УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 155, кн. 3 Физико-математические науки *2013*

УДК 510.5

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ЕСТЕСТВЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКАХ

Р.И. Бикмухаметов

Аннотация

Рассмотрены вопросы алгоритмической зависимости различных отношений на линейных порядках. Доказано, что отношения соседства, блока, плотности, предельности справа и предельности слева являются алгоритмически независимыми. Введены новые отношения, определимые в сигнатуре линейного порядка, являющиеся алгоритмически зависимыми, и изучены их свойства.

Ключевые слова: линейный порядок, отношение соседства, отношение блока, отношение плотности, отношение предельности справа, отношение предельности слева, алгоритмическая независимость.

Введение

Работа посвящена вычислимым линейным порядкам. В основной терминологии теории вычислимости придерживаемся книги Р. Соара [1], в теории линейных порядков – книги Дж. Розенштейна [2]. В частности, $\langle x, y\rangle = (x+y)(x+y+1)/2 + x$ – стандартная функция пары из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, где под $\mathbb{N}$ условимся понимать натуральный ряд вместе с 0. Обозначение $\mathbb{N}^e$, где $e \in \mathbb{N}$, означает множество $\{x \in \mathbb{N} : \exists y(x = \langle y, e\rangle)\}$. Линейный порядок $\mathcal{L} = \langle L, <_L\rangle$ называется вычислимым, если основное множество L и отношение порядка $<_L$ являются вычислимыми. Для произвольного линейного порядка $\mathcal{L} = \langle L, <_L\rangle$ обозначим через $\mathcal{L}^*$ линейный порядок такой, что $L^* = L$ и $x <_{L^*} y \Leftrightarrow y <_L x$ для всех x, y. Для каждого линейного порядка $\mathcal{L}$ и для любых $x, y \in L$ определим

1) интервал: $[x, y]_{\mathcal{L}} = \{z \mid x \leqslant_L z \leqslant_L y\}$;

2) бинарное отношение соседства: $S_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow [x, y]_{\mathcal{L}} = \{x, y\}$;

3) бинарное отношение блока: $F_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow |[x, y]_{\mathcal{L}}| < \infty$;

4) бинарное отношение плотности интервала:
$dn_{\mathcal{L}}(x, y) \Leftrightarrow \forall a, b \in [x, y]_{\mathcal{L}}\ (a <_L b \to \exists z(a <_L z <_L b))$;

5) унарное отношение предельности справа: $P^+_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow \forall y\ (y \neq x \to \neg S_{\mathcal{L}}(x, y))$;

6) унарное отношение предельности слева: $P^-_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow \forall y\ (y \neq x \to \neg S_{\mathcal{L}}(y, x))$.

Данные отношения на линейных порядках рассматривались разными авторами. Например, М. Мозес [3, 4] показал, что линейный порядок имеет 1-разрешимое представление тогда и только тогда, когда он имеет вычислимое представление с вычислимым отношением соседства. Дж. Реммел [5] показал, что вычислимый линейный порядок является вычислимо категоричным тогда и только тогда, когда он имеет только лишь конечное число соседних элементов. Г. Ву, Р. Доуни, Ш. Лемпп [6] и А. Фролов [7] в совокупности показали, что спектр отношения соседства либо тривиален, либо замкнут наверх в вычислимо перечислимых (в.п.) степенях.

Отношение блока исследовалось, например, в работах М. Мозеса [3, 4], где было показано, что отношение блока вычислимо категоричного 1-разрешимого линейного порядка является вычислимым. Все введенные выше отношения использовались в работе Дж. Тёрбера [8], который исследовал 2-низкие булевы алгебры, порожденные линейными порядками. Данные отношения также использовались в работе П. Алаева, Дж. Тёрбера, А. Фролова [9] для исследования 2-низких квазидискретных линейных порядков. Отношения S, P^+, P^- использовались в работе А. Фролова [10] для описания 2-низких линейных порядков.

Отправной точкой для настоящей работы послужил следующий известный результат [11].

Предложение 1. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω, такой, что отношение $S_{\mathcal{L}}$ невычислимо.*

Так как линейный порядок упорядоченный по типу ω содержит один единственный предельный слева элемент, не содержит предельных элементов справа, не содержит плотных интервалов, и все его элементы содержатся в одном блоке, то из вышесказанного вытекает

Следствие 1. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω, такой, что отношение $S_{\mathcal{L}}$ невычислимо, а отношения $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимы.*

Из этого результата следует, что вычислимость отношений $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ не влечет вычислимости отношения $S_{\mathcal{L}}$.

В настоящей работе мы покажем, что из вычислимости любого набора вышеприведенных отношений вычислимого линейного порядка не следует вычислимость остальных отношений из этого списка. Это означает, что естественные отношения $S_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ являются алгоритмически независимыми.

В конце работы мы введём некоторые отношения на линейных порядках и изучим их алгоритмические свойства.

1. Естественные отношения

Теорема 1. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω^2, такой, что отношение $P^-_{\mathcal{L}}$ невычислимо, а отношения $S_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ вычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип ω^2, такой, что отношения $S_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ вычислимы и $P^-_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.*

Доказательство. Строим $\mathcal{L}$ в виде суммы вычислимых линейных порядков $I_0 + I_1 + \cdots$, выполнив для любого i к концу построения условие

$$\mathcal{R}_i :\ I_i \cong \omega.$$

Пусть $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0 = \emptyset$, $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$.

Построение I_k.

Шаг $s = 0$. Положим $I_{k,0} = \{\langle 0, k\rangle\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $I_{k,s} = \{i_0 <_L \cdots <_L i_s\}$. Если $k \in A_{s+1} \setminus A_s$, то полагаем $I_{k,s+1} = \{\langle s+1, k\rangle <_L i_0 <_L \cdots <_L i_s\}$, то есть порядок имеет вид:

$$\underset{\langle s+1,k\rangle}{\bullet} \qquad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \ \cdots \ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{k,s}}$$

в противном случае $I_{k,s+1} = \{i_0 <_L \cdots <_L i_s <_L \langle s+1,k\rangle\}$, то есть

$$\underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \ \cdots \ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{k,s}} \qquad \underset{\langle s+1,k\rangle}{\bullet}$$

Построение $I_{k,s+1}$ *завершено.*

Положим $I_k = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} I_{k,s}$. Очевидно, что $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – равномерная последовательность вычислимых линейных порядков, упорядоченная по типу ω.

Пусть $\mathcal{L} = I_0 + I_1 + \cdots$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок, упорядоченный по типу ω^2. Следовательно, отношения $dn_{\mathcal{L}}$ и $P^+_{\mathcal{L}}$ – пустые множества. Отношение $F_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $(x,y) \in F_{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда, когда $x = \langle x_0, x_1\rangle$, $y = \langle y_0, y_1\rangle$ и $x_1 = y_1$. Отношение $S_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $(x,y) \in S_{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда когда либо $x = \langle s,k\rangle$, $y = \langle s+1,k\rangle$ и $k \notin A_{s+1} \setminus A_s$, либо $x = \langle s,k\rangle$, $y = \langle s+2,k\rangle$ и $k \in A_{s+1} \setminus A_s$, либо $x = \langle s+1,k\rangle$, $y = \langle 0,k\rangle$ и $k \in A_{s+1} \setminus A_s$ для некоторых s и k. Очевидно, эти условия можно эффективно проверить.

Осталось заметить, что из равенства $\chi_A(x) = 1 - \chi_{P^-_{\mathcal{L}}}(\langle 0,x\rangle)$, очевидно вытекающего из конструкции, следует, что $P^-_{\mathcal{L}} \equiv_T A$. $\square$

Так как отношения предельности слева и предельности справа симметричны, а именно, для любого линейного порядка $\mathcal{L}$ справедливо $P^-_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow P^+_{\mathcal{L}^*}(x)$ & $P^+_{\mathcal{L}}(x) \Leftrightarrow P^-_{\mathcal{L}^*}(x)$ для всех x, то

Следствие 2. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\omega^*)^2$, такой, что отношение $P^+_{\mathcal{L}}$ невычислимо, а отношения $S_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\omega^*)^2$, такой, что отношения $S_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимы и $P^+_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.*

Теорема 2. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $\zeta\cdot\omega$, такой, что отношение $F_{\mathcal{L}}$ невычислимо, а отношения $S_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$, $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ вычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $\zeta\cdot\omega$, такой, что отношения $S_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$, $dn_{L\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ вычислимы и $F_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.*

Доказательство. Как и прежде, строим $\mathcal{L}$ в виде суммы вычислимых линейных порядков $I_0 + I_1 + \cdots$, выполнив теперь для любого i к концу построения условие

$$\mathcal{R}_i:\ I_{2i} + I_{2i+1} \cong \zeta \vee\ I_{2i} + I_{2i+1} \cong \zeta + \zeta.$$

Пусть $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0 = \emptyset$, $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$.

Построение $I_{2k} + I_{2k+1}$.

Шаг $s = 0$. Положим $I_{2k,0} = \{\langle 0, 2k\rangle\}$ и $I_{2k+1,0} = \{\langle 0, 2k+1\rangle\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $I_{2k,s} = \{i_0 <_L \cdots <_L i_p\}$ и $I_{2k+1,s} = \{j_0 <_L \cdots <_L j_p\}$.

Если $k \notin A_{s+1}$, то полагаем $I_{2k,s+1} = \{\langle 2s+1, 2k\rangle <_L i_0 <_L \cdots <_L i_p <_L \langle 2s+ + 2, 2k\rangle\}$, $I_{2k+1,s+1} = \{\langle 2s+1, 2k+1\rangle <_L j_0 <_L \cdots <_L j_p <_L \langle 2s+2, 2k+1\rangle\}$, то есть $I_{2k,s+1} + I_{2k+1,s+1}$ имеет вид

$$\bullet \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{2k,s}} \quad \bullet \quad \bullet \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{2k+1,s}} \quad \bullet$$

Для $0 \leqslant i, j \leqslant 2s+1$ положим $\langle i, 2k\rangle <_L \langle j, 2k+1\rangle$.

В противном случае положим $I_{2k,s+1} = \{\langle 2s+2, 2k\rangle <_L \langle 2s+1, 2k\rangle <_L i_0 < <_L \cdots <_L i_p\}$, $I_{2k+1,s+1} = \{j_0 <_L \cdots <_L j_p <_L \langle 2s+1, 2k+1\rangle <_L \langle 2s+2, 2k+1\rangle\}$, то есть $I_{2k,s+1} + I_{2k+1,s+1}$ имеет вид

$$\bullet \quad \bullet \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{2k,s}} \quad \underbrace{\bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet}_{I_{2k+1,s}} \quad \bullet \quad \bullet$$

Для $0 \leqslant i, j \leqslant 2s+1$ положим $\langle i, 2k\rangle <_L \langle j, 2k+1\rangle$.

Построение $I_{2k,s+1}$ и $I_{2k+1,s+1}$ *завершено.*

Пусть $I_{2k} + I_{2k+1} = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} I_{2k,s} + \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} I_{2k+1,s}$. Следовательно, $I_{2k} + I_{2k+1}$ имеет тип ζ, если $k \in A$, или тип $\zeta + \zeta$, если $k \notin A$.

Положим $\mathcal{L} = I_0 + I_1 + \cdots$. Очевидно, что $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок типа $\zeta \cdot \omega$. Следовательно, отношения $dn_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$ – пустые множества, то есть вычислимы. Отношение соседства $S_{\mathcal{L}}$ также вычислимо. Действительно, $(x, y) \in S_{\mathcal{L}}$ в том и только том случае, если x и y являются соседними на шаге $\max\{x, y\} + 1$ построения. Очевидно, эти условия можно эффективно проверить, совершив $(\max\{x, y\} + 1)$ шагов конструкции.

Из равенства $\chi_A(x) = \chi_{F_{\mathcal{L}}}(\langle 0, 2x\rangle, \langle 0, 2x+1\rangle)$ следует, что $F_{\mathcal{L}} \equiv_T A$. □

Теорема 3. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\eta + 2) \cdot \omega$, *такой, что отношение* $dn_{\mathcal{L}}$ *невычислимо, а отношения* $S_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ *вычислимы. Более того, для каждого в.п. множества* A *существует линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\eta + 2) \cdot \omega$, *такой, что отношения* $S_{\mathcal{L}}$, $P^-_{\mathcal{L}}$, $F_{\mathcal{L}}$, $P^+_{\mathcal{L}}$ *вычислимы и* $dn_{\mathcal{L}} \equiv_T A$.

Очевидно, любой конечный линейный порядок $\mathcal{L} = \{l_1 <_L \cdots <_L l_n\}$ можно достроить до порядка типа η. Ради удобства описания конструкции введем следующее техническое определение.

Определение 1. Пусть дан конечный линейный порядок $\mathcal{L}$ вида $\{l_1 <_L \cdots < <_L l_K\}$ и бесконечное вычислимое множество $D = \{d_0, d_1, \ldots, d_K, \ldots\}$. Линейный порядок $\{d_0 <_L l_1 <_L d_1 <_L \cdots <_L d_{K-1} <_L l_K <_L d_K\}$ назовем *уплотнением порядка* $\mathcal{L}$ *посредством* D.

Доказательство. Строим $\mathcal{L}$ в виде суммы линейных порядков $I_0 + I_1 + \cdots$ так, чтобы к концу построения для любого i выполнялось условие

$$\mathcal{R}_i: \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta \vee \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta + 2 + \eta.$$

Пусть $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0=\emptyset$, $A_s\subseteq A_{s+1}$ и $A=\bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$.

Построение $I_{3k}+I_{3k+1}+I_{3k+2}$.

Шаг $s=0$. Положим $I_{3k,0}=\{\langle 0,2k\rangle\}$, $I_{3k+1,0}=\emptyset$ и $I_{3k+2,0}=\{\langle 0,2k+1\rangle\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $I_{3k,s}=\{i_0<_L\cdots<_L i_p\}$, $I_{3k+1,s}=\{c_0<_L c_1\}$ в случае, если $k\in A_s$, в противном случае $I_{3k+1,s}=\emptyset$ и $I_{3k+2,s}=\{j_0<_L\cdots<_L j_p\}$.

Если $k\in A_{s+1}\setminus A_s$, то положим $I_{3k+1,s+1}=\{m<_L n\}$, где $m=\min\limits_x\{x\in\in\mathbb{N}^{[2k]}\setminus|I_{3k,s}|\}$ и $n=\min\limits_x\{x\in\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus|I_{3k+2,s}|\}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{3k,s}|\bigcup|I_{3k+1,s+1}|\}$ и $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus\{|I_{3k+2,s}|\bigcup|I_{3k+1,s+1}|\}$.

В противном случае положим $I_{3k+1,s+1}=I_{3k+1,s}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{3k,s}|\bigcup|I_{3k+1,s}|\}$ и $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus\{|I_{3k+2,s}|\bigcup|I_{3k+1,s}|\}$.

Для любых $i_0\in I_{3k,s+1}$, $i_1\in I_{3k+1,s+1}$, $i_2\in I_{3k+2,s+1}$ положим $i_0<_L i_1<_L i_2$.

Построение $I_{3k,s+1}+I_{3k+1,s+1}+I_{3k+2,s+1}$ *завершено.*

Следовательно, $I_{3k}+I_{3k+1}+I_{3k+2}$ имеет порядковый тип $\eta+2+\eta$ в случае $k\in A$ или тип η, если $k\notin A$.

Пусть $\mathcal{L}=I_0+I_1+\cdots$. Ясно, что $\mathcal{L}$ – вычислимый линейный порядок типа $(\eta+2)\cdot\omega$. Отношение $P^-_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $x\notin P^-_{\mathcal{L}} \Leftrightarrow x=\langle z,2i+1\rangle$ и $x\in|I_{3i+1,x+1}|$ для некоторых z и i. Отношение $P^+_{\mathcal{L}}$ также вычислимо, поскольку $x\notin P^+_{\mathcal{L}}\Leftrightarrow x=\langle z,2i\rangle$ и $x\in|I_{3i+1,x+1}|$ для некоторых z и i. Отношение $F_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $(x,y)\in F_{\mathcal{L}}\Leftrightarrow x=\langle z,2i\rangle$, $y=\langle u,2i+1\rangle$ и $x,y\in I_{3i+1,\max\{x,y\}+1}$. Отношение соседства $S_{\mathcal{L}}$ также вычислимо, поскольку $\chi_{S_{\mathcal{L}}}(x,y)=\chi_{F_{\mathcal{L}}}(x,y)$.

Из равенства $\chi_A(x)=1-\chi_{dn_{\mathcal{L}}}(\langle\, 0,2x\rangle,\langle 0,2x+1\rangle)$ следует, что $dn_{\mathcal{L}}\equiv_T A$. □

Из всех полученных выше результатов вытекает, что рассматриваемые в этом разделе основные естественные отношения являются алгоритмически независимыми. А именно, верно

Следствие 3. *Пусть* $\mathcal{P}=\{S,\ P^-,\ F,\ dn,\ P^+\}$. *Для любых* $\mathcal{P}_1$ *и* $\mathcal{P}_2$ *таких, что* $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2=\emptyset$ *и* $\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2=\mathcal{P}$, *существует вычислимый порядок* $\mathcal{L}$ *такой, что отношения из* $\mathcal{P}_1$ *невычислимы, тогда как отношения из* $\mathcal{P}_2$ *вычислимы.*

Доказательство. Для примера, пусть $\mathcal{P}_1=\{dn,\ P^-\}$. Тогда положим $\mathcal{L}==\mathcal{L}_0+1+\mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок, построенный в теореме 1, а $\mathcal{L}_1$ – в теореме 3. □

2. Отношения предельности

В этом разделе введём и изучим отношения на вычислимых линейных порядках, которые не являются алгоритмически независимыми. Эти отношения, являющиеся менее естественными, чем рассмотренные раннее, однако, все же формульно определимы в сигнатуре линейных порядков.

Определение 2. Для каждого линейного порядка $\mathcal{L}$ и любого $x\in L$ определим унарные отношения

1) $P^{\vee}_{\mathcal{L}}(x)=P^+_{\mathcal{L}}(x)\vee P^-_{\mathcal{L}}(x)$;

2) $P^{\&}_{\mathcal{L}}(x)=P^+_{\mathcal{L}}(x)\&P^-_{\mathcal{L}}(x)$;

3) $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}(x)=P^+_{\mathcal{L}}(x)\triangle P^-_{\mathcal{L}}(x)=(P^+_{\mathcal{L}}(x)\&\neg P^-_{\mathcal{L}}(x))\vee(P^-_{\mathcal{L}}(x)\&\neg P^+_{\mathcal{L}}(x))$.

Заметим, что вычислимость обоих отношений $P^-_{\mathcal{L}}$ и $P^+_{\mathcal{L}}$ необходимо влечет вычислимость $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, то есть в совокупности эти отношения не являются алгоритмически независимыми.

Предложение 2. *Пусть* $\mathcal{L}$ *– вычислимый линейный порядок,* $\mathcal{P} = \{P^{\vee}_{\mathcal{L}}, P^{\&}_{\mathcal{L}}, P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\}$ *и* $\mathcal{R} = \{P^{+}_{\mathcal{L}}, P^{-}_{\mathcal{L}}\}$. *Тогда из вычислимости любых трех различных отношений* P_1, $P_2 \in \mathcal{P}$ *и* $P_3 \in \mathcal{R}$ *следует вычислимость оставшихся двух отношений* $P_4 \in \mathcal{P}$ *и* $P_5 \in \mathcal{R}$.

Доказательство. Следует из очевидных соотношений $P^{\vee}_{\mathcal{L}} = P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \vee P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}} = P^{\vee}_{\mathcal{L}} \& \neg P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\triangle}_{\mathcal{L}} = P^{\vee}_{\mathcal{L}} \& \neg P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}} = (P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \& \neg P^{+}_{\mathcal{L}}) \vee P^{\&}_{\mathcal{L}}$ и $P^{+}_{\mathcal{L}} = (P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \& \neg P^{-}_{\mathcal{L}}) \vee P^{\&}_{\mathcal{L}}$. □

Заметим также, что из теоремы 1 непосредственно вытекает существование вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ такого, что отношение $P^{-}_{\mathcal{L}}$ невычислимо, $P^{\vee}_{\mathcal{L}} = P^{\triangle}_{\mathcal{L}} = P^{-}_{\mathcal{L}}$ и $\{x : x \in P^{\&}_{\mathcal{L}}\}$ – пустое множество, то есть отношение $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ вычислимо, следовательно, имеем

Следствие 4. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* ω^2, *такой, что* $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ *и* $P^{-}_{\mathcal{L}}$ *невычислимы, тогда как* $P^{+}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы. Более того, для каждого невычислимого в.п. множества* A *существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* ω^2, *такой, что отношения* $P^{+}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы и* $A \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.

В силу симметричности из следствия 1 вытекает

Следствие 5. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\omega^*)^2$, *такой, что* $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ *и* $P^{+}_{\mathcal{L}}$ *невычислимы, тогда как* $P^{-}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы. Более того, для каждого невычислимого в.п. множества* A *существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\omega^*)^2$, *такой, что отношения* $P^{-}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы и* $A \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}}$.

Комбинируя следствия 4 и 5, имеем следующее

Следствие 6. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $\omega^2 + 1 + (\omega^*)^2$, *такой, что* $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ *невычислимы, тогда как* $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимо. Более того, для каждого невычислимого в.п. множества* A *существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $\omega^2 + 1 + (\omega^*)^2$, *такой, что отношение* $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ *вычислимо и* $A \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 1 + \mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок из следствия 4, а $\mathcal{L}_1$ – из следствия 5. □

Теорема 4. *Существует вычислимый линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\eta + 2) \cdot \omega$, *такой, что отношение* $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы, а отношения* $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ *невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества* A *существует линейный порядок* $\mathcal{L}$, *имеющий порядковый тип* $(\eta + 2) \cdot \omega$, *такой, что отношения* $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ *вычислимы и* $A \equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Строим $\mathcal{L}$ в виде суммы линейных порядков $I_0 + I_1 + \cdots$ так, чтобы к концу построения для любого i выполнялось условие

$$\mathcal{R}_i: \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta \vee \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta + 2 + \eta.$$

Пусть $\{A_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0 = \emptyset$, $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} A_s$.

Построение $I_{3k} + I_{3k+1} + I_{3k+2}$.

Шаг $s = 0$. Положим $I_{3k,0} = \{\langle 0, 2k \rangle\}$, $I_{3k+1,0} = \{\langle 1, 2k \rangle\}$, $I_{3k+2,0} = \{\langle 0, 2k{+}1 \rangle\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $I_{3k,s}=\{i_0<_L\dots<_L i_p\}$ и $I_{3k+2,s}=\{j_0<_L\dots<_L j_p\}$. Положим $I_{3k+1,s}=\{c_1<_L c_0\}$ в случае, если $k\in A_s$, $I_{3k+1,s}=\{\langle 1,2k\rangle\}$ в противном случае.

Если $k\in A_{s+1}\setminus A_s$, то положим $I_{3k+1,s+1}=\{m<_L c_0\}$, где $m==\min\limits_x\{x\in\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{3k,s}|\bigcup|I_{3k+1,s}|\}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{3k,s}|\bigcup|I_{3k+1,s+1}|\}$ и $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus|I_{3k+2,s}|$.

В противном случае положим $I_{3k+1,s+1}=I_{3k+1,s}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{3k,s}|\bigcup|I_{3k+1,s+1}|\}$ и $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus|I_{3k+2,s}|$.

Для любых $i_0\in I_{3k}$, $i_1\in I_{3k+1}$, $i_2\in I_{3k+2}$ положим $i_0<_L i_1<_L i_2$. Следовательно, $I_{3k}+I_{3k+1}+I_{3k+2}$ имеет порядковый тип $\eta+2+\eta$ в случае $k\in A$ либо порядковый тип $\eta+1+\eta\cong\eta$, если $k\notin A$.

Пусть $\mathcal{L}=I_0+I_1+\cdots$. Непосредственно из конструкции следует, что отношения $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ вычислимы. Из равенства $\chi_A(k)=1-\chi_{P^{\triangle}_{\mathcal{L}}}(\langle\,1,2k\rangle)=1-\chi_{P^{\&}_{\mathcal{L}}}(\langle\,1,2k\rangle)==1-\chi_{P^{-}_{\mathcal{L}}}(\langle\,1,2k\rangle)$ следует, что $A\equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$. □

Из симметричности отношений $P^{-}_{\mathcal{L}}$ и $P^{+}_{\mathcal{L}}$ вытекает

Следствие 7. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношения $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ вычислимы, а отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношения $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ вычислимы и $A\equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}}$.*

Справедливо

Следствие 8. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношение $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$ вычислимы, а отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношение $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$ вычислимо и $A\equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+1+\mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок из теоремы 4, а $\mathcal{L}_1$ – из следствия 7. □

Более того, теорема 4 и следствие 4 позволяют установить

Следствие 9. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+\omega^2$, такой, что отношение $P^{+}_{\mathcal{L}}$ вычислимо, а отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+\omega^2$, такой, что отношение $P^{+}_{\mathcal{L}}$ вычислимо и $A\equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+1+\mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок из теоремы 4, а $\mathcal{L}_1$ – из следствия 4. □

Аналогично, следствие 5 и следствие 7 позволяют установить

Следствие 10. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\omega^*)^2+1+(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношение $P^{-}_{\mathcal{L}}$ вычислимо, а отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$ невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\omega^*)^2+1+(\eta++2)\cdot\omega^*$, такой, что отношение $P^{-}_{\mathcal{L}}$ вычислимо и $A\equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 1 + L\mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок из следствия 5, а $\mathcal{L}_1$ – из следствия 7. $\square$

Следствия 9 и 10, в свою очередь, позволяют установить

Следствие 11. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+\omega^2+1+(\omega^*)^2+1+(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ невычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega+1+\omega^2+ +1+(\omega^*)^2+1+(\eta+2)\cdot\omega^*$, такой, что $A \equiv_T P^{\triangle}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\&}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + 1 + \mathcal{L}_1$, где $\mathcal{L}_0$ – порядок из следствия 9, а $\mathcal{L}_1$ – из следствия 10. $\square$

Справедлива

Теорема 5. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+\zeta)\cdot\omega$, такой, что отношения $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{+}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ невычислимы, тогда как отношение $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ вычислимо. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+\zeta)\cdot\omega$, такой, что отношение $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ вычислимо и $A \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Строим $\mathcal{L}$ в виде суммы линейных порядков $I_0 + I_1 + \cdots$ так, чтобы к концу построения для любого i выполнялось условие

$$\mathcal{R}_i: \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta \vee \ I_{3i} + I_{3i+1} + I_{3i+2} \cong \eta + \zeta + \eta.$$

Пусть $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0 = \emptyset$, $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$.

Построение $I_{3k} + I_{3k+1} + I_{3k+2}$.

Шаг $s=0$. Положим $I_{3k,0} = \{\langle 0, 2k\rangle\}$, $I_{3k+1,0} = \{\langle 1, 2k\rangle\}$, $I_{3k+2,0} = \{\langle 0, 2k+1\rangle\}$.

Шаг $s+1$. Пусть $I_{3k,s} = \{i_0 <_L \cdots <_L i_p\}$, $I_{3k+1,s} = \{c_0 <_L \cdots <_L c_t\}$, $I_{3k+2,s} = \{j_0 <_L \cdots <_L j_p\}$.

Если $k \in A_{s+1}$, то положим $I_{3k+1,s+1} = \{n <_L c_0 <_L \cdots <_L c_t < <_L m\}$, где $n = \min\limits_x\{x \in \mathbb{N}^{[2k]} \setminus \{|I_{3k,s}| \bigcup |I_{3k+1,s}|\}\}$ и $m = \min\limits_x\{x \in \in \mathbb{N}^{[2k+1]} \setminus \{|I_{3k,s}| \bigcup |I_{3k+2,s}|\}\}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]} \setminus \{|I_{3k,s}| \bigcup |I_{3k+1,s+1}|\}$, $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]} \setminus \{|I_{3k+1,s+1}| \bigcup |I_{3k+2,s}|\}$.

В противном случае положим $I_{3k+1,s+1} = I_{3k+1,s}$, $I_{3k,s+1}$ равным уплотнению $I_{3k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]} \setminus \{|I_{3k,s}| \bigcup |I_{3k+1,s+1}|\}$, $I_{3k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{3k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]} \setminus |I_{3k+2,s}|$.

Для любых $i_0 \in I_{3k}$, $i_1 \in I_{3k+1}$, $i_2 \in I_{3k+2}$ положим $i_0 <_L i_1 <_L i_2$. Следовательно, $I_{3k} + I_{3k+1} + I_{3k+2}$ имеет порядковый тип $\eta + \zeta + \eta$ в случае $k \in A$ либо порядковый тип $\eta + 1 + \eta \cong \eta$, если $k \notin A$.

Положим $\mathcal{L} = I_0 + I_1 + \cdots$. Непосредственно из построения следует, что $P^{-}_{\mathcal{L}}(x) = P^{+}_{\mathcal{L}}(x) = P^{\&}_{\mathcal{L}}(x) = P^{\vee}_{\mathcal{L}}(x)$ для всех x, следовательно, $\{x: \ x \in P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\}$ – пустое множество, то есть отношение $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ вычислимо. Из равенства $\chi_A(k) = 1 - - \chi_{P^{\vee}_{\mathcal{L}}}(\langle\ 1, 2k\rangle) = 1 - \chi_{P^{\&}_{\mathcal{L}}}(\langle\ 1, 2k\rangle) = 1 - \chi_{P^{-}_{\mathcal{L}}}(\langle\ 1, 2k\rangle) = 1 - \chi_{P^{+}_{\mathcal{L}}}(\langle\ 1, 2k\rangle)$ следует, что $A \equiv_T P^{\vee}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$. $\square$

Поскольку симметрическая разность вычислимого и невычислимого множеств является невычислимым множеством, то справедливо

Предложение 3. *Не существует вычислимого линейного порядка $\mathcal{L}$ такого, что отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ (соответственно $P^{+}_{\mathcal{L}}$) вычислимы, тогда как отношение $P^{+}_{\mathcal{L}}$ (соответственно $P^{-}_{\mathcal{L}}$) невычислимо.*

Справедлива

Теорема 6. *Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega$, такой, что отношения $P^{+}_{\mathcal{L}}$, $P^{-}_{\mathcal{L}}$ невычислимы, а отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$ вычислимы. Более того, для каждого в.п. множества A существует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий порядковый тип $(\eta+2)\cdot\omega$, такой, что отношения $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$, $P^{\&}_{\mathcal{L}}$, $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$ вычислимы и $A \equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}} \equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Строим $\mathcal{L}$ в виде суммы линейных порядков $I_0+I_1+\cdots$ так, чтобы к концу построения для любого i выполнялось условие

$$\mathcal{R}_i:\ I_{5i}+I_{5i+1}+I_{5i+2}+I_{5i+3}+I_{5i+4}\cong \eta+2+\eta\ \vee$$
$$\vee\ I_{5i}+I_{5i+1}+I_{5i+2}+I_{5i+3}+I_{5i+4}\cong \eta+2+\eta+2+\eta.$$

Пусть $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ – перечисление произвольного невычислимого в.п. множества A такое, что $A_0=\emptyset$, $A_s\subseteq A_{s+1}$ и $A=\bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$.

Построение $I_{5k}+I_{5k+1}+I_{5k+2}+I_{5k+3}+I_{5k+4}$.

Шаг $s=0$. Положим $I_{5k,0}=\{\langle 0,2k\rangle\}$, $I_{5k+1,0}=\{\langle 1,2k\rangle\}$, $I_{5k+2,0}=\emptyset$, $I_{5k+3,0}=\{\langle 1,2k+1\rangle\}$ и $I_{5k+4,0}=\{\langle 0,2k+1\rangle\}$.

Шаг $s+1$. Если $k\in A_{s+1}\setminus A_s$, то положим $I_{5k+1,s+1}=\{\min\limits_x\{x\in\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s}|\bigcup|I_{5k+1,s}|\}\}<_L\langle 1,2k\rangle\}$, $I_{5k+2,s+1}=\min\limits_x\{x\in\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s}|\bigcup|I_{5k+1,s+1}|\}\}$, $I_{5k,s+1}$ равным уплотнению $I_{5k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s}|\bigcup|I_{5k+1,s+1}|\bigcup|I_{5k+2,s+1}|\}$, $I_{5k+3,s+1}=\{\langle 1,2k+1\rangle<_L\min\limits_x\{x\in\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus\{|I_{5k+3,s}|\bigcup|I_{5k+4,s}|\}\}\}$, а $I_{5k+4,s+1}$ – уплотнению $I_{5k+4,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k+1,s+1}|\bigcup|I_{5k+4,s}|\}$.

Если $k\in A_{s_0}\setminus A_{s_0-1}$ для некоторого $s_0<s$, то положим $I_{5k,s+1}$ равным уплотнению $I_{5k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s}|\bigcup|I_{5k+1,s}|\bigcup|I_{5k+2,s}|\}$, $I_{5k+1,s+1}=I_{5k+1,s}$, $I_{5k+2,s+1}$ – уплотнению $I_{5k+2,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s+1}|\bigcup|I_{5k+1,s+1}|\bigcup|I_{5k+2,s}|\}$, $I_{5k+3,s+1}=I_{5k+3,s}$, а $I_{5k+4,s+1}$ – уплотнению $I_{5k+4,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus\{|I_{5k+3,s+1}|\bigcup|I_{5k+4,s}|\}$.

В противном случае положим $I_{5k,s+1}$ равным уплотнению $I_{5k,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k]}\setminus\{|I_{5k,s}|\bigcup|I_{5k+1,s}|\}$, $I_{5k+1,s+1}=I_{5k+1,s}=\{\langle 1,2k\rangle\}$, $I_{5k+2,s+1}=I_{5k+2,s}=\emptyset$, $I_{5k+3,s+1}=I_{5k+3,s}=\{\langle 1,2k+1\rangle\}$, а $I_{5k+4,s+1}$ – уплотнению $I_{5k+4,s}$ посредством $\mathbb{N}^{[2k+1]}\setminus\{|I_{5k+3,s}|\bigcup|I_{5k+4,s}|\}$.

Для любых $i_0\in I_{5k}$, $i_1\in I_{5k+1}$, $i_2\in I_{5k+2}$, $i_3\in I_{5k+3}$, $i_4\in I_{5k+4}$ положим $i_0<_L i_1<_L i_2<_L i_3<_L i_4$. Следовательно, $I_{5k}+I_{5k+1}+I_{5k+2}+I_{5k+3}+I_{5k+4}$ имеет порядковый тип $\eta+2+\eta+2+\eta$ в случае $k\in A$ либо порядковый тип $\eta+2+\eta$, если $k\notin A$.

Пусть $\mathcal{L}=I_0+I_1+\cdots$. Отношение $P^{\vee}_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $P^{\vee}_{\mathcal{L}}(x)=1$ для всех x. Отношение $P^{\&}_{\mathcal{L}}$ вычислимо, поскольку $x\notin P^{\&}_{\mathcal{L}}\Leftrightarrow x=\langle y,2k\rangle$ и $x\in I_{5k+1,x}$ или $x=\langle y,2k+1\rangle$ и $x\in I_{5k+3,x}$ для некоторых y и k. Отношение $P^{\triangle}_{\mathcal{L}}$ также вычислимо, поскольку $x\in P^{\triangle}_{\mathcal{L}}\Leftrightarrow x\notin P^{\&}_{\mathcal{L}}$. Из равенства $\chi_A(k)=1-\chi_{P^{-}_{\mathcal{L}}}(\langle 1,2k\rangle)=1-\chi_{P^{+}_{\mathcal{L}}}(\langle 1,2k+1\rangle)$ следует, что $A\equiv_T P^{-}_{\mathcal{L}}\equiv_T P^{+}_{\mathcal{L}}$. □

Исключая тривиальные случаи, а также случаи, возможность которых исключается вышеприведенными фактами, и случаи, возможность которых следует из симметричности отношений P^{+} и P^{-}, имеем следующее

Следствие 12. *Существуют линейные порядки, соответствующие случаям, приведенным в следующей таблице, где буквы В и Н употребляются для обозначения «отношение вычислимо» или «отношение невычислимо»:*

P^+	P^-	$P^\vee$	$P^\&$	$P^\triangle$	
В	*Н*	*В*	*Н*	*Н*	*Теорема 4*
В	*Н*	*Н*	*В*	*Н*	*Следствие 4*
В	*Н*	*Н*	*Н*	*Н*	*Следствие 9*
Н	*Н*	*В*	*В*	*В*	*Теорема 6*
Н	*Н*	*В*	*Н*	*Н*	*Следствие 8*
Н	*Н*	*Н*	*В*	*Н*	*Следствие 6*
Н	*Н*	*Н*	*Н*	*В*	*Теорема 5*
Н	*Н*	*Н*	*Н*	*Н*	*Следствие 11*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-31397), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.A18.21.0368).

Summary

R.I. Bikmukhametov. Algorithmic Independence of Natural Relations on Computable Linear Orders.

We study the dependence of various algorithmic relations on linear orders. We prove that successor relation, block relation, density relation, and limit from above and limit from below relations are algorithmically independent. We introduce new relations defined in a signature of linear order, such that they are not algorithmically independent, and study their properties.

Keywords: linear order, successor relation, block relation, density relation, limit from above relation, limit from below relation, algorithmic independence.

Литература

1. *Соар Р.И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. – Казань: Казан. матем. о-во, 2000. – 576 с.
2. *Rosenstein J.G.* Linear orderings. – N. Y.: Acad. Press, 1982. – 487 p.
3. *Moses M.* Recursive Properties of Isomorphism Types: Ph.D. Thesis. – Clayton, Victoria, Australia: Monash Univ., 1983.
4. *Moses M.* Recursive linear orders with recursive successivities // Ann. Pure Appl. Logic. – 1984. – V. 27, No 3. – P. 253–264.
5. *Remmel J.B.* Recursively categorical linear orderings // Proc. Am. Math. Soc. – 1981. – V. 83, No 2. – P. 387–391.
6. *Downey R.G, Lempp S., Wu G.* On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings // J. Math. Logic. – 2010. – V. 10, No 1–2. – P. 83–99.
7. *Фролов А.Н.* Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 7. – С. 73–85.
8. *Thurber J.J.* Every low$_2$ Boolean algebra has a recursive copy // Proc. Am. Math. Soc. – 1995. – V. 123, No 12. – P. 3859–3866.
9. *Алаев П., Тербер Дж., Фролов А.Н.* Вычислимость на линейных порядках, обогащенных предикатами // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48, № 5. – С. 549–563.

10. *Frolov A.N.* Low linear orderings // J. Logic Comput. – 2010. – V. 22, No 4. – P. 745–754.

11. *Downey R.G.* Computability theory and linear orderings // Handbook of Recursive Mathematics. – Amsterdam: Elsevier, 1998. – V. 2. – P. 823–976.

Поступила в редакцию
21.05.13

Бикмухаметов Равиль Ильдарович – аспирант кафедры алгебры и математической логики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *ravil.bkm@gmail.com*