Mykolo Romerio universitetas

Aleksandras KRYLOVAS
Rima KRIAUZIENĖ
Olga LAVCEL-BUDKO
Joana KASTICKAITĖ

TAIKOMOJI MATEMATIKA

Mokomasis leidinys

Vilnius 2010

R e c e n z a v o:

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Matematinio modeliavimo katedros doc. dr. **Mečislovas Meilūnas**;

Mykolo Romerio universiteto Matematinio modeliavimo katedros doc. dr. **Hamletas Vladislovas Markšaitis**

Mokomasis leidinys svarstytas Mykolo Romerio universiteto Socialinės informatikos fakulteto tarybos 2009 m. spalio 1 d. posėdyje (protokolas Nr. 2SI-1) ir rekomenduotas spausdinti

Mokomasis leidinys svarstytas Mykolo Romerio universiteto Socialinės informatikos fakulteto Matematinio modeliavimo katedros 2009 m. rugpjūčio 31 d. posėdyje (protokolas Nr. 1MMK-4) ir rekomenduotas spausdinti

Mykolo Romerio universiteto mokslinių-mokomųjų leidinių aprobavimo spaudai komisija 2010 m. gegužės 12 d. posėdyje (protokolas Nr. 2L-4) mokomąjį leidinį patvirtino spausdinti

ISBN 978-9955-19-192-6

Turinys

Pratarmė

Ši mokomoji priemonė skirta Viešojo administravimo fakulteto ištęstinių studijų studentams, tačiau knygute galės naudotis ir kitų fakultetų ištęstinių ir nuolatinių studijų studentai, kuriems dėstomi matematikos dalykai. Leidinyje pateikta kai kurių aukštosios matematikos skyrių santrauka, išsamus mokomosios matematikos literatūros sąrašas lietuvių kalba, nurodyti šio sąrašo knygų pagrindiniai skyriai, reikalingi aiškinamoms temoms geriau suprasti. Tai padės studentams greičiau rasti naudingą informaciją, nuodugniau susipažinti su dėstomais klausimais. Mokomojoje priemonėje taip pat išspręsti pagrindinių tipų uždavinių pavyzdžiai ir surašytos savarankiško darbo užduotys. Dėstomi ne tik klasikiniai aukštosios matematikos skyriai, bet pateikta pavyzdžių iš ekonomikos, vadybos, kitų socialinių mokslų. Nemažai pasiūlyta praktinio pobūdžio uždavinių. Sprendžiant pateiktus uždavinius, reikia atlikti matematinius skaičiavimus ir gauti rezultatus, kai kurie iš jų turi dalykinę, pavyzdžiui, ekonominę, vadybinę interpretaciją.

1. Aibės, funkcijos ir lygtys

Literatūra: [Rum76] XIII skyrius, 195–222 p.; [Apy01] II skyrius, 21–35 p.; [Mis99] 111–118 p.; [Stu08] 5 skyrius, 85–112 p.; [Būd08] 54–68 p.

Teoriniai klausimai: Aibės sąvoka. Aibės elementas ($a \in A$). Tuščioji aibė ($\emptyset$). Skaičių aibės (N, Z, Q, R). Skaičių intervalai. Poaibis ($A \subset B$). Aibių sąjunga ($A \cup B$) ir sankirta ($A \cap B$). Funkcijos apibrėžimas, pavyzdžiai ir reiškimo būdai. Skaičių sekos. Formulės. Funkcijos grafikas. Elementariosios funkcijos. Lygtys ir nelygybės. Apytikslis lygčių sprendimas. Funkcijos ekonomikoje.

1.1. Interpoliacija

1.1.1. Tiesės lygtis

Tarkime, kad žinomos dvi tiesinės funkcijos $y(x) = kx + b$ reikšmės $y(x_1) = y_1$ ir $y(x_2) = y_2$. Tai reiškia, kad funkcijos grafikas – tiesė, einanti per taškus $A_1(x_1; y_1)$ ir $A_2(x_2; y_2)$. Tada bet kuriam šios tiesės taškui $(x; y)$ galioja lygybė:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

arba

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 + y_1.$$

Taigi koeficientai k ir b lygūs:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ b = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 + y_1.$$

Užrašykime, pavyzdžiui, tiesės, einančios per taškus $A(1; 2)$ ir $B(2; 1)$ lygtį. Turime $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$. Taikome formulę:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 2}{1 - 2} \Rightarrow x - 1 = -y + 2$$

arba $y = -x + 3$.

1.1.2. Atkarpomis tiesinė funkcija

1.1 pavyzdys. Akcijos kaina didėjo nuo sausio 7 d. 12 Lt iki vasario 11 d. 20 Lt, paskui mažėjo iki vasario 28 d. 15 Lt. Sudarykime atkarpomis tiesinę kainos funkciją $k(t)$.

Sprendimas. Laiką t matuosime dienų skaičiumi nuo metų pradžios: sausio 7 d. pažymėkime $t_1 = 7$, vasario 11 d. $t_2 = 42$ ir vasario 28 d. $t_3 = 59$. Tada, kai $t \in [t_1,t_2]$, turime tiesės, einančios per taškus $(7;12)$ ir $(42;20)$, atkarpą. Kai $t \in [t_2,t_3]$ – per taškus $(42;20)$ ir $(59;15)$. Taigi pirmuoju atveju

$$\frac{k-12}{20-12} = \frac{t-7}{42-7},$$

o antruoju –

$$\frac{k-20}{15-20} = \frac{t-42}{59-42}.$$

Užrašome

$$k(t) = \begin{cases} \frac{8}{35}\,t + \frac{52}{5} \approx 0{,}2286t + 10{,}40, & \text{kai } 7 \leqslant t \leqslant 42, \\ -\frac{5}{17}\,t + \frac{550}{17} \approx -0{,}2941t + 32{,}35, & \text{kai } 42 < t \leqslant 59. \end{cases}$$

Apskaičiuokime akcijos kainą sausio 17 ir vasario 21 dienomis. Sausio 17 d. yra 17-oji metų diena. Kadangi $17 \in [7{,}42]$, gauname

$$k(17) \approx 0{,}2286 \cdot 17 + 10{,}40 = 14{,}29 \text{ (Lt)}.$$

Vasario 21 d. yra $31 + 21 = 52$-oji metų diena. Turime $52 \in [42{,}59]$ ir

$$k(52) \approx -0{,}2941 \cdot 52 + 32{,}35 = 17{,}06 \text{ (Lt)}.$$

1.1.3. Parabolės lygtis

Raskime parabolę

$$y = ax^2 + bx + c,$$

einančią per tris žinomus taškus, nesančius vienoje tiesėje. Tarkime, kad žinomi taškai $A_1\,(x_1; y_1)$, $A_2\,(x_2; y_2)$, $A_3\,(x_3; y_3)$ ir $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$, $x_2 \neq x_3$. Tada kvadratinį trinarį galima užrašyti taip:

$$y(x) = y_1 \frac{(x - x_2)\ (x - x_3)}{(x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3)}$$

$$+y_2 \frac{(x - x_1)\ (x - x_3)}{(x_2 - x_1)\ (x_2 - x_3)}$$

$$+y_3 \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)}{(x_3 - x_1)\ (x_3 - x_2)}.$$

Jis vadinamas Lagranžo interpoliaciniu daugianariu (polinomu).

1.2 pavyzdys. Raskime parabolę, einančią per taškus $(7; 12)$, $(42; 20)$ ir $(59; 15)$.

Sprendimas.

$$k(t) = 12\,\frac{(t-42)(t-59)}{(7-42)(7-59)} + 20\,\frac{(t-7)(t-59)}{(42-7)(42-59)}$$

$$+15\,\frac{(t-7)(t-42)}{(59-7)(59-42)}$$

$$= \frac{12(t^2 - 101t + 2478)}{1820} - \frac{20(t^2 - 68t + 413)}{595}$$

$$+ \frac{15(t^2 - 49t + 294)}{884}$$

$$= -\frac{311}{30940}\,t^2 + \frac{22311}{30940}\,t + \frac{16453}{2210}.$$

Apskaičiuokime $k(17)$ ir $k(52)$. Turime

$$k(t) \approx -0{,}0101\,t^2 + 0{,}7211\,t + 7{,}444$$

ir

$$k(17) \approx -0{,}0101 \cdot 17^2 + 0{,}7211 \cdot 17 + 7{,}444 \approx 16{,}80,$$

$$k(52) \approx -0{,}0101 \cdot 52^2 + 0{,}7211 \cdot 52 + 7{,}444 \approx 17{,}76.$$

1.1 savarankiško darbo užduotis. Pagal tris pateiktas funkcijos reikšmes $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ raskite atkarpomis tiesinę funkciją $y = a(x)$, kvadratinę funkciją $y = p(x)$, apskaičiuokite $a(x_4)$, $p(x_4)$, $a(x_5)$, $p(x_5)$ ir išspręskite lygtis $a(x) = y_0$, $p(x) = y_0$.

Užduotis	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	x_5	y_0
1.1.1.	1	2	5	7	10	4	3	6	4
1.1.2.	1	3	5	7	10	4	3	6	4
1.1.3.	1	4	5	7	10	4	3	6	4
1.1.4.	1	2	5	8	10	4	3	6	4
1.1.5.	1	3	5	8	10	4	3	6	4
1.1.6.	1	4	5	8	10	4	3	6	4
1.1.7.	1	2	5	8	10	6	3	6	4
1.1.8.	1	3	5	8	10	5	3	6	4
1.1.9.	1	4	5	8	10	4	3	6	4
1.1.10.	1	5	5	8	10	4	3	6	4
1.1.11.	1	2	5	7	11	4	3	6	5
1.1.12.	1	3	5	7	11	4	3	6	5
1.1.13.	1	4	5	7	11	4	3	6	5
1.1.14.	1	2	5	8	11	4	3	6	5
1.1.15.	1	3	5	8	11	4	3	6	5
1.1.16.	1	4	5	8	11	4	3	6	5
1.1.17.	1	2	5	8	11	6	3	6	5
1.1.18.	1	3	5	8	11	5	3	6	5
1.1.19.	1	4	5	8	11	4	3	6	5
1.1.20.	1	5	5	8	11	4	3	6	5

1.2. Funkcijos ekonomikoje

1.2.1. Sąnaudų padengimas

Gamybos sąnaudos – *bendrosios sąnaudos (TC – angl. Total Cost)* – yra pastoviųjų ir kintamųjų sąnaudų suma. Pastoviosios sąnaudos (*FC – angl. Fixed Cost*), pavyzdžiui, patalpų nuoma, pastatų energijos sąnaudos, įrengimų priežiūra nepriklauso nuo gaminių skaičiaus. Kintamosios sąnaudos (*VC – angl. Variable Cost*) priklauso nuo gaminių skaičiaus: medžiagų sąnaudos, įrengimų naudojimo, pardavimo. Pažymėkime x – pagamintų ir parduotų gaminių skaičių. Sąnaudų funkciją žymėsime $TC(x)$. Paprasčiausiu atveju $TC(x)$ yra tiesinė funkcija:

$$TC(x) = VCx + FC.$$

Pajamų funkcija $R(x)$ – (*angl. Revenue*):

$$R(x) = px.$$

Čia p (*angl. price*) – vieno parduoto gaminio kaina. Pelno funkciją P (*angl. Profit*) gauname taip:

$$P(x) = R(x) - TC(x) = px - (VCx + FC) = (p - VC)x - FC.$$

Taigi gautos pajamos padengs gamybos sąnaudas, jei $P(x) > 0$ arba pagamintų ir parduotų gaminių skaičius

$$x > \frac{FC}{p - VC}. \tag{1.1}$$

1.3 pavyzdys. Vieno gaminio savikaina apskaičiuojama pagal formulę

$$S(x) = \begin{cases} 15, & \text{kai } x < 1000, \\ 15 - \ln(x - 999), & \text{kai } x \geqslant 1000. \end{cases}$$

Pastoviosios gamybos išlaidos yra 10000 Lt. Vieno gaminio pardavimo kaina yra 20 Lt. Apskaičiuokime gaminių kiekį, kuris pradės nešti pelną.

Sprendimas. Užrašykime pelno funkciją, kai $x < 1000$:

$$P(x) = 20x - (15x + 10000).$$

Iš nelygybės $P(x) > 0$ pagal (1.1) formulę, gauname $x > 2000$. Taigi matome, kad pelno funkcijai reikia taikyti formulę

$$\begin{aligned} P(x) &= 20x - ((15 - \ln(x - 999))x + 10000) \\ &= (5 + \ln(x - 999))x - 10000 \end{aligned}$$

ir išspręsti nelygybę $P(x) > 0$.

Apskaičiuokime kelias funkcijos $P(x)$ reikšmes:

x	$P(x)$
1000	$-5000{,}00$
1010	$-2528{,}13$
1020	$-1794{,}59$
1080	$146{,}01$

Matome, kad lygties $P(x) = 0$ sprendinys x_s priklauso intervalui nuo $x_1 = 1020$ iki $x_2 = 1080$, nes $P(x_1) < 0$ ir $P(x_2) > 0$.

Išspręskime šią lygtį apytiksliai, taikydami dalijimo pusiau (dichotomijos) metodą[1]. Apskaičiuokime funkcijos $P(x)$ reikšmę taške (atkarpos $[x_1, x_2]$ vidurio taške)

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1020 + 1080}{2} = 1050.$$

Gauname $P(1050) = -621{,}58$. Atkreipkime dėmesį, kad lygties sprendinys priklauso intervalui (x_3, x_2), nes šio intervalo galuose funkcija $P(x)$ įgyja skirtingų ženklų reikšmes. Taigi apskaičiuojame

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} = \frac{1050 + 1080}{2} = 1065$$

ir $P(1065) = -213{,}02$. Konstruojame kitą artinį (visos reikšmės x_n sudaro skaičių seką, kuri artėja[2] prie lygties sprendinio x_s):

$$x_5 = \frac{x_4 + x_2}{2} = \frac{1065 + 1080}{2} = 1072{,}5.$$

Apvalinkime $x_5 \approx 1073$ (ieškome sveikojo gaminių skaičiaus x_s) ir apskaičiuojame $P(1073) = -16{,}74$. Taigi

$$x_6 = \frac{x_5 + x_2}{2} = \frac{1073 + 1080}{2} = 1076{,}5.$$

[1] Daugiau apie apytikslius sprendimo metodus žr.:
Kvedaras B.; Sapagovas M. Skaičiavimo metodai. Vilnius: Mintis, 1974. 516 p.
Čiegis R.; Būda V. Skaičiuojamoji matematika. Vilnius: TEV, 1997. 221 p.
Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas: Naujasis laukas, 2000. 548 p.

[2] Šiuo atveju sakome, kad skaičių sekos x_n *riba* lygi x_s ir rašome: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_s$.

Dabar apvalinkime $x_6 \approx 1076$ (svarbu neprarasti intervalo, kuriame pelno funkcija keičia ženklą!). Kadangi $P(1076) = 53{,}93 > 0$, matome, kad pelno funkcijos reikšmė jau yra teigiama ir reikia imti intervalą (x_5, x_6):

$$x_7 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{1073 + 1076}{2} = 1074{,}5.$$

Apvaliname $x_7 \approx 1074$ ir apskaičiuojame $P(1074) = 6{,}98$. Kadangi $P(1073) < 0$ ir $P(1074) > 0$, gauname, kad $x_s = 1074$ yra toks minimalus gaminių skaičius, kai gamyba nebus nuostolinga.

1.2 savarankiško darbo užduotis. Žinomos pajamų ir sąnaudų funkcijos $R(x)$ ir $TC(x)$. Raskite minimalų gaminių skaičių, kad gamyba būtų pelninga.

Užduotis	$R(x)$	$TC(x)$
1.2.1.	$25x + \ln(x+1)$	$18x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.2.	$25{,}5x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.3.	$26x + \ln(x+1)$	$18x - 0{,}001x^2 + 12000$
1.2.4.	$25{,}5x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 12000$
1.2.5.	$25x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 14000$
1.2.6.	$25x + \ln(x+1)$	$18x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.7.	$25{,}5x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.8.	$26x + \ln(x+1)$	$18x - 0{,}001x^2 + 12000$
1.2.9.	$25{,}5x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 12000$
1.2.10.	$25x + \ln(x+1)$	$19x - 0{,}001x^2 + 14000$
1.2.11.	$25x + \ln(x+10)$	$18x - 0{,}001x^2 + 14000$
1.2.12.	$25{,}5x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 14000$
1.2.13.	$26x + \ln(x+10)$	$18x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.14.	$25{,}5x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 10000$
1.2.15.	$25x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 11000$
1.2.16.	$25x + \ln(x+10)$	$18x - 0{,}001x^2 + 11000$
1.2.17.	$25{,}5x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 11000$
1.2.18.	$26x + \ln(x+10)$	$18x - 0{,}001x^2 + 13000$
1.2.19.	$25{,}5x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 13000$
1.2.20.	$25x + \ln(x+10)$	$19x - 0{,}001x^2 + 13000$

1.2.2. Paklausos modeliavimas

Tam tikros prekės paklausa dažnai aprašoma šio pavidalo funkcijomis:

$$y(x) = \begin{cases} k\,\frac{x-a}{x-b}, & \text{kai } x > a, \\ 0, & \text{kai } x \leqslant a. \end{cases} \tag{1.2}$$

Čia x – pirkėjo pajamos per laiko vienetą (pavyzdžiui, per mėnesį), $y(x)$ – perkamų per tą patį laikotarpį nagrinėjamos prekės vienetų skaičius. Parametras k nurodo, kiek įsigyja šios prekės vienetų vartotojai, turintys neribotas pajamas (rašome: $x \to +\infty$). Galima keisti parametro k dimensiją. Pavyzdžiui, tai gali būti šimtas arba tūkstantis vienetų. Funkcijos parametrai a ir b yra skirtingi skirtingoms prekėms ir nurodo konkrečios prekės paklausos specifiką. Atkreipkime dėmesį, kad $a > b$ ir $a > 0$.

1.4 pavyzdys. Tarkime, kad maksimali paklausa ($k = 1000$ vnt.) ir žinoma, kad namų ūkiai, turintys pajamas 3000 Lt, vidutiniškai įsigyja 150 prekės vienetų, o turintys pajamas 4000 Lt – 200 vnt. Raskime (1.2) funkcijos parametrus a, b ir apskaičiuokime namų ūkių, turinčių 5000 Lt pajamas, šios prekės paklausą.

Sprendimas. Turime dvi žinomas (1.2) funkcijos reikšmes ir parametrą $k = 1000$:

$$y(3000) = 1000\,\frac{3000-a}{3000-b} = 150,\; y(4000) = 1000\,\frac{4000-a}{4000-b} = 200.$$

Sprendžiame lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{3000-a}{3000-b} = 0{,}15, \\ \\ \frac{4000-a}{4000-b} = 0{,}20 \end{cases} \sim \begin{cases} 3000 - a = 0{,}15\,(3000-b), \\ 4000 - a = 0{,}20\,(4000-b). \end{cases}$$

Atimame iš antrosios lygties pirmąją:

$$4000 - a - (3000 - a) = 0{,}20\,(4000-b) - 0{,}15(3000-b).$$

Gauname

$$1000 = 350 - 0{,}05b.$$

Iš čia $b = -13000$ ir iš pirmosios (tą patį gautumėme ir iš antrosios) lygties gauname

$$-a = 0{,}15\,(3000 - (-13000)) - 3000 = -600 \ \Rightarrow a = 600.$$

Taigi gavome prekės paklausos (1.2) pavidalo funkciją

$$y(x) = \begin{cases} 1000\frac{x-600}{x+13000}, & \text{kai } x > 600, \\ 0, & \text{kai } x \leqslant 600. \end{cases}$$

Apskaičiuokime

$$y(5000) = 1000\ \frac{5000 - 600}{5000 + 13000} \approx 244 \text{ (vnt.)}.$$

1.3 savarankiško darbo užduotis. Raskite (1.2) pavidalo paklausos funkcijos parametrus a ir b, jei žinomos dvi šios funkcijos reikšmės $f\,(x_1)$, $f\,(x_2)$ ir maksimalios paklausos reikšmė (parametras k). Apskaičiuokite paklausą, esant nurodytoms pajamoms $f\,(x_0)$.

Užduotis	k	$f\,(x_1)$	$f\,(x_2)$	x_0
1.3.1.	300	$f(1010) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.2.	280	$f(1010) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.3.	250	$f(1010) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.4.	300	$f(1010) = 90$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.5.	280	$f(1010) = 90$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.6.	250	$f(1010) = 90$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.7.	300	$f(1000) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.8.	280	$f(1000) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.9.	250	$f(1000) = 100$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.10.	300	$f(1000) = 90$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.11.	280	$f(1000) = 90$	$f(1050) = 200$	1090
1.3.12.	250	$f(1000) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.13.	300	$f(1010) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.14.	280	$f(1010) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.15.	250	$f(1010) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.16.	300	$f(1010) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.17.	280	$f(1010) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.18.	250	$f(1010) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.19.	300	$f(1000) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.20.	280	$f(1000) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.21.	250	$f(1000) = 100$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.22.	300	$f(1000) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.23.	280	$f(1000) = 90$	$f(1100) = 200$	1050
1.3.24.	250	$f(1000) = 90$	$f(1100) = 200$	1050

2. Finansinių skaičiavimų pradmenys

Literatūra: [Val02] I skyrius, 6–18 p., II skyrius, 25–34 p.; [Kat01] I skyrius, 5–17 p., II skyrius, 17–29 p., III skyrius, 29–38 p.

2.1. Procentai ir paprastosios palūkanos

2.1.1. Procentai ir promilės

Procentu vadinama šimtoji skaičiaus dalis. Žymime %.

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Taigi galima užrašyti bendrą procentų pertvarkymo formulę

$$p\ \% = \frac{p}{100}$$

ir atlikti atvirkštinį veiksmą, t. y. pereiti nuo trupmeninės reikšmės prie procentų. Tam reikia trupmenos reikšmę padauginti iš 100 %.

$$0{,}5 = 0{,}5 \cdot 100\ \% = 50\ \%,$$

$$1{,}5 = 1{,}5 \cdot 100\ \% = 150\ \%,$$

$$0{,}03 = 0{,}03 \cdot 100\ \% = 3\ \%.$$

Dešimtainės trupmenos reiškimo procentais bendroji formulė:

$$a = a \cdot 100\ \%.$$

Promilė – tūkstantoji skaičiaus dalis. Promilės žymimos ‰.

$$0{,}001 = 1\ ‰,$$

$$0{,}025 = 25\ ‰.$$

2.1 pavyzdys. Į vandenį įlašinus acto rūgšties gauta pusė litro 5 ‰ tirpalo. Raskime, kiek mililitrų ($1\ \ell = 1000\ \text{m}\ell$) vandens ir kiek mililitrų acto rūgšties yra tirpale.

Sprendimas. Acto rūgšties tirpale – 5 ‰, o tai atitinka $\frac{5}{1000}$ tirpalo kiekio:

$$\frac{5}{1000} \cdot 500 = 2{,}5\ (\mathrm{m}\ell).$$

Vandens tirpale yra $500 - 2{,}5 = 497{,}5$ (mℓ).

Atsakymas. Tirpale yra 497,5 mℓ vandens ir 2,5 mℓ acto rūgšties.

2.1.2. Pagrindiniai procentų uždavinių tipai

1 tipas. *Skaičiaus a dalies, sudarančios p procentų, radimas.*

Norint sužinoti p % skaičiaus a, reikia rasti šio skaičiaus 1 % ir rezultatą padauginti iš p, t. y.

$$\frac{a}{100} \cdot p.$$

2.2 pavyzdys. 15 % skaičiaus 120 yra:

$$s = \frac{120}{100} \cdot 15 = 18.$$

2.3 pavyzdys. Prekė kainavo 110 Lt. Kiek litų padidės prekės kaina ją padidinus 10 %?

Prekės kaina padidės

$$110 \cdot 0{,}1 = 11\ (\mathrm{Lt}).$$

2 tipas. *Skaičiaus a radimas, žinant jo b dalies procentų reikšmę.*

Norint sužinoti skaičių a, kurio p procentų yra skaičius b, reikia rasti ieškomo skaičiaus 1 % ir rezultatą padauginti iš 100, t. y.

$$a = \frac{b}{p} \cdot 100.$$

2.4 pavyzdys. Prekės kaina sumažinta 20 % ir dabar ji kainuoja 50 Lt. Kokia buvo pradinė prekės kaina?

$$\frac{50}{80} \cdot 100 = 62{,}5\ (\mathrm{Lt}).$$

3 tipas. *a ir b skaičių procentinio santykio radimas.*

Norint sužinoti, kiek procentų skaičiaus b sudaro skaičius a, reikia sudaryti tų skaičių santykį ir padauginti jį iš 100 %.

2.5 pavyzdys. Koks yra skaičiaus 40 ir skaičiaus 160 procentinis santykis?

Šių skaičių procentinis santykis lygus

$$\frac{40}{160} \cdot 100\ \% = 25\ \%.$$

2.1 savarankiško darbo užduotis.

2.1.1. Turime 30 Lt. Kokią jų dalį sudaro 10 %?

2.1.2. Prekė kainavo 120 Lt. Kiek litų padidės prekės kaina, kai ją padidins 15 %?

2.1.3. Baltijos jūros vandenyje yra 6 ‰ druskų. Kiek druskų yra kibire (10 kg) jūros vandens?

2.1.4. Studentas turėjo 80 Lt. Jis išleido 35 % turėtų pinigų. Kiek litų išleido studentas?

2.1.5. Džiovinant obuolius, jie netenka 83 % masės. Kiek reikia šviežių obuolių, kad gautume a kg džiovintų?

Užduotis	a	Užduotis	a	Užduotis	a
2.1.5.1.	10	2.1.5.8.	17	2.1.5.15.	24
2.1.5.2.	11	2.1.5.9.	18	2.1.5.16.	25
2.1.5.3.	12	2.1.5.10.	19	2.1.5.17.	26
2.1.5.4.	13	2.1.5.11.	20	2.1.5.18.	27
2.1.5.5.	14	2.1.5.12.	21	2.1.5.19.	28
2.1.5.6.	15	2.1.5.13.	22	2.1.5.20.	30
2.1.5.7.	16	2.1.5.14.	23		

2.1.6. Turistai keliavo 3 dienas. Pirmąją dieną jie nukeliavo A % viso maršruto ilgio, antrąją dieną – B % likusio maršruto, o trečiąją dieną – likusius S kilometrus.

1. Kiek procentų viso maršruto nukeliavo turistai trečiąją dieną?
2. Raskite viso maršruto ilgį.
3. Kiek kilometrų nukeliavo turistai pirmąją ir antrąją dieną kartu?

Užduotis	S	A	B	Užduotis	S	A	B
2.1.6.1.	200	25	20	2.1.6.11.	700	25	20
2.1.6.2.	250	30	25	2.1.6.12.	750	30	25
2.1.6.3.	300	35	30	2.1.6.13.	800	35	30
2.1.6.4.	350	40	35	2.1.6.14.	850	40	35
2.1.6.5.	400	25	40	2.1.6.15.	900	25	20
2.1.6.6.	450	30	20	2.1.6.16.	950	30	25
2.1.6.7.	500	35	25	2.1.6.17.	1000	35	30
2.1.6.8.	550	40	30	2.1.6.18.	1050	40	20
2.1.6.9.	600	25	35	2.1.6.19.	1100	45	25
2.1.6.10.	650	30	40	2.1.6.20.	1150	25	30

2.1.3. Paprastosios palūkanos

Po pinigų pasiskolinimo, praėjus tam tikram laikui, skolininkas turi grąžinti paskolintą sumą ir mokestį už pinigų naudojimą. Šis mokestis vadinamas *palūkanomis.*

Investuota pinigų suma vadinama *pradine verte.*

Uždirbtų palūkanų per laiko vienetą santykis su pradine verte vadinamas *palūkanų norma.*

Žymenys:

P – pradinė (dabartinė) vertė;

I – paprastosios palūkanos;

S – sukaupta (galutinė) vertė;

p – metinė palūkanų norma, išreikšta procentais;

r – metinė palūkanų norma;

t – laikas metais.

Kai palūkanų norma yra išreikšta procentais, ji turi būti paversta į trupmeną

$$r = \frac{p}{100}$$

paprastųjų palūkanų formulėse.

Kai palūkanos sumokamos už vienerius metus, t. y. $t = 1$, metinė palūkanų norma skaičiuojama taip:

$$r = \frac{I}{P}.$$

Bendruoju atveju ($t \neq 1$) metinė palūkanų norma skaičiuojama taip:

$$r = \frac{I}{t \cdot P}.$$

Paprastosios palūkanos:

$$I = P \cdot r \cdot t.$$

Sukaupta (galutinė) vertė:

$$S = P + I = P + P \cdot r \cdot t = P(1 + r \cdot t),$$

čia $1 + r \cdot t$ – kaupiamasis daugiklis.

Pateiktas skaičiavimas vadinamas kaupimu su paprastosiomis palūkanomis. Pagal sukauptos vertės formulę galima rasti ir pradinę (dabartinę) vertę. Iš formulės $S = P(1 + r \cdot t)$ išreiškime P:

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t} = S(1 + r \cdot t)^{-1},$$

čia $(1 + r \cdot t)^{-1}$ – diskontavimo daugiklis su paprastosiomis palūkanomis. Toks skaičiavimas vadinamas diskontavimu su paprastosiomis palūkanomis.

2.1.4. Laiko apskaičiavimas. Trukmė tarp mokėjimo datų

Laikas visose formulėse yra išreikštas metais, bet uždaviniuose jis gali būti išreikštas dienomis arba mėnesiais. Jei laikas išreikštas mėnesiais, jį perskaičiuojame taip:

$$t = \textit{mėnesių skaičius/12}.$$

Jei laikas išreikštas dienomis, paprastosios palūkanos gali būti tiksliosios, kai:

$$t = \textit{dienų skaičius}/365$$

arba įprastosios, kai:

$$t = \textit{dienų skaičius}/360.$$

2.6 pavyzdys. Į sąskaitą padėta 1200 Lt su 5 % paprastųjų palūkanų. Kokia susikaups pinigų suma po 18 mėnesių?

Sprendimas. Turime $P = 1200$, $p = 5$ %. Paversime metinę palūkanų normą, išreikštą procentais, į dešimtainę trupmeną:

$$r = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Kadangi laikas uždavinyje išreikštas mėnesiais, paversime jį metais:

$$t = \frac{18}{12} = 1{,}5.$$

Taikome formulę ir apskaičiuojame susikaupusią pinigų sumą:

$$S = P(1 + r \cdot t) = 1200(1 + 0{,}05 \cdot 1{,}5) = 1290 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. 1290 Lt.

2.7 pavyzdys. Su kokia paprastųjų palūkanų norma 2200 Lt sukaups 90 Lt palūkanų per 190 dienų, kai palūkanos yra

a) įprastosios;

b) tiksliosios?

Sprendimas. $P = 2200$, $I = 90$

a) $t = \dfrac{190}{360}$,

$$r = \frac{90}{2200 \cdot \frac{190}{360}} = 0{,}078$$

arba 8 %;

b) $t = \dfrac{190}{365}$,

$$r = \frac{90}{2200 \cdot \dfrac{190}{365}} = 0{,}079$$

arba 8 %.

Atsakymas. a) 8 %; b) 8 %.

2.8 pavyzdys. Jonas grąžino 850 Lt pasiskolintų pinigų su palūkanomis po 80 dienų. Kiek pinigų jis buvo pasiskolinęs, jei sumokėjo 8 % paprastųjų palūkanų?

Sprendimas. $S = 850$, $r = 0{,}08$, $t = \dfrac{80}{360}$. Pritaikę formulę

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t} = S(1 + r \cdot t)^{-1},$$

gauname

$$P = \frac{850}{1 + 0{,}08 \cdot \dfrac{80}{360}} = 835{,}15 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. 835,15 Lt.

Kartais uždaviniuose vietoje dienų skaičiaus nurodomos dvi datos ir reikia nustatyti praėjusių dienų skaičių. Tai galima padaryti dviem būdais:

1. **Tikslus laikas** – skaičiuojamos visos kalendorinės dienos, išskyrus pirmąją.

2. **Apytikslis laikas** – skaičiuojamas, kai priimama, kad visi mėnesiai turi 30 dienų.

Paprastųjų palūkanų skaičiavimo tarp dviejų datų metodai:

1. Tikslus laikas ir įprastosios palūkanos („Bankininko taisyklė“ yra taikoma JAV).

2. Tikslus laikas ir tiksliosios palūkanos (taikoma Kanadoje).

3. Apytikslis laikas ir įprastosios palūkanos.

4. Apytikslis laikas ir tiksliosios palūkanos.

2.9 pavyzdys. Apskaičiuokite laiką nuo tų pačių metų balandžio 20 d. iki lapkričio 4 d.: a) tikslų; b) apytikslį.

Sprendimas. a) balandžio 20 d. yra 110-oji metų diena, o lapkričio 4 d. – 308-oji metų diena. Tikslus dienų skaičius apskaičiuojamas:

$$308 - 110 = 198 \text{ (d.)}$$

b)

Data	Mėnuo	Diena
Lapkričio 4	10	34
Balandžio 20	4	20
Skirtumas	6	14

Apytikslis laikas skaičiuojamas:

$$6 \cdot 30 + 14 = 194 \text{ (d.)}$$

Atsakymas. 198 ir 194 dienos.

2.2 savarankiško darbo užduotis.

2.2.1 Už indėlį banke mokamos palūkanos, kurių metinė palūkanų norma – r. Kokia suma bus po t mėnesių, jei pradžioje įnešta P Lt?

Užduotis	P	t	r	Užduotis	P	t	r
2.2.1.1.	2000	2	0,01	2.2.1.11.	2000	10	0,09
2.2.1.2.	2500	3	0,07	2.2.1.12.	2500	9	0,10
2.2.1.3.	3000	3	0,09	2.2.1.13.	3000	8	0,07
2.2.1.4.	3500	4	0,10	2.2.1.14.	3500	7	0,09
2.2.1.5.	4000	5	0,09	2.2.1.15.	4000	6	0,07
2.2.1.6.	4500	6	0,09	2.2.1.16.	4500	5	0,08
2.2.1.7.	5000	7	0,07	2.2.1.17.	5000	4	0,10
2.2.1.8.	5500	8	0,08	2.2.1.18.	5500	3	0,07
2.2.1.9.	6000	9	0,08	2.2.1.19.	6000	3	0,07
2.2.1.10.	6500	10	0,09	2.2.1.20.	6500	2	0,07

2.2.2. Kiek procentų paprastųjų metinių palūkanų reikia pareikalauti, kad paskolinę P Lt t mėnesiams gautume I Lt palūkanų?

Užduotis	P	t	I	Užduotis	P	t	I
2.2.2.1.	2000	2,5	200	2.2.2.11.	2000	10	200
2.2.2.2.	5000	3	255	2.2.2.12.	5000	9	255
2.2.2.3.	3000	3,5	300	2.2.2.13.	3000	8	300
2.2.2.4.	3500	4	350	2.2.2.14.	3500	7	350
2.2.2.5.	4000	5	400	2.2.2.15.	4000	6	400
2.2.2.6.	4500	6	200	2.2.2.16.	4500	5	200
2.2.2.7.	5000	7	250	2.2.2.17.	5000	4	250
2.2.2.8.	5500	8	300	2.2.2.18.	5500	3,5	300
2.2.2.9.	6000	9	350	2.2.2.19.	6000	3	350
2.2.2.10.	6500	10	400	2.2.2.20.	6500	2	400

2.1.5. Diskontavimas

Kartais mokestis už paskolą skaičiuojamas nuo galutinės sumos. Bankas, prieš išduodamas paskolą, apskaičiuoja mokestį (banko diskontą D) ir atima jį iš galutinės sumos S, o likusią sumą P duoda skolininkui.

Skirtumas $D = S - P$ vadinamas *paprastuoju (tikruoju) diskontu nuo S su palūkanų norma r.*

Diskontavimo norma d per metus yra lygi santykiui D su galutine verte S, kurios atžvilgiu skaičiuojamas diskontas:

$$d = \frac{D}{S}.$$

Banko diskontas D per t metų su diskontavimo norma d skaičiuojamas pagal formulę:

$$D = S \cdot d \cdot t,$$

o diskontuota vertė P nuo S skaičiuojama taip:

$$P = S - D = S - S \cdot d \cdot t = S(1 - d \cdot t).$$

Banko diskontas kartais vadinamas *išankstinėmis palūkanomis.* Užrašykime dar vieną formulę:

$$S = \frac{P}{1 - d \cdot t}.$$

2.10 pavyzdys. Po 6 mėnesių į banką reikės grąžinti 1200 Lt su 15 % paprastųjų palūkanų. Apskaičiuokite, kiek pinigų paėmė skolininkas iš banko ir kam lygus tikrasis diskontas.

Sprendimas. $S = 1200$, $r = 0{,}15$, $t = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$. Pagal formulę

$$P = \frac{S}{1 + r \cdot t} = \frac{1200}{1 + 0{,}15 \cdot 0{,}5} = 1116{,}28 \text{ (Lt)}$$

apskaičiavome, kiek pinigų paėmė skolininkas iš banko. Tikrasis diskontas:

$$D = S - P = 1200 - 1116{,}28 = 83{,}72 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. 1116,28 Lt; 83,72 Lt.

2.11 pavyzdys. Bankas nustatė trumpalaikėms paskoloms 10 % banko diskontą. Skolininkas nori paimti iš banko 2000 Lt, kuriuos jis grąžins su palūkanomis po 9 mėn. Apskaičiuokite, kokio dydžio paskolos jis turi prašyti, ir kiek palūkanų bus sumokėta už ją?

Sprendimas. $P = 2000$, $d = 0{,}10$ ir $t = \dfrac{9}{12}$. Remdamiesi formule

$$S = \frac{P}{1 - d \cdot t},$$

apskaičiuosime paskolos dydį:

$$S = \frac{2000}{1 - 0{,}10 \cdot \dfrac{9}{12}} = 2162{,}16 \text{ (Lt)}.$$

Palūkanos už paskolą:

$$2162{,}16 - 2000 = 162{,}16 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. 2162,16 Lt; 162,16 Lt.

2.3 savarankiško darbo užduotis.

Bankas nustatė trumpalaikėms paskoloms p % banko diskontą. Apskaičiuokite, kiek skolininkas gaus pinigų iš banko, jeigu jis prašo iš banko S Lt nuo kovo t_1 iki rugsėjo t_2 d.

Užduotis	S	p	t_1	t_2	Užduotis	S	p	t_1	t_2
2.3.1.	2000	5	2	10	2.3.11.	2000	14	2	10
2.3.2.	2500	6	2	11	2.3.12.	2500	13	2	11
2.3.3.	3000	7	3	13	2.3.13.	3000	12	3	13
2.3.4.	3500	8	3	14	2.3.14.	3500	11	3	14
2.3.5.	4000	9	4	15	2.3.15.	4000	10	4	15
2.3.6.	4500	10	5	20	2.3.16.	4500	9	5	20
2.3.7.	5000	11	6	23	2.3.17.	5000	8	6	23
2.3.8.	5500	12	7	25	2.3.18.	5500	7	7	25
2.3.9.	6000	13	8	26	2.3.19.	6000	6	8	26
2.3.10.	6500	14	9	29	2.3.20.	6500	5	9	29

2.2. Sudėtinės palūkanos

Sudėtinės palūkanos – palūkanos apskaičiuojamos kiekvieno palūkanų periodo pabaigoje nuo vertės, buvusios palūkanų periodo pradžioje.

Pradinės vertės ir susikaupusių palūkanų suma vadinama *galutine suma arba sukaupta verte.*

Palūkanų periodas, t. y. laikas tarp 2-jų nuoseklių palūkanų skaičiavimo momentų, vadinamas *konversijos periodu.*

Palūkanų konvertavimo skaičius per metus vadinamas *konversijos dažnumu.*

Palūkanų norma per metus vadinama *nominalia palūkanų norma.*

Žymenys:

P – pradinė (dabartinė) vertė;

S – sukaupta (galutinė) vertė;

n – bendras palūkanų skaičiavimo (konvertavimo) periodų skaičius;

m – palūkanų periodų skaičius per metus;

j_m – nominali (metinė) palūkanų norma, skaičiuojama m kartų per metus;

i – palūkanų norma per palūkanų skaičiavimo periodą;

t – laikas metais.

Banko nustatyta vieno periodo (kurio nors laikotarpio) palūkanų norma yra lygi:

$$i = \frac{j_m}{m}.$$

Sudėtinių palūkanų skaičiavimo formulė:

$$S = P(1+i)^n = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{m \cdot t}.$$

2.12 pavyzdys. Apskaičiuokite sudėtines palūkanas nuo 1200 Lt per 2 metus su 6 % nominalia palūkanų norma, skaičiuojamas kiekvieną ketvirtį, t. y. $j_4 = 6$ %.

Sprendimas. $P = 1200$, $i = \dfrac{0{,}06}{4} = 0{,}015$; $n = 2 \cdot 4 = 8$. Remdamiesi formule $S = P(1+i)^n$, gauname galutinę vertę:

$$S = P(1+i)^n = 1200(1+0{,}015)^8 \approx 1351{,}79 \text{ (Lt)}.$$

Sudėtinės palūkanos: $S - P = 1351{,}79 - 1200 = 151{,}79$ (Lt).

Atsakymas. 151,79 Lt.

Dvi nominalios palūkanų normos su skirtingais konversijos periodais yra ekvivalenčios, jeigu po vienerių metų sukaupia vienodas vertes.

Efektyvioji palūkanų norma rodo, kokia metinė sudėtinių palūkanų norma, skaičiuojama vieną kartą per metus, duoda tokį patį rezultatą kaip m-kartinis kaupimas per metus, esant palūkanų normai $\frac{j_m}{m}$.

Efektyvioji palūkanų norma j lygi:

$$P \cdot j = P\left((1+i)^m - 1\right)$$

arba

$$j = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^m - 1.$$

2.13 pavyzdys. Jonas investavo 2 metams į obligacijas tam tikrą pinigų sumą. Pirmaisiais metais mokama $j_{12} = 6$ % palūkanų, antraisiais – $j_4 = 16$ %. Raskite efektyviąją palūkanų normą j, kad po 2 metų susikauptų tiek pat palūkanų.

Sprendimas. Nuo 1 Lt per 2 metus su efektyviąja palūkanų norma susikaups $(1+j)^2$ Lt. Nuo 1 Lt su nurodytomis palūkanų normomis susikaups: $\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} \cdot \left(1+\frac{0{,}16}{4}\right)^{4}$ Lt.

Tada

$$(1+j)^2 = \left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} \cdot \left(1+\frac{0{,}16}{4}\right)^{4},$$

$$(1+j)^2 = 1{,}242013,$$

$$j = 0{,}114456 \approx 11{,}45 \text{ \%}.$$

Atsakymas. 11,45 %.

Verslo sutartyse dažnai reikia žinoti, kokia dabartinė suma P po n periodų su i palūkanų norma per periodą sukaups vertę S:

$$P = S(1+i)^{-n}.$$

P – diskontuota S vertė arba dabartinė S vertė,
P radimas žinant D vadinamas diskontavimu,
$S - P$ – vadinamas sudėtiniu diskontu su duota palūkanų norma,
$(1+i)^{-n}$ – diskontavimo daugiklis per n periodų.

2.14 pavyzdys. Kiek pinigų reikia įdėti į taupomąją sąskaitą, kad po 6 metų susikauptų 9800 Lt, jei mokama 15 % sudėtinių palūkanų, skaičiuojamų pusmečiais?

Sprendimas. $S = 9800$, $i = \dfrac{0{,}15}{2}$, $n = 6 \cdot 2 = 12$.

$$P = S(1+i)^{-n} = 9800\left(1+\frac{0{,}15}{2}\right)^{-12} = 4114{,}57 \text{ (Lt)}.$$

Atsakymas. 4114,57 Lt.

2.4 savarankiško darbo užduotis.

2.4.1. Lietuvos valstybinis komercinis bankas 1994 m. mokėjo 25 % metinių palūkanų. Kiek būtų gauta palūkanų, jei t mėnesiams būtų investuota P Lt?

Užduotis	P	t	Užduotis	P	t
2.4.1.1.	2000	2,5	2.4.1.11.	2000	10
2.4.1.2.	2500	3	2.4.1.12.	2500	9
2.4.1.3.	3000	3,5	2.4.1.13.	3000	8
2.4.1.4.	3500	4	2.4.1.14.	3500	7
2.4.1.5.	4000	5	2.4.1.15.	4000	6
2.4.1.6.	4500	6	2.4.1.16.	4500	5
2.4.1.7.	5000	7	2.4.1.17.	5000	4
2.4.1.8.	5500	8	2.4.1.18.	5500	3
2.4.1.9.	6000	9	2.4.1.19.	6000	2,5
2.4.1.10.	6500	10	2.4.1.20.	6500	2

2.4.2. Kiek turi mokėti palūkanų verslininkas, jei paskolinta 3000 Lt 5 mėnesiams su 40 % paprastųjų metinių palūkanų?

2.4.3. Į banką, kuriame palūkanos priskaičiuojamos kas t mėnesių, indėlininkas padėjo 2000 Lt. Per metus indėlis padidėjo iki 2250 Lt. Kokia banko metinė palūkanų norma?

Užduotis	t	Užduotis	t	Užduotis	t
2.4.3.1.	2,5	2.4.3.8.	8	2.4.3.15.	6
2.4.3.2.	3	2.4.3.9.	9	2.4.3.16.	5
2.4.3.3.	3,5	2.4.3.10.	10	2.4.3.17.	4
2.4.3.4	4	2.4.3.11.	10	2.4.3.18.	3
2.4.3.5.	5	2.4.3.12.	9	2.4.3.19.	2,5
2.4.3.6.	6	2.4.3.13.	8	2.4.3.20.	2
2.4.3.7.	7	2.4.3.14.	7		

2.4.4. Į banką, kuriame palūkanos priskaičiuojamos kas 2 mėnesiai, padėta 1250 Lt. Per 2 metus indėlis padidėjo iki 1408,53 Lt. Kokia banko metinė palūkanų norma?

2.4.5. Verslininkas t_1 metams paėmė iš banko kreditą. Pagal sutartį numatyta, kad už kreditą reikia mokėti paprastąsias palūkanas, o metinė palūkanų norma lygi p %. Apskaičiuokite kredito didumą žinodami, kad po 21 mėn. verslininkas atsiskaitė su banku sumokėjęs visą skolą – 44500 Lt.

Užduotis	t_1	p	Užduotis	t_1	p
2.4.5.1.	2	22	2.4.5.11.	12	42
2.4.5.2.	3	24	2.4.5.12.	13	44
2.4.5.3.	4	26	2.4.5.13.	14	46
2.4.5.4.	5	28	2.4.5.14.	15	48
2.4.5.5.	6	30	2.4.5.15.	16	50
2.4.5.6.	7	32	2.4.5.16.	17	52
2.4.5.7.	8	34	2.4.5.17.	18	54
2.4.5.8.	9	36	2.4.5.18.	19	56
2.4.5.9.	10	38	2.4.5.19.	20	58
2.4.5.10.	11	40	2.4.5.20.	21	60

2.4.6. Kokia dabartinė vertė P Lt laukiama po t metų, jei metinė sudėtinių palūkanų norma lygi: a) 10 %; b) 15 %; c) 25 %?

Užduotis	P	t	Užduotis	P	t
2.4.6.1.	200000	2,5	2.4.6.11.	200000	10
2.4.6.2.	250000	3	2.4.6.12.	250000	9
2.4.6.3.	300000	3,5	2.4.6.13.	300000	8
2.4.6.4.	350000	4	2.4.6.14.	350000	7
2.4.6.5.	400000	5	2.4.6.15.	400000	6
2.4.6.6.	450000	6	2.4.6.16.	450000	5
2.4.6.7.	500000	7	2.4.6.17.	500000	4
2.4.6.8.	550000	8	2.4.6.18.	550000	3
2.4.6.9.	600000	9	2.4.6.19.	600000	2,5
2.4.6.10.	650000	10	2.4.6.20.	650000	2

2.4.7. Už kiek gali būti perkamas dabar vertybinis popierius, jei jo išpirkimo vertė po t metų yra P Lt, kai metinė palūkanų norma yra B %?

Užduotis	P	t	B	Užduotis	P	t	B
2.4.7.1.	200000	2,5	20	2.4.7.11.	200000	10	20
2.4.7.2.	250000	3	25	2.4.7.12.	250000	9	25
2.4.7.3.	300000	3,5	30	2.4.7.13.	300000	8	30
2.4.7.4.	350000	4	35	2.4.7.14.	350000	7	35
2.4.7.5.	400000	5	40	2.4.7.15.	400000	6	40
2.4.7.6.	450000	6	20	2.4.7.16.	450000	5	20
2.4.7.7.	500000	7	25	2.4.7.17.	500000	4	25
2.4.7.8.	550000	8	30	2.4.7.18.	550000	3	30
2.4.7.9.	600000	9	35	2.4.7.19.	600000	2,5	35
2.4.7.10.	650000	10	40	2.4.7.20.	600000	2	40

3. Riba ir tolydumas

Literatūra: [Rum76] XIV skyrius, 222–253 p.; [Stu08] 115–119 p.; [Mis99] 117–136 p.; [Būd08] 53–117 p.

Teoriniai klausimai: Ribos sąvoka. Neaprėžtai didėjančiosios ir nykstamosios funkcijos. Ribų skaičiavimo taisyklės. Funkcijos tolydumas. Trūkio taškai.

3.1. Funkcijos riba

3.1.1. Apibrėžimai

Skaičius L vadinamas funkcijos $f(x)$ riba, kai x artėja prie a (rašoma $x \to a$), jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ galima nurodyti tokį skaičių $\delta > 0$, kad visiems x: $|x - a| < \delta$ galioja nelygybė $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$. Rašome $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Skaičius L vadinamas funkcijos $f(x)$ riba, kai x tolsta į begalybę ($x \to \infty$), jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ galima nurodyti tokį skaičių A, kad visiems $|x| > A$ galioja nelygybė $|f(x) - L| < \varepsilon$. Rašome $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$. Kai x neaprėžtai didėja, žymime $x \to +\infty$, kai x neaprėžtai mažėja, žymime $x \to -\infty$.

Funkcija f vadinama neaprėžtai didėjančiąja, kai $x \to a$, jei $\forall \Delta > > 0\ \exists \delta = \delta(\Delta) > 0 : (\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\})\, |f(x)| > \Delta$. Rašome $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$. Pavyzdžiui, funkcija

$$y = \frac{x + 1}{x - 2},\ x \to 2$$

yra neaprėžtai didėjančioji.

Funkcija f vadinama nykstamąja, kai $x \to 2$, jei $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Pavyzdžiui, funkcija

$$y = \cos(x),\ x \to \frac{\pi}{2}$$

yra nykstamoji.

Ribų savybės

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \& \lim\limits_{x\to a} f(x) = B \Rightarrow A = B;$
2. $f(x) = C - \text{const} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = C;$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \& \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \& \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \& \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

Neapibrėžtumai ir jų žymėjimas

$$\lim_{x\to\ a} \alpha(x) = 0, \lim_{x\to\ a} \beta(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to\ a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{0}{0}\right);$$

$$\lim_{x\to\ a} |\alpha(x)| = +\infty, \lim_{x\to\ a} |\beta(x)| = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\ a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right);$$

$$(0 \cdot \infty), (\infty - \infty), (1^{\infty}), (0^0), (\infty^0).$$

Norėdami apskaičiuoti ribą, iš pradžių turime nustatyti, ar yra neapibrėžtumas. Jei neapibrėžtumo nėra, tai iš karto apskaičiuojame ribą (tolydžiosios funkcijos reikšmė lygi jos ribai). Jei neapibrėžtumas yra, tada, ieškant funkcijos ribos, reikia panaikinti neapibrėžtumą. Dažniausiai tai daroma pertvarkant funkcijos išraišką. Neapibrėžtumą rašome virš lygybės arba po lygybės skliausteliuose.

Keletas pavyzdžių, kai riba:

1. lygi baigtiniam skaičiui;
2. lygi $+\infty$ arba $-\infty$;
3. neegzistuoja.

3.1 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\ 3} \frac{3}{2 \cdot x - 6}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\ 3} \frac{3}{2\cdot x-6} = \frac{3}{0} = \infty.$$

Atsakymas. ∞.

3.2 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{4\cdot x+1}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5}{4\cdot x+1} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

Atsakymas. 0.

3.3 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-5x+1}{4-x^2-2x^3}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-5x+1}{4-x^2-2x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(3-5\cdot\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x}-2\right)} = -\frac{3}{2}.$$

Atsakymas. $-\dfrac{3}{2}$.

3.4 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} (2x^3-5x^2+4x-2).$$

Sprendimas. Iškėlę prieš skliaustus x^3, randame

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\right) = \infty$$

(kai $x\to\infty$, santykiai $\dfrac{5}{x}$, $\dfrac{4}{x^2}$ ir $\dfrac{2}{x^3}$ nyksta, jų ribos lygios nuliui).

3.5 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4 - x^4}{2 + x + 3x^2}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4 - x^4}{2 + x + 3x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(\frac{4}{x^4} - 1\right)}{x^4\left(\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2}\right)} = \left(\frac{-1}{0}\right)$$

$= -\infty.$

Atsakymas. $-\infty$.

3.6 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x).$$

Sprendimas. Riba neegzistuoja. Funkcijos $\cos(x)$ reikšmės, kai kintamojo x reikšmės tolsta į begalybę, prie jokio konkretaus skaičiaus neartėja, nes ši funkcja kinta periodiškai, todėl $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)$ neegzistuoja.

3.1.2. Reiškinių pertvarkiai

3.7 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 1}.$$

Sprendimas. Kadangi $x \to \infty$, tai skaitiklis ir vardiklis tolsta į begalybę, t. y. turime nepibrėžtumą $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x^k, kai k – didžiausias laipsnio rodiklis. Šiame uždavinyje $k = 2$, todėl reikia dalyti iš x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2}{x^2}}{\frac{x^2+2x-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Atsakymas. 1.

3.8 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}.$$

Sprendimas. Kadangi $x\to 1$, tai skaitiklis artėja į 0 ir vardiklis artėja į 0 , t. y. turime nepibrėžtumą $\left(\frac{0}{0}\right)$. Skaitikliui pertvarkyti taikome formulę $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Vardiklyje x iškeliame prieš skliaustus.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Atsakymas. 2.

3.9 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

(taikome formulę:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{4}$.

3.10 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x).$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

(skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{2}$.

3.1 savarankiško darbo užduotis. Apskaičiuokite ribas:

Užduotis	Riba	Užduotis	Riba
3.1.1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$	3.1.11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x-2}{x+x^2}$
3.1.2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$	3.1.12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{2x^4-x^2+1}$
3.1.3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$	3.1.13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2-(1+3x)}{x+x^5}$
3.1.4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x+1}{4-x^2-2x^3}$	3.1.14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x+1}{4-x^2-2x^3}$
3.1.5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x^4}{2+x+3x^2}$	3.1.15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4+x^3}{2+x+3x^2}$
3.1.6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^4-(x-1)^4}{(2x+1)^4+(x-1)^4}$	3.1.16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2-(x-1)^2}{(2x+1)^2+(x-1)^2}$
3.1.7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-(x+4)^2}{(x-1)(2x+3)(2-5x)}$	3.1.17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-(x+4)^2}{(x+1)(2x+3)(2-x)}$
3.1.8.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	3.1.18.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^2-1}$
3.1.9.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+19}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$	3.1.19.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+19}+2\sqrt{x+1}}{x^2-1}$
3.1.10.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x-7}\right)$	3.1.20.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}\right)$

3.1.3. Pirmoji pagrindinė riba

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

3.11 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)3x}{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)5x}=\frac{\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}}{\lim\limits_{z\to0}\frac{\sin z}{z}}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

Atsakymas. $\dfrac{3}{5}$.

3.12 pavyzdys. Apskaičiuokite ribą

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x\cdot\operatorname{tg}3x}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\cos x\cdot\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\sin 3x}\cdot\frac{\cos 3x}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x}{\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{6x}{3x}\cdot 1=2.$$

Atsakymas. 2.

3.2 savarankiško darbo užduotis. Apskaičiuokite ribas:

Užduotis	Riba	Užduotis	Riba
3.2.1.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$	3.2.11.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+5x}{\sin 3x}$
3.2.2.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$	3.2.12.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x\sin x}{1-\cos x}$
3.2.3.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$	3.2.13.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$
3.2.4.	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\cos x\right)$	3.2.14.	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin x}-2\cos x\right)$
3.2.5.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}2x}$	3.2.15.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\operatorname{tg}2x}$
3.2.6.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$	3.2.16.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin 2x}{\sin x}$
3.2.7.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2-15x}{\sin 6x}$	3.2.17.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2-5x}{\sin 3x}$
3.2.8.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$	3.2.18.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$
3.2.9.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$	3.2.19.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}$
3.2.10.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x)^2-(\operatorname{tg}x)^2}{x^4}$	3.2.20.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x)^2-(\operatorname{tg}x)^2}{x^3}$

3.1.4. Antroji pagrindinė riba

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

3.13 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=e^{2}.$$

Atsakymas. e^2.

3.14 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5}=e^{5}.$$

Atsakymas. e^5.

3.15 pavyzdys. Apskaičiuokime ribą

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{-\frac{2x}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Atsakymas. e^{-2}.

3.3 savarankiško darbo užduotis. Apskaičiuokite ribas:

Užduotis	Riba	Užduotis	Riba
3.3.1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{3+x}\right)^{x}$	3.3.11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4}{3+x}\right)^{x+1}$
3.3.2.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$	3.3.12.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{8x}{x+5}\right)^{x}$
3.3.3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$	3.3.13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{8x}{x}\right)^{x}$
3.3.4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$	3.3.14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$
3.3.5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$	3.3.15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{6x+3}\right)^{x+2}$
3.3.6.	$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{n}$	3.3.16.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4x}{n}\right)^{n}$
3.3.7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+x}{8+x}\right)^{x}$	3.3.17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{25+x}{5+x}\right)^{x}$
3.3.8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x}$	3.3.18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{1+x}$
3.3.9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}$	3.3.19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x}{x}\right)^{x+1}$
3.3.10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^{x+3}$	3.3.20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{8x+2}\right)^{x+3}$

3.1.5. Vienpusės ribos

Kai nagrinėjama funkcijos $f(x)$ riba taške a (žymime $\lim\limits_{x\to a} f(x)$), kintamasis x įgyja reikšmes ir iš kairės, ir iš dešinės nuo taško a. Jeigu ieškant ribos, kai $x \to a$, apsiribojama x reikšmėmis, kurios yra tik į kairę (arba tik į dešinę) nuo taško a, tai tokia riba vadinama funkcijos riba iš kairės (dešinės) ir žymima:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0),\ (x<a),$$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0),\ (x>a).$$

Dažnai užrašoma trumpiau: $a+$ ($a-$) vietoje $a+0$ ($a-0$). Funkcijos ribos iš kairės ir iš dešinės vadinamos vienpusėmis ribomis.

Kai funkcija f taške a turi ribą, tai vienpusės ribos yra lygios tarpusavyje ir lygios funkcijos ribai:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

3.16 pavyzdys. Apskaičiuokime ribas

$$\lim_{x\to+0} e^x, \lim_{x\to-0} e^x.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to+0} e^x = e^0 = 1, \lim_{x\to-0} e^x = e^0 = 1.$$

Atsakymas. 1; 1.

3.17 pavyzdys. Apskaičiuokime ribas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2(x^2+1)}{4x+3}, \lim_{x\to-\infty} \frac{-2(x^2+1)}{4x+3}.$$

Sprendimas.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2(x^2+1)}{4x+3} = -\infty, \lim_{x\to-\infty} \frac{-2(x^2+1)}{4x+3} = +\infty.$$

Atsakymas. $-\infty$; $+\infty$.

3.4 savarankiško darbo užduotis. Apskaičiuokite ribas:

Užduotis	Riba	Užduotis	Riba
3.4.1.	$\lim\limits_{x\to3+0} \frac{\lvert 7x-x^2-12\rvert}{x^2-6x+9}$	3.4.11.	$\lim\limits_{x\to2+0} \frac{\lvert 6x-x^2-12\rvert}{x^2-4x+4}$
3.4.2.	$\lim\limits_{x\to3-0} \frac{7x-x^2-12}{\lvert x^2-6x+9\rvert}$	3.4.12.	$\lim\limits_{x\to2-0} \frac{6x-x^2-12}{\lvert x^2-4x+4\rvert}$
3.4.3.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$	3.4.13.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$
3.4.4.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$	3.4.14.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)$
3.4.5.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2+3x}{3+2x}\right)^{x+1}$	3.4.15.	$\lim\limits_{x\to4+0} \frac{\lvert 4x-x^2-12\rvert}{x^2-8x+16}$
3.4.6.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2-3x}{3-2x}\right)^{x+1}$	3.4.16.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2-7x}{7-2x}\right)^{x+1}$
3.4.7.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x}$	3.4.17.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{x}$
3.4.8.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$	3.4.18.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$
3.4.9.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{x+1}$	3.4.19.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{8x+3}{8x+9}\right)^{x+1}$
3.4.10.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{x+1}$	3.4.20.	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{9x+1}{9x-3}\right)^{x+1}$

3.2. Funkcijos tolydumas. Trūkių rūšys

Funkcija $y = f(x)$ vadinama *tolydžiąja* taške $a \in X$, jei ji apibrėžta šiame taške bei jo aplinkoje, ir egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, kuri sutampa su funkcijos f reikšme taške a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Kitais žodžiais, funkcija yra tolydi taške a, jei iš abiejų to taško pusių funkcijos reikšmės artėja į tą patį skaičių, kuris lygus funkcijos reikšmei $f(a)$.

Sakoma, kad funkcija f yra tolydi taške a *iš kairės*, jei $f(a-) = f(a)$, t. y. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$; *iš dešinės*, jei $f(a+) = f(a)$, t. y. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$.

Funkcija vadinama *tolydžiąja intervale*, jei visuose to intervalo taškuose ji yra tolydi.

Jeigu kažkuriame taške funkcija f nėra tolydi, tai tas taškas vadinamas f *trūkio tašku.*

Trūkio taškų rūšių yra keletas.

Taškas a vadinamas funkcijos $y = f(x)$ *pirmosios rūšies* trūkio tašku, jeigu egzistuoja baigtinės ribos iš kairės ir iš dešinės:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a-), \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f(a+),$$

bet jos nėra tarpusavyje lygios: $f(a-0) \neq f(a+0)$.

Kai bent viena vienpusė funkcijos $y = f(x)$ riba taške a neegzistuoja arba yra begalinė, tai taškas a vadinamas šios funkcijos *antrosios rūšies* trūkio tašku.

Taškas a vadinamas funkcijos $y = f(x)$ pašalinamuoju trūkio tašku, jei vienpusės funkcijos ribos yra lygios $f(a-0) = f(a+0)$, tačiau bent viena iš jų nelygi funkcijos reikšmei $f(a)$, arba funkcija neapibrėžta taške a.

3.18 pavyzdys. Pasirinkime skaičių a taip, kad funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$$

būtų tolydi, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

Sprendimas. Kai $x \neq 0$, funkcija $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$ yra tolydi kaip elementarioji funkcija.

Kai $x = 0$, skaičiuojame vienpuses ribas (šiuo atveju jos lygios, nes egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$):

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

Gauname $f(0+) = \lim\limits_{x \to a+} a = a$; $f(0-) = \lim\limits_{x \to a-} a = a$. Taigi, ši funkcija tolydi, kai $a = 2$.

Atsakymas. Funkcija tolydi, kai $a = 2$.

3.5 savarankiško darbo užduotis. Pasirinkite skaičių a, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi, kai $x \in (-\infty; +\infty)$ arba nustatykite, kad toks skaičius a neegzistuoja.

Užduotis	Funkcija
3.5.1.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{kai} \quad x \neq 2, \\ a, & \text{kai} \quad x = 2 \end{cases}$
3.5.2.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$
3.5.3.	$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$
3.5.4.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{\lvert x - 2 \rvert}, & \text{kai} \quad x \neq 2, \\ a, & \text{kai} \quad x = 2 \end{cases}$
3.5.5.	$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kai} \quad \lvert x \rvert \leq 1, \\ a, & \text{kai} \quad \lvert x \rvert > 1 \end{cases}$
3.5.6.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 1}, & \text{kai} \quad x \neq 1, \\ a, & \text{kai} \quad x = 1 \end{cases}$

Užduotis	Funkcija
3.5.7.	$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{2x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$
3.5.8.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{kai} \quad x = 1 \end{cases}$
3.5.9.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x-5}, & \text{kai} \quad x \neq 5, \\ a, & \text{kai} \quad x = 5 \end{cases}$
3.5.10.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x+5)}{\lvert x-3\rvert}, & \text{kai} \quad x \neq 3, \\ a, & \text{kai} \quad x = 3 \end{cases}$

3.19 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lvert \sin x\rvert}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$$

trūkio taškus ir nustatykime jų rūšį.

Sprendimas. Funkcija $y = f(x)$ apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje. Trūkį ji gali turėti tik taške $x = 0$ (žr. 1 pav.).

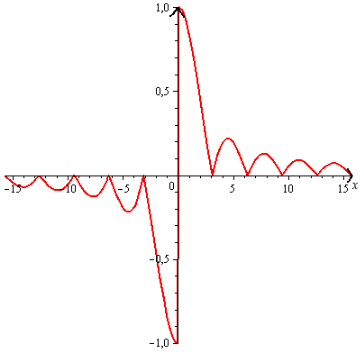
Skaičiuojame vienpuses ribas:

$$f(0-) = \lim_{x\to 0-} \frac{\lvert \sin x\rvert}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Kadangi $f(0-) \neq f(0+)$, taškas $x = 0$ yra pirmosios rūšies trūkio taškas.

Atsakymas. Taškas $x = 0$ yra pirmosios rūšies trūkio taškas.



1 pav. Funkcijos $f(x)$ grafikas

3.6 savarankiško darbo užduotis. Nustatykite funkcijos f trūkio taškų rūšį ir nubraižykite funkcijos grafiko eskizą.

Užduotis	Funkcija
3.6.1.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\lvert x-1\rvert}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$
3.6.2.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-4)(x+8)}{\lvert x+4\rvert}, & \text{kai} \quad x \neq -4, \\ 8, & \text{kai} \quad x = 4 \end{cases}$
3.6.3.	$f(x) = \begin{cases} 10 - x^2, & \text{kai} \quad x \leq 2, \\ 3x, & \text{kai} \quad x > 2 \end{cases}$
3.6.4.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{2x}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ 6, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$
3.6.5.	$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{kai} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{kai} \quad x = 0 \end{cases}$

Užduotis	Funkcija
3.6.6.	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lvert x-2\rvert}{\lvert x+2\rvert}, & \text{kai} \quad x \neq 2, \\ 5, & \text{kai} \quad x = 2 \end{cases}$
3.6.7.	$f(x) = \begin{cases} \lvert x\rvert, & \text{kai} \quad x \leq 1, \\ 1, & \text{kai} \quad x > 1 \end{cases}$
3.6.8.	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai} \quad x \leq 1, \\ \dfrac{2}{1-x}, & \text{kai} \quad x > 1 \end{cases}$
3.6.9.	$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{kai} \quad x \geq 0, \\ x+1, & \text{kai} \quad x < 0 \end{cases}$
3.6.10.	$f(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{kai} \quad x \leq 0, \\ x^2-1, & \text{kai} \quad x > 0 \end{cases}$

4. Diferencialinis skaičiavimas

Literatūra: [Apy01] II skyrius, 47–60 p.; [Pek05] VII skyrius, 158–182 p.; [Rum76] XVI–XVIII skyriai, 263–285 p., 311–314 p., 317–329 p.

Teoriniai klausimai: Funkcijos išvestinė. Dalmens išvestinė. Sudėtinės funkcijos išvestinė. Liopitalio taisyklė. Funkcijos diferencialas. Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams. Teiloro formulė.

4.1. Funkcijos išvestinė

4.1.1. Funkcijos išvestinės apibrėžimas

Funkcijos $y = f(x)$ *išvestine* taške $x = a$ vadinama riba:

$$y' = f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Priminkime, kad Δx vadinamas argumento pokyčių taške a, $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ – funkcijos pokyčiu.

Jeigu funkcija $f(x)$ turi išvestinę visuose kurio nors intervalo taškuose, tai sakoma, kad ji *diferencijuojama* tame intervale, o išvestinės radimo veiksmas vadinamas *diferencijavimu*.

Jei riba neegzistuoja, sakoma, kad funkcija išvestinės taške neturi.

4.1.2. Elementariųjų funkcijų išvestinių lentelė

Pagrindinės diferencijavimo taisyklės ir formulės:

$(u+v)' = u' + v'$;	$(u \cdot v)' = u'v + v'u$;
$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot \big(f(x)\big)'$;	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
$c' = 0$;	$x' = 1$;
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
$(e^x)' = e^x, e = 2{,}71828\ldots$;	$(a^x)' = a^x \ln a$;
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$$
\begin{aligned}
&(\sin x)' = \cos x; && (\cos x)' = -\sin x;\\
&(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; && (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};\\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; && (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\
&(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; && (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

4.1.3. Dalmens išvestinė

Dalmens išvestinės formulė:

$$
\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}} \tag{4.1}
$$

4.1 pavyzdys. Raskime dalmens

$$
y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}
$$

išvestinę.

Sprendimas. Dalmens išvestinės ieškome remiantis (4.1) formule:

$$
y' = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)' = \frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2},
$$

o reiškinio $\mathrm{e}^x - 1$ išvestinės ieškome pagal formulę $(u + v)' = u' + v'$, tuomet turėsime

$$
\begin{aligned}
&\frac{(e^x - 1)'(e^x + 1) - (e^x + 1)'(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}\\
&= \frac{\big((e^x)' - (1)'\big)(e^x + 1) - \big((e^x)' + (1)'\big)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}.
\end{aligned}
$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti e^x ir 1 išvestines:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\big((e^x)' - (1)'\big)(e^x + 1) - \big((e^x)' + (1)'\big)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}\\
&= \frac{(e^x - 0)(e^x + 1) - (e^x + 0)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}.
\end{aligned}
$$

Atlikę algebrinius pertvarkius, turėsime

$$\frac{(e^x-0)(e^x+1)-(e^x+0)(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^xe^x+e^x-e^xe^x+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Atsakymas. $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

4.1 savarankiško darbo užduotis. Pasinaudoję dalmens išvestinės formule ir pagrindinių funkcijų išvestinėmis, raskite šių funkcijų išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.1.1.	$y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$	4.1.11.	$y=\dfrac{e^x-3}{4-e^x}$
4.1.2.	$y=\dfrac{e^x-2}{e^x+2}$	4.1.12.	$y=\dfrac{e^x-3}{e^x-4}$
4.1.3.	$y=\dfrac{e^x+1}{1-e^x}$	4.1.13.	$y=\dfrac{e^x+3}{e^x-4}$
4.1.4.	$y=\dfrac{e^x-1}{2-e^x}$	4.1.14.	$y=\dfrac{e^x-3}{e^x+4}$
4.1.5.	$y=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$	4.1.15.	$y=\dfrac{e^x+3}{e^x+4}$
4.1.6.	$y=\dfrac{1-e^x}{e^x+1}$	4.1.16.	$y=\dfrac{e^x+3}{5-e^x}$
4.1.7.	$y=\dfrac{1-e^x}{e^x-3}$	4.1.17.	$y=\dfrac{e^x-3}{5+e^x}$
4.1.8.	$y=\dfrac{2-e^x}{e^x-3}$	4.1.18.	$y=\dfrac{3-e^x}{5+e^x}$
4.1.9.	$y=\dfrac{2-e^x}{e^x+3}$	4.1.19.	$y=\dfrac{4-e^x}{e^x-5}$
4.1.10.	$y=\dfrac{e^x-2}{3-e^x}$	4.1.20.	$y=\dfrac{4+e^x}{e^x+5}$

4.2 pavyzdys. Raskime dalmens

$$y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

išvestinę ir apskaičiuokime jos reikšmę taške $x = \frac{\pi}{2}$.

Sprendimas. Dalmens išvestinės ieškome remiantis formule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}:$$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}, \end{aligned}$$

o reiškinio $(\sin x - \cos x)'$ išvestinės ieškome pagal formulę $(u+v)' = u' + v'$, tuomet turėsime

$$\begin{aligned} &\frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\left((\sin x)' - (\cos x)'\right)(\sin x + \cos x) - \left((\sin x)' + (\cos x)'\right)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Dabar pasinaudoję išvestinių lentele, galime apskaičiuoti $\sin x$ ir $\cos x$ išvestines:

$$\begin{aligned} &\frac{\left((\sin x)' - (\cos x)'\right)(\sin x + \cos x) - \left((\sin x)' + (\cos x)'\right)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x - (-\sin x))(\sin x + \cos x) - (\cos x + (-\sin x))(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Atlikę algebrinius pertvarkius, gauname

$$\begin{aligned} &\frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{2\sin^2 x + 2\cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{(\sin x + \cos x)^2}. \end{aligned}$$

Remdamiesi formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, gauname

$$y' = \frac{2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2 \cdot 1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Apskaičiuojame reiškinio reikšmę taške $x = \frac{\pi}{2}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2}{(1+0)^2} = \frac{2}{1^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Atsakymas. $\dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$; 2.

4.2 savarankiško darbo užduotis. Pasinaudoję dalmens išvestinės formule ir pagrindinių funkcijų išvestinėmis, raskite šių funkcijų išvestines ir apskaičiuokite reikšmes taškuose:

Užduotis	Funkcija	Taškas	Užduotis	Funkcija	Taškas
4.2.1.	$y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$	$x = 0$	4.2.11.	$y = \dfrac{3 - \sin x}{\sin x + 3}$	$x = 0$
4.2.2.	$y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$	4.2.12.	$y = \dfrac{3 + \sin x}{\sin x - 3}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$
4.2.3.	$y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$	$x = -\dfrac{\pi}{2}$	4.2.13.	$y = \dfrac{2 + \sin x}{\sin x - 2}$	$x = -\dfrac{\pi}{2}$
4.2.4.	$y = \dfrac{\sin x + 2}{\sin x - \cos x}$	$x = 0$	4.2.14.	$y = \dfrac{4 - \sin x}{\sin x - 3}$	$x = 0$
4.2.5.	$y = \dfrac{1 + \cos x}{\cos x - \sin x}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$	4.2.15.	$y = \dfrac{6 + \sin x}{6 - \sin x}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$
4.2.6.	$y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + 1}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$	4.2.16.	$y = \dfrac{5 - \sin x}{\sin x + 6}$	$x = -\dfrac{\pi}{2}$
4.2.7.	$y = \dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x}$	$x = 0$	4.2.17.	$y = \dfrac{7 + \sin x}{\cos x - 7}$	$x = \dfrac{\pi}{4}$
4.2.8.	$y = \dfrac{\sin x + 2}{\sin x - 3}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$	4.2.18.	$y = \dfrac{7 + \cos x}{\sin x - 6}$	$x = \dfrac{\pi}{6}$
4.2.9.	$y = \dfrac{3 + \cos x}{3 - \sin x}$	$x = -\dfrac{\pi}{2}$	4.2.19.	$y = \dfrac{5 + \sin x}{\cos x - 6}$	$x = \dfrac{\pi}{3}$
4.2.10.	$y = \dfrac{2 - \sin x}{\sin x + 2}$	$x = 0$	4.2.20.	$y = \dfrac{4 - \cos x}{\cos x - 3}$	$x = \dfrac{\pi}{2}$

4.3 pavyzdys. Raskime dalmens

$$y = \frac{x^2}{1+x}$$

išvestinę ir apskaičiuokime reikšmę taške $x = 1$.

Sprendimas. Dalmens išvestinės ieškome remiantis formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$ $= \frac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{(x^2)'(1+x) - (1+x)'x^2}{(1+x)^2},$$

o reiškinio $(1+x)'$ išvestinės ieškome pagal formulę $(\mathrm{u}+\mathrm{v})'$ $= \mathrm{u}' + \mathrm{v}'$, tuomet turėsime

$$y' = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{(x^2)'(1+x) - (1' + (x)')x^2}{(1+x)^2}.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti x^2, x ir 1 išvestines:

$$\frac{(x^2)'(1+x) - (1' + (x)')x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x(1+x) - (0+1)x^2}{(1+x)^2}.$$

Atlikę algebrinius pertvarkius, turime:

$$\frac{2x(1+x) - (0+1)x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x(1+x) - 1x^2}{(1+x)^2}$$
$$= \frac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x + x^2}{(1+x)^2}.$$

Apskaičiuojame reiškinio reikšmę taške $x = 1$:

$$y'(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1^2}{(1+1)^2} = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Atsakymas. $\frac{2x + x^2}{(1+x)^2}$; $\frac{3}{4}$.

4.3 savarankiško darbo užduotis. Pasinaudoję dalmens išvestinės formule ir pagrindinių funkcijų išvestinėmis, raskite šių funkcijų išvestines ir apskaičiuokite reikšmes taškuose:

Užduotis	Funkcija	Taškas	Užduotis	Funkcija	Taškas
4.3.1.	$y = \dfrac{x^3}{1+x}$	$x = 1$	4.3.11.	$y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$	$x = 2$
4.3.2.	$y = \dfrac{x^3}{1-x}$	$x = 0$	4.3.12.	$y = \dfrac{x^5}{x^2-1}$	$x = 3$
4.3.3.	$y = \dfrac{x^2}{1-x}$	$x = 2$	4.3.13.	$y = \dfrac{x^4}{2-x^2}$	$x = 1$
4.3.4.	$y = \dfrac{x^4}{1-x}$	$x = 3$	4.3.14.	$y = \dfrac{x^4}{1+x}$	$x = 2$
4.3.5.	$y = \dfrac{x^3}{2+x}$	$x = -1$	4.3.15.	$y = \dfrac{x}{7-x}$	$x = 2$
4.3.6.	$y = \dfrac{x^3}{2-x}$	$x = 1$	4.3.16.	$y = \dfrac{x-6}{x+7}$	$x = 2$
4.3.7.	$y = \dfrac{x}{2-x}$	$x = 0$	4.3.17.	$y = \dfrac{x-3}{x+3}$	$x = -1$
4.3.8.	$y = \dfrac{x}{2+x}$	$x = -1$	4.3.18.	$y = \dfrac{x^3}{3-x}$	$x = 0$
4.3.9.	$y = \dfrac{x}{1+x^2}$	$x = -2$	4.3.19.	$y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$	$x = -1$
4.3.10.	$y = \dfrac{x}{1-x^2}$	$x = 0$	4.3.20.	$y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$	$x = 1$

4.1.4. Sudėtinių funkcijų išvestinės

Sudėtinės funkcijos $y = f(u(x))$ išvestinė randama pagal formulę

$$y' = f'(u(x))u'(x). \tag{4.2}$$

Sudėtinių funkcijų išvestinės:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'; \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}};$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'; \qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}; \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a};$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'; \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}; \qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u};$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

4.4 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite funkcijos

$$y = (1 - x^2)^4$$

išvestinę.

Sprendimas. Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele (nes mūsų funkcija yra sudėtinė), ieškome išvestinės remiantis (4.2) formule

$$y' = \left(\left(1 - x^2\right)^4\right)' = \left[\left(u^4\right)' = 4u^{4-1} \cdot u'\right] = 4\left(1 - x^2\right)^3\left(1 - x^2\right)',$$

o reiškinio $1 - x^2$ išvestinės ieškome pagal formulę $(u + v)' = u' + v'$, tada gauname

$$4\left(1 - x^2\right)^3\left(1 - x^2\right)' = 4\left(1 - x^2\right)^3\left(1' - \left(x^2\right)'\right).$$

Dabar jau galime remtis pagrindinių išvestinių lentele ir apskaičiuoti x^2 ir 1 išvestines:

$$4\left(1 - x^2\right)^3\left(1' - \left(x^2\right)'\right) = 4\left(1 - x^2\right)^3(0 - 2x).$$

Atlikę aritmetinius veiksmus, turėsime

$$4\left(1 - x^2\right)^3(0 - 2x) = 4\left(1 - x^2\right)^3(-2x) = -8x\left(1 - x^2\right)^3.$$

Atsakymas. $y' = -8x\left(1 - x^2\right)^3$.

4.4 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite šių funkcijų išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.4.1.	$y = \left(1 - x^2\right)^3$	4.4.11.	$y = \left(1 + x^2\right)^5$
4.4.2.	$y = \left(1 - x^2\right)^2$	4.4.12.	$y = \left(1 - x^2\right)^5$
4.4.3.	$y = \left(1 + x^2\right)^4$	4.4.13.	$y = \left(x^2 - 1\right)^5$
4.4.4.	$y = \left(2 + x^2\right)^4$	4.4.14.	$y = \left(-x^2 - 1\right)^5$
4.4.5.	$y = \left(x^2 - 1\right)^4$	4.4.15.	$y = \left(1 + x^2\right)^6$
4.4.6.	$y = \left(x^2 - 1\right)^3$	4.4.16.	$y = \left(1 - x^2\right)^6$
4.4.7.	$y = \left(x^2 - 5\right)^3$	4.4.17.	$y = \left(-1 - x^2\right)^6$
4.4.8.	$y = \left(-x^2 - 5\right)^3$	4.4.18.	$y = \left(1 + x^2\right)^7$

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.4.9.	$y=\left(-x^2-5\right)^2$	4.4.19.	$y=\left(2+x^2\right)^7$
4.4.10.	$y=\left(-1-x^2\right)^4$	4.4.20.	$y=\left(3-x^2\right)^8$

4.5 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite funkcijos

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

išvestinę.

Sprendimas. Ieškome išvestinės pagal (4.2) formulę. Tuomet turėsime

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \left[(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\right] = \left(\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)', \end{aligned}$$

reiškinio $1-x^2$ išvestinės ieškome remiantis formule $(u+v)'=u'+v'$, tada gauname

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)' = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1'-\left(x^2\right)'\right).$$

Remdamiesi pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti išvestines x^2 ir 1:

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1'-\left(x^2\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(0-2x).$$

Atlikę algebrinius pertvarkius, turėsime

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(0-2x) = \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Atsakymas. $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.5 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite šias išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.5.1.	$y = \sqrt{2 - x^2}$	4.5.11.	$y = \sqrt[4]{2 - x^2}$
4.5.2.	$y = \sqrt{x^2 + 2}$	4.5.12.	$y = \sqrt[4]{x^2 - 2}$
4.5.3.	$y = \sqrt{x^2 - 2}$	4.5.13.	$y = \sqrt[4]{x^2 + 3}$
4.5.4.	$y = \sqrt{x^2 - 1}$	4.5.14.	$y = \sqrt[4]{-x^2 - 3}$
4.5.5.	$y = \sqrt{-x^2 - 1}$	4.5.15.	$y = \sqrt[4]{-x^2 - 5}$
4.5.6.	$y = \sqrt{-x^2 - 3}$	4.5.16.	$y = \sqrt[4]{x^2 + 2}$
4.5.7.	$y = \sqrt[3]{-x^2 - 3}$	4.5.17.	$y = \sqrt[4]{-2 - x^2}$
4.5.8.	$y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$	4.5.18.	$y = \sqrt[4]{-3 - x^2}$
4.5.9.	$y = \sqrt[3]{x^2 - 2}$	4.5.19.	$y = \sqrt[5]{x^2 - 2}$
4.5.10.	$y = \sqrt[3]{2 - x^2}$	4.5.20.	$y = \sqrt[5]{x^2 + 2}$

4.6 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite išvestinę:

$$y = \ln \cos x.$$

Sprendimas. Ieškome išvestinės remiantis (4.2) formule. Tuomet turėsime

$$y' = (\ln \cos x)' = \left[(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' \right] = \frac{1}{\cos x} (\cos x)'.$$

Pasinaudoję pagrindinių išvestinių lentele, galime apskaičiuoti funkcijos $\cos x$ išvestinę:

$$\frac{1}{\cos x} (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

Atsakymas. $y' = -\operatorname{tg} x.$

4.6 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite šias išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.6.1.	$y = \ln \sin x$	4.6.11.	$y = \ln 3x$
4.6.2.	$y = \ln \ln x$	4.6.12.	$y = \ln 4x$
4.6.3.	$y = \ln 2x$	4.6.13.	$y = \ln(-\sin x)$
4.6.4.	$y = \ln e^x$	4.6.14.	$y = \ln(-3x)$
4.6.5.	$y = \ln \arccos x$	4.6.15.	$y = \ln(-\cos x)$
4.6.6.	$y = \ln \arcsin x$	4.6.16.	$y = \ln(-4x)$
4.6.7.	$y = \ln \operatorname{arctg} x$	4.6.17.	$y = \ln(-2x)$

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.6.8.	$y = \ln \operatorname{arcctg} x$	4.6.18.	$y = \ln(-\arccos x)$
4.6.9.	$y = \ln \operatorname{tg} x$	4.6.19.	$y = \ln(-\operatorname{ctg} x)$
4.6.10.	$y = \ln \operatorname{ctg} x$	4.6.20.	$y = \ln(-\operatorname{tg} x)$

4.7 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite išvestinę:

$$y = e^{x^2}.$$

Sprendimas. Ieškome išvestinės remiantis (4.2) formule arba sudėtinių funkcijų išvestinėmis:

$$y' = \left(e^{x^2}\right)' = \left[(e^u)' = e^u \cdot u'\right] = e^{x^2}\left(x^2\right)'.$$

Jau galime pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele ir apskaičiuoti x^2 išvestinę:

$$e^{x^2}\left(x^2\right)' = 2xe^{x^2}.$$

Atsakymas. $y' = 2xe^{x^2}$.

4.7 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite šias išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.7.1.	$y = e^{x^3}$	4.7.11.	$y = e^{6x}$
4.7.2.	$y = e^{x^4}$	4.7.12.	$y = e^{x^6}$
4.7.3.	$y = e^{2x}$	4.7.13.	$y = e^{7x}$
4.7.4.	$y = e^{4x}$	4.7.14.	$y = e^{8x}$
4.7.5.	$y = e^{x^5}$	4.7.15.	$y = e^{3x}$
4.7.6.	$y = e^{\cos x}$	4.7.16.	$y = e^{-\cos x}$
4.7.7.	$y = e^{\sin x}$	4.7.17.	$y = e^{-\sin x}$
4.7.8.	$y = e^{\operatorname{tg} x}$	4.7.18.	$y = e^{-\operatorname{tg} x}$
4.7.9.	$y = e^{\operatorname{ctg} x}$	4.7.19.	$y = e^{-\operatorname{ctg} x}$
4.7.10.	$y = e^{5x}$	4.7.20.	$y = e^{-x^2}$

4.8 pavyzdys. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite išvestinę:

$$y = \arccos 3x.$$

Sprendimas. Kadangi negalime iš karto pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, nes mūsų funkcija yra sudėtinė, todėl ieškome išvestinės remiantis (4.2) formule

$$y' = (\arccos(3x))' = \left[(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,(3x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,(3x)'\,.$$

Dabar jau galime pasinaudoti pagrindinių išvestinių lentele, apskaičiuoti $3x$ išvestinę ir gauti atsakymą:

$$-\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,(3x)' = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Atsakymas. $y' = -\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

4.8 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi sudėtinių funkcijų išvestinėmis, raskite šias išvestines:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.8.1.	$y = \arccos(4x)$	4.8.11.	$y = \arcsin(6x)$
4.8.2.	$y = \arccos(x^2)$	4.8.12.	$y = \arcsin(7x)$
4.8.3.	$y = \arccos(5x)$	4.8.13.	$y = \arccos(6x)$
4.8.4.	$y = \arccos(x^3)$	4.8.14.	$y = \arccos(7x)$
4.8.5.	$y = \arccos(2x)$	4.8.15.	$y = \arccos(x^4)$
4.8.6.	$y = \arcsin(4x)$	4.8.16.	$y = \arcsin(x^4)$
4.8.7.	$y = \arcsin(x^2)$	4.8.17.	$y = \arccos(8x)$
4.8.8.	$y = \arcsin(5x)$	4.8.18.	$y = \arcsin(8x)$
4.8.9.	$y = \arcsin(x^3)$	4.8.19.	$y = \arccos(x^5)$
4.8.10.	$y = \arcsin(5x)$	4.8.20.	$y = \arcsin(x^5)$

4.1.5. Liopitalio taisyklė

Sakome, kad dviejų funkcijų santykis $\frac{f(x)}{g(x)}$, kai $x \to a$ (a gali būti baigtinis ar begalinis) yra neapibrėžtumas $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, jei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty\right)$.

Liopitalio taisyklė. Tegul funkcijos f ir g apibrėžtos ir diferencijuojamos kokioje nors taško a aplinkoje, išskyrus gal tik patį tašką a. Be to, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty)$, o išvestinė $g'(x)$ nelygi nuliui nė viename minėtos aplinkos taške. Jei šiomis sąlygomis egzistuoja (baigtinė ar begalinė) riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tai egzistuos ir riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ir bus teisinga šitokia lygybė: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

1 pastaba. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ gali neegzistuoti, nors funkcijų f ir g santykio riba $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ir egzistuoja. Pavyzdžiui, reiškinys

$$\frac{\left(x^2 \cos \frac{1}{x}\right)'}{(\ln(1+x))'} = \frac{2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} = 2x(1+x)\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

kai $x \to 0$, ribos neturi, tačiau

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}}{\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{0}{\ln e} = \frac{0}{1} = 0.$$

2 pastaba. Jeigu $f'(x)$ ir $g'(x)$ tenkina tas pačias sąlygas, kaip ir funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, tai Liopitalio taisyklę galima taikyti dar kartą. Tuomet: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$. Dažnai Liopitalio taisyklę reikia taikyti keletą kartų.

4.9 pavyzdys. Remdamiesi Liopitalio taisykle, raskite ribą

$$\lim_{x\to +0} x^2 \ln x.$$

Sprendimas. Neapibrėžtumas $0\cdot\infty$. Reiškinį pertvarkome į neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to +0} x^2 \ln x = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}.$$

Dabar jau galime taikyti Liopitalio taisyklę. Tuomet turėsime

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}.$$

Atlikę algebrinius pertvarkius, apskaičiuojame ribą

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}}\right)=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^3}{2x}\right)=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=-\frac{0}{2}=0.$$

Atsakymas. 0.

4.9 savarankiško darbo užduotis. Taikydami Liopitalio taisyklę, raskite šias ribas:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.9.1.	$\lim\limits_{x\to+0} x^3\ln x$	4.9.11.	$\lim\limits_{x\to+0} x^9\ln x$
4.9.2.	$\lim\limits_{x\to+0} x\ \ln x$	4.9.12.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{15}\ln x$
4.9.3.	$\lim\limits_{x\to+0} x^4\ln x$	4.9.13.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{10}\ln x$
4.9.4.	$\lim\limits_{x\to+0} x^5\ln x$	4.9.14.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{16}\ln x$
4.9.5.	$\lim\limits_{x\to+0} x^6\ln x$	4.9.15.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{17}\ln x$
4.9.6.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{13}\ln x$	4.9.16.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{18}\ln x$
4.9.7.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{12}\ln x$	4.9.17.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{19}\ln x$
4.9.8.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{14}\ln x$	4.9.18.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{11}\ln x$
4.9.9.	$\lim\limits_{x\to+0} x^7\ln x$	4.9.19.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{10}\ln x$
4.9.10.	$\lim\limits_{x\to+0} x^8\ln x$	4.9.20.	$\lim\limits_{x\to+0} x^{12}\ln x$

4.10 pavyzdys. Remdamiesi Liopitalio taisykle, raskite šią ribą:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}.$$

Sprendimas. Kadangi $2^\infty=\infty$, turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Todėl iš karto taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(2^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2},$$

įrašę vietoje x begalybę, dar turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$. Remdamiesi 2 pastaba, taikome Liopitalio taisyklę dar kartą:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(2^x\ln 2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\ln 2\cdot 2^x\ln 2}.$$

Kadangi jau neturime neapibrėžtumo, įrašome vietoje x begalybę ir apskaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\ln 2\cdot 2^x\ln 2}=\frac{2}{\ln 2\cdot 2^\infty\ln 2}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Atsakymas. 0.

4.10 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi Liopitalio taisykle, raskite šias ribas:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.10.1.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{3^x}$	4.10.11.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{6^x}$
4.10.2.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{4^x}$	4.10.12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{6^x}$
4.10.3.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{5^x}$	4.10.13.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{3^x}$
4.10.4.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{6^x}$	4.10.14.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{4^x}$
4.10.5.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{7^x}$	4.10.15.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{7^x}$
4.10.6.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{2^x}$	4.10.16.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{8^x}$
4.10.7.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{3^x}$	4.10.17.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{3^x}$
4.10.8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{4^x}$	4.10.18.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{4^x}$
4.10.9.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{5^x}$	4.10.19.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{5^x}$
4.10.10.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{6^x}$	4.10.20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{6^x}$

4.1.6. Funkcijos diferencialas

4.1.6.1 Diferencialo apibrėžimas. Funkcijos $y = f(x)$ *diferencialu* (žymime dy) vadinama sandauga $f'(x) \cdot \Delta x$, t. y.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Diferencialo formulėje vietoje Δx galima rašyti dx, nes pagal apibrėžimą funkcijos $y = x$ diferencialas $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Taigi

$$dy = f'(x)dx.$$

Iš čia išplaukia

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)},$$

t. y. *funkcijos išvestinė lygi funkcijos diferencialo ir argumento diferencialo santykiui.*

Funkcijos diferencialas dažnai taikomas matematikoje, skaičiuojant funkcijų reikšmes, taip pat vertinant paklaidų didumą. Tai daroma remiantis tuo, kad *funkcijos pokytis yra apytiksliai lygus funkcijos diferencialui, kai argumento pokytis mažas*, t. y. $\Delta y \approx dy$. Ši lygybė išplaukia iš išvestinės apibrėžimo $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Funkcijos $y = f(x)$ diferencialo diferencialas vadinamas *antruoju diferencialu* (arba antrosios eilės diferencialu) ir žymimas d^2y arba $d^2f(x)$. Taigi $d^2y = d(dy)$. Analogiškai $d^3y = d(d^2y)$ ir t. t. Rasime antros eilės diferencialą: $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx)$
$= d(f'(x))dx = (f'(x)dx)dx = f'(x)dx^2$. Taigi

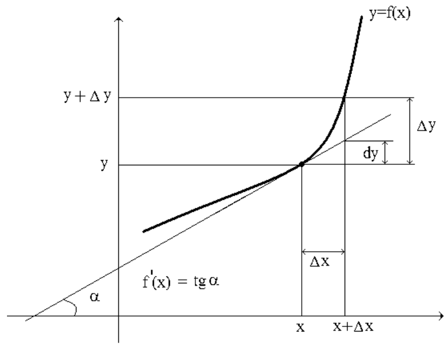
$$d^2y = f'(x)dx^2.$$

4.1.6.2. Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams. Imkime funkcijos $y = f(x)$ pokytį ir diferencialą taške $x = a$:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a), \quad dy = f'(a)\Delta x.$$

Kadangi $\Delta y \approx dy$, tai iš užrašytųjų lygybių gauname

$$f(a + \Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x$$



2 pav. Funkcijos diferencialo geometrinė prasmė

arba

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{4.3}$$

Jeigu $a + \Delta x = x$, $\Delta x = x - a$, tai vietoje (4.3) formulės turėsime formulę:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a)\,.$$

Atskiru atveju, kai $a = 0$, gauname

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x. \tag{4.4}$$

4.11 pavyzdys. Taikydami diferencialą, užrašykime apytikslę formulę funkcijai

$$f(x) = \sqrt{1 + x},$$

kai $x \to 0$ ir apskaičiuokime $f(0{,}12)$.

Sprendimas. Remdamiesi (4.4) formule, užrašysime apytikslę šios funkcijos formulę. Pirmiausia apskaičiuojame šios funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{1+x})' = \left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \left[\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'\right] \\ &= \frac{1}{2}\,(1+x)^{-\frac{1}{2}}\,(1+x)' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}. \end{aligned}$$

Apskaičiuojame išvestinės reikšmę taške $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

Ieškome funkcijos reikšmės taške $x = 0$:

$$f(0) = \sqrt{1+0} = 1.$$

Pritaikę (4.4) formulę ir įrašę gautąsias reikšmes, turėsime

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot x.$$

Taigi

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \text{kai} \quad x \to 0.$$

Apskaičiuojame $\sqrt{1{,}12} \approx 1 + \frac{0{,}12}{2} = 1{,}06$. Atkreipkime dėmesį, kad tikslioji reikšmė $\sqrt{1{,}12} = 1{,}0583005\ldots$ ir apskaičiuotos apytikslės reikšmės *santykinė paklaida* yra

$$\frac{|1{,}0583005\ldots - 1{,}06|}{1{,}0583005\ldots} \cdot 100\ \% \approx 0{,}16\ \%.$$

Atsakymas. $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$, kai $x \to 0$; 1,06.

4.11 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi apytikslio skaičiavimo formule (4.4), apskaičiuokite šių funkcijų apytiksles reikšmes:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.11.1.	$f(x) = \sqrt{1-x}$, $x = -0{,}12$	4.11.11.	$f(x) = \sqrt[7]{1+x}$, $x = 0{,}12$
4.11.2.	$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $x = -0{,}13$	4.11.12.	$f(x) = \sqrt[8]{1-x}$, $x = -0{,}12$
4.11.3.	$f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, $x = 0{,}13$	4.11.13.	$f(x) = \sqrt[9]{1+x}$, $x = 0{,}13$
4.11.4.	$f(x) = \sqrt[4]{1+x}$, $x = 0{,}09$	4.11.14.	$f(x) = \sqrt[9]{1-x}$, $x = -0{,}13$
4.11.5.	$f(x) = \sqrt[4]{1-x}$, $x = 0{,}08$	4.11.15.	$f(x) = \sqrt[10]{1+x}$, $x = 0{,}08$
4.11.6.	$f(x) = \sqrt[5]{1-x}$, $x = -0{,}10$	4.11.16.	$f(x) = \sqrt[10]{1-x}$, $x = -0{,}10$
4.11.7.	$f(x) = \sqrt[5]{1+x}$, $x = -0{,}14$	4.11.17.	$f(x) = \sqrt[11]{1+x}$, $x = -0{,}14$
4.11.8.	$f(x) = \sqrt[6]{1-x}$, $x = 0{,}15$	4.11.18.	$f(x) = \sqrt[11]{1-x}$, $x = 0{,}09$
4.11.9.	$f(x) = \sqrt[6]{1+x}$, $x = 0{,}12$	4.11.19.	$f(x) = \sqrt[12]{1-x}$, $x = 0{,}15$
4.11.10.	$f(x) = \sqrt[7]{1-x}$, $x = -0{,}17$	4.11.20.	$f(x) = \sqrt[12]{1+x}$, $x = 0{,}06$

4.12 pavyzdys. Taikydami diferencialą, užrašykite apytikslę formulę:

$$f(x) = \ln(1 + x),\ x \to 0.$$

Sprendimas. Remdamiesi (4.4) formule, užrašysime apytikslę šios funkcijos formulę. Pirmiausia apskaičiuojame šios funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = (\ln(1 + x))' = \left[(\ln u)' = \frac{1}{u}u'\right] = \frac{1}{(1 + x)}(1 + x)' = \frac{1}{1 + x},$$

radę išvestinę, apskaičiuojame jos reikšmę taške 0:

$$f'(0) = \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ieškome funkcijos reikšmės taške 0:

$$f(0) = \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0.$$

Pritaikę (4.4) formulę ir įrašę gautąsias reikšmes, turėsime

$$f(x) \approx 0 + 1 \cdot x \approx x.$$

Taigi

$$\ln(1 + x) \approx x, x \to 0.$$

Atsakymas. x, $x \to 0$.

4.12 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi apytikslio skaičiavimo formule (4.4), užrašykite apytikslę formulę šioms funkcijoms:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.12.1.	$f(x) = \ln(1 - x),\ x \to 0$	4.12.11.	$f(x) = \sin 2x,\ x \to 0$
4.12.2.	$f(x) = \sin x,\ x \to 0$	4.12.12.	$f(x) = -\sin 2x,\ x \to 0$
4.12.3.	$f(x) = \cos x,\ x \to 0$	4.12.13.	$f(x) = \cos 2x,\ x \to 0$
4.12.4.	$f(x) = -\ln(1 - x),\ x \to 0$	4.12.14.	$f(x) = -\cos 2x,\ x \to 0$
4.12.5.	$f(x) = e^x,\ x \to 0$	4.12.15.	$f(x) = -2e^x,\ x \to 0$
4.12.6.	$f(x) = -\sin x,\ x \to 0$	4.12.16.	$f(x) = 2e^x,\ x \to 0$
4.12.7.	$f(x) = -\cos x,\ x \to 0$	4.12.17.	$f(x) = -2\ln(1 + x),\ x \to 0$
4.12.8.	$f(x) = -e^x,\ x \to 0$	4.12.18.	$f(x) = 2\ln(1 + x),\ x \to 0$
4.12.9.	$f(x) = \mathrm{tg}\, x,\ x \to 0$	4.12.19.	$f(x) = 2\ln(1 - x),\ x \to 0$
4.12.10.	$f(x) = -\ln(1 + x),\ x \to 0$	4.12.20.	$f(x) = -2\ln(1 - x),\ x \to 0$

4.1.7. Teiloro formulė

Pagal Lagranžo teoremą

$$f(x) = f\,(a) + f'\,(\xi)\,(x - a)\,,$$

jei tik funkcija f – tolydi ir diferencijuojama intervale $(a - \gamma, a + \gamma)$ (čia γ – teigiamas skaičius), o ξ yra tarp x ir a.

Jeigu funkcija f yra $(n + 1)$-ą kartą diferencijuojama intervale $(a - \gamma, a + \gamma)$, kuriam priklauso ir x, $x \neq a$, tada egzistuoja taškas ξ, esantis tarp x ir a, toks, kad

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Paskutinis dešinės pusės dėmuo yra vadinamas *Teiloro formulės liekamuoju nariu*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\,(\xi)}{(n + 1)!}\,(x - a)^{n+1}\,.$$

4.13 pavyzdys. Užrašykite pirmuosius tris Teiloro formulės narius:

$$f(x) = \sqrt[3]{8 + x}, \quad x \to 0.$$

Sprendimas. Remdamiesi (4.5) formule, užrašysime tris pirmuosius Teiloro formulės narius. Visų pirma reikia apskaičiuoti šios funkcijos išvestinę:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{8 + x}\right)' = \left((8 + x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \left[\left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot u'\right] \\ &= \frac{1}{3}\,(8 + x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (8 + x)' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8 + x)^2}}. \end{aligned}$$

Dabar apskaičiuojame šios funkcijos antrąją išvestinę:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+x)^2}}\right)' = \left(\frac{1}{3}(8+x)^{-\frac{2}{3}}\right)'$$
$$= \left[\left(u^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}} \cdot u'\right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(8+x)^{-\frac{5}{3}}(8+x)'$$
$$= -\frac{2}{9\sqrt[3]{(8+x)^5}}.$$

Pirmieji trys Teiloro formulės nariai atrodo taip:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2,$$

kai $a = 0$, turėsime

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f'(0)}{2!}x^2. \tag{4.6}$$

Todėl reikia apskaičiuoti pirmosios ir antrosios išvestinės reikšmę taške 0:

$$f'(0) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(8+0)^2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{64}} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12},$$

$$f'(0) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{(8+0)^5}} = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 8 \cdot 4}$$
$$= -\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 2} = -\frac{1}{144}.$$

Belieka apskaičiuoti funkcijos reikšmę taške 0

$$f(0) = \sqrt[3]{8+0} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Gautus rezultatus įrašę į (4.6) formulę, turėsime:

$$\sqrt[3]{8+x} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot x + \frac{-\frac{1}{144}}{2!} \cdot x^2 = 2 + \frac{1}{12} \cdot x - \frac{1}{144 \cdot 2} \cdot x^2 = 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288}.$$

Atsakymas. $\sqrt[3]{8+x} \approx 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288}$, kai $x \to 0$.

4.13 savarankiško darbo užduotis. Remdamiesi Teiloro formule, apskaičiuokite šių funkcijų tris Teiloro formulės narius:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.13.1.	$f(x) = \sqrt[3]{8-x},\ x \to 0$	4.13.11.	$f(x) = \sqrt{49-x},\ x \to 0$
4.13.2.	$f(x) = \sqrt[3]{27-x},\ x \to 0$	4.13.12.	$f(x) = \sqrt[3]{64-x},\ x \to 0$
4.13.3.	$f(x) = \sqrt{4-x},\ x \to 0$	4.13.13.	$f(x) = \sqrt{64-x},\ x \to 0$
4.13.4.	$f(x) = \sqrt{4+x},\ x \to 0$	4.13.14.	$f(x) = \sqrt[3]{125-x},\ x \to 0$
4.13.5.	$f(x) = \sqrt{16-x},\ x \to 0$	4.13.15.	$f(x) = \sqrt{81-x},\ x \to 0$
4.13.6.	$f(x) = \sqrt{16+x},\ x \to 0$	4.13.16.	$f(x) = \sqrt{100-x},\ x \to 0$
4.13.7.	$f(x) = \sqrt{25+x},\ x \to 0$	4.13.17.	$f(x) = \sqrt[3]{216-x},\ x \to 0$
4.13.8.	$f(x) = \sqrt{25-x},\ x \to 0$	4.13.18.	$f(x) = \sqrt{121-x},\ x \to 0$
4.13.9.	$f(x) = \sqrt[3]{27+x},\ x \to 0$	4.13.19.	$f(x) = \sqrt[3]{343-x},\ x \to 0$
4.13.10.	$f(x) = \sqrt{36-x},\ x \to 0$	4.13.20.	$f(x) = \sqrt{144-x},\ x \to 0$

4.2. Išvestinių taikymas

4.2.1. Funkcijos grafiko liestinės taške lygtis

Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške $x = a$ lygtis yra

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

4.14 pavyzdys. Užrašykime kreivės

$$y = x^3 - 3x$$

liestinės, nubrėžtos per tašką $A(2; 2)$, lygtį (žr. 3 pav.).

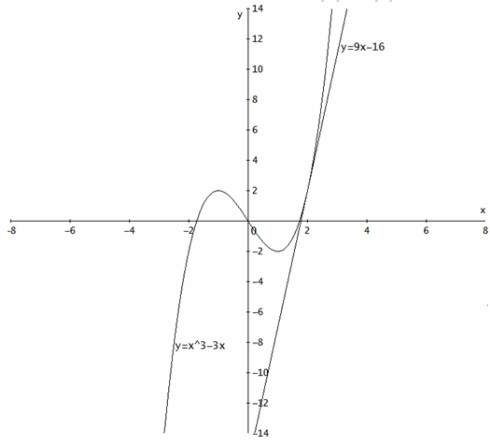
Sprendimas. Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške a lygtis bendruoju atveju:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Turime sąlygą: $f(a) = f(2) = 2$. Raskime funkcijos išvestinę $f'(x) = 3x^2 - 3$. Apskaičiuokime išvestinės reikšmę taške $a = 2$, t. y. $f'(a) = f'(2) = 9$. Užrašykime kreivės $y = x^3 - 3x$ liestinės, nubrėžtos per tašką $A(2; 2)$, lygtį:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = 2 + 9(x - 2) = 9x - 16.$$

Atsakymas. $y = 9x - 16$.



3 pav. Funkcijos $f(x)$ liestinė taške $A(2;2)$

4.14 savarankiško darbo užduotis. Užrašykite kreivės $y = f(x)$ liestinės, nubrėžtos per tašką a, lygtį.

Užduotis	Funkcija	a	Užduotis	Funkcija	a
4.14.1.	$y = x^2 - 2x$	3	4.14.11.	$y = x^2 - 2x$	-3
4.14.2.	$y = x^4 - 4x$	2	4.14.12.	$y = x^4 - 4x$	-2
4.14.3.	$y = x^5 - 10x$	2	4.14.13.	$y = x^5 - 10x$	-2
4.14.4.	$y = 2x^3 - 4x$	2	4.14.14.	$y = 2x^3 - 4x$	-2
4.14.5.	$y = 3x^2 - 2x$	1	4.14.15.	$y = 3x^2 - 2x$	-1
4.14.6.	$y = 2x^4 - x$	1	4.14.16.	$y = 2x^4 - x$	-1
4.14.7.	$y = 2x^2 + 3x$	2	4.14.17.	$y = 2x^2 + 3x$	-2
4.14.8.	$y = 4x^2 + 6x$	-2	4.14.18.	$y = 4x^2 + 6x$	2
4.14.9.	$y = 2x^3 - 8x$	3	4.14.19.	$y = 2x^3 - 8x$	-3
4.14.10.	$y = x^4 - 8x$	1	4.14.20.	$y = x^4 - 8x$	-1

4.2.2. Funkcijos didėjimo ir mažėjimo požymis

Pakankamus funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervale požymius išreiškia šios teoremos:

1. Jeigu išvestinė $f'(x)$ intervale $(a;b)$ teigiama, tai funkcija $f(x)$ tame intervale didėja.

2. Jeigu išvestinė $f'(x)$ intervale $(a;b)$ neigiama, tai funkcija $f(x)$ tame intervale mažėja.

4.15 pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija

$$y = \mathrm{arctg}x - x$$

visur mažėja.

Sprendimas. Rasime funkcijos $y = \mathrm{arctg}\, x - x$ išvestinę

$$y' = (\mathrm{arctg}x - x)' = \frac{-x^2}{1+x^2}.$$

Prilyginsime išvestinę nuliui, t. y.

$$y' = \frac{-x^2}{1+x^2} = 0,$$

ir išpręsime lygtį

$$\frac{-x^2}{1+x^2} = 0.$$

$$\begin{cases} -x^2 = 0, \\ 1+x^2 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \in (-\infty; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Sudarysime lentelę:

Intervalai	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
y' ženklas	$-$	$-$
y kitimas	$\downarrow$	$\downarrow$

$\downarrow$ žymime, kai funkcija mažėja; $\uparrow$ žymime, kai funkcija didėja. Atkeipsime dėmesį, kad taške $x = 0$ funkcija $y = \mathrm{arctg}x - x$ ekstremumo (maksimumo arba minimumo) neįgyja. Funkcija $y = \mathrm{arctg}x - x$ mažėja visoje skaičių tiesėje $x \in (-\infty; +\infty)$.

4.16 pavyzdys. Įrodykime nelygybę

$$x \geqslant \ln(1+x),\ x \geqslant 0.$$

Sprendimas. Pažymėsime

$$y(x) = x - \ln(1+x),\ x \geqslant 0$$

ir rasime funkcijos išvestinę:

$$y' = (x - \ln(1+x))' = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0,$$

nes $x \geqslant 0$.

Kadangi $y' = \dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$, kai $x \geqslant 0$, tai funkcija $y = x - \ln(1+x)$ didėja, kai $x \geqslant 0$. Apskaičiuosime funkcijos $y = x - \ln(1+x)$ reikšmę taške $x = 0$:

$$y(0) = 0 - \ln(1+0) = 0 - 0 = 0.$$

Kadangi funkcija $y = x - \ln(1+x)$ yra didėjanti, kai $x \geqslant 0$ ir $y(0) = 0$, tai, kai $x \geqslant 0$,

$$x - \ln(1+x) \geqslant 0,$$

$$x \geqslant \ln(1+x).$$

4.15 savarankiško darbo užduotis.

4.15.1. Įrodykite, kad funkcija $y = x^3 + x$ visur didėja.

4.15.2. Įrodykite, kad funkcija $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$ intervale $[1; +\infty)$ yra pastovi.

4.15.3. Įrodykite nelygybę $e^x \geqslant 1 + x$.

4.15.4. Įrodykite nelygybę $\dfrac{e^x}{x} > e$, kai $x > 1$.

4.15.5. Įrodykite nelygybę $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x$, $0 < x \leqslant 1$.

4.15.6. Įrodykite nelygybę $\operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}$, $0 < x \leqslant 1$.

4.15.7. Įrodykite, kad funkcija $y = x^2 - 4x + 7$ intervale $(-\infty; 2)$ mažėja, o intervale $(2; +\infty)$ didėja.

4.15.8. Įrodykite, kad funkcija $y = \dfrac{x+3}{x-5}$ mažėja visuose apibrėžimo srities intervaluose.

4.15.9. Funkcija išreikšta formule $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \dfrac{\pi}{3}}$. Įrodykite, kad ši funkcija didėja kiekviename taške, priklausančiame jos apibrėžimo sričiai.

4.15.10. Įrodykite, kad funkcija $y = 2x + \sin x$ didėja visoje skaičių ašyje.

4.2.3. Funkcijos iškilumo intervalai

4.17 pavyzdys. Raskime funkcijos

$$y = x \operatorname{arctg} x$$

grafiko iškilumo aukštyn ir žemyn intervalus.

Sprendimas. Raskime funkcijos $y = x \operatorname{arctg} x$ pirmosios ir antrosios eilės išvestines:

$$y' = (x \operatorname{arctg} x)' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2};$$

$$y'' = \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2+1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2}.$$

Funkcijos $y = x \operatorname{arctg} x$ antrosios eilės išvestinė nė viename taške nelygi nuliui, t. y. $\dfrac{2}{(1+x^2)^2} \neq 0$. Intervale $(-\infty; +\infty)$ funkcijos grafikas yra iškilas žemyn.

4.16 savarankiško darbo užduotis. Raskite nurodytų funkcijų grafiko iškilumo aukštyn ir žemyn intervalus:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.16.1.	$y = x \ln x$	4.16.6.	$y = \sqrt[3]{x^2}$
4.16.2.	$y = \ln(1+x^2)$	4.16.7.	$y = \dfrac{x^4}{x^3} - x^3$
4.16.3.	$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$	4.16.8.	$y = \sqrt[3]{x-2}$
4.16.4.	$y = \sqrt[3]{x^5}$	4.16.9.	$y = x + \dfrac{4}{x^2}$
4.16.5.	$y = \ln(1+x^3)$	4.16.10.	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$

4.2.4. Funkcijų tyrimas ir grafikų brėžimas

Literatūra: [Kub04] 84–87 p.; [Pek05] 193–196 p.; [Rum76] XVII skyrius, 293–306 p.

Funkcija $f : X \subset R \to R$ yra vadinama periodine, jeigu egzistuoja toks skaičius $T > 0$ kad:

a) T yra aibės X periodas;

b) $\forall x \in X \Rightarrow f(x + T) = f(x) = f(x - T)$, t. y. funkcijos periodų skaičius, kurio kartotiniais padidinus ar sumažinus argumento reikšmę, funkcijos reikšmės nepakinta.

Skaičius T vadinamas funkcijos periodu. Visų periodų pats mažiausias periodas vadinamas funkcijos f pagrindiniu periodu.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama lygine, jei kiekvienai x reikšmei galioja lygybė $f(-x) = f(x)$. Analogiškai, jei galioja lygybė $f(-x) = -f(x)$, tai funkcija vadinama nelygine. Funkcija gali būti nei lyginė, nei nelyginė.

Lyginės funkcijos grafikas simetriškas Oy ašies atžvilgiu, o nelyginės – koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

Funkcijos tyrimo schema:

1. Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį.
2. Nustatome funkcijos būdingąsias savybes (periodiškumą, lyginumą).
3. Randame funkcijos ekstremumus bei monotoniškumo intervalus.
4. Nustatome funkcijos iškilumo intervalus ir perlinkio taškus.
5. Randame funkcijos grafiko asimptotes ir ištiriame grafiko padėtį asimptočių atžvilgiu.
6. Randame funkcijos ribas, kai tolsta į begalybes ($+\infty$ ir $-\infty$) ir artėja į funkcijos apibrėžimo srities galus (jei funkcijos apibrėžimo sritis nėra $(-\infty; +\infty)$).

7. Nustatome, ar funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis, jei taip, randame funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškus.

8. Brėžiame funkcijos grafiko eskizą.

4.18 pavyzdys. Ištirkite funkciją

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

ir nubrėžkite jos grafiką.

Sprendimas.

1) Funkcijos apibrėžimo sritis: $D_f = R$.

2) Funkcija yra nelyginė, nes $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\dfrac{2x}{1+x^2}$ $= -f(x)$. Taigi funkcijos grafikas bus simetrinis koordinačių pradžios taško atžvilgiu.

3) Rasime funkcijos ekstremumus. Tam turime rasti funkcijos išvestinę, ją prilyginti nuliui ir išspręsti lygtį:

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Sudarysime lentelę:

Intervalai	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
f' ženklas	$-$	0	$+$	0	$-$
f kitimas	$\downarrow$	Min	$\uparrow$	Max	$\downarrow$

$\downarrow$ žymime, kai funkcija mažėja; $\uparrow$ žymime, kai funkcija didėja.

Taigi $f_{min}(-1) = -1$; $f_{max}(1) = 1$.

4) Rasime funkcijos grafiko iškilumo intervalus, perlinkio taškus. Tam turime rasti funkcijos antrąją išvestinę, ją prilyginti nuliui ir išspręsti lygtį:

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0.$$

Sudarysime lentelę:

Intervalai	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0
f'' ženklas	$-$	0	$+$	0
Išvados	Iškila aukštyn $\cap$	Perlinkis	Iškila žemyn $\cup$	Perlinkis

Intervalai	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; +\infty)$
f'' ženklas	$-$	0	$+$
Išvados	Iškila aukštyn $\cap$	Perlinkis	Iškila žemyn $\cup$

Pastaba. Kai grafikas sudėtingas, abiejų lentelių duomenis galime surašyti į vieną lentelę, nes taip lengviau juos apžvelgti.

Apskaičiuojame funkcijos reikšmes: $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$; $f(0) = 0$; $f(\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Taigi taškai $(-\sqrt{3}; f(-\sqrt{3})) = \left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(0; f(0)) = (0; 0)$ ir $(\sqrt{3}; f(\sqrt{3})) = \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ yra funkcijos grafiko perlinkio taškai.

5) Rasime funkcijos grafiko asimptotes:

a) Funkcija yra apibrėžta ir tolydi visoje skaičių tiesėje $x \in (-\infty; +\infty)$, todėl jos grafikas vertikaliųjų asimptočių neturi.

b) Ieškosime funkcijos grafiko pasvirųjų asimptočių. Pastebėsime, kad abiems atvejais, kai $x \to +\infty$ arba $x \to -\infty$ gausime tą pačią ribą

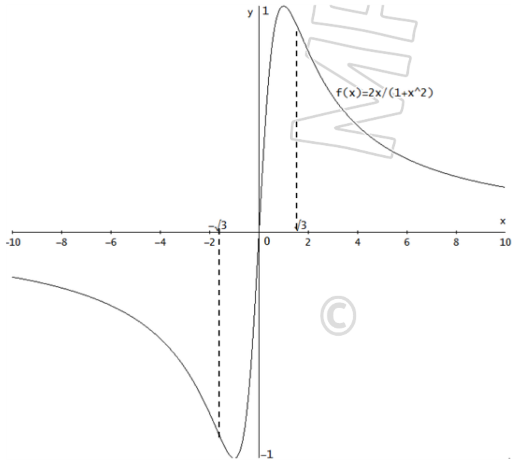
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(1+x^2)x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

Taigi tiesė $y = kx + b = 0 \cdot x + 0 = 0$ yra grafiko horizontalioji asimptotė, kai $x \to -\infty$ arba $x \to +\infty$. Nustatysime grafiko padėtį horizontaliosios asimptotės $y = 0$ atžvilgiu:

$$\delta = f(x) - 0 = \frac{2x}{1+x^2} - 0 = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Taigi $\delta > 0$, grafikas yra virš asimptotės, kai $x > 0$. Kai $\delta < 0$, grafikas yra asimptotės apačioje, kai $x < 0$.



4 pav. Grafiko eskizas

6) Surasime funkcijos ribą, kai x tolsta į begalybes (nepriklausomai nuo to, ar $x \to -\infty$, ar $x \to +\infty$).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

7) Rasime funkcijos grafiko susikirtimo tašką su Ox ašimi: $\frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

8) Remdamiesi gautais duomenimis, braižome funkcijos grafiko eskizą (žr. 4 pav.).

4.17 savarankiško darbo užduotis. Ištirkite funkciją $y = f(x)$ ir nubrėžkite jos grafiko eskizą:

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.17.1.	$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$	4.17.11.	$f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$
4.17.2.	$f(x) = \frac{x+1}{1+x^2}$	4.17.12.	$f(x) = \frac{4+3x}{2+x^2}$

Užduotis	Funkcija	Užduotis	Funkcija
4.17.3.	$f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$	4.17.13.	$f(x)=\dfrac{1+4x}{3+x^2}$
4.17.4.	$f(x)=\dfrac{2+x}{x^2+1}$	4.17.14.	$f(x)=\dfrac{6x}{4+x^2}$
4.17.5.	$f(x)=\dfrac{5x}{2+x^2}$	4.17.15.	$f(x)=\dfrac{2x+2}{5+x^2}$
4.17.6.	$f(x)=\dfrac{2+3x}{6+x^2}$	4.17.16.	$f(x)=\dfrac{5+x}{6+x^2}$
4.17.7.	$f(x)=\dfrac{3+x}{3+x^2}$	4.17.17.	$f(x)=\dfrac{4+2x}{7+x^2}$
4.17.8.	$f(x)=\dfrac{3x}{3+x^2}$	4.17.18.	$f(x)=\dfrac{2+3x}{8+x^2}$
4.17.9.	$f(x)=\dfrac{3+3x}{4+x^2}$	4.17.19.	$f(x)=\dfrac{2x+1}{9+x^2}$
4.17.10.	$f(x)=\dfrac{2+x}{4+x^2}$	4.17.20.	$f(x)=\dfrac{x}{10+x^2}$

5. Kelių kintamųjų funkcijos

Literatūra: [Rum76] XXII skyrius, 378–394 p.; [Mis99] 192–198 p.; [Būd08] 183–250 p.

Teoriniai klausimai: Kelių kintamųjų funkcijos tolydumas, dalinės išvestinės, diferencialas. Aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai. Ekstremumai. Mažiausių kvadratų metodas. Funkcijos ekonomikoje.

5.1. Kelių kintamųjų funkcijų diferencialinis skaičiavimas

5.1.1. Dalinės išvestinės

5.1 pavyzdys. Raskime funkcijos dalines išvestines duotame taške:

1. $z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$, $(1; -1)$;
2. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $x \neq 0$, $(1; 1)$;
3. $z = x^y$, $(e; 1)$.

Sprendimas.

1. $(y = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_x = 3x^2 + 2y^2 + 6yx;$$

$$\frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(1; -1)}{\partial x} = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 = -1.$$

$(x = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_y = 4xy + 3x^2 + 3y^2;$$

$$\frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(1; -1)}{\partial y} = 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 2.$$

2. $(y = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{y^2+x^2};$$

$$\frac{\partial z(-1;1)}{\partial x} = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}.$$

$(x = const)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2};$$

$$\frac{\partial z(-1;1)}{\partial y} = -\frac{1}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Kai $y = const$, $z = x^y$ yra laipsninė funkcija, todėl

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = yx^{y-1}.$$

Kai $x = const$, tai $z = x^y$ yra rodiklinė funkcija, todėl

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x.$$

$$\frac{\partial z(e;1)}{\partial x} = 1\cdot e^{1-1} = 1\cdot e^0 = 1\cdot 1 = 1;$$

$$\frac{\partial z(e;1)}{\partial y} = x^1\cdot \ln e = x\cdot 1 = x.$$

5.1 savarankiško darbo užduotis. Raskite dalines išvestines duotajame taške:

Užduotis	Funkcija	Taškas
5.1.1.	$z = x^y - xy^3$	$(1;0)$
5.1.2.	$z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$	$(1;1)$
5.1.3.	$z = \ln x + \sqrt{x^2+y^2}$	$(1;0)$
5.1.4.	$z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$	$(1;1)$
5.1.5.	$z = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$	$(0;1)$

5.1.2. Diferencialo taikymas apytiksliams skaičiavimams

Diferencijuojamos funkcijos $z = f(x, y)$ pokyčio

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$$

pagrindinė tiesinė dalis

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

vadinama funkcijos diferencialu taške (x_0,y_0) ir žymima simboliu dz, t. y.

$$dz = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Nepriklausomų kintamųjų x ir y pokyčius Δx ir Δy laikykime jų diferencialais $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Taigi funkcijos diferencialas gali būti rašomas taip:

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

arba

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Panašiai, jei funkcija $u = f(x, y, z)$ turi tolydines dalines išvestines $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, tai funkcijos pilnasis diferencialas išreiškiamas formule

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

kurioje $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$.

Diferencijuojamos funkcijos $z = f(x, y)$ pokytį

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

kai pokyčiai Δx ir Δy yra gana maži, galima apytiksliai pakeisti tos funkcijos diferencialu

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Tada gauname apytikslę lygybę

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

iš kurios, perkėlę $f(x_0,y_0)$ iš kairės į dešinę, gauname formulę

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Gautoji formulė bus tuo tikslesnė, kuo mažesni pokyčiai Δx ir Δy. Ją patogu taikyti funkcijos reikšmei $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ apskaičiuoti, kai žinome funkcijos $f(x, y)$ ir jos dalinių išvestinių reikšmes taške $(x_0; y_0)$.

5.2 pavyzdys. Užrašykime dviejų kintamųjų funkcijos

$$z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$$

diferencialą taške $(1; 0)$ ir pritaikykime jį apytiksliam skaičiavimui.

Sprendimas. Užrašykime funkcijos $z = f(x, y)$ diferencialą taške (x_0, y_0) bendruoju atveju:

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Raskime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinę pagal x

$$f'_x(x, y) = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_x = 3x^2 + 2y^2 + 6xy.$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinės pagal x reikšmę taške $(1; 0)$

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1{,}0) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 = 3.$$

Raskime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinę pagal y

$$f'_y(x, y) = (x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3)'_y = 4xy + 3x^2 + 3y^2.$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x, y)$ išvestinės pagal y reikšmę taške $(1; 0)$

$$f'_y(x_0, y_0) = f'_x(1; 0) = 4 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 = 3.$$

Užrašykime dviejų kintamųjų funkcijos

$$z = x^3 + 2xy^2 + 3x^2y + y^3$$

diferencialą taške $(1; 0)$

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = 3dx + 3dy$$

ir pritaikykime jį apytiksliam skaičiavimui

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) = f(1 + \Delta x, \Delta y)$$
$$\approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = 1 + 3\Delta x + 3\Delta y.$$

Apskaičiuokime funkcijos $z = f(x, y)$ reikšmę taške $(1; 0)$

$$f(x_0, y_0) = f(1; 0) = 1.$$

Atsakymas. $dz = 3dx + 3dy$; $f(1 + \Delta x, \Delta y) \approx 1 + 3\Delta x + 3\Delta y$.

5.1.3. Kelių kintamųjų funkcijos ekstremumas

Taškas $T_0\,(x_0; y_0)$ vadinamas funkcijos $f(x, y)$ **maksimumu**, jei egzistuoja tokia taško T aplinka

$$U_\delta^0 = \left\{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\},$$

kad visiems taškams $(x, y) \in U_\delta^0$ galioja nelygybė

$$f(x, y) \leqslant f\,(x_0, y_0)\,. \tag{5.1}$$

Jei (5.1) nelygybę pakeistume tokia $f(x, y) \geqslant f\,(x_0, y_0)$, taškas T_0 vadinamas funkcijos **minimumu**.

Būtina ekstremumo sąlyga

Tarkime, kad funkcijos $f(x, y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ir $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tolydžios taške $T_0\,(x_0; y_0)$. Jei šis taškas yra funkcijos *ekstremumo* (maksimumo arba minimumo) taškas, tai

$$\frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f\,(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Taškai, kuriuose funkcijos pirmosios eilės dalinės išvestinės lygios nuliui (arba neegzistuoja), vadinami *kritiniais*.

Pakankama ekstremumo sąlyga

Tarkime, kad funkcijos $f(x,y)$ dalinės išvestinės $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ ir $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ yra tolydžios taške T_0. Pažymėkime

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},$$

$$B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x},$$

$$C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Jei T_0 yra kritinis taškas ir

$$\Delta = AC - B^2 > 0,$$

tai T_0 yra ekstremumo taškas (maksimumas, kai $A < 0$ ir minimumas, kai $A > 0$). Kritinis taškas nėra ekstremumas, kai $\Delta < 0$. Jei $\Delta = 0$, taškas gali būti, bet gali ir nebūti ekstremumas.

Pavyzdžiui, taškas $O(0;0)$ yra funkcijos $f(x,y) = x^2 + y^2$ minimumas:

$$A = C = 2,\ B = 0,\ \Delta = 4 > 0.$$

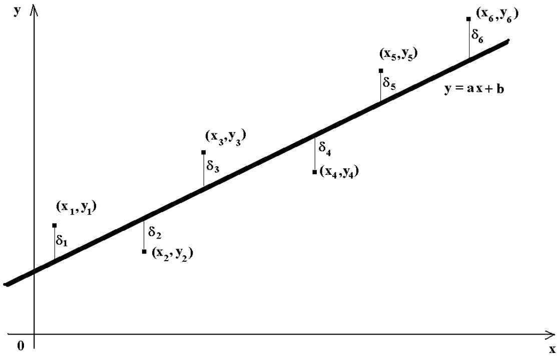
5.1.4. Mažiausių kvadratų metodas

Tarkime, kad žinomos n funkcijos $y = f(x)$ reikšmių $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \cdots, y_n = f(x_n)$. Ieškosime tiesinės funkcijos $y = ax + b \approx f(x)$ parametrų a, b. Pažymėkime (žr. 5 pav.)

$$\delta_j = ax_j + b - y_j,\ j = 1{,}2, \ldots ,n$$

ir sudarykime funkciją

$$f(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(ax_j + b - y_j\right)^2.$$



5 pav. Sklaidos grafikas

Ieškome jos minimumo:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial a} = 2\sum_{j=1}^{n}\Big(ax_j + b - y_j\Big)\,x_j = 0,$$

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial b} = 2\sum_{j=1}^{n}\Big(ax_j + b - y_j\Big) = 0.$$

Gauname dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b = b_1, \\ a_{21}a + a_{22}b = b_2. \end{cases} \tag{5.2}$$

Čia

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2, & a_{12} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j, & b_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j, \\ a_{21} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j, & a_{22} = n, & b_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j. \end{array}$$

Išspręskime (5.2) sistemą Kramerio metodu. Skaičius

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

vadinamas antrosios eilės *determinantu*. Sudarykime dar du antrosios eilės determinantus

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

(5.2) sistemos sprendinys išreiškiamas Kramerio formulėmis

$$a = \frac{D_1}{D}, \; b = \frac{D_2}{D}.$$

Taigi

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right)}{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}, \\ b &= \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right)}{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.3 pavyzdys. Pardavimų apimtis buvo stebima penkis mėnesius ir pateikta lentelėje

x_j	1	2	3	4	5
y_j	4,05	4,96	6,01	7,04	7,99

Sudarykime pardavimų apimties prognozę ir apskaičiuokime y_6.

Sprendimas. Apskaičiuojame

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{5} x_j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \\ &\sum_{j=1}^{5} x_j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \\ &\sum_{j=1}^{5} y_j = 4{,}05 + 4{,}96 + 6{,}01 + 7{,}04 + 7{,}99 = 30{,}05, \\ &\sum_{j=1}^{5} x_j y_j = 1 \cdot 4{,}05 + 2 \cdot 4{,}96 + 3 \cdot 6{,}01 + 4 \cdot 7{,}04 + 5 \cdot 7{,}99 = 100{,}11 \end{aligned}$$

ir taikome (5.3) formules:

$$a = \frac{5\cdot 100{,}11 - 15\cdot 30{,}05}{5\cdot 55 - 15^2} = \frac{49{,}80}{50{,}0} = 0{,}996,$$
$$b = \frac{55\cdot 30{,}05 - 15\cdot 100{,}11}{5\cdot 55 - 15^2} = \frac{151{,}10}{50{,}0} = 3{,}022.$$

Taigi gauname prognozės funkciją $y(x) = 0{,}996x + 3{,}022$ ir apskaičiuojame

$$y_6 = y(6) = 0{,}996 \cdot 6 + 3{,}022 = 8{,}998 \approx 9{,}0.$$

5.2 savarankiško darbo užduotis. Iš pateiktų stebėjimų duomenų raskite funkcijos $y(x) = ax + b$ parametrus a, b ir apskaičiuokite $y\,(x_0)$.

Užduotis		$y\,(x_0)$
5.2.1.	$y(3;5) = 4{,}01,\ y(3;8) = 4{,}64,\ y(4;2) = 5{,}37$ $y(4;5) = 6{,}02,\ y(4;9) = 6{,}71,\ y(5;3) = 7{,}55$	$y(3;0)$
5.2.2.	$y(3;5) = 3{,}99,\ y(3;8) = 4{,}62,\ y(4;2) = 5{,}38$ $y(4;5) = 6{,}03,\ y(4;9) = 6{,}68,\ y(5;3) = 7{,}52$	$y(3;0)$
5.2.3.	$y(3;5) = 3{,}99,\ y(3;8) = 4{,}59,\ y(4;2) = 5{,}37$ $y(4;5) = 6{,}01,\ y(4;9) = 6{,}69,\ y(5;3) = 7{,}57$	$y(3;0)$
5.2.4.	$y(3;5) = 4{,}02,\ y(3;8) = 4{,}58,\ y(4;2) = 5{,}39$ $y(4;5) = 6{,}03,\ y(4;9) = 6{,}70,\ y(5;3) = 7{,}54$	$y(3;0)$
5.2.5.	$y(3;5) = 4{,}02,\ y(3;8) = 4{,}57,\ y(4;2) = 5{,}41$ $y(4;5) = 5{,}97,\ y(4;9) = 6{,}65,\ y(5;3) = 7{,}50$	$y(3;0)$
5.2.6.	$y(3;5) = 4{,}01,\ y(3;8) = 4{,}64,\ y(4;2) = 5{,}37$ $y(4;5) = 6{,}02,\ y(4;9) = 6{,}71,\ y(5;3) = 7{,}55$	$y(6;0)$
5.2.7.	$y(3;5) = 3{,}99,\ y(3;8) = 4{,}62,\ y(4;2) = 5{,}38$ $y(4;5) = 6{,}03,\ y(4;9) = 6{,}68,\ y(5;3) = 7{,}52$	$y(6;0)$
5.2.8.	$y(3;5) = 3{,}99,\ y(3;8) = 4{,}59,\ y(4;2) = 5{,}37$ $y(4;5) = 6{,}01,\ y(4;9) = 6{,}69,\ y(5;3) = 7{,}57$	$y(6;0)$
5.2.9.	$y(3;5) = 4{,}02,\ y(3;8) = 4{,}58,\ y(4;2) = 5{,}39$ $y(4;5) = 6{,}03,\ y(4;9) = 6{,}70,\ y(5;3) = 7{,}54$	$y(6;0)$
5.2.10.	$y(3;5) = 4{,}02,\ y(3;8) = 4{,}57,\ y(4;2) = 5{,}41$ $y(4;5) = 5{,}97,\ y(4;9) = 6{,}65,\ y(5;3) = 7{,}50$	$y(6;0)$
5.2.11.	$y(1;0) = 2{,}02,\ y(1;5) = 1{,}47,\ y(1;8) = 1{,}17$ $y(2;3) = 0{,}67,\ y(2;6) = 0{,}39,\ y(2;9) = 0{,}11$	$y(3;0)$
5.2.12.	$y(1;3) = 4{,}39,\ y(1;4) = 2{,}51,\ y(1;7) = 2{,}20$ $y(1;4) = 1{,}63,\ y(2;5) = 0{,}73,\ y(2;8) = 0{,}31$	$y(0;3)$
5.2.13.	$y(1;0) = 1{,}99,\ y(1;5) = 1{,}51,\ y(1;8) = 1{,}20$ $y(2;3) = 0{,}63,\ y(2;6) = 0{,}37,\ y(2;9) = 0{,}13$	$y(3;0)$

Užduotis		$y(x_0)$
5.2.14.	$y(1;0) = 1{,}98,\ y(1;5) = 1{,}52,\ y(1;8) = 1{,}19$ $y(2;3) = 0{,}66,\ y(2;6) = 0{,}38,\ y(2;9) = 0{,}12$	$y(3;0)$
5.2.15.	$y(1;0) = 2{,}00,\ y(1;5) = 1{,}51,\ y(1;8) = 1{,}21$ $y(2;3) = 0{,}64,\ y(2;6) = 0{,}36,\ y(2;9) = 0{,}14$	$y(3;0)$
5.2.16.	$y(3;5) = 4{,}02,\ y(3;8) = 4{,}57,\ y(4;2) = 5{,}40$ $y(4;5) = 5{,}96,\ y(4;9) = 6{,}66,\ y(5;3) = 7{,}49$	$y(6;0)$
5.2.17.	$y(1;0) = 2{,}02,\ y(1;5) = 1{,}47,\ y(1;8) = 1{,}17$ $y(2;3) = 0{,}67,\ y(2;6) = 0{,}39,\ y(2;9) = 0{,}11$	$y(0;5)$
5.2.18.	$y(1;0) = 1{,}99,\ y(1;5) = 1{,}51,\ y(1;8) = 1{,}20$ $y(2;3) = 0{,}63,\ y(2;6) = 0{,}37,\ y(2;9) = 0{,}13$	$y(0;5)$
5.2.19.	$y(1;0) = 1{,}98,\ y(1;5) = 1{,}52,\ y(1;8) = 1{,}19$ $y(2;3) = 0{,}66,\ y(2;6) = 0{,}38,\ y(2;9) = 0{,}12$	$y(0;5)$
5.2.20.	$y(1;0) = 2{,}00,\ y(1;5) = 1{,}51,\ y(1;8) = 1{,}21$ $y(2;3) = 0{,}64,\ y(2;6) = 0{,}36,\ y(2;9) = 0{,}14$	$y(0;5)$

5.1.5. Mažiausių kvadratų metodo apibendrinimas

Nagrinėsime dviejų kintamųjų x ir y funkciją

$$u(x, y) = x^{\alpha}\, y^{\beta}. \tag{5.4}$$

5.4 pavyzdys. Žinomos kelios (5.4) funkcijos reikšmės

x	10	15	20	30	35
y	20	30	15	25	10
$u(x, y)$	14,9	21,8	12,8	20,4	9,9

Apskaičiuokime funkcijos parametrų α ir β reikšmes.

Sprendimas. Apskaičiuojame funkcijos $u(x, y)$ logaritmus

$$\ln u(x, y) = \alpha \ln x + \beta \ln y \tag{5.5}$$

ir sudarome lentelę

$\ln x$	2,3026	2,7081	2,9957	3,4012	3,5553
$\ln y$	2,9957	3,4012	2,7081	3,2189	2,3026
$\ln u$	2,7014	3,0819	2,5494	3,0155	2,2925

Užrašykime mažiausių kvadratų funkciją

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{5} \Big(\alpha \ln x_j + \beta \ln y_j - \ln u_j\Big)^2$$

ir apskaičiuokime jos dalines išvestines

$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = 2\sum_{j=1}^{5}\Big(\alpha\ln x_j + \beta\ln y_j - \ln u_j\Big)\ln x_j = 0,$$
$$\frac{\partial f(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = 2\sum_{j=1}^{5}\Big(\alpha\ln x_j + \beta\ln y_j - \ln u_j\Big)\ln y_j = 0.$$

Sprendžiame dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha\sum\limits_{j=1}^{5}\Big(\ln x_j\Big)^2 + \beta\sum\limits_{j=1}^{5}\ln y_j\ln x_j = \sum\limits_{j=1}^{5}\ln u_j\ln x_j, \\ \alpha\sum\limits_{j=1}^{5}\ln x_j\ln y_j + \beta\sum\limits_{j=1}^{5}\Big(\ln y_j\Big)^2 = \sum\limits_{j=1}^{5}\ln u_j\ln y_j. \end{cases}$$

Gauname

$$a_{11} = \sum_{j=1}^{5}\Big(\ln x_j\Big)^2 = 45{,}8185,$$
$$a_{12} = a_{21} = \sum_{j=1}^{5}\ln y_j\ln x_j = \sum_{j=1}^{5}\ln x_j\ln y_j = 43{,}3557,$$
$$a_{22} = \sum_{j=1}^{5}\Big(\ln y_j\Big)^2 = 43{,}5392,$$
$$b_1 = \sum_{j=1}^{5}\ln u_j\ln x_j = 40{,}6107,$$
$$b_2 = \sum_{j=1}^{5}\ln u_j\ln y_j = 40{,}4642$$

ir taikome Kramerio formules (žr. (5.2) sistemą)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45{,}8185 & 43{,}3557 \\ 43{,}3557 & 43{,}5392 \end{vmatrix} = 115{,}1850,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40{,}6107 & 43{,}3557 \\ 40{,}4642 & 43{,}5392 \end{vmatrix} = 13{,}8065,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45{,}8185 & 40{,}6107 \\ 43{,}3557 & 40{,}4642 \end{vmatrix} = 93{,}3017.$$

Taigi

$$\alpha = \frac{D_1}{D} = 0{,}12,\ \beta = \frac{D_2}{D} = 0{,}81.$$

5.1.6. Kobo ir Duglo funkcija

Ekonomikoje vartotojo naudingumas[3] dažnai modeliuojamas Kobo ir Duglo funkcija

$$u(x, y) = ax^{\alpha}\, y^{1-\alpha}. \tag{5.6}$$

Čia x yra pirmosios prekės vartojamas kiekis, y – antrosios.

Tarkime, kad žinomos kelios kintamųjų u, x, y reikšmės. Pertvarkome (5.6) reiškinį

$$\ln u(x, y) = \ln a + \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$$

ir pažymėję $\beta = \ln a$, sudarome mažiausių kvadratų funkciją

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha \ln \left(\frac{x_j}{y_j} \right) + \beta - \ln \left(\frac{y_j}{u_j} \right) \right)^2 . \tag{5.7}$$

5.3 savarankiško darbo užduotis. Iš pateiktų stebėjimų duomenų raskite Kobo ir Duglo (5.6) funkcijos parametrus a, α ir apskaičiuokite $u\,(x_0,y_0)$.

	x	20	15	15	25	10	
5.3.1.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}5;\,14{,}0)$
	u	12,3	15,0	21,4	17,5	16,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.2.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}5;\,14{,}0)$
	u	13,2	15,0	20,4	18,4	15,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.3.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}5;\,14{,}0)$
	u	14,1	15,0	19,4	19,4	14,1	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.4.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}5;\,14{,}0)$
	u	15,2	15,0	18,4	20,4	13,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.5.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}5;\,14{,}0)$
	u	16,2	15,0	17,5	21,4	12,3	

[3] Jis išreiškiamas pinigais.

	x	20	15	15	25	10	
5.3.6.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}0; 14{,}5)$
	u	12,3	15,0	21,4	17,5	16,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.7.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}0; 14{,}5)$
	u	13,2	15,0	20,4	18,4	15,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.8.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}0; 14{,}5)$
	u	14,1	15,0	19,4	19,4	14,1	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.9.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}0; 14{,}5)$
	u	15,2	15,0	18,4	20,4	13,2	
	x	20	15	15	25	10	
5.3.10.	y	10	15	25	15	20	$u(12{,}0; 14{,}5)$
	u	16,2	15,0	17,5	21,4	12,3	

Literatūra

[Apy01] Apynis Antanas; Stankus Eugenijus. *Matematika. Vadovėlis su taikymo ekonomikoje pavyzdžiais.* Vilnius: TEV, 2001. 357 p. ISBN 9955-491-08-6.

[Būd08] Būda Vytautas. *Matematiniai ekonominės analizės pagrindai.* Vilnius: TEV, 2008. 330 p. ISBN 978-9955-879-34-3.

[Kat01] Katauskis Pranas. *Finansų matematika.* Vilnius: Lietuvos bankininkystės, draudimo ir finansų institutas, 2001.

[Kub04] Kubilius Kęstutis; Saulis Leonas. *Matematinės analizės praktikumas.* Vilnius: TEV, 2004. 134 p. ISBN 9955-491-78-7.

[Mis99] Misevičius Gintautas; Pincevičius Albertas; Rakauskas Rimantas Jonas; Eidukevičius Rimantas. *Aukštoji matematika. Vadovėlis ir pratybos su kompiuteriu.* Vilnius: TEV, 1999. 469 p. ISBN 9986-546-71-0.

[Pek05] Pekarskas Vidmantas. *Trumpas matematikos kursas.* Kaunas: Technologija, 2005. 463 p. ISBN 9955-09-858-9.

[Puš01] Puškorius Stasys. *Matematiniai metodai vadyboje.* Vilnius: TEV, 2001. 386 p. ISBN 9986-546-99-0.

[Rum76] Rumšas Petras. *Trumpas aukštosios matematikos kursas.* Vilnius: Mokslas, 1976. 560 p.

[Stu08] Stungurienė Stanislava. *Verslo matematika.* Vilnius: TEV, 2008. 198 p. ISBN 978-9955879-04-6.

[Val02] Valakevičius Eimutis. *Finansų aritmetika.* Kaunas: Technologija, 2002. 81 p. ISBN 9955-09-133-9.

Krylovas, Aleksandras
Kriauzienė, Rima
Lavcel-Budko, Olga
Kastickaitė, Joana
Taikomoji matematika: mokomasis leidinys ištęstinių studijų studentams. – Vilnius: Mykolo Romerio universiteto Leidybos centras, 2010. 91 p., iliustr.
Bibliogr.: p. 90.
ISBN 978-9955-19-192-6

Mokomoji priemonė skirta Viešojo administravimo fakulteto ištęstinių studijų studentams, tačiau knygute galės naudotis ir kitų fakultetų ištęstinių ir nuolatinių studijų studentai, kuriems dėstomi matematikos dalykai. Joje trumpai paaiškintos matematikos temos: aibės, funkcijos ir lygtys, finansinių skaičiavimų pradmenys, riba ir tolydumas, diferencialinis skaičiavimas, kelių kintamųjų funkcijos. Mokomojoje priemonėje taip pat išspręsti pagrindinių tipų uždavinių pavyzdžiai ir surašytos savarankiško darbo užduotys.

Aleksandras Krylovas, Rima Kriauzienė, Olga Lavcel-Budko, Joana Kastickaitė
TAIKOMOJI MATEMATIKA
Mokomasis leidinys

Redaktorė *Dovilė Vaitkevičienė*
Maketuotoja *Joana Kastickaitė*
Viršelio autorė *Stanislava Narkevičiūtė*

SL 585. 2010 10 13. 4,6 leidyb. apsk. l.
Išleido Mykolo Romerio universiteto Leidybos centras, Ateities g. 20, LT-08303 Vilnius
Tinklalapis internete www.mruni.eu
El. paštas leidyba@mruni.eu