылары $A_1A_2A_3$ өчпочмагының каршы ятучы якларын тиңдәшле рәвештә M_1, M_2, M_3 нокталарында кисеп үтә. A_1N, A_2N, A_3N турылары $M_1M_2M_3$ өчпочмагының каршы ятучы якларын тиңдәшле рәвештә P_1, P_2, P_3 нокталарында кисеп үтә. M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3 турыларының бер ноктада кисешүен исбатларга.

19. Дезарг теоремасын кулланып өчпочмакның медианаларының бер ноктада кисешүен исбатларга.

20. Евклидча яссылыкта $A_1A_2A_3A_4$ параллелограммы һәм аның бер ягында яки ягының дәвамында ятучы M ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, M ноктасы аркылы бирелгән а турысына параллель l турысы үткәрергә.

21. Кисешү нокталары чикле сызымга кермәгән ике пар туры: p, q һәм u, v бирелгән. $p \cap q = A, u \cap v = B$. ($AB$) турысының сызымга кергән өлешен сызарга.

22. Ике *m* һәм *n* параллель турылары һәм аларга кермәүче *P* ноктасы бирелгән. Линейка гына кулланып, *P* ноктасы аркылы *m* һәм *n* турыларына параллель туры үткәрергә.

23. *ABCD* трапециясе [*AB*] нигезенә параллель булган ике *p* һәм *q* турылары белән кистерелгән. $p \cap (AD) = M, q \cap (BD) = N,$ $p \cap (AC) = P, q \cap (BC) = Q$. $MN \cap PQ$ ноктасының (*AB*) туры-сында ятуын исбатларга.

24. Кисешү нокталары сызымнан читтә булган ике *p* һәм *q* турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, бирелгән *P* ноктасы аркылы $N = p \cap q$ ноктасын эченә алган туры үткәрергә.

25. *ABC* Ÿәм *DBC* өчпочмаклары өч параллель туры *p*, *q*, *v*=(*AD*) турылары белән кистерелгән. $p \cap (AB) = M, p \cap (DB) = P,$ $q \cap (BC) = Q$. (*MN*), (*PQ*) Ÿәм (*BC*) турыларының бер турылар бәйләменә керүен исбатларга.

26. *ABC* һәм $A'B'C'$ өчпочмакларының түбәләрен тоташтыручы $(AA'),(BB'),(CC')$ турылары параллель булсалар һәм $(BC) \cap$ $\cap(B'C'), (AC) \cap (A'C'), (AB) \cap (A'B')$ нокталары булсалар, бу нокталарның бер турыда ятуын исбатларга. Әгәр $(AB) \,||\, (A'B'),$ $(BC) \cap (B'C') = M,$ $(AC) \cap (A'C') = N$ булса, $(AB) \,||\, (MN)$, ә $(AB) \,||\, (A'B')$ һәм $(BC) \,||\, (B'C')$ булса, $(AC) \,||\, (A'C')$ булуын исбатларга.

27. Сызымда *M* ноктасы һәм m, p_1, p_2, q_1, q_2 турылары бирелгән. $P = p_1 \cap p_2$ һәм $Q = q_1 q_2$ – сызымнан читтә. *M* ноктасы белән $m \cap (PQ)$ ноктасын тоташтыручы турыны сызарга.

Тема 5: **Турыдагы дүрт ноктаның катлаулы чагыштырмасы**

A, *B*, *C* нокталарының бер турыда ятуларын ачыклап, (*AB*, *CD*)= m булырлык *D* ноктасын табарга. (*BA*, *CD*), (*AB*, *DC*), (*BA*, *DC*), (*CD*, *AB*), (*AC*, *BD*), (*AD*, *BC*), (*BD*, *CA*) ны табарга.

1. *A*(1, 2, 3), *B*(–3, 2, 4), *C*(–2, 4, 7), m = –2
2. *A*(–1, 0, 2), *B*(1, 2, –1), *C*(3, 4, –4), m = $-\frac{5}{2}$
3. *A*(–1, 2, 1), *B*(3, 0, 1), *C*(5, –1, 1), m = 3
4. *A*(–1, 2, 1), *B*(2, –1, 1), *C*(1, 1, 2), m = –2
5. *A*(2, –3, 1), *B*(–3, 1, –1), *C*(0, –7, 1), m = 1
6. *A*(1, 2, 1), *B*(2, –2, 3), *C*(1, –4, 2), m = 2
7. *A*(–1, 2, 1), *B*(3, 0, 1), *C*(2, –1, 01), m = $-\frac{3}{2}$
8. *A*(3, 2, 1), *B*(1, 0, –1), *C*(1, 1, 1), m = –3

9. $A(2, 0, -1)$, $B(3, -3, 1)$, $C(1, -3, 2)$, $m = \frac{1}{2}$

10. $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, -1)$, $C(1, -5, 2)$, $m = 2$

11. $A(-4, 2, 3)$, $B(1, 1, -1)$, $C(-1, 5, 0)$, $m =- \frac{1}{2}$

12. $A(2, -3, 0)$, $B(3, 0, -1)$, $C(1, 3, 1)$, $m = 4$

13. $A(6, 2, -5)$, $B(2, 2, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $m = \frac{7}{2}$

14. $A(1, -2, 5)$, $B(-1, 2, -11)$, $C(-1, 2, 1)$, $m = 3$

15. $A(-3, 2, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-1, 0, 3)$, $m = \frac{5}{2}$

16. $A(-2, 4, 7)$, $B(1, 2, 3)$, $C(-3, 2, 4)$, $m = -2$

17. $A(1, 2, -1)$, $B(3, 4, -4)$, $C(-1, 0, 2)$, $m = -\frac{5}{2}$

18. $A(5, -1, 1)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(3, 0, 1)$, $m = 3$

19. $A(-1, 2, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, -1, 1)$, $m = -2$

20. $A(-3, 1, -1)$, $B(2, -3, 1)$, $C(0, -7, 1)$, $m = 1$

21. $A(4, 1, -1)$, $B(1, 2, -1)$, $C(1, -5, 2)$, $m = -2$

22. $A(-1, 5, 0)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 1, -1)$, $m = -\frac{1}{2}$

23. $A(3, 0, 1)$, $B(2, -3, 0)$, $C(1, 3, 1)$, $m = 4$

24. $A(0, 1, 2)$, $B(2, 2, 1)$, $C(6, 2, -5)$, $m = \frac{7}{2}$

25. $A(1, -2, 11)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, -2, 5)$, $m =3$

26. $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 2, 4)$, $C(-2, 4, 7)$, $m = -2$

27. $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 4, -4)$, $m = -\frac{5}{2}$

Тема6: **Дүрт турының катлаулы чагыштырмасы**

a, b, c һәм *d* турыларының бер турылар бәйләменә керүен ачыклап (*ab, cd*) ны табарга.

1. $a(1, 2, 3)$, $b(-3, 2, 4)$, $c(-2, 4, 7)$, $d(0, 8, 13)$;
2. $a(-1, 0, 2)$, $b(1, 2, -1)$, $c(3, 4, -4)$, $d(5, 8, -6)$;
3. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, $c(5, -1, 1)$, $d(8, 5, 5)$;
4. $a(-1, 2, 1)$, $b(2, -1, 1)$, $c(1, 1, 2)$, $d(7, 1, 8)$;
5. $a(2, -3, 1)$, $b(-3, 1, -1)$, $c(0, -7, 1)$, $d(3, -22, 4)$;
6. $a(1, 2, 1)$, $b(2, -2, 3)$, $c(1, -4, 2)$, $d(7, -10, 11)$;
7. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, $c(2, -1, 01)$, $d(9, 3, 5)$;
8. $a(3, 2, 1)$, $b(1, 0, -1)$, $c(1, 1, 1)$, $d(2, 1, 0)$;
9. $a(2, 0, -1)$, $b(3, -3, 1)$, $c(1, -3, 2)$, $d(9, -15, 8)$;
10. $a(1, 2, -1)$, $b(4, 1, -1)$, $c(1, -5, 2)$, $d(5, -18, 7)$;
11. $a(-4, 2, 3)$, $b(1, 1, -1)$, $c(-1, 5, 0)$, $d(10, 4, -9)$;

12. $a(2, -3, 0)$, $b(3, 0, -1)$, c(1, 3, 1), $d(-1, 15, 3)$;
13. $a(6, 2, -5)$, $b(2, 2, 1)$, c(0, 1, 2), $d(14, 1, -9)$;
14. $a(1, -2, 5)$, $b(-1, 2, -11)$, c(–1, 2, 1), $d(-1, 2, 10)$;
15. $a(-3, 2, 1)$, $b(1, -1, 1)$, c(–1, 0, 3), $d(-2, 1, 2)$;
16. $a(-2, 4, 7)$, $b(1, 2, 3)$, c(–3, 2, 4), $d(6, 4, 5)$;
17. $a(1, 2, -1)$, $b(3, 4, -4)$, c(–1, 0, 2), $d(2, 2, -3)$;
18. $a(5, -1, 1)$, $b(-1, 2, 1)$, c(3, 0, 1), $d(4, 1, 2)$;
19. $a(-1, 2, 1)$, $b(1, 1, 2)$, c(2, –1, 1), $d(-2, 3, 1)$;
20. $a(-3, 1, -1)$, $b(2, -3, 1)$, c(0, –7, 1), $d(5, -4, 2)$;
21. $a(4, 1, -1)$, $b(1, 2, -1)$, c(1, –5, 2), $d(-5, 18, -7)$;
22. $a(-1, 5, 0)$, $b(-4, 2, 3)$, c(1, 1, –1), $d(13, 1, -11)$;
23. $a(3, 0, 1)$, $b(2, -3, 0)$, c(1, 3, 1), $d(7, 12, 5)$;
24. $a(0, 1, 2)$, $b(2, 2, 1)$, c(6, 2, –5), $d(6, 5, 1)$;
25. $a(1, -2, 11)$, $b(-1, 2, 1)$, c(1, –2, 5), $d(2, -4, 1)$;
26. $a(-1, 2, 1)$, $b(3, 0, 1)$, c(5, –1, 1), $d(8, 5, 5)$;
27. $a(-1, 2, 1)$, $b(2, -1, 1)$, c(1, 1, 2), $d(7, 1, 8)$.

Тема 7: **Гармоник дүрт нокта. Тулы дүрттүбәлек.**

1. *AB* кисемтәсенең уртасы *C* һәм (*AB*) киңәйтелгән турысының үзбулмаган ноктасы *D*, *AB* кисемтәсенең очларын гармоник рәвештә бүлүен исбатларга.

2. *ABC* өчпочмагының түбәсенең эчке һәм тышкы биссектрисалары *AB* турысын тиңдәшле рәвештә *K* һәм *L* нокталарында кисеп үтәләр. *A, B, K, L* дүрт ноктасы – гармоник булуын исбатларга.

3. Линейка гына кулланып, (*AD,BC*)= –1 очрагында, *A, B* һәм *C* нокталарына гармоник булган дүртенче *D* ноктасын төзергә.

4. Турыда *A, B, C* нокталары бирелгән. Аларның һәркайсы өчен калган икесе белән гармоник булырлык дүртенче нокталарын табарга.

5. Линейка гына кулланып, (*AC,BD*)= –1 очрагында, *A, B* һәм *C* нокталарына гармоник булган дүртенче *D* ноктасын төзергә.

6. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ булса, (*AB, CD*) ны табарга.

7. Яссылыкта турылар бәйләменең өч *a*, *b*, c турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, (*ad*, *b*c)= –1 очрагында, *a*, *b* һәм c турыларына гармоник булган дүртенче *d* турысын төзергә.

8. Яссылыкта турылар бәйләменең өч *a*, *b*, c турылары бирелгән. Линейка гына кулланып, (c*d*, *ab*)= –1 очрагында, *a*, *b* һәм c турыларына гармоник булган дүртенче *d* турысын төзергә.

9. Турыда *A, B, C* нокталары бирелгән. (*AB, CD*) = 2 булырлык, *D* ноктасын төзергә.

10. Яссылыкта ике *l, m* турылары һәм аларда ятмаучы *P* ноктасы бирелгән. P ноктасы аркылы ике a һәм *b* турылары үткәрелгән. $A = a \cap l, B = a \cap m, C = b \cap l,$ $D = b \cap m$. $AD \cap BC$ ноктасының *a* һәм *b* турыларын теләсә ничек алганда бер үк, $Q = l \cap m$ ноктасы аша узучы, *p* турысында ятуын исбатларга.

11. Тулы дүрттүбәлекнең гармоник үзлеген кулланып, бирелгән *M* ноктасын сызымда бирелгән *a* һәм *b* турыларының сызымнан читтә кисешү ноктасы – $L = a \cap b$ны тоташтыручы турыны сызарга.

12. (с*d, ab*)=–1 булса, (*ab*, с*d*) = –1булуын исбатларга.

13. *A, B, C, M* һәм *N* – a турысының төрле биш ноктасы һәм *A, M, N* нокталары тәңгәл килмәсә, $\frac{(AB, MN)}{(AC, MN)} = (CB, MN)$ булуын исбатларга.

14. Әгәр *O* үзәкле турылар бәйләменең ике пар *a, b* һәм *c, d* турылары гармоник булсалар һәм g турысы *O* ноктасы аша узмаса, g турысының $g \cap a, g \cap b, g \cap c, g \cap d$ нокталары да гармоник булуын исбатларга.

15. (Ике тапкыр перспектив өчпочмаклар турында теорема). *ABC* һәм $A_1B_1C_1$ өчпочмаклары яссылыкта AA_1, BB_1, CC_1 турылары бер O_1 ноктасында, ә AB_1, BC_1, CA_1 турылары бер O_2 ноктасында кисешерлек итеп урнашканнар. AC_1, BA_1, CB_1 турыларының шулай ук бер O_3 ноктасында кисешүен исбатларга.

16. $A_1A_2A_3B$ тулы дүртүбәлегенең $C_1 = A_1B \cap A_2A_3, C_2 = A_2B \cap A_3A_1,$ $C_3 = A_3B \bigcap A_1A_2$ диагональ нокталары үткәрелгән. $(K_1C_1, A_2A_3) = -1,$ $(K_2C_2, A_3A_1) = -1$,$(K_3C_3, A_1A_2) = -1$ чагыштырмалары белән билгеләнгән K_1, K_2, K_3 нокталарының коллинеар булуын исбатларга.

17. Ирекле *ABCD* трапециясе бирелгән. $P = (AB) \cap (CD)$. *l* турысы *P* ноктасы аркылы (*AD*) турысына параллель үтә. $M = l \cap (BD)$ һәм $N = l \cap (AC)$. *P* ноктасының *MN* кисемтәсен урталай бүлүен исбатларга.

18. $A_1A_2A_3B$ тулы дүртүбәлегенең $C_1 = A_1B \cap A_2A_3, C_2 = A_2B \cap A_3A_1,$ $C_3 = A_3B \cap A_1A_2$ диагональ нокталары үткәрелгән. $(K_1C_1, A_2A_3) = -1,$ $(K_2C_2, A_3A_1) = -1$,$(K_3C_3, A_1A_2) = -1$ чагыштырмалары белән бил-геләнгән K_1, K_2, K_3 нокталары бирелгән. A_1B, A_2K_2, A_3K_3 турыларының бер H_1 ноктасында кисешүен һәм $(H_1B, A_1C_1) = -1$ булуын исбатларга.

19. *ABC* өчпочмагы бирелгән. $(AC) \,||\, (MN)$ булырлык $M \in AB$ һәм $N \in BC$ нокталары алынган. $P = (AN) \cap (CM)$ һәм $Q = (BP) \cap (AC)$. *Q* ноктасының *AC* кисемтәсен урталай бүлүен исбатларга.

20. *AB* кисемтәсенең уртасы һәм *AB* турысының үзбулмаган ноктасы *A, B* нокталары белән гармоник булуын исбатларга.

21. ABC өчпочмагы бирелгән. $(AB)\,||\,(MN)$ булырлык $M \in AC$ һәм $N \in BC$ нокталары алынган. $O = (AN) \cap (BM)$ һәм $(AB)\,||\,(OP)$ булырлык $P \in (BC)$. $(BN, PC) = -1$ булуын исбатларга.

22. Ике параллель a һәм b турылары бирегән. Линейка гына кулланып, a турысында бирелгән AB кисемтәсенең уртасын төзергә.

23. MN кисемтәсенең уртасы L һәм (MN) киңәйтелгән турысының үзбулмаган ноктасы K, MN кисемтәсенең очларын гармоник рәвештә бүлүен исбатларга.

24. a һәм b – A ноктасында кисешүче яссылыкның ике турысы һәм c, d – A ноктасында a һәм b турылары белән төзелгән почмакның биссектрисалары булсын. $(ab, \mathrm{c}d) = -1$булуын исбатларга.

25. Линейка гына кулланып, $(A_1A_4, A_2A_3) = -1$ очрагында, A_1, A_2 һәм A_3 нокталарына гармоник булган дүртенче A_4 ноктасын төзергә.

26. Әгәр $(AB, CD) = -1$ булса, (ABC) һәм (ABD) гади чагыштыр-малары өчен $(ABC) = -(ABD)$ үтәлүен исбатларга.

27. Линейка гына кулланып, $(A_1A_3, A_2A_4) = -1$ очрагында, A_1, A_2 һәм A_3 нокталарына гармоник булган дүртенче A_4 ноктасын төзергә.

Тема 8: **Коллинеацияләр**

Табарга:

а) $A \to A', B \to B', C \to C', D \to D'$ тиңдәшле нокталары белән бирелгән коллинеация тигезләмәсен (нокталарның координаталары түбәндә бирелгән);

б) коллинеациянең кузгалмас нокталарын;

в) коллинеациянең кузгалмас турыларын;

г) M' – $M(1, 1, -2)$ ноктасының сурәтен;

д) N – $N'(-2, -2, 1)$ ноктасының кире сурәтен;

е) $l' - l : 2x_1 + x_3 = 0$ турысының сурәтен;

ж) $m - m' : 2x_1 + x_2 + x_3$ турысының кире сурәтен.

1. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(2,0,-1).$

2. $A(1,0,0),\ A'(2,4,8);\ B(0,1,0),\ B'(2,-1,2); \infty\sqrt{2}$
$C(0,0,1),\ C'(3,2,5);\ D(1,1,1),\ D'(2,5,7)$

3. $A(2,1,1), A'(2,1,5); B(1,2,1), B'(2,-1,3);$
$C(1,-1,1), C'(-1,2,3); D(-1,1,1), D'(1,2,1)$

4. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(0,1,-2)$

5. $A(1,0,0), A'(1,-1,21); B(0,1,0), B'(-2,1,-5);$
$C(0,0,1), C'(1,-3,-1); D(1,1,1), D'(0,-3,-4)$

6. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(2,0,-2)$

7. $A(1,0,0), A'(1,8,1); B(0,1,0), B'(1,3,1);$
$C(0,0,1), C'(0,0,2); D(1,1,1), D'(2,11,4)$

8. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(0,2,-1)$

9. $A(2,1,0), A'(1,0,0); B(0,1,1), B'(0,1,0);$
$C(1,-1,1), C'(0,0,1); D(1,3,0), D'(1,1,1)$

10. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(2,0,-1)$

11. $A(1,0,0), A'(4,6,1); B(0,1,0), B'(-1,-3,-1);$
$C(0,0,1), C'(0,0,-1); D(1,1,1), D'(3,3,-1)$

12. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(1,1,-1)$

13. $A(1,0,0), A'(0,1,0); B(0,1,0), B'(0,0,1);$
$C(0,0,1), C'(1,1,1); D(1,1,1), D'(1,0,0)$

14. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(1,1,-1)$

15. $A(1,0,3), A'(1,0,0); B(0,1,0), B'(-2,0,-1);$
$C(0,0,1), C'(0,3,0); D(1,1,1), D'(-1,4,-1)$

16. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(4,0,-1)$

17. $A(1,0,0), A'(2,5,-1); B(0,1,0), B'(-1,-3,0);$
$C(0,0,1), C'(2,3,-2); D(1,1,1), D'(3,5,-3)$

18. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(0,1,-2)$

19. $A(1,0,0), A'(1,0,0); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,-1); D(1,1,1), D'(1,1,0)$

20. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,-1,1), D'(1,-1,0)$

21. $A(1,0,0), A'(1,2,4); B(1,1,1), B'(2,5,7);$
$C(1,1,2), C'(4,7,12); D(1,1,3), D'(8,9,17)$

22. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,0,0), D'(0,0,1)$

23. $A(1,1,4), A'(3,-12,-7); B(1,1,5), B'(4,-15,-8);$
$C(1,1,6), C'(5,-18,-9); D(1,1,7), D'(6,-21,-10)$

24. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(4,-1,1), D'(0,1,4)$

25. $A(1,0,0), A'(2,4,8); B(0,1,0), B'(2,-1,2);$
$C(0,0,1), C'(3,2,5); D(1,1,1), D'(2,5,7)$

26. $A(1,0,0), A'(1,0,-1); B(0,1,0), B'(0,1,0);$
$C(0,0,1), C'(0,0,1); D(1,1,1), D'(2,0,-1)$

Тема 9: **Гомология**

1. f гомологиясе S үзәге, s күчәре, A һәм $A' = f$ (A) нокталары белән бирелгән. Төзергә: 1) f (B) ноктасын, B – (AA') турысының ноктасы;

2) $f^{-1}(C)$ ноктасын, C – бирелгән нокта;

3) $f^2(D)$ ноктасын, D – бирелгән нокта.

2. s гомологиясе өчен w яссылыгында O үзәге, d күчәре һәм A, $A' = s(A)$ – бер пар тиңдәшле нокталары (A һәм A' нокталары тәңгәл килми) бирелгән. w яссылыгының ирекле M ноктасы өчен аның сурәте $M' = s$ (M) ноктасын төзергә.

3. f гомологиясе S үзәге, s күчәре, A һәм $A' = f$ (A) нокталары белән бирелгән. Бирелгән d турысының сурәтен һәм кире сурәтен төзергә.

4.s гомологиясе өчен w яссылыгында O үзәге, д күчәре һәм A, $A' = s(A)$ – бер пар тиңдәшле нокталары (A һәм A' нокталары тәңгәл килми) бирелгән. s гомологиясенең үзәге O аша үтми торган a турысының сурәте $a' = s(a)$ турысын төзергә.

5. f гомологиясе S үзәге, s күчәре, A һәм $A' = f$ (A) нокталары белән бирелгән. Сурәте бирелгән q турысында ята торган ($q \neq f$ (p)), бирелгән p турысында X ноктасын табырга.

6. s гомологиясе өчен O үзәге, a, $a' = s(a)$ һәм $a'' = s^{-1}(a)$ турылары бирелгән. s гомологиясенең күчәрен төзергә.

7. f гомологиясе бер турыда ятмый торган өч A, B, C һәм аларның сурәтләре $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$ нокталары белән бирелгән. $(AA'), (BB'), (CC')$ турылары бер үк S ноктасы аша үтәләр. Сурәте бирелгән q турысында ята торган ($q \neq f$ (p)), бирелгән p турысында X ноктасын табырга.

7. s гомологиясе өчен өч пар тиңдәш нокталар бирелгән: $A, A' = f(A)$; $B, B' = f(B)$; $C, C' = f($C$)$. A, B, C нокталары коллинеар түгел. s гомологиясенең күчәрен һәм үзәген төзергә.

8. f гомологиясе киңәйтелгән яссылыкта S үзәге, s күчәре, A һәм $A' = f$ (А) нокталары белән бирелгән. Бирелгән нокталар һәм s турысы – үзбулган нокталар һәм турылар. Үзбулмаган турының сурәтен һәм кире сурәтен төзергә.

9. Бирелгән a һәм a' турыларының сызымнан читтә кисешүче ноктасы белән бирелгән A ноктасын тоташтыручы туры сызарга.

10. f гомологиясе киңәйтелгән яссылыкта S үзәге, s күчәре, A һәм $A' = f(A)$ нокталары белән бирелгән. Бирелгән нокталар һәм s турысы – үзбулган нокталар һәм турылар. Бирелгән ике параллель p һәм q турыларының кире сурәтләрен төзергә.

11. Гомология үзәге, күчәре һәм бер пар тиңдәшле нокталары белән бирелгән. Бу гомология өчен M ноктасының сурәтен һәм кире сурәтен төзергә.

12. f гомологиясе s күчәре, $S \in s$ үзәге һәм бер пар тиңдәшле нокталары белән бирелгән. $BC_\infty D_\infty$ өчпочмагының прообразын төзергә.

13. Гомология киңәйтелгән аффинча яссылыкта үзәге, күчәре һәм бер пар тиңдәшле нокталары белән бирелгән. Бу гомология өчен үзбулмаган турының сурәтен табарга.

14. f гомологиясе s күчәре, $S \in s$ үзәге һәм бер пар, күчәрдән төрле якта ятучы тиңдәшле нокталары белән бирелгән. Бер ягы күчәрендә, диагональләренең кисешү ноктасы S булган трапециянең кире сүрәтен табарга.

15. f гомологиясе S үзәге, s күчәре, А һәм $A' = f(A)$ нокталары белән бирелгән. Төзергә:

1) $f(B)$ ноктасын, В – (АA') турысының ноктасы;

2) $f^{-1}(C)$ ноктасын, C – бирелгән нокта;

3) $f^2(D)$ ноктасын, D – бирелгән нокта.

16. f гомологиясе s күчәре, $S_\infty \in s$ үзәге һәм бер пар A, A' нокталары белән бирелгән. d_∞ үзбулмаган турысының сурәтен табарга.

17. s гомологиясе өчен w яссылыгында O үзәге, d күчәре һәм A, $A' = s(A)$ – бер пар тиңдәшле нокталары (А һәм A' нокталары тәңгәл килми) бирелгән. w яссылыгының ирекле M ноктасы өчен аның сурәте $M' = s(M)$ ноктасын төзергә.

18. f гомологиясе s күчәре, $S \in s$ үзәге һәм бер пар, күчәрдән төрле якта ятучы тиңдәшле нокталары белән бирелгән. Бер ягы күчәрендә, диагональләренең кисешү ноктасы S булган квадратның сурәте табарга.

19. f гомологиясе S үзәге, s күчәре, А һәм $A' = f(A)$ нокталары белән бирелгән. Бирелгән d турысының сурәтен һәм кире сурәтен төзергә.

20. Гомология вакытында ABC өчпочмагы $A'B'C$ (C – уртак түбә) өчпочмагына күчә. D ноктасының сурәтен табыгыз.

21. f гомологиясе s күчәре, $S_\infty \in s$ үзәге һәм бер пар A, A' нокталары белән бирелгән. BCD_∞ өчпочмагының сурәтен табарга.

22. f гомологиясе s күчәре, $S \in s$ үзәге һәм бер пар A, A' нокталары белән бирелгән. s күчәренә параллель булган m' һәм n' турыларының кире сурәтләрен табарга.

23. Гиперболик гомология күчәре, үзәге һәм бер пар $a \to a'$ турылары белән бирелгән. Төзергә:

a) *a* турысында ятмаучы ирекле *M* ноктасының сурәтен;
b) *a* турысы белән күчәрдә кисешүче ирекле *m* турысының сурәтен;

25. Гиперболик гомология киңәйтелгән евклидча яссылыкта үзбулган күчәре, үзәге һәм бер пар $A \to A'$ нокталары белән бирелгән. Төзергә:

a) ирекле *M* ноктасының сурәтен;
b) ирекле m турысының сурәтен;
c) үзбулмаган турының сурәтен.

26. Гиперболик гомология үзбулмаган P_∞ үзәге, үзбулмаган *p* күчәре һәм бер пар $A \to A'$ нокталары белән бирелгән. Бу гомология нинди аффинча үзгәртү булып тора? Төзергә:

a) ирекле *M* ноктасының сурәтен;
b) ирекле m турысының сурәтен.

27. Параболик гомология киңәйтелгән евклидча яссылыкта күчәре һәм бер пар $A \to A'_\infty$ нокталары белән бирелгән. Төзергә:

1) ирекле *M* ноктасының сурәтен;
2) ирекле *m* турысының сурәтен;
3) үзбулмаган турының сурәтен һәм кире сурәтен.

ӘДӘБИӘТ

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия Ч. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1987.

2. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов – Москва: Просвещение, 1975.

3. Казаков П.Г. Параллельные проекции и методы и решения конструктивных задач. – Москва: Учпедгиз, 1957.

4. Четверухин Н.Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. – Москва: Учпедгиз, 1958.

5.Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – Москва: Наука, 1978.

6. Лащенов М.П. Полные и неполные изображения и их применение в педагогическом процессе. – Москва: Учпедгиз, 1963.