

## 論文審査の結果の要旨

氏名 難波 時永

本論文では、古典的な場合と根本的に異なる効果を生む因子を有する時間発展型の非線形偏微分方程式、特にハミルトン・ヤコビ方程式および2階退化楕円型作用素を主要部を持つ方程式に対して均質化問題の考察や適切性の研究を行っている。扱われる方程式は最適制御、結晶成長、異常拡散などの実現象論と深い関わりを持っている。粘性解理論の枠組みで、問題の内包する諸課題を精密に解析または粘性解の概念を拡張することにより、根本的な違いを生む原因を明らかにし古典的な結果との比較を行っている。

第1章と第5章で均質化問題、第2、3、4章では非整数階時間微分を持つ方程式の粘性解を扱った。第1章では、結晶成長の現象を動機とする強圧的でないハミルトニアンを持つハミルトン・ヤコビ方程式に対して均質化問題を考察する。均質化とは、対象の微視的な様相から巨視的な様相を推定する手法の一つであり、数学的には一種の特異極限問題として記述される。強圧的なハミルトニアンに対しては均質化極限の存在結果がよく知られているが、強圧的でない場合は同様の議論が機能せず、現在のところ統一的な解法はない。

これに対して、セル問題の可解性の結果および一般化実効ハミルトニアンの概念を確立して、対応する均質化問題の均質化極限が存在する場合の十分条件を与えている。これは完全に新しい結果である。また、均質化極限が存在しない場合があることも示し、そうなるための十分条件を与える。この他第5章では、状態拘束境界条件での均質化問題を考察する。

第2章では、Caputoの意味での非整数階時間微分（以降、Caputo時間微分）を持つハミルトン・ヤコビ方程式の初期値問題に対する適切性を調べる。ただし、本章を通してCaputo時間微分の階数 $\alpha$ は $0 < \alpha < 1$ の場合のみ考える。Caputo時間微分を持つ偏微分方程式は幅広い実現象への応用を持っており、近年急激に注目を集めている。中でも、通常の拡散方程式の時間微分をCaputo時間微分で置き換えた異常拡散の研究は盛んで、超関数の意味の弱解を用いた研究がある。一方Allenにより、Caputo時間微分を持つある種の方程式の正則性が粘性解を用いて考察されたが、そこでは初期値問題の適切性は考

察されていなかった。本研究は、以上の研究で考えられているような方程式に対する粘性解理論を構築することを目指している。2階の方程式に対しては技術的な問題を含んでいるため、本章ではまず1階の方程式に対して考察し、2階への拡張は第3章、また非斉次ノイマン問題への拡張は第4章で行う。なお、2階の場合はもちろん、1階の方程式に対しても本研究結果は全く新しいものである。

関数  $u$  の Caputo 時間微分  $\partial_t^\alpha u$  は  $u$  の時間微分と関数  $t^{-\alpha}$  との畳み込み積で定義される非局所な関数であるため、従来の粘性解の定義は直接適用できない。また、分数階ラプラシアンなどの空間非局所な方程式に対してはすでに粘性解理論は構築されているが、微分の定義が異なるために同様の定義が適用できるかどうかは明らかではない。したがって、本研究の主要な課題は一意的可解性を確認する（粘性）解を定義することである。粘性解理論の考えに基づき、[Luchko, 2009] において確立された Caputo 微分に対する最大値原理と空間方向に関する古典的な最大値原理を利用することによって一種の弱い解の概念を得る。しかしながら、この意味の解に対しては比較定理を示す際に使われる変数倍化法が思うように機能しない。この解決策として、Caputo 時間微分を部分積分した関数（これは未知関数の微分を含まない）を Caputo 時間微分の代替物として粘性解を定義する。この意味での粘性解に対しては変数倍化法が機能するため、比較定理（一意性）が得られる。また、従来と同様にペロンの方法による（連続）解の存在も得られるため、初期値問題の一意的可解性が示される。本章では以上に加えて、解の安定性と解の正則性の問題も考察する。安定性については従来のものに加えて、時間微分の階数をパラメータとみた場合の極限操作の下での安定性を示す。正則性は、ハミルトニアンおよび初期値を少し制限することで、時間について時間微分階数と同じ次数のヘルダー連続かつ空間についてリップシッツ連続であることを示す。

本章でのハミルトニアンや初期値への仮定は整数階の場合でも標準的なものであり、特にいずれの結果も Caputo 時間微分を持つ移流方程式に対しても適用可能で、その場合も可解性に対する初めての結果である。非整数階時間微分を持つ方程式に対する粘性解理論を創設した研究といえる。

よって、論文提出者 難波時永は、博士（数理科学）の学位を受けるにふさわしい十分な資格があると認める。