J. Math. Tokushima Univ.
Vol. 3. (1969), 57-74

Torsion Dans Les Algebres Universelles

par

Piergiulio Corsini et Artibano Micali

(Received September 30, 1969)

Sommaire

Introduction

1. Dans ce papier, un anneau est toujours commutatif à élément unité tout module est unitaire et le mot algèbre veut dire algèbre associative à élément unité non nécessairement commutative. De plus, il s'agira toujours d'algèbres positivement graduées (de type N) munies d'un isomorphisme d'anneaux - avec un anneau de base fixé - en degré 0. Un homomorphisme d'anneaux ou d'algèbres transforme toujours l'élément unité en élément unité. Par la suite, le mot algèbre universelle est employé dans le sens de solution d'un certain problème universel, qu'on ne précisera pas, si aucune confusion n'est à craindre.

La première partie concerne une algèbre (l'algèbre $\Delta(M)$) qui dans les "bons cas", coincide avec l'algèbre extérieure et qui en est distincte, dans les "cas intéressants". Pour ce qui est du foncteur Δ, il commute avec les limites inductives filtrantes mais ne transforme pas modules libres de type fini en modules plats. En conséquence, le théorème de Lazard (Cf. [4]) ne s'applique pas.

Dans la deuxième partie, on commence par montrer comment peut on commutativiser certaines algèbres universelles. Ensuite, c'est l'étude d'un exemple concernant l'algèbre symétrique qui nous amène à une généralisation ainsi qu'au problème posé à la fin de ce travail.

2. Si A est un anneau et M un A-module, on désignera par U l'un quelconque des foncteurs T (algèbre tensorielle), S (algèbre symétrique) et $\wedge$ (algèbre extérieure) et par $U_q(M)$ le sous-A-module de $U(M)$ des éléments homogènes de degré q. On renvoie à [3] pour des résultats concernant ces algèbres.

On dira que $s \in A$, $s \neq 0$, est un *élément régulier* si la relation $sa=0$ avec $a \in A$ entraîne $a=0$ Si K désigne l'anneau total de fractions de A, le *sous-A-module de torsion* de M est défini par $t(M)=\mathrm{Ker}(M \to M \otimes K)$.

I L'ALGEBRE $\Delta(M)$

1. Préliminaires

Soient A un anneau, M un A-module, $T(M)$ son algèbre tensorielle, $I(M)$ l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes y + y \otimes x$, x et y parcourant M et $J(M)$ l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes x$, x parcourant M. Etant donné que, quels que soient x, $y \in M$, on a $x \otimes y + y \otimes x = (x+y) \otimes (x+y) - x \otimes x - y \otimes y$, alors $I(M) \subset J(M)$. Si l'on pose $\Delta(M) = T(M)/I(M)$ et $\wedge(M) = T(M)/J(M)$ (algèbre extérieure de M), l'application identique $T(M) \to T(M)$ nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & T(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(M) & \longrightarrow & \wedge(M). \end{array}$$

Il est évident que $\Delta(M) \longrightarrow \wedge(M)$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres graduées. Il s'agira, entre autres choses, d'étudier sous quelques conditions $\Delta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$ est un isomorphisme de A-algèbres graduées.

L'algèbre $\Delta(M)$ est solution d'un problème universelle facile à établir. Les propriétés habituelles de l'algèbre tensorielle, par exemple, peuvent s'étendre facilement à l'algèbre $\Delta(M)$. Si l'on désigne par $\Delta_q(M)$ le sous-A-module de $\Delta(M)$ des éléments homogènes de degré $q \geq 0$, il est facile de voir que $\Delta_q(M)$ est l'image de $T_q(M) = M \otimes \cdots \otimes M$ (q fois) par l'homomorphisme canonique $T(M) \longrightarrow \Delta(M)$, i.e., $\Delta_q(M) = T_q(M)/T_q(M) \cap I(M)$, pour tout $q \geq 0$. Donc, $\Delta_0(M) = A$, $\Delta_1(M) = M$ et ceci nous montre que l'application A-linéaire composée $M \longrightarrow T(M) \longrightarrow \Delta(M)$ est injective.

2. Cas où 2 est inversible

Si 2 est inversible dans l'anneau A, pour tout $x \in M$, on peut écrire

$x \otimes x = \frac{1}{2}(x \otimes x + x \otimes x) \in J(M)$, i.e., $I(M) = J(M)$. Ceci nous montre que $\Delta(M) = \wedge(M)$. Par exemple, si A contient un corps de caractéristique zéro, pour tout A-module M on a $\Delta(M) = \wedge(M)$.

PROPOSITION 1: *Soient A un anneau, L un A-module libre et supposons que 2 soit un élément régulier dans A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *L'homomorphisme canonique $\Delta(L) \xrightarrow{\sim} \wedge(L)$ est un isomorphisme;*
(ii) *$\Delta(L)$ est un A-module libre;*
(iii) *$\Delta(L)$ est un A-module projectif;*
(iv) *$\Delta(L)$ est un A-module plat;*
(v) *$\Delta(L)$ est un A-module sans torsion;*
(vi) *2 est inversible dans A.*

La seule chose à montrer c'est que (v)$\Rightarrow$(vi). Or, si $\Delta(L)$ est sans torsion (sur A), il en est de même de $\Delta(A)$ (sous-A-algèbre de $\Delta(L)$) et étant donné que $\Delta(A) = A[X]/(2X^2) = A[x]$ avec $2x^2 = 0$, ceci entraîne que $x^2 = 0$ ou encore, que $X^2 \in (2X^2)$. Donc, 2 est inversible dans A.

COROLLAIRE: *Soient A un anneau et P un A-module projectif de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\Delta(P) \xrightarrow{\sim} \Lambda(P)$;
(ii) *$\Delta(P)$ est projectif;*
(iii) *$\Delta(P)$ est plat;*
(iv) *$\Delta(P)$ est sans torsion;*
(v) *2 est inversible dans A.*

En effet, on a trivialement (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv) et (v)$\Rightarrow$ (i). Encore ici, il nous faut seulement démontrer (iv)$\Rightarrow$(v). Etant donné que $\Delta(P)$ sans torsion équivaut à $\Delta(P_{\mathfrak{m}})$ sans torsion pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A et que d'après la proposition, ceci équivaut à 2 est inversible dans $A_{\mathfrak{m}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le lemme de globalisation nous montre alors que 2 est inversible dans A.

Le lemme suivant áchève la démonstration du corollaire ci-dessus:

LEMME: *Une A-algèbre B est sans torsion si et seulement si la $A_{\mathfrak{p}}$-algèbre $B_{\mathfrak{p}}$ est sans torsion pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A.*

Il est clair que si B est sans A-torsion, alors $B_{\mathfrak{p}}$ est sans $A_{\mathfrak{p}}$-torsion pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A. La réciproque nous est fournit par le lemme de globalisation (cf. [2]).

REMARQUES: (1) Il est évident que, dans le lemme ci-dessus, A n'est pas nécessairement intégre (cf. [6], prop. 2).

(2) Bien entendu, le lemme reste valable si B est seulement un A-module. Par contre, si 2 n'est pas régulier dans A, la proposition n'est plus vraie.

EXEMPLE 1: Soient $A=\boldsymbol{Z}/(6)$ et munissons $P=\boldsymbol{Z}/(3)$ de sa structure naturelle de A-module. Pour qu'on puisse faire les calculs en détail, posons $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $P=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, la loi de A-module sur P étant

$$\begin{aligned} A\times P &\longrightarrow P \\ (a, \bar{x}) &\longmapsto \overline{ax}. \end{aligned}$$

L'idéal $I(P)$ (resp. $J(P)$) de $T(P)$ est engendré par les éléments $\bar{1}\otimes\bar{1}+\bar{1}\otimes\bar{1}=2(\bar{1}\otimes\bar{1})=\bar{2}\otimes\bar{1}$, $\bar{2}\otimes\bar{2}+\bar{2}\otimes\bar{2}=2(\bar{2}\otimes\bar{2})=2(\bar{1}\otimes\bar{1})=\bar{2}\otimes\bar{1}$ et $\bar{1}\otimes\bar{2}+\bar{2}\otimes\bar{1}=4(\bar{1}\otimes\bar{1})=\bar{1}\otimes\bar{1}$ (resp. $\bar{1}\otimes\bar{1}$ et $\bar{2}\otimes\bar{2}=4(\bar{1}\otimes\bar{1})=\bar{1}\otimes\bar{1}$). Etant donné que $\bar{1}\otimes\bar{1}=2(\bar{2}\otimes\bar{1})$, on en déduit que $J(P)\subset I(P)$, donc $I(P)=J(P)$. Ceci nous montre que $\Delta(P)=\wedge(P)$ mais 2 n'est pas inversible dans A.

REMARQUE: Dans le cas où A est intègre, il est clair que dire que 2 est un régulier de A équivaut à dire que $2\neq 0$ dans A.

Dans le cas où l'anneau est noethérien, on peut donner un résultat que voici:

PROPOSITION 2: *Soient A un anneau noethérien, L un A-module libre et supposons que $2\notin\bigcap_{n=0}^{\infty}(2)^n$, où (2) est l'idéal de A engendré par 2. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\Delta(L)\xrightarrow{\sim}\wedge(L)$:
(ii) *$\Delta(L)$ est libre*;
(iii) *$\Delta(L)$ est projectif*;
(iv) *$\Delta(L)$ est plat*;
(v) *2 est inversible.*

Il est clair encore ici que la seule chose à démontrer c'est que (iv) $\Rightarrow$ (v). Supposons 2 non inversible. Si l'on tensorise la suite exacte de A-modules $0\longrightarrow(2)\longrightarrow A$ par $\Delta(L)$ -qui est supposé plat- on a la suite exacte de A-modules $0\longrightarrow\Delta(L)\otimes_A(2)\xrightarrow{\alpha}\Delta(L)\otimes_A A\simeq\Delta(L)$. Puisque A est facteur direct de L, alors $\Delta(L)$ contient $\Delta(A)=A[X]/(2X^2)=A[x]$, $2x^2=0$, en tant que sous algèbre, donc $\alpha(x^2\otimes 2)=2x^2=0$ entraîne $x^2\otimes 2=0$. Il existe alors des éléments $x_1, \ldots, x_n\in\Delta(L)$ et $a_1, \ldots, a_n\in A$ tels que $2a_i=0 (i=1, \ldots, n)$ et $x^2=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$. On peut supposer que les x_i soient des éléments homogènes de degré 2 de $\Delta(A)$, i.e., il existe des éléments $b_i\in A$ tels que $1-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\in(2)$ ou encore, il existe $c\in A$ tel que $1-\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2c$. Si l'on multiplie cette relation par 2 on trouve $2=4c$, car $2a_i=0$ ($i=1, \ldots, n$). Ceci entraîne que $2 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (2)^n$.

3. L'anneau est de caractéristique 2

Si l'anneau A est de caractérisitique 2, i.e., si $2 \cdot 1=0$, alors quels que soient x, $y \in M$ on a $x\otimes y + y\otimes x = x\otimes y - y\otimes x$ et ceci nous montre que $\varDelta(M) = S(M)$, l'algèbre symétrique du A-module M. Dans ces conditions, $\varDelta(M) \longrightarrow \wedge(M)$ n'est pas, en général, un isomorphisme.

En effet, supposons que M soit un A-module de type fini et que $S(M) = \varDelta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$. On peut, bien entendu, supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soit k le corps des restes. D'après le lemme de Nakayama, l'isomorphisme $\varDelta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$ équivaut à l'isomorphisme $\varDelta(M)\otimes k \xrightarrow{\sim} \wedge(M)\otimes k$. Or, $\varDelta(M)\otimes k = S(M)\otimes k = S(M/\mathfrak{m}M) = k[X_1, \ldots, X_n]$ et $\wedge(M)\otimes k = \wedge(M/\mathfrak{m}M) = k^{2^n}$ $\left(\sum_{q=0}^{n}\binom{n}{q} = 2^n\right)$. Il est clair maintenant que $k[X_1, \ldots, X_n] \xrightarrow{\sim} k^{2^n}$ si et seulement si $n=0$, i.e., si et seulement si $M/\mathfrak{m}M=0$. Le lemme de Nakayama nous dit alors que $M=0$.

Le lemme de globalisation achève la démonstration de la proposition suivante:

Proposition 3: *Soient A un anneau de caractéristique 2 et M un A-module de type fini. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varDelta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$ soit un isomorphisme de A-algèbres graduées est que $M=0$.*

4. Cas où 2 est un diviseur de zéro

Supposons que 2 soit un diviseur de zéro dans l'anneau A, i.e., qu'il existe un élément $c \in A$, $c \neq 0$ tel que $2c=0$. On suppose évidemment que $c \neq 1$, car sinon A serait de caractéristique 2 (cf. §3). Considérons le sous-A-module cM de M. On voit que, quels que soient x, $y \in M$, on a $(cx)\otimes(cy)+(cy)\otimes(cx) = (cx)\otimes(cy)-(cy)\otimes(cx)$, donc $\varDelta(cM) = S(cM)$. Il s'ensuit que $S(cM) = \varDelta(cM) \xrightarrow{\sim} \wedge(cM)$ si et seulement si $cM=0$ ou encore, si et seulement si $M=0: cA$.

Considérons maintenant le prolongement de l'injection canonique $cM \longrightarrow M$ aux algèbres $\varDelta$ et Λ. On a le diagramme commutatif d'algèbres graduées

$$\begin{array}{ccc} \varDelta(cM) & \longrightarrow & \varDelta(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(cM) & \longrightarrow & \Lambda(M). \end{array}$$

Si maintenant l'on suppose que $\varDelta(cM)$ soit une sous-A-algèbre de $\varDelta(M)$, i.e., que l'homomorphisme $\varDelta(cM) \longrightarrow \varDelta(M)$ soit injectif, alors $\varDelta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$ entraîne $\varDelta(cM) \xrightarrow{\sim} \wedge(cM)$ et ceci équivaut à dire que $M=0: cA$. On a ainsi la proposition suivante:

PROPOSITION 4: *Soient A un anneau, M un A-module de type fini et supposons qu'il existe un élément $c \in A$, $c \neq 0$, $c \neq 1$ tel que $2c=0$. Si l'homomorphisme $\Delta(cM) \longrightarrow \Delta(M)$ est injectif, alors $\Delta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$ entraîne $M=0: cA$.*

On pourrait se demander si la condition $cM=0$ entraîne $\Delta(M) \xrightarrow{\sim} \wedge(M)$. Ceci n'est pas vrai, comme nous le montre l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE 2: Il est clair, tout d'abord, que si $cM=0$, alors $A=\Delta(cM) \longrightarrow \Delta(M)$ est injectif. On prend $A=\mathbf{Z}/(12)$ et $M=\mathbf{Z}/(6)$. Etant donné que $M \simeq 2A$, alors l'élément $c=6 \in A$ satisfait à la condition $cM=0$. D'autre part, l'idéal $I(M)$ est engendré par les éléments $1\otimes 1+1\otimes 1=2\otimes 1$ et $m\otimes n+n\otimes m=mn(2\otimes 1)$, m et n parcourant A. Donc, $I(M)$ est l'idéal de $T(M)$ engendré par $2\otimes 1$. L'idéal $J(M)$ est engendré par $1\otimes 1$ et $m\otimes m=m^2(1\otimes 1)$, m parcourant A, donc $J(M)$ est l'idéal de $T(M)$ engendré par $1\otimes 1$. Donc $I(M) \subsetneqq J(M)$, car $1\otimes 1 \notin I(M)$. On a ainsi démontré que $\Delta(M) \longrightarrow \wedge(M)$ n'est pas un isomorphisme.

5. L'algèbre Δ d'un module projectif

Etant donné un A-module M, si $\Delta(M)$ est projectif alors M est lui même projectif, car facteur direct de $\Delta(M)$. Par contre, M projectif (ou même libre) n'entraîne pas $\Delta(M)$ projectif, si 2 n'est pas inversible dans A (cf. prop. 1).

Là dessus, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 1: *Soient A un anneau, M un A-module de présentation finie et supposons qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que $\Delta_q(M)$ soit projectif. Supposons, de plus, que si m est le plus grand entier tel que $\wedge_m(M) \neq 0$, alors $2 \leq q \leq m$. Dans ces conditions, M est un A-module projectif de type fini.*

CAS LOCAL. Supposons que A soit local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps des restes k. On peut écrire M comme quotient d'un module libre de type fini L, i.e., une suite exacte de A-modules $0 \longrightarrow R \longrightarrow L \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ de telle sorte que $L\otimes_A k \xrightarrow{\sim} M\otimes_A k$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\Delta_q(\varphi)) & \longrightarrow & \Delta_q(L) & \xrightarrow{\Delta_q(\varphi)} & \Delta_q(M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\wedge_q(\varphi)) & \longrightarrow & \wedge_q(L) & \xrightarrow[\Lambda_q(\varphi)]{} & \wedge_q(M) & \longrightarrow & 0, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

l'hypothèse que $\Delta_q(M)$ soit projectif et l'isomorphisme de k-espaces vectoriels $L\otimes_A k \xrightarrow{\sim} M\otimes_A k$ entraînent $\mathrm{Ker}(\Delta_q(\varphi))\otimes_A k=0$. Le lemme de Nakayama nous dit alors que $\mathrm{Ker}(\Delta_q(\varphi))=0$, i.e., $\Delta_q(L) \xrightarrow{\sim} \Delta_q(M)$. Donc, pour tout $x \in R$ et quels que soient $y_1, \ldots, y_{q-1} \in L$ on a $x y_1 \ldots y_{q-1}=0$ dans $\Delta_q(L)$. Ceci entraîne que $0=\alpha(x y_1 \ldots y_{q-1})=x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_{q-1}$ dans $\wedge_q(L)$. Mais alors on sait (cf. [5], chap. IV, §1, th. 1) que $x=0$ pour tout $x \in R$, i.e., $R=0$. Donc, $L \xrightarrow{\simeq} M$, c'est à dire, M est un A-module libre de type fini.

Cas Global. On sait que $\Delta_q(M)$ projectif de type fini équivaut à $\Delta_q(M_{\mathfrak{p}})$ libre pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et, d'après le cas local, $M_{\mathfrak{p}}$ est $A_{\mathfrak{p}}$-libre, quel que soit $\mathfrak{p}$ idéal premier de A. D'après le lemme de globalisation, M est projectif de type fini.

6. Torsion dans $\Delta(M)$

Soient A un anneau et M un A-module et supposons que $M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ où chaque $M_i=A/\mathfrak{a}_i$ est un A-module monogène. On pose $\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}=(2)+\mathfrak{a}_{i_1}+\cdots+\mathfrak{a}_{i_n}$ quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in I$ et $\mathfrak{c}_{i_1,\ldots,i_n}=\{a \mid a \in A, \exists\, b \notin \mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}, ab \in \mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}\}$. Il est clair $\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}$ et $\mathfrak{c}_{i_1,\ldots,i_n}$ sont des idéaux de A et $\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n} \subset \mathfrak{c}_{i_1,\ldots,i_n}$ quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in I$. Désignons par $z(A)$ l'ensemble des diviseurs de zéro de A, i.e., $z(A)=\{a \mid a \in A, \exists\, b \in A$ tel que $ab=0\}$.

Théorème 2: *Sous les hypothèses ci-dessus, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\Delta(M)$ est une A-algèbre sans torsion*;
(ii) *$\mathfrak{c}_{i_1,\ldots,i_n} \subset z(A)$ quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in I$.*

En effet, on peut écrire $T_n(M_i) = A/\mathfrak{a}_i \otimes_A \cdots \otimes_A A/\mathfrak{a}_i \simeq A/\mathfrak{a}_i$ et $\Delta_n(M_i) = T_n(M_i)/T_n(M_i) \cap I(M_i)$.

D'après l'isomorphisme $T_n(M_i) \simeq A/\mathfrak{a}_i$ on voit que $T_n(M_i) \cap I(M_i) \simeq (2)+\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_i$ donc $\Delta(M_i) \simeq A/(2)+\mathfrak{a}_i$. D'après l'isomorphisme $\Delta(M)=\bigotimes_{i\in I}\Delta(M_i)$ on peut écrire $\Delta(M) = A \oplus \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n} A/\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}$ et on en conclut donc que $\Delta(M)$ est sans torsion si et seulement si $A/\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}$ est sans torsion quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in I$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1: *Si les idéaux $\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}$ sont premiers, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\Delta(M)$ est une algèbre sans torsion*;
(ii) *$\mathfrak{b}_{i_1,\ldots,i_n}=\mathfrak{c}_{i_1,\ldots,i_n}$, quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in I$.*

Corollaire 2: *Si I est totalement ordonné et si pour $i>j$ $(i, j \in I)$, il existe une application linéaire surjective $M_j \longrightarrow M_i$, alors $\Delta(M)$ est sans torsion si et seulement si $\mathfrak{c}_{i_1} \subset z(A)$, pour tout $i_1 \in I$.*

II Algebres Universelles Commutatives

1. Algèbres universelles commutatives

Soient A un anneau et M un A-module. On peut définir des A-algèbres graduées $\Delta'(M)$ et $\wedge'(M)$ (analogues de $\Delta(M)$ et $\wedge(M)$) commutatives. Elles sont solutions de problèmes universels faciles à établir. On dira que $\Delta'(M)$ (resp. $\wedge'(M)$) est l'*algèbre Δ* (resp. *extérieure*) *commutative*. Les diagrammes commutatifs de A-algèbres graduées

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & S(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta(M) & \longrightarrow & \Delta(M)\otimes_{T(M)}S(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(M) & \longrightarrow & S(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \wedge(M) & \longrightarrow & \wedge(M)\otimes_{T(M)}S(M) \end{array}$$

nous montrent que $\Delta'(M)=\Delta(M)\otimes_{T(M)}S(M)$ et que $\wedge'(M)=\wedge(M)\otimes_{T(M)}S(M)$, i.e., $\Delta'(M)$ et $\wedge'(M)$ s'expriment comme quotients de l'algèbre symétrique $S(M)$.

THÉORÈME 1: *Soient A un anneau et M un A-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *M est localement monogène;*
(ii) *L'homomorphisme canonique $T(M)\longrightarrow S(M)$ est un isomorphisme de A-algèbres graduées;*
(iii) *Pour tout entier $q\geq 2$, on a $\wedge_q(M)=0$.*

De plus, si la caractéristique de l'anneau A est $\neq 2$, les conditions ci-dessus sont équivalentes aux conditions:

(iv) *L'homomorphisme canonique $\Delta(M)\longrightarrow\Delta'(M)$ est un isomorphisme de A-algèbres graduées;*
(v) *L'homomorphisme canonique $\wedge(M)\longrightarrow\wedge'(M)$ est un isomorphisme de A-algèbres graduées;*

Finalement, la condition

(vi) *$\Delta_q(M)=0$ pour tout $q\geq 2$, entraîne une quelconque (donc toutes) des conditions ci-dessus.*

L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) est démontrée dans [6]. Si l'on suppose (iii), on peut se ramener au cas où A est local et soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. En particulier, $\wedge_2(M)=0$, donc $\wedge_2(M/\mathfrak{m}M)=0$ et ceci nous montre que $M/\mathfrak{m}M$ est un $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel de dimension 1. Donc, M est un A-module monogène. On a ainsi montré que (iii)$\Rightarrow$(i). Finalement, si A est local et M est monogène, on peut écrire $M=A/\mathfrak{a}$, d'où $\wedge_q(M)=0$ pour tout $q\geq 2$. Ainsi (i)$\Rightarrow$(iii). Il est clair (sans aucune hypothèse sur la caractéristique de A) que si (ii) est vérifiée, alors $\wedge(M)$ est $\Delta(M)$ sont commutatives (en tant que quotient d'une algèbre commutative), donc $\wedge(M)\xrightarrow{\sim}\wedge'(M)$ et $\Delta(M)\xrightarrow{\sim}\Delta'(M)$, i.e., (ii)$\Rightarrow$(iv) et (v). Si (v) est vérifiée, on peut supposer A local et, en tensorisant par le corps résiduel de A, on peut supposer que A soit un corps. Mais alors, $\wedge(M)\xrightarrow{\sim}\wedge'(M)$ entraîne M de dimension 1 sur A, car si l'on suppose que $\dim_A(M)\geq 2$, il s'ensuit que car. $A=2$. En effet, il suffit de voir que si e_1, e_2 sont deux vecteurs quelconques d'une base de M sur A, alors $e_1\wedge e_2=-e_2\wedge e_1=-e_1\wedge e_2$ donc $2(e_1\wedge e_2)=0$ et ceci entraîne $2\cdot 1=0$ dans A. On a ainsi montré que (v)$\Rightarrow$(i). Démonstration analogue pour (iv)$\Rightarrow$(i). Finalement, étant donné que $\wedge_q(M)$ est un quotient de $\Delta_q(M)$, alors (vi)$\Rightarrow$(iii).

En général, il n'est pas vrai que (i)$\Rightarrow$(vi).

Exemple 4: On considère le A-module A. Donc, (i) est vérifiée. Etant donné que $\Delta_2(A)\simeq A/(2)$ on voit que (vi) n'est pas, en général, vérifiée.

Corollaire: *Soient A un anneau et M un A-module de type fini.*
Si M n'est pas localement monogène, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) car. $A=2$;
(ii) $\Delta(M)\xrightarrow{\sim}\Delta'(M)$;
(iii) $\wedge(M)\xrightarrow{\sim}\wedge'(M)$.

En effet, si car. $A=2$, alors $\Delta(M)=S(M)$ et, en particulier, $\Delta(M)$ est commutative. Donc, (i)$\Rightarrow$(ii) et (i)$\Rightarrow$(iii). Réciproquement, si l'on suppose (ii) vérifiée, alors on a (i) car, si car. $A\neq 2$ il s'ensuit que M est localement monogène. Ceci nous montre que (ii)$\Rightarrow$(i). Démonstration analogue pour (iii)$\Rightarrow$(i). Ceci achève la démonstration du corollaire.

Supposons que 2 soit un diviseur de zéro dans A, i.e., supposons qu'il existe un élément $c\in A$, $c\neq 0$, $c\neq 1$ tel que $2c=0$ et considérons le sous-A-module cM de M. On sait déjà que $\Delta(cM)=S(cM)$ et ceci entraîne les isomorphismes

$$\begin{tikzcd} T(cM) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & S(cM) \arrow[d, "\wr"] \\ \Delta(cM) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \Delta'(cM) \arrow[d] \\ \wedge(cM) \arrow[r, "\sim"] & \wedge'(cM) \end{tikzcd}$$

Une dernière remarque sur les algèbres universelles commutatives. Si A est un anneau et si M est un A-module, désignons par $K(M)$ l'idéal bilatère de

$T(M)$ engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x$, x et y parcourant M. On considère, de plus, l'idéal bilatère de $T(M)$, $T_*(M) = \bigoplus_{q=2}^{\infty} T_q(M)$. Puisque $2x \otimes y \in I(M) + K(M)$, x et y parcourant M, il s'ensuit que $2T_*(M) \subset I(M) + K(M)$. D'autre part, $\Delta'(M) = \Delta(M) \otimes_{T(M)} S(M) \simeq T(M)/(I(M)+K(M))$, donc $\Delta'_*(M) \simeq T_*(M)/T_*(M) \cap (I(M)+K(M))$. Pour tout $u \in T_*(M)$, $2u \in I(M)+K(M)$, donc $2\bar{u}=0$, où $\bar{u} \in \Delta'_*(M)$. Ceci nous montre que si 2 est un élément régulier de A, alors $\Delta'_*(M) \subset t(\Delta'(M))$. Si l'on suppose maintenant que $\Delta'_*(M) = t(\Delta'(M))$, étant donné que $\Delta'(M) = A \oplus M \oplus \Delta'_*(M)$, alors $t(M)=0$, car $t(\Delta'_*(M)) = t(t(\Delta'(M))) = t(\Delta'(M)) = \Delta'_*(M)$, i. e., $\Delta'_*(M)$ est un A-module de torsion. Réciproquement, si $t(M)=0$, alors $t(\Delta'(M)) = t(\Delta'_*(M)) \subset \Delta'_*(M)$, donc $t(\Delta'(M)) = \Delta'_*(M)$. Un résultat analogue peut être établi si l'on remplace le foncteur Δ' par le foncteur Λ'. On a donc démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 5; *Soient A un anneau et M un A-module. Si 2 est un élément régulier de l'anneau A, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\Delta'_*(M) = t(\Delta'(M))$;
(ii) $\wedge'_*(M) = t(\wedge'(M))$;
(iii) $t(M)=0$.

2. Etude d'un exemple concernant l'algèbre symétrique

L'exemple qu'on étudie ici est inspiré de Samuel (cf. [8]). Il s'agit d'un exemple d'un module M réflexif, donc sans torsion, de rang 2 tel que $S_2(M)$ et $S_3(M)$ soient sans torsion mais $S_4(M)$ a de la torsion.

Soient A un anneau local intègre, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et supposons que $\mathfrak{m}$ soit engendré par trois éléments a_1, a_2, a_3. Soit $\{e_1, \ldots, e_5\}$ la base canonique du A-module libre A^5 et soit P le sous-A-module de A^5 engendré par les éléments

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ x_2 &= \qquad\quad a_1e_2 + a_2e_3 + a_3e_4 \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad a_1e_3 + a_2e_4 + a_3e_5. \end{aligned}$$

Soit $M = A^5/P$ et désignons par $\pi\colon A^5 \longrightarrow M$ l'épimorphisme canonique. Soit, de plus, $S(\pi)\colon S(A^5) \longrightarrow S(M)$ l'extension de π aux algèbres symétriques et, pour tout entier $q \geq 0$, $S_q(\pi)\colon S_q(A^5) \longrightarrow S_q(M)$ la restriction de $S(\pi)$ aux sous-modules de degré q. On sait que $\mathrm{Ker}(S(\pi))$ est l'idéal de l'anneau de polynômes $S(A^5) = A[X_1, \ldots, X_5]$ engendré par l'image du module P dans $S(A^5)$.

On va montrer que $t(S_4(M)) \neq 0$. En effet, considérons les polynômes $f_1 = X_2^2 - X_1X_3$, $f_2 = X_2X_3 - X_1X_4$, $f_3 = X_3^2 - X_1X_5$. Si l'on pense x_1, x_2, x_3 comme étant des éléments de $S(A^5)$, on peut les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \\ x_2 &= \qquad\quad a_1X_2 + a_2X_3 + a_3X_4 \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad a_1X_3 + a_2X_4 + a_3X_5. \end{aligned}$$

Considérons les polynômes $g_1 = x_1X_2 - x_2X_1$ et $g_2 = x_1X_3 - x_3X_1$. On peut écrire $g_1 = a_2f_1 + a_3f_2$ et $g_2 = a_2f_2 + a_3f_3$, donc $f_3g_1 - f_2g_2 = a_3(f_1f_3 - f_2^2)$. Il est évident que $S_4(\pi)\ (f_1f_3 - f_2^2) \neq 0$, car les coefficients du polynôme $f_1f_3 - f_2^2$ sont 1 et -1 alors que les coefficients des générateurs de P sont dans $\mathfrak{m}$. D'autre part, $a_3(f_1f_3 - f_2^2) = f_3g_1 - f_2g_2 \in \operatorname{Ker}(S_4(\pi))$, i.e., $a_3S_4(\pi)\ (f_1f_3 - f_2^2) = 0$. Ceci nous montre que $S_4(M)$ a de la torsion.

Par la suite, *on supposera que A soit local régulier de dimension* 3. *Montrons que M est alors réflexif, donc sans torsion.* En effet, on remarque tout d'abord que P est un A-module libre, donc, la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow A^5 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

nous donne $dh(M) \leq 1 + dh(P) = 1$.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$, il existe au moins un $a_i \notin \mathfrak{p}$. Supposons que $a_1 \notin \mathfrak{p}$. Alors e_1, e_2, e_3 sont des combinaisons $A_{\mathfrak{p}}$-linéaires de e_4, e_5, x_1, x_2, x_3. Donc une base de $A_{\mathfrak{p}}^5$ est formée, par exemple, par ces éléments. Etant donné que $P_{\mathfrak{p}}$ est engendré par x_1, x_2, x_3, alors $M_{\mathfrak{p}}$ est $A_{\mathfrak{p}}$-libre de rang 2. D'après un résultat de Samuel (cf. [8], proposition 3), M est réflexif.

Montrons maintenant que $t(S_2(M)) = 0$. Posons $L = S_2(A^5) = A^{15}$; on sait que $S_2(M) = L/E$, où E est le sous-A-module de L engendré par les éléments de la forme x_1X_i, x_2X_i, x_3X_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Etant donné que $rg(M) = 2$, alors $rg(S_2(M)) = 3$, donc $rg(E) = 12$. Dans E, les relations triviales $x_1x_2 - x_2x_1 = 0$, $x_2x_3 - x_3x_2 = 0$ et $x_3x_1 - x_1x_3 = 0$ peuvent se traduire par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{5} b_i(x_1X_i) - \sum_{i=1}^{5} c_i(x_2X_i) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{5} d_i(x_2X_i) - \sum_{i=1}^{5} b_i(x_3X_1) = 0 \qquad (1) \\ &\sum_{i=1}^{5} c_i(x_3X_i) - \sum_{i=1}^{5} d_i(x_1X_i) = 0, \end{aligned}$$

où $b_1 = 0$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_2$, $b_4 = a_3$, $b_5 = 0$, $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $c_3 = a_3$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = a_1$, $d_4 = a_2$ et $d_5 = a_3$.

Désignons par y_i, z_i, $t_i (i = 1, \ldots, 5)$ une base de L et considérons le sous-A-module H de L engendré par les éléments

$$u_1 = \sum_{i=1}^{5} b_i y_i - \sum_{i=1}^{5} c_i z_i$$

$$u_2=\sum_{i=1}^{5} d_i z_i-\sum_{i=1}^{5} b_i t_i$$

$$u_3=\sum_{i=1}^{5} c_i t_i-\sum_{i=1}^{5} d_i y_i$$

(relations analogues à (1)). Il est facile de voir que H est un sous-A-module libre de L, de rang 3. Ceci nous montre que le quotient $E'=L/H$ est de rang 12. Montrons que E' n'est pas libre. En effet il suffit de voir que, $[E'\otimes_A(A/\mathfrak{m}): A/\mathfrak{m}]=15$ et $[E'\otimes_A K: K]=12$, K étant le corps des fractions de A (cf. [2], chap. II, §3, n^0 2, prop. 7). Donc, E' n'est pas non plus projectif et ceci entraîne que $dh(E')=1+dh(H)=1$.

Considérons l'application A-linéaire(surjective) $L\longrightarrow E$ définie par $y_i\longmapsto x_1X_i$, $z_i\longmapsto x_2X_i$, $t_i\longmapsto x_3X_i$ (i=1, ..., 5). Elle annule H, donc par passage au quotient, on obtient un épimorphisme de A-modules $E'\longrightarrow E\longrightarrow 0$. Si N désigne son noyau, on a la suite exacte de A-modules

$$0\longrightarrow N\longrightarrow E'\longrightarrow E\longrightarrow 0.$$

Si E' est sans torsion, alors $N=0$, donc $E'\simeq E$ (isomorphisme de A-modules), car $N\otimes_A K=0$ (E' et E étant du même rang, il s'ensuit l'isomorphisme de K-espaces vectoriels $E'\otimes_A K\xrightarrow{\sim} E\otimes_A K$) et $t(N)=0$, car N est un sous-module d'un module sans torsion. De tout ceci, il s'ensuivra que E *n'est pas libre et que* $dh(E)=1$.

Montrons que $t(E')=0$. Si $\bar{x}\in t(E')$, il existe un scalaire $c\in A$, $c\neq 0$, tel que $c\bar{x}=0$ ou encore, tel que $cx\in H$. On peut donc écrire $cx=a_1'u_1+a_2'u_2+a_3'u_3$ avec $a_i'\in A$ ($i=1, 2, 3$). Si $a_i'\in Ac$ ($i=1, 2, 3$), alors $x\in H$ et il n'y a plus rien à démontrer. Sinon, on peut écrire

$$cx=\sum_{i=1}^{5}(a_1'b_i-a_3'd_i)y_i+\sum_{i=1}^{5}(a_2'd_i-a_1'c_i)z_i+\sum_{i=1}^{5}(a_3'c_i-a_2'b_i)t_i.$$

D'autre part, il existe des éléments b_i', c_i', $d_i'\in A$ ($i=1, \dots, 5$) tels que $x=\sum_{i=1}^{5} b_i' y_i+\sum_{i=1}^{5} c_i' z_i+\sum_{i=1}^{5} d_i' t_i$, donc,

$$\begin{aligned} cb_i'&=a_1'b_i-a_3'd_i\\ cc_i'&=a_2'd_i-a_1'c_i\\ cd_i'&=a_3'c_i-a_2'b_i\end{aligned}\qquad (i=1, \dots, 5).$$

En particulier, $cb_2'=a_1'a_1$ et $cc_2'=-a_1'a_2$ entraînent $a_1'\in(Ac: Aa_1)\cap(Ac: Aa_2)=Ac: A(a_1, a_2)$. De même, de $cc_4'=a_2'a_2$ et $cd_4'=-a_2'a_3$ on déduit que $a_2'\in(Ac: Aa_2)\cap(Ac: Aa_3)=Ac: A(a_2, a_3)$. Finalement, les relations $cb_5'=-a_3'a_3$ et $cd_1'=a_3'a_1$ entraînent $a_3'\in(Ac: Aa_3)\cap(Ac: Aa_1)=Ac: A(a_3, a_1)$. On peut donc supposer que $a_1'\notin Ac$, donc $Ac\subsetneq Ac: A(a_1, a_2)$ et ceci nous montre qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à Ac tel que $A(a_1, a_2)\subset\mathfrak{p}$ (cf. [7]). Puisque A est local régulier, $h(\mathfrak{p})=1$, absurde, car a_1, a_2 est une A-suite. Ceci nous montre bien que E' est sans torsion.

La suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow S_2(M) \longrightarrow 0$$

et le fait que $S_2(M)$ n'est pas projectif, entraînent $dh(S_2(M))=1+dh(E)=2$. En particulier $S_2(M)$ n'est pas réflexif.

Etant donné que $\operatorname{prof}(S_2(M))+dh(S_2(M))=\dim(A)$, il s'ensuit que prof $(S_2(M))=1$. Il existe alors un élément $b \in A$, $b \neq 0$ (d'ailleurs, $b \in \mathfrak{m}$) tel que l'homothétie

$$\begin{aligned} S_2(M) &\longrightarrow S_2(M) \\ u &\longmapsto bu \end{aligned}$$

soit injective.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à $S_2(M)$. Il existe un $u \in S_2(M)$, $u \neq 0$, tel que $\mathfrak{p}=\operatorname{Ann}(u)$. Il est clair alors que $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$ car si $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ on aurait $bu=0$, donc $u=0$, ce qui est faux. Donc, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A associé à $S_2(M)$, on a $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$. Or, M étant réflexif, il s'ensuit que $M_\mathfrak{p}$ est $A_\mathfrak{p}$- libre pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. En particulier, $S_2(M_\mathfrak{p})$ est $A_\mathfrak{p}$- libre pour tout $\mathfrak{p}$ associé à $S_2(M)$. A ce moment-là, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ étant associé à $S(M_\mathfrak{p})$, il s'ensuit que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}=0$, donc $\mathfrak{p}=0$. Ceci nous montre que $t(S_2(M))=0$.

On va finalement montrer que $t(S_3(M))=0$. En effet, on sait que $S_3(M)=S_3(A^5)/F$ où F est le sous-A-module du A-module libre $S_3(A^5)$ engendré par les éléments $x_1X_iX_j$, $x_2X_iX_j$, $x_3X_iX_j$ $(i, j=1, \dots, 5)$. Puisque $rg(S_3(A^5))=35$ et $rg(S_3(M))=4$, alors $rg(F)=31$.

Désignons par y_{ij}, z_{ij}, t_{ij} $(i, j=1, \dots, 5)$ une base du A-module libre $L=A^{45}$, où évidemment on a $y_{ij}=y_{ji}$, $z_{ij}=z_{ji}$ et $t_{ij}=t_{ji}$, quels que soient i, j. On pose

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= \sum_{i=1}^{5} b_i y_{ij} - \sum_{i=1}^{5} c_i z_{ij} \\ u_{2,j} &= \sum_{i=1}^{5} d_i z_{ij} - \sum_{i=1}^{5} b_i t_{ij} \qquad (j=1, \dots, 5), \\ u_{3,j} &= \sum_{i=1}^{5} c_i t_{ij} - \sum_{i=1}^{5} d_i y_{ij} \end{aligned} \tag{2}$$

où les b_i, c_i, d_i ont été déjà définis plus haut.

Soit σ la permutation de $\{1, 2, 3\}$ définie par $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=1$ et $\sigma(3)=2$ et considérons l'ensemble $I_{m,n}=\{1, 2, 3\} \times \{1, \dots, 5\} - \{(m, n)\}$, où $m \in \{1, 2, 3\}$ et n est égal, soit à $\sigma(m)+1$, soit à $\sigma(m)+2$. Désignons par $G_{m,n}$ le sous-A-module de L engendré par les $u_{i,j}$, $(i, j) \in I_{m,n}$. Si l'on regarde la matrice des coefficients des $u_{i,j}$, $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, \dots, 5\}$, on voit que pour toute paire

(m, n) du type décrit, $G_{m,n}$ est libre de rang 14. Fixons une telle paire (m, n) et soient $G=G_{m,n}$ et $F'=L/G$. *On va démontrer que le A-module F' est sans torsion.* En effet, soit $\bar{x} \in t(F')$; il existe $c \in A$, $c \neq 0$ tel que $cx \in G$. On peut supposer que c ne soit pas inversible dans A, donc que $c \in \mathfrak{m}$. Il existe alors un nouveau système de paramètres a'_1, a'_2, a'_3 tel que $c \in Aa'_1$. Si G' est le sous-A-module libre de L construit à partir de a'_1, a'_2, a'_3 (de façon analogue à G), alors $L/G \xrightarrow{\alpha} L/G'$.

On peut écrire $c=c'a'_1$ avec $c' \in A$. Si l'on démontre que $c\bar{x}=0$ entraîne $c'\bar{x}=0$, l'assertion est démontrée car alors, où c' est inversible, donc $\bar{x}=0$ ou c' n'est pas inversible et on refait le raisonnement ci-dessus. Donc, deux possibilités peuvent se présenter: ou l'on trouve, après un nombre fini de telles opérations, un c' inversible tel que $c'\bar{x}=0$ (d'où $\bar{x}=0$) ou alors $c \in \mathfrak{m}^n$ pour tout $n \geq 1$. Ceci nous montre que $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n=0$, donc $c=0$, absurde. Cette seconde possibilité est ainsi exclue.

Démontrons donc que $c\bar{x}=0$ entraîne $c'\bar{x}=0$, D'après l'isomorphisme α, on peut supposer que $c \in Aa_1$, i.e., que $c=c'a_1$ avec $c' \in A$. La condition $c\bar{x}=0$ entraîne l'existence d'éléments $a_{ij} \in A$, $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, \ldots, 5\}$, $(i, j) \neq (m, n)$, tels que $cx=\sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}$. D'autre part, il existe des éléments $b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in A$ tels que $x=\sum_{i,j} b_{ij}y_{ij}+\sum_{i,j} c_{ij}z_{ij}+\sum_{i,j} d_{ij}t_{ij}$. La relation $\sum_{i,j} cb_{ij}y_{ij}+\sum_{i,j} cc_{ij}z_{ij}+\sum_{i,j} cd_{ij}t_{ij} =\sum_{i,j} a_{ij}u_{ij}$ et les (2) nous donnent

$$\left.\begin{aligned} cb_{ii}&=a_{1i}b_i-a_{3i}d_i\\ cc_{ii}&=a_{2i}d_i-a_{1i}c_i\\ cd_{ii}&=a_{3i}c_i-a_{2i}b_i \end{aligned}\right. \qquad (i=1, \ldots, 5)$$

et

$$\left.\begin{aligned} cb_{ij}&=a_{1j}b_i+a_{1i}b_j-a_{3j}d_i-a_{3i}d_j\\ cc_{ij}&=a_{2j}d_i+a_{2i}d_j-a_{1j}c_i-a_{1i}c_j\\ cd_{ij}&=a_{3j}c_i+a_{3i}c_j-a_{2j}b_i-a_{2i}b_j \end{aligned}\right. \qquad (i \neq j).$$

On a donc $cc_{22}=-a_{12}a_2$, ce qui entraîne $a_{12} \in Aa_1$: $Aa_2=Aa_1$. Les relations écrites ci-dessus nous montrent, de même, que $a_{ij} \in Aa_1$, quels que soient i, j. Donc, $c'a_1x \in a_1G$ et ceci signifie que $c'x \in G$, i.e., $c'\bar{x}=0$. On a ainsi $t(F')=0$.

L'application A-linéaire (surjective) $L \longrightarrow F$ définie par $y_{ij} \longmapsto x_1X_iX_j$, $z_{ij} \longmapsto x_2X_iX_j$ et $t_{ij} \longmapsto x_3X_iX_j$ s'annule sur G, donc, par passage au quotient, on a une suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Puisque F et F' ont le même rang $(=31)$, alors $N \otimes_A K=0$. De plus, F'

n'ayant pas de torsion, $t(N)=0$. Donc $N=0$ et $F' \xrightarrow{\sim} F$.

On remarque qur F' n'est pas libre, car $[F'/\mathfrak{m}F' : A/\mathfrak{m}]=45$ et $[F'\otimes_A K : K]=31$. Le raisonnement suit maintenant de façon analogue à celui fait pour démontrer que $t(S_2(M))=0$. Donc, $t(S_3(M))=0$.

Remarque: Il est peut être utile de remarquer que le quotient de deux modules sans torsion ou même libres n'est pas nécessairement sans torsion. On peut, toutefois, donner le résultat (élémentaire et sans doute bien connu) suivant: *soient L et L' deux A-modules sans torsion, L' sous-A-module de L. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *L/L' est un A-module sans torsion*;

(ii) *Pour tout élément régulier $s \in A$, $sL \cap L' = sL'$*;

(iii) *Pour tout élément régulier $s \in A$, $\mathrm{Tor}_1^A(L/L', A/sA)=0$.*

L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(iii) peut s'exprimer plus généralement de la façon suivante: *une condition nécessaire et suffisante pour que un A-module M soit sans torsion est que* $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/sA)=0$ *pour tout élément régulier $s \in A$.*

3. Une généralisation

Soit A un anneau intègre de caractéristique p et soit $\boldsymbol{Z}_p$ le sous anneau premier de A. Soient $b_1^{(0)}, \dots, b_n^{(0)}$ les éléments de A de la forme $b_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} a_j c_{i,j}^{(0)}$ $(i=1, \dots, n)$, où les a_j et les $c_{i,j}^{(0)}$ sont dans A. Si $N=\{1, \dots, n\} \subset \boldsymbol{N}$, on définit sur N^2 une relation transitive de la façon suivante: si (i, j) et (i', j') sont dans N^2, on pose $(i, j)>(i', j') \Leftrightarrow i+j>i'+j'$. De plus, on définit sur les monômes de $\boldsymbol{Z}_p[c_{i,j}^{(0)}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une relation transitive, de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

01) si $(i, j)>(i', j')$, $(i, j)>(i'', j'')$ et $(i, j)>(i''', j''')$, alors $c_{i,j}^{(0)} c_{i',j'}^{(0)} > c_{i'',j''}^{(0)}\ c_{i''',j'''}^{(0)}$;

02) si m, m', m'', m''' sont des monômes en les $c_{i,j}^{(0)}$ à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_p$, alors $m>m'$ et $m''\geqslant m'''$ entraînent $mm''>m'm'''$.

On va suppose, de plus, que les $c_{i,j}^{(0)}$ soient des indéterminées sur $\boldsymbol{Z}_p$ et pour tout polynôme $m=\sum_i a_i m_i \in \boldsymbol{Z}_p[c_{i,j}^{(0)}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ on pose $\mu(m)=\max_i\{m_i\}$, où les a_i sont dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Posons:

(i) $c_{i,k+1+j}^{(k+1)}=c_{i+1,k+1}^{(k)}c_{1,k+1+j}^{(k)}-c_{1,k+1}^{(k)}c_{i+1,k+1+j}^{(k)}$ (définition par récurrence des $c_{i,j}^{(k)}$, $i=1, \ldots, n-k-1$, $j=1, \ldots, n-k-1$ et $k\geqslant 0$);

(ii) $b_i^{(k+1)}=\sum_{j=k+2}^{n} a_j c_{i,j}^{(k+1)}$ pour $k\geqslant 0$ et $i=1, \ldots, n-k-1$.

On en déduit:

(iii) $b_i^{(k+1)}=c_{i+1,k+1}^{(k)}b_1^{(k)}-c_{1,k+1}^{(k)}b_{i+1}^{(k)}$ pour $k\geqslant 0$ et $i=1, \ldots, n-k-1$.

Pour chaque $k>0$, on a $n-k$ termes $b_1^{(k)}, \ldots, b_{n-k}^{(k)}$. En particulier, pour $k=\mathrm{n}-1$, on a un seul terme $b_1^{(n-1)}=a_n c_{1,n}^{(n-1)}$.

La condition (i) nous dit que chaque $c_{i,j}^{(k)}$ est un polynôme de $\boldsymbol{Z}_p[c_{i,j}^{(0)}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

LEMME 1: *Si $m_1, \ldots, m_s$ sont des polynômes de $\boldsymbol{Z}_p[c_{i,j}^{(0)}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors* $\mu(\prod_{i=1}^{s} m_i)=\prod_{i=1}^{s}\mu(m_i)$.

Ceci résulte trivialement de la condition 02).

LEMME 2: *Pour tout entier $k\geqslant 0$, on a*:

(1) *Les conditions $(i, j)>(i', j')$, $(i, j)>(i'', j'')$ et $(i, j)>(i''', j''')$* entraînent $\mu(c_{i,j}^{(k)}c_{i',j'}^{(k)})>\mu(c_{i'',j''}^{(k)}c_{i''',j'''}^{(k)})$.

(2) *$\mu(c_{i,j}^{(k)})$ a son coefficient égal à* 1.

La démonstration se fait par récurrence sur k, le cas $k=0$ étant trivialement vrai. Supposons que (1) et (2) soient vraies pour k et démontrons-les pour $k+1$. D'après le lemme 1, pour tout k et pour tout (i, j), $(i', j')\in N^2$, on a $\mu(c_{i,j}^{(k)}c_{i',j'}^{(k)})=\mu(c_{i,j}^{(k)})\mu(c_{i',j'}^{(k)})$ et par l'hypothèse de récurrence (1), $\mu(c_{i+1,k+1+j}^{(k)}c_{1,k+1}^{(k)})=\mu(c_{i+1,k+1+j}^{(k)})\mu(c_{1,k+1}^{(k)})>\mu(c_{i+1,k+1}^{(k)}c_{1,k+1+j}^{(k)})$. Donc, d'après (i), on peut écrire $\mu(c_{i,k+1+j}^{(k+1)})=\mu(c_{i+1,k+1+j}^{(k)})\mu(c_{1,k+1}^{(k)})$. L'hypothèse de récurrence (2) nous dit alors que le coefficient de $\mu(c_{i,k+1+j}^{(k+1)})$ est égal à 1.

La condition (i) nous permet d'écrire $c_{i,j}^{(k+1)}c_{i',j'}^{(k+1)}=c_{i+1,k+1}^{(k)}c_{1,j}^{(k)}c_{i'+1,k+1}^{(k)}c_{1,j'}^{(k)}-c_{i+1,k+1}^{(k)}c_{1,j}^{(k)}c_{1,k+1}^{(k)}c_{i'+1,j'}^{(k)}-c_{1,k+1}^{(k)}c_{i+1,j}^{(k)}c_{i'+1,k+1}^{(k)}c_{1,j'}^{(k)}+(c_{1,k+1}^{(k)})^2c_{i+1,j}^{(k)}c_{i'+1,j'}^{(k)}$. Si $j'>k+1$, on a $(i'+1, j')>(i'+1, k+1)$, $(i'+1, j')>(1, j')$ et $(i'+1, j')>(1, k+1)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence (1) et le lemme 1, on peut écrire $\mu(c_{i,j}^{(k+1)}c_{i',j'}^{(k+1)})=\mu((c_{1,k+1}^{(k)})^2c_{i+1,j}^{(k)}c_{i'+1,j'}^{(k)})=\mu(c_{1,k+1}^{(k)})^2\mu(c_{i+1,j}^{(k)})\mu(c_{i'+1,j'}^{(k)})$. Si maintenant l'on suppose que $(i, j)>(i', j')$, $(i, j)>(i'', j'')$ et $(i, j)>(i''', j''')$, alors $\mu(c_{i'',j''}^{(k+1)}c_{i''',j'''}^{(k+1)})=\mu(c_{1,k+1}^{(k)})^2\mu(c_{i''+1,j''}^{(k)})\mu(c_{i'''+1,j'''}^{(k)})$ et par l'hypothèse de récurrence (1), $\mu(c_{i+1,j}^{(k)})\mu(c_{i'+1,j'}^{(k)})>\mu(c_{i''+1,j''}^{(k)})\mu(c_{i'''+1,j'''}^{(k)})$. La condition 02) nous doit alors que $\mu(c_{i,j}^{(k+1)}c_{i',j'}^{(k+1)})>(c_{i'',j''}^{(k+1)}c_{i''',j'''}^{(k+1)})$.

Le cas particulier suivant sera utile par la suite $\mu(c_{1,n}^{(n-1)})$ a son coefficient égal à 1.

LEMME 3: *Si l'anneau A est gradué sur $\mathbf{N}$, les $c_{i,j}^{(0)}$ sont homogènes de degré q et les a_i homogènes de degré zéro, alors $b_1^{(n-1)}$ est homogène de degré $2^{n-1}q$.*

En effet, d'après (i), $d^0(c_{i,j}^{(k+1)})=2\ d^0(c_{i',j'}^{(k)})$ où (i,j) et (i',j') sont dans N^2. Donc, $d^0(c_{i,j}^{(k+s)})=2^s d^0(c_{i',j'}^{(k)})$ et étant donné que $d^0(c_{i,j}^{(0)})=q$, alors $d^0(c_{1,n}^{(n-1)})=2^{n-1}q$.

Le lemme suivant est trivial:

LEMME 4: *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'indéterminées sur l'anneau A et M le A-module engendré par les éléments $x_j=\sum_i b_{ji}X_i$ (somme finie), $j=1, \ldots, s$, où les b_{ji} sont dans A. Désignons par $J(M)$ l'idéal de $A[X_i]_{i\in I}$ engendré par M et par $K(M)$ l'idéal de A engendré par les b_{ji}. Alors, un polynôme $f\in A[X_i]_{i\in I}$ est dans $J(M)$ si et seulement si tous les coefficients de f sont dans $K(M)$.*

THÉORÈME 2: *Soient A un anneau intègre, $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A tels que l'idéal qu'ils engendrent soit $\neq A$, $X_1, \ldots, X_{2n-1}$ des indéterminées sur A et P le A-module engendré par les éléments*

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n \\
x_2 &= \qquad a_1X_2+\cdots+a_{n-1}X_n+a_nX_{n+1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= \qquad\qquad a_1X_n+a_2X_{n+1}+\cdots+a_nX_{2n-1}.
\end{aligned}$$

Si $M=A^{2n-1}/P$, alors $S_{2^{n-1}}(M)$ a de la torsion.

En effet, dans l'ensemble des monômes de $\mathbf{Z}_p[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$ on définit une relation transitive, en posant: $X_1^{i_1}\ldots X_{2n-1}^{i_{2n-1}}>X_1^{j_1}\ldots X_{2n-1}^{j_{2n-1}} \Leftrightarrow$ il existe un indice $k\in\{1, \ldots, 2n-1\}$ tel que $i_{2n-1}=j_{2n-1}$, $i_{2n-2}=j_{2n-2}$, $\ldots$, $i_{2n-1-k}=j_{2n-1-k}$ et $i_{2n-2-k}>j_{2n-2-k}$. Si $m=\sum_i a_im_i$ et $m'=\sum_i a'_im'_i$ sont des polynômes de $\mathbf{Z}_p[X_1, \ldots, X_{2n-1}]$, où les a_i et a'_i sont dans $\mathbf{Z}_p$ et les m_i et m'_i sont des monômes en les indéterminées $X_1, \ldots, X_{2n-1}$, on suppose qu'ils soient numérotés de telle sorte qu'on ait $m_{i+1}\geqslant m_i$ et $m'_{i+1}\geqslant m'_i$ pour tout i. On pose alors: $m>m'\Leftrightarrow m_k>m'_k$, où k est un entier tel que $m_j=m'_j$ pour tout $j<k$ et $m_k\neq m'_k$. Si l'on pose $c_{i,j}^{(0)}=X_{i+j-1}$, les conditions 01) et 02) sont vérifiées et $b_1^{(n-1)}=a_nc_{1,n}^{(n-1)}\in J(P)$. D'après le lemme 2, $\mu(c_{1,n}^{(n-1)})$ est un monôme en les indéterminées $X_1, \ldots, X_{2n-1}$ à coefficient égal à 1. Donc, d'après le lemme 4, $c_{1,n}^{(n-1)}\notin J(P)$. Or, $S_{2^{n-1}}(M)=S_{2^{n-1}}(A^{2n-1})/J(P)\cap S_{2^{n-1}}(A^{2n-1})$ et le lemme 3 nous dit que $c_{1,n}^{(n-1)}\in S_{2^{n-1}}(A^{2n-1})$. Donc, $b_1^{(n-1)}\in J(P)\cap S_{2^{n-1}}(A^{2n-1})$ et ceci nous montre que $a_nc_{1,n}^{(n-1)}=0$ dans $S_{2^{n-1}}(M)$ avec $c_{1,n}^{(n-1)}\neq 0$ dans $S_{2^{n-1}}(M)$.

Une question qui se pose tout naturellement: supposons que A soit local régulier de dimension n et que $a_1, \dots, a_n$ soit un système minimal de générateurs (système de paramètres) de son idéal maximal. Est-il vrai que $S_q(M)$ est sans torsion pour tout entier q tel que $0 \leqslant q \leqslant 2^{n-1}-1$?

Universite de Montpellier
Faculte des Sciences

Bibliographie

[1] N. Bourbaki -Algèbre, chap. 6 et 7, Hermann, Paris 1964.
[2] N. Bourbaki-Algèbre commutative, chap. 1 et 2, Hermann, Paris 1961.
[3] C. Chevalley-Fundamental concepts of algebra, Academic Press Inc., New York 1956.
[4] D. Lazard-Sur les modules plats, C.R. Acad. Sc. **258** (1964), 6313-6316.
[5] A. Micali-Sur les algèbres universelles, Ann. Inst. Fourier Grenoble **14** (1964), 33-88.
[6] A. Micali-Algèbres intègres et sans torsion, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 5-14.
[7] D. G. Northcott-Ideal Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge Tracts n° 42, Cambridge 1953.
[8] P. Samuel-Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 237-249.