

周期開閉スイッチをもつ非線形回路における分岐

高坂 拓司[†] 馬越 豊^{†*} 上田 哲史[†] 川上 博^{††}

Bifurcation of Nonlinear Circuits with Periodically Operating Switch

Takuji KOUZAKA[†], Yutaka UMAKOSHI^{††*}, Tetsushi UETA[†],
and Hiroshi KAWAKAMI^{††}

あらまし 本論文では、レイリー形の発振器部分とスイッチで制御される直流電源部分から構成される Alpazur 発振器の分岐集合を数値計算により求めた。この際、系の位相的变化を調べるために分岐図の作成が行われるが、従来の方法は、解軌道が連続で、かつ可微分である場合にのみ計算が可能であり、断続回路のように、解軌道に不連続点、あるいはなめらかでない点（不可微分点）を含むような場合には、そのまま適用することはできない。そこで本論文では、周期的に外力で強制的に切り換わるスイッチを含む非線形断続回路の分岐曲線追跡アルゴリズムを提案する。解析方法として、スイッチング動作が周期的であることを利用して、合成された Poincaré 写像を定義し、具体的に分岐パラメータの計算方法を述べる。上記の手法を用い Alpazur 発振器の解析を行い、Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する位相同期解、カオスについて検討を行った。

キーワード 非線形断続回路, 合成力学系, 分岐, カオス

1. まえがき

系を記述する微分方程式が、周期的かつ断続的に切り替わる電気回路は断続回路と呼ばれている [1]。断続回路では、スイッチやリレーなどの素子の動作によって、系の運動方程式が切り替えられ、これに伴って相空間の幾何学的・定性的性質が影響を受けることになる。状態に依存して系の運動方程式が切り替えられる場合、区分線形系では、ダイオードを含む強制レイリー発振器 [2], [3], ヒステリシス特性 [4]~[6] をもつ回路、区分非線形系では、文献 [7] などが報告されており、厳密解や数値解析法を用いて return map, Poincaré 写像を構成し、周期解の分岐集合を計算可能にし、その結果多くの興味深い研究が行われている。一方、外力で強制的に運動方程式が切り替えられる場合、文献 [8] 等では、周期開閉スイッチを含む振動回路の非同期励振現象についての報告がある。しかし、周期開閉スイッチによって複数の非線形関数が切り替わる方程式系分岐を検討した例は見当たらない。

本論文では、周期開閉スイッチをもつ 2 次元非線形断続回路を取り上げ、この回路にみられる周期解の解析を行う。この系は、それぞれの微分方程式は自律系で記述されるが、系全体では非自律系になっている。非自律系にみられる周期解の分岐現象は、周期的外力の周期にあわせて時間的に Poincaré 写像を定義することができ、この Poincaré 断面上の固定点の問題、すなわち離散力学系の問題として取り扱うことができる [9]。しかし、一般にこれらの方法は、解軌道が連続で、かつ、なめらか（可微分）である場合にのみ計算が可能であり、断続回路のように、解軌道に不連続点、あるいは、なめらかでない点（不可微分点）を含むような場合には、そのまま適用することはできない。本論文では、このような問題を解決するため、合成力学系の Poincaré 写像の構成を行い、分岐パラメータ値の追跡法を述べる。本手法を図 1 に示すレイリー形の発振器部分とスイッチで制御される直流電源部分から構成される Alpazur 発振器と呼ばれる回路に用い、得られた Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する同期解とカオスについて検討を行った。

2. 回路方程式とスイッチング動作

問題の簡単化のため、本論文では二つのベクトル場の切り替わりによって記述される合成力学系を考

[†] 徳島大学工学部知能情報工学科, 徳島市
Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima-shi,
770-8506 Japan

^{††} 徳島大学工学部電気電子工学科, 徳島市
Faculty of Engineering, Tokushima University, Tokushima-shi,
770-8506 Japan

* 現在, 四国電力株式会社

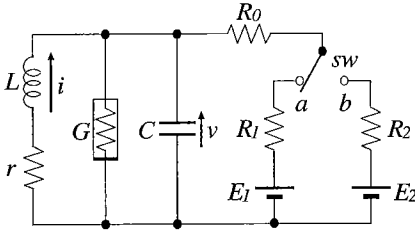


図1 Alpaazur 発振器
Fig.1 Alpaazur oscillator.

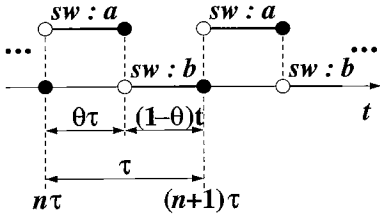


図2 スイッチング動作
Fig.2 Motion of switch.

える (図 1)。具体的な解析例としては、図 1 に示す Alpaazur 発振器にみられる分岐現象について考える。Alpaazur 発振器は、Rayleigh 形の発振器部分とスイッチ sw で制御される直流電源部分から構成され、スイッチによって回路の動作状態が切り替えられるようになっている。発振器部分は電流-電圧特性が 3 次の関数として表される非線形コンダクタンスを含み、キャパシタ電圧および線形インダクタの電流の 2 変数により系が記述される 2 次元自律系である [4]。ここで、スイッチの切り換わりは図 1 のスイッチの位置 a, b によっておこる。図 2 にスイッチング動作を示す。ここで、スイッチングの周期を τ とし、 θ はスイッチの a, b にそれぞれとどまる時間の比率を示している。このスイッチング動作は外力により強制的に切り換えられることに注意する。

スイッチが a 側に接続されている場合の回路方程式は、

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -ri - v \\ C \frac{dv}{dt} = i - G(v) + \frac{E_1 - v}{R_0 + R_1} \end{cases} \quad (1) \quad 0 < t \leq \theta\tau$$

となる。またスイッチが b 側に接続されている場合の

回路方程式は、

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = -ri - v \\ C \frac{dv}{dt} = i - G(v) + \frac{E_2 - v}{R_0 + R_2} \end{cases} \quad (2) \quad \theta\tau < t \leq \tau$$

である。

そこで今、

$$C = 1.0, L = 1.0, g_1 = \frac{1}{R_0 + R_1}, g_2 = \frac{1}{R_0 + R_2}$$

$$G(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

と仮定し、

$$i = x, v = y, g_1 E_1 = B_1, g_2 E_2 = B_2$$

とおく。式 (1), (2) はそれぞれ

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_1)y - \frac{1}{3}y^3 + B_1 \end{cases} \quad (3) \quad 0 < t \leq \theta\tau$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - y \\ \frac{dy}{dt} = x + (1 - g_2)y - \frac{1}{3}y^3 + B_2 \end{cases} \quad (4) \quad \theta\tau < t \leq \tau$$

となる。

3. 解析方法

系全体の方程式を次の n 次元自律系で記述する。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_a(x, \lambda, \lambda_a), & 0 < t \leq \theta\tau \\ \frac{dx}{dt} &= f_b(x, \lambda, \lambda_b), & \theta\tau < t \leq \tau \end{aligned} \quad (5)$$

図 3 に示した解軌道：

$$x(t) = \varphi(t, x_0, \lambda, \lambda_a, \lambda_b) \quad (6)$$

は、式 (5) の解をつなぎ合わせた解となる。ここで、 $t \in \mathbf{R}$ は時刻、 $x \in \mathbf{R}^n$ は状態を表す n 次元ベクトル、 $\lambda \in \mathbf{R}^r$ は f_a, f_b に共通なパラメータ、 $\lambda_a, \lambda_b \in \mathbf{R}^s$ はそれぞれ f_a, f_b のみに依存するパラメータである。また、非線形関数 f_a, f_b はなめらかで各変数、パラメータに関して必要なだけ微分可能であるとする。式 (5) は共に自律系であるから、時間の原点の平衡移動

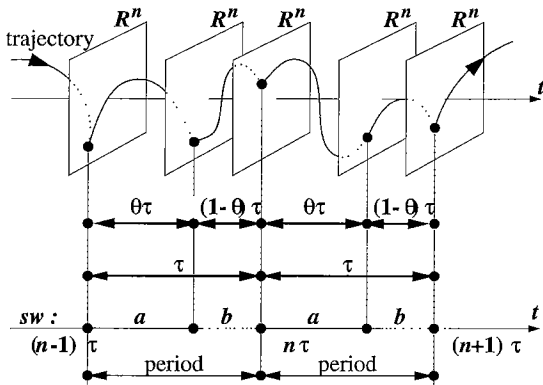


図3 解軌道の様子と合成 Poincaré 写像 T
Fig.3 Behavior of the trajectory and composite Poincaré map T.

に関して解も同じく平行移動する。すなわち、 $t = 0$ で初期値 $x(0) = x_0$ を出発する解を式 (6) とすれば、 $t = \sigma$ で初期値 $x(\sigma) = x_0$ を出発する解は

$$x(t) = \varphi(t - \sigma, x_0, \lambda, \lambda_a, \lambda_b) \tag{7}$$

となる。この性質から、 $t = 0$ で初期値 $x(0) = x_0$ を出発する式 (5) の非線形関数に従う解軌道をそれぞれ、スイッチが a の区間は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t, x_0, \lambda, \lambda_a, \lambda_b) \\ &= \varphi_a(t, x_0, \lambda, \lambda_a) \end{aligned} \tag{8}$$

と表し、 b の区間は、

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t, x_0, \lambda, \lambda_a, \lambda_b) \\ &= \varphi_b(t - \theta\tau, \varphi_a(\theta\tau, x_0, \lambda, \lambda_a), \lambda, \lambda_b) \end{aligned} \tag{9}$$

と表現する。ここで、 $\theta\tau$ はスイッチが a に固定されている時間を表す。

$x(0) = x_0$ を $x(\theta\tau) = x_1$ に写す写像 T_a を式 (5) の解を用い次式で定義する。

$$\begin{aligned} T_a : R^n &\rightarrow R^n \\ x_0 &\mapsto x_1 = \varphi_a(\theta\tau, x_0, \lambda, \lambda_a) \end{aligned} \tag{10}$$

同様に写像 T_b を

$$\begin{aligned} T_b : R^n &\rightarrow R^n \\ x_1 &\mapsto x_2 = \varphi_b((1 - \theta)\tau, x_1, \lambda, \lambda_b) \end{aligned} \tag{11}$$

と定義する。 $1 - \theta\tau$ はスイッチが b に固定されている時間である。 T_a と T_b の合成写像 T を Poincaré 写像：

$$\begin{aligned} T : R^n &\rightarrow R^n \\ x_0 &\mapsto T(x_0) = T_b \circ T_a(x_0) \end{aligned} \tag{12}$$

として定義する。従って固定点 x_0 は $x_0 = T(x_0)$ を解けばよい。Newton 法で個の式を解く際に必要となる初期値に関する微分は次式となる。

$$\frac{\partial T}{\partial x_0} \Big|_{t=\tau} = \frac{\partial T_b}{\partial x_1} \Big|_{t=(1-\theta)\tau} \cdot \frac{\partial T_a}{\partial x_0} \Big|_{t=\theta\tau} \tag{13}$$

ところで式 (13) の特性方程式は：

$$\chi(\mu) = \left| \frac{\partial T}{\partial x_0} - \mu I_n \right| = 0 \tag{14}$$

であり、この式の根である特性乗数が 1 に等しい場合は接線分岐、 -1 の場合は周期倍分岐、共役な複素数でその絶対値が 1 に等しい場合は Neimark-Sacker 分岐を生じる。これらの分岐パラメータ値の計算には、式 (14) を固定点条件式 (12) と連立させ、 x_0, λ について解けばよい。

$$F(x_0, \lambda) = \begin{bmatrix} T(x_0) - x_0 \\ \chi(\mu) \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

式 (15) を Newton 法で解く場合、Jacobi 行列の各要素は、次式：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_0} \right) &= \frac{\partial f_a}{\partial x} (t, \varphi(t, x_0)) \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x_0} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial f_b}{\partial x} (t, \varphi(t, x_1)) \left(\frac{\partial \varphi_b}{\partial x_1} \right) \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial x_0} \Big|_{t=0} &= I_n, \quad \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_1} \Big|_{t=0} = I_n \end{aligned} \tag{16}$$

を、数値積分によって各々 $t = 0$ から $t = \theta\tau$ 若しくは $t = (1 - \theta)\tau$ まで求めるとよい。

4. Alpazur 発振器

以下、Alpazur 発振器の解軌道が周期的であるとし、この場合の周期解 (同期振動) について考察する。

4.1 単体の Alpazur 発振器の分岐

図 4 に単体の g - B 平面における Alpazur 発振器の分岐図を示す。ここで、 $\gamma = 0.1$ である。

領域 : 安定なりットサイクルをもつ
領域 : 安定な平衡点をもつ

であり、図中の曲線は g - B 平面における平衡点の Hopf 分岐を示す。

本論文では、式 (4) のパラメータを $g_1 = 0.2, B_1 = 0.5$ に固定し (図 4) で示す、式 (5) のパラメータを

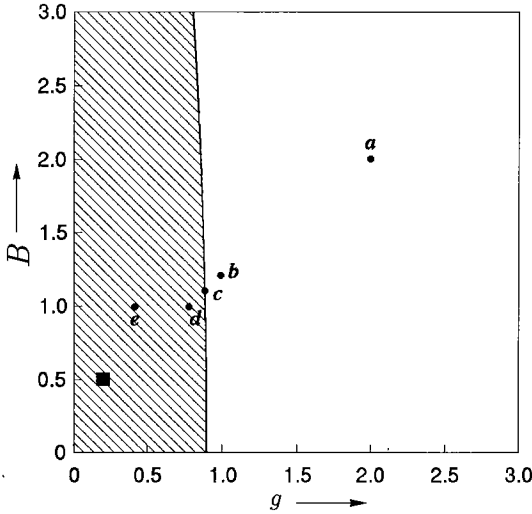


図4 g , B の変化による発振器の状態変化. 図中の曲線は平衡点のHopf分岐を示す
 Fig.4 Bifurcation diagram in the g - B parameter plane. A curved line indicate Hopf bifurcation of equilibrium point.

徐々に変化させたときの分岐構造を観察する。ここで選んだパラメータは、図4の各点、
 (a) : $g_2 = 2.0, B_2 = 2.0$. 式(5)は安定な平衡点をもつ。
 (b) : $g_2 = 1.0, B_2 = 1.2$. 式(5)は安定な平衡点を持ち、かつ発振状態に近い。
 (c) : $g_2 = 0.9, B_2 = 1.1$. 式(5)は安定な平衡点を持ち、ほぼHopf分岐曲線上にある。
 (d) : $g_2 = 0.8, B_2 = 1.0$. 式(5)は安定なリミットサイクルを持ち、かつHopf分岐曲線に近い。
 (e) : $g_2 = 0.4, B_2 = 1.0$. 式(5)は安定なリミットサイクルをもつ。
 (f) : $g_2 = 0.2, B_2 = -0.5$. 式(5)は安定なリミットサイクルをもつ。この場合、スイッチが a 側に接続されているときと b 側に接続されたときで、直流電源の極性が反転しているのと同様である。
 とする。

4.2 解析結果

以下に示す分岐図において、 n 周期点の分岐集合として次の記号を用いる。

- G_k^n ... 接線分岐 (細い実線)
- I_k^n ... 周期倍分岐 (細い点線)
- H_k^n ... Neimark-Sacker分岐 (太い実線)

ここで、 k は同じ周期の分岐現象を区別するために用

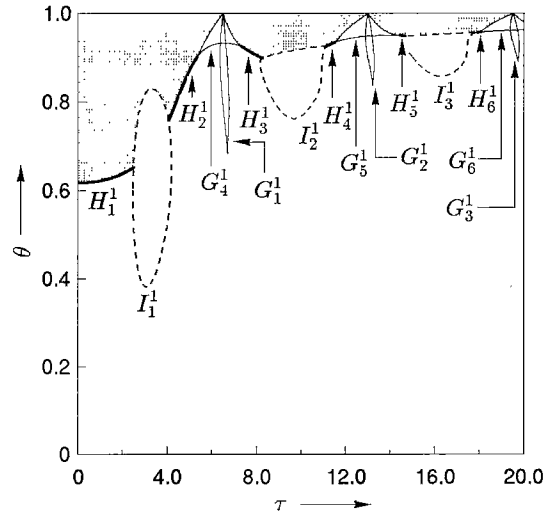


図5 点(a)での分岐図 ($g_2 = 2.0, B_2 = 2.0$)
 Fig.5 Bifurcation diagram of point (a). where $g_2 = 2.0, B_2 = 2.0$.

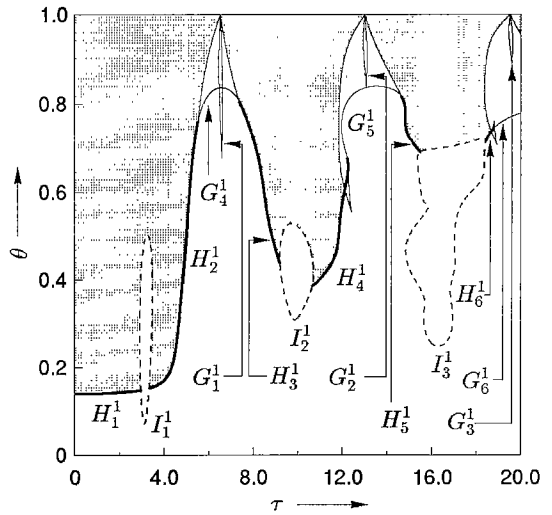


図6 点(b)での分岐図 ($g_2 = 1.0, B_2 = 1.2$)
 Fig.6 Bifurcation diagram of point (b). where $g_2 = 1.0, B_2 = 1.2$.

いた。

パラメータを発振状態に徐々に近づけたときの周期 τ の周期解の分岐図を図5~図7に示す。領域 \square には、準周期解が存在している。ここで準周期解は、系がスイッチングの周期 τ に対して非同期であることを示している。これらの解が位相同期することによって発生する周期 $l\tau$ ($l = 2, 3, \dots$) もこの領域には存在

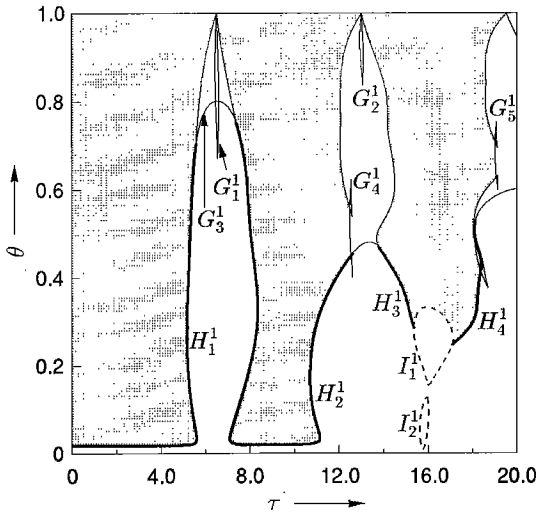


図7 点(c)での分岐図 ($g_2 = 0.9, B_2 = 1.1$)
Fig.7 Bifurcation diagram of point (c). where $g_2 = 0.9, B_2 = 1.1$.

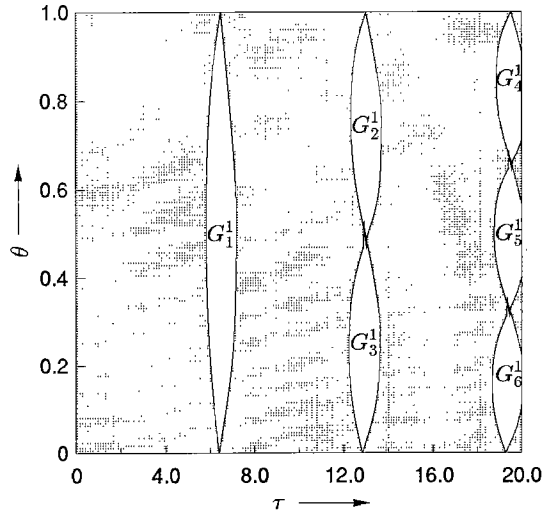


図9 点(e)での分岐図 ($g_2 = 0.4, B_2 = 1.0$)
Fig.9 Bifurcation diagram of point (e). where $g_2 = 0.4, B_2 = 1.0$.

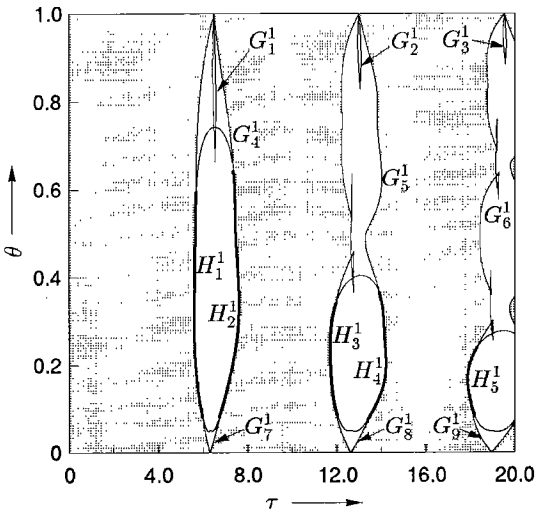


図8 点(d)での分岐図 ($g_2 = 0.8, B_2 = 1.0$)
Fig.8 Bifurcation diagram of point (d). where $g_2 = 0.8, B_2 = 1.0$

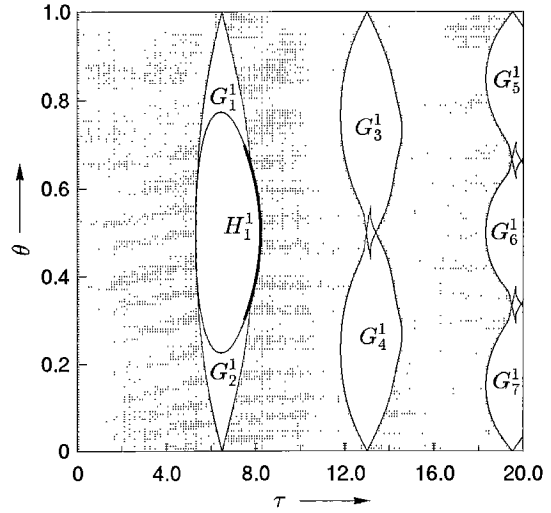


図10 点(f)での分岐図 ($g_2 = 0.2, B_2 = -0.5$)
Fig.10 Bifurcation diagram of point (f). where $g_2 = 0.2, B_2 = -0.5$.

している。領域 \square には、周期 τ の周期解（同期解）が存在している。発振状態に近づくにつれて、準周期解の存在領域 \square が広がっていることがわかる。それに伴って、周期解が得られる領域が狭くなっている。また τ の小さい領域では、周期倍分岐も徐々に消滅している。

更にパラメータを変化させた分岐図を図8～図10

に示す。分岐図は $\theta = 0.5$ に対して対称に近くなっている。図8において、分岐図中の周期倍分岐は完全に消滅し、新たな接線分岐曲線が θ の小さい領域で発生している。また図10においては分岐図は完全に対称になり、周期解は $\theta = 0.5$ で原点に対して対称な解軌道となる（図11）。以下、図5に注目し、より詳細な解析を行う。図5の拡大図を図12、図13に示す。

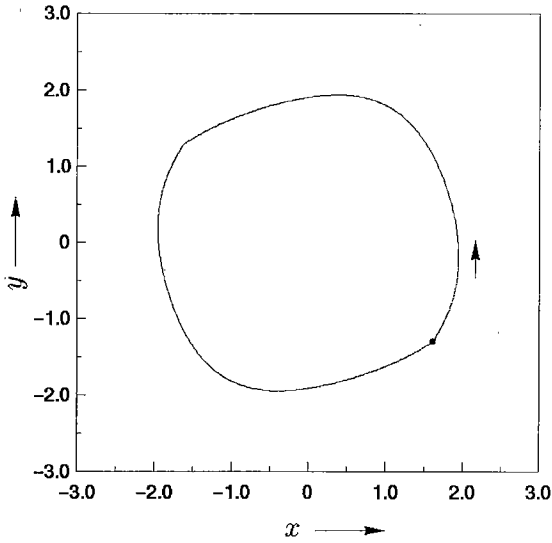


図 11 状態平面図 ($\tau = 6.0, \theta = 0.5$)
Fig. 11 Phase portrait ($\tau = 6.0, \theta = 0.5$).

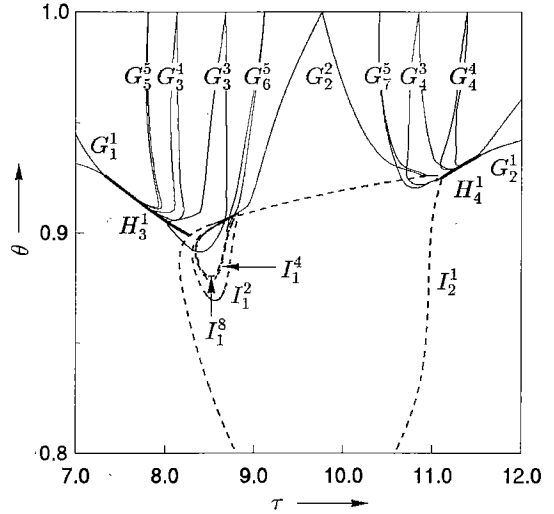


図 13 図 5 の拡大図 2
Fig. 13 Magnification 2 of Fig. 5.

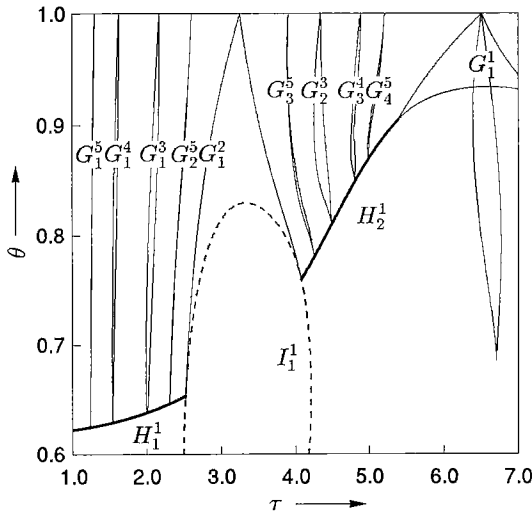


図 12 図 5 の拡大図 1
Fig. 12 Magnification 1 of Fig. 5.

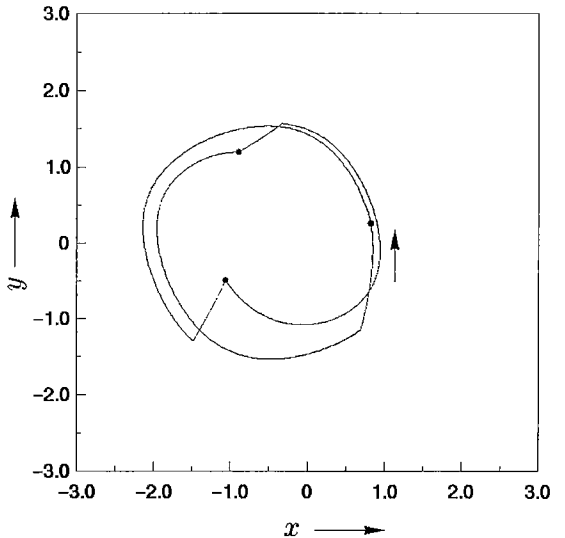


図 14 状態平面図. 黒い点は写像 T の点を表す ($\tau = 4.3, \theta = 0.9$)
Fig. 14 Phase portrait. ● indicate the point of the mapping T ($\tau = 4.3, \theta = 0.9$).

図 12 には多数の接線分岐曲線 G^i が存在している。Neimark-Sacker 分岐曲線 H_1^1 に沿って G^i ($i = 1, 2, \dots$) が発生する周期解の周波数比 n/m を並べると次のような数列を得る。

$$S_5 = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \right\} \quad (17)$$

ここで n/m は、分母は m -周期であることを、分子が巻き数、すなわち m 周期あたりの振動数を n とし

た。例として、図 14 に G_2^3 に囲まれた領域内で発生する $2/3$ 分数調波を示す。この数列 (17) は、同期リズムの同調に関して同期周波数を問題とするときによくみられる Farrey 数列を形成している。この結果から、Neimark-Sacker 分岐曲線に沿って存在する接線分岐曲線がサークル写像などによく見られるアーノルドの舌を形成していることがわかる。本論文では、2~

5τ の周期をもつ接線分岐曲線のみを示したが、これら以外にも、無数の n/m が有理数比の周期解の接線分岐曲線が存在している。図 15 に $\tau = 8.5$ に固定したときの 1 方向分岐図で示す。また図 13 では、周期 τ の周期解が、周期倍の連鎖 I_1^2, I_1^4, I_1^8 などを経て、カオスが発生していることがわかる (図 16)。更に θ を大きくすると G_3^3 により発生した周期 3τ の周期解に、系の状態は引き込まれる。

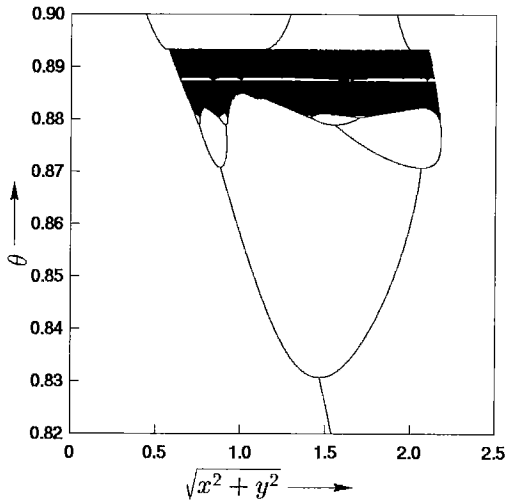


図 15 θ の変化による 1 方向分岐図 ($\tau = 8.5$)
Fig. 15 Bifurcation diagram. Vertical: θ .

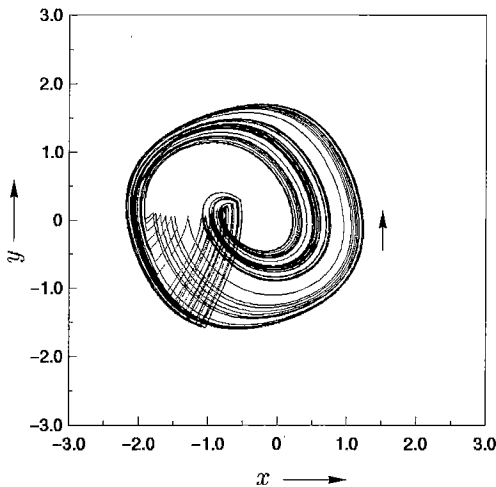


図 16 カオス振動 ($\tau = 8.5, \theta = 0.89$)
Fig. 16 Chaotic oscillation.

5. む す び

周期的に外力で強制的に切り換わるスイッチを含む非線形回路の解析を行い、この解析に必要な計算方法を提案した。スイッチング動作が周期的であることを利用して、合成された Poincaré 写像を定義し具体的に分岐パラメータの計算方法を述べた。本手法の適用例として、Alpazur 発振器と呼ばれる回路に本手法を適用し、その結果得られた Neimark-Sacker 分岐に沿って存在する位相同期解、カオスについて検討を行い、アルゴリズムの正当性も示した。

高次元系および張り合わされる系が三つ以上の場合についての解析等は今後の課題である。

文 献

- [1] S. Hayashi, Periodically Interrupted Electric Circuits, Denki-Shoin, 1961.
- [2] 稲葉直彦, 小倉 真, “ダイオードを含む強制レイリ-発振器にみられる分岐現象とカオス,” 信学論 (A), vol.J76-A, no.7, pp.942-950, July 1993.
- [3] 稲葉直彦, 馬場徳生, 大西正文, “ダイオードを含む強制レイリ-発振器の分岐集合,” 信学論 (A), vol.J78-A, no.4, pp.485-492, April 1995.
- [4] H. Kawakami and R. Lozi, Structure and Bifurcations of Dynamical Systems, ed. S. Ushiki, pp.39-58, World Scientific, Kyoto, 1992.
- [5] 斎藤利通, “ヒステリシスカオス発生器について,” 信学論 (A), vol.J67-A, no.12, pp.1162-1167, Dec. 1984.
- [6] T. Saito, “On a coupled relaxation oscillator,” IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS-35, no.9, pp.1147-1155, Sept. 1988.
- [7] 高坂拓司, 上田哲史, 川上 博, 馬越 豊, “状態に依存したスイッチで切り替わる非線形系の分岐,” IEICE Tech. Rep., NLP97-26, 1997.
- [8] 松本通孝, 森 真作, “周期開閉スイッチを含む振動回路の非同期励振現象,” 信学論 (A), vol.J77-A, no.12, pp.1694-1700, Dec. 1994.
- [9] H. Kawakami, “Bifurcation of periodic response in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters,” IEEE Trans. Circuits & Syst., vol.CAS-31, no.3, pp.248-260, March 1984.

(平成 9 年 10 月 1 日受付)



高坂 拓司 (学生員)

平6徳島大・工・知能情報卒。平8同大大学院修士課程了。現在は同大博士後期課程在学中。合成力学系における分岐現象の解析およびカオス制御に関する研究に従事。takuji@is.tokushima-u.ac.jp



馬越 豊 (正員)

平7徳島大・工・電子卒。平9同大大学院修士課程了。同年四国電力入社。在学中。非線形回路の定性的性質の研究に従事。



上田 哲史 (正員)

平2徳島大・工・電子卒。平4同大大学院博士後期課程中退。同大助手。現在、徳島大・工・知能情報工学科講師。非線形力学系の解析とCG表現に関する研究に従事。計測自動制御学会、情報処理学会、IEEE各会員。工博。tetsushi@is.tokushima-u.ac.jp



川上 博 (正員)

昭39徳島大・工・電気卒。昭44京大大学院博士課程了。同年京大助手。昭45徳島大助手。昭49同大助教授。昭60同大教授。現在に至る。非線形回路の動的性質に関する研究に従事。工博。kawakami@ee.tokushima-u.ac.jp