

# 論文の内容の要旨

## 論文題目

Discrete integrable equations associated with cluster algebra and its extension  
( クラスター代数およびその拡張に付随する離散可積分方程式 )

氏 名 大久保 直人

クラスター代数とは **quiver** を用いて定義される可換環で、Fomin と Zelevinsky によって導入された。クラスター代数の生成元はクラスター変数と呼ばれ、**seed** の **mutation** によって定義される。**Seed** とは **quiver**、クラスター変数、係数の組のことで、**mutation** とは **seed** の変換のことである。初期 **seed** に **mutation** を施すことにより得られるクラスター変数と係数は **quiver** の形に依存したある関係式を満たす。また、初期 **seed** に **mutation** を施すことにより得られるクラスター変数は、初期 **seed** のクラスター変数のローラン多項式となることが知られている。この性質はローラン性と呼ばれている。

先行研究として、初期 **seed** として適当な **quiver** を選んだとき、**mutation** により得られる係数が **q**-パンルヴェ I 方程式や **q**-パンルヴェ II 方程式を満たすことが分かっている。これらの **quiver** は **mutation-period** と呼ばれる性質をもっている。**quiver** に対して **m** 回の **mutation** を施したものが、元の **quiver** の頂点を置換したものになっているとき、その **quiver** を **period-m quiver** という。これらのうち、**period-1 quiver** については Fordy と Marsh によりすべて得られているが、周期が 2 以上の **quiver** については完全な分類はされていない。上記の **q**-パンルヴェ I 方程式と **q**-パンルヴェ II 方程式を与える **quiver** は **period-1 quiver** である。本論文では新たに **period-2 quiver** から **q**-パンルヴェ III 方程式と **period-4 quiver** から **q**-パンルヴェ VI 方程式を得た。これらの差分方程式は初期 **seed** に対して **mutation** を繰り返すことにより得られる係数の満たす関係式を求め、その保存量を用いて差分方程式を 2 階に書き直すことにより得られる。

ランクが無限大である適当なクラスター代数を考えることにより、そのクラスター変数が広田・三輪方程式や離散 KdV 方程式などの高次元の可積分差分方程式を満たすことが分かっている。クラスター代数のランクとは初期 **seed** の **quiver** の頂点の個数のことである。これらの差分方程式を与える **quiver** は **mutation-period** の拡張となる性質をもっている。広田・三輪方程式と離散 KdV 方程式を与える **quiver** は **period-1 quiver** の拡張になっている。本論文では新たにクラスター変数が離散 **mKdV** 方程式を満たすようなクラスター代数

を period-2 quiver の拡張から得た。離散 mKdV 方程式を与える quiver に対して、適当な変形を施すことにより、q-パンルヴェ III 方程式や q-パンルヴェ VI 方程式を得る quiver を得ることができることが分かった。また、既に得られている広田・三輪方程式を与える quiver に対して同様の変形を施すことにより、離散 mKdV 方程式を与える quiver が得られることも分かった。この変形は差分方程式に拘束条件を課すことで別の差分方程式を導く reduction に対応している。

クラスター変数の満たす関係式は、(2つのクラスター変数の積) = (クラスター変数の単項式2つの和)の形で得られる。しかし、離散 BKP 方程式、Somos-7 などの差分方程式はこの形の関係式ではない。そこで、Lam と Pylyavskyy によりクラスター代数のローラン性をもつような拡張として導入されたローラン現象代数を考える。ローラン現象代数はクラスター変数と exchange polynomial から成る seed の mutation により定義される。本論文では初期 seed の exchange polynomial を適当に選ぶことにより、クラスター変数が離散 BKP 方程式や Somos-7 などを満たすようなローラン現象代数を新たに構成した。Somos-7 を与える初期 seed はクラスター代数の mutation-period に相当する性質をもっている。また、離散 BKP 方程式はランクが無限大であるローラン現象代数から得られ、その初期 seed はクラスター代数の mutation-period の拡張に相当する性質をもっている。

本論文の構成は以下の通りである。第1章では本論文の主張を概説する。第2章ではクラスター代数の定義について述べる。第3章ではランクが無限大の適当なクラスター代数のクラスター変数が離散 mKdV 方程式を満たすことを述べ、差分方程式の reduction と対応する quiver の変形についても説明する。第4章では mutation-period と呼ばれる性質について説明し、適当な mutation-periodic quiver から得られるクラスター代数の係数が q-パンルヴェ III 方程式と q-パンルヴェ VI 方程式を満たすことを示す。第5章ではローラン現象代数と period-1 seed の定義について述べる。第6章では適当な exchange polynomial から得られるランクが無限大のローラン現象代数のクラスター変数が離散 BKP 方程式を満たすことを述べる。第7章では離散 BKP 方程式を与える初期 seed の reduction によって Somos-7 などの差分方程式の初期 seed も得られることについて述べる。第8章では本論文のまとめと今後の展望について述べる。