論文の内容の要旨

論文題目　On codimension two contact embeddings in the standard spheres

(標準接触球面への余次元 2 の接触埋め込みについて)

氏名　古川　遼

$2n+1$ 次元多様体 M 上の**接触構造**とは最も非可積分な超平面場 ξ のことである．接触構造 ξ は局所的には $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ をみたす微分 1 形式 α を用いて $\xi = \ker \alpha$ と書ける．接触構造が cooriented な場合には大域的な微分 1 形式 α をとることができる．M が向きづけられていて接触構造 $\xi = \ker \alpha$ が cooriented な場合, ξ が**正** (または**負**) の接触構造であるとは, 各点において $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ が M の向きに関して正 (または負) の体積要素になることである．2 つの接触多様体 (M, ξ) と (N, η) に対して, 埋め込み $j \colon M \to N$ が $T_j(M) \cap \eta|_{j(M)} = dj(\xi)$ を満たすとき, この埋め込みは**接触埋め込み**と呼ばれる．

この論文では $n \geq 1$ の場合に, $2n+1$ 次元閉接触多様体の $2n+3$ 次元多様体への接触埋め込み, 特に標準接触球面 (S^{2n+3}, ξ_{std}) への接触埋め込みの問題を扱う．$n \geq 1$ の場合の自然な接触埋め込みの例として複素孤立超曲面特異点のリンクがある．他にいくつかの例があるが, 標準接触球面への余次元 2 の接触埋め込みについては十分に研究が進んでいない．

この論文の目的は, **ブレイド**と**ブレイド埋め込み**を用いて高次元の場合に余次元 2 の接触埋め込みを構成し調べることである．これらは S^3 内の 1 次元の閉ブレイドの高次元へのひとつの自然な一般化である．m 次元多様体 M と Y に対して $\mathrm{pr}_1 \circ j$ が分岐被覆となるような埋め込み $j \colon M \to Y \times D^2$ があるとき, M は Y に関する m 次元**ブレイド**であるという．ここで, $\mathrm{pr}_1 \colon Y \times D^2 \to Y$ は第一成分への射影である．m 次元多様体 M の $m+2$ 次元多様体 N への埋め込み $j \colon M \to N$ に対し, ある m 次元多様体 Y が存在しかつ j によって M が Y に関するブレイドになるとき, 埋め込み j を**ブレイド埋め込み**と呼ぶ．2 次元ブレイドはよく研究されている対象である．3 次元ブレイドは, 例えば Carter と鎌田らの研究に見られるように, 活発に研究され始めている．高次元ブレイドの位相幾何学的な性質はまだ十分に研究が進んでいないが, ブレイドは接触埋め込みを構成するために有用である．

1　3 次元閉接触多様体の 5 次元標準接触球面への接触埋め込みの存在

この論文の前半の部分では, 3 次元閉接触多様体の 5 次元標準接触球面 (S^5, ξ_{std}) への接触埋め込みを考える．Hirsch によって任意の向き付け可能 3 次元閉多様体は S^5 への C^∞ 埋め込み可能であることが示されている．余次元 2 の接触埋め込みについて唯一知られている障害は次のものである．

定理 1 (粕谷)**.** $2n+1$ 次元の閉 cooriented 接触多様体 (M, ξ) が $H^2(N; \mathbf{Z}) = 0$ となるような $2n+3$ 次元の cooriented 接触多様体 (N, η) へ接触埋め込み可能ならば ξ の第 1 チャーン類 $c_1(\xi)$ は自明である．

ここで, 次の問題を考える.

問題 1. 向き付けられた 3 次元閉多様体 M が与えられたとする. このとき, M 上の正の接触構造 ξ が (S^5, ξ_{std}) へ接触埋め込み可能であることとその第 1 チャーン類 $c_1(\xi)$ が自明になることは必要十分か.

ブレイド埋め込みよって接触埋め込みを構成することで, この問題 1 に対する部分的な解答として, Entnyre 氏との共同研究により, 定理 2, 3, 4 を得た. 定理 2 ではさらに埋め込みのアイソトピー類がよいものでとれることを主張している.

定理 2 (Etnyre-F.)**.** S^3 上の任意の正の接触構造は S^3 の標準埋め込みとアイソトピックになるように (S^5, ξ_{std}) へ接触埋め込み可能である.

定理 3 (Etnyre-F.)**.** M を向きづけられた 3 次元閉多様体でその 1 次ホモロジー群が 2-torsion を持たないものとする. このとき, M 上の overtwisted な正の接触構造 ξ が (S^5, ξ_{std}) へ接触埋め込み可能であることと $c_1(\xi)$ が自明であることは必要十分である.

神田, Giroux, 本田による, いくつかの閉 3 次元多様体上の tight な接触構造の分類を用いて次の結果を得る.

定理 4 (Etnyre-F.)**.** M を次の閉 3 次元多様体のいずれかとする.

(1) $S^1 \times S^2$,
(2) T^3,
(3) レンズ空間 $L(p,q)$ であって, p が奇数, p が偶数かつ $q = 1$, または p が偶数かつ $q = p - 1$.

このとき, M 上の正の接触構造 ξ が (S^5, ξ_{std}) へ接触埋め込み可能であることと $c_1(\xi)$ が自明であることは必要十分である.

この論文では, (1), (2) と (3) の p が奇数の場合の証明を与える.

2 余次元 2 の接触埋め込みとそのザイフェルト超曲面の相対オイラー数

3 次元接触多様体内の横断的結び目において, 分類問題は主な研究対象の一つである. より正確には, 結び目のアイソトピー類と自己絡み数のみによって横断的結び目のアイソトピー類が決まるかを調べる問題である. これらは 1 次元ブレイド理論, 凸曲面の理論や Floer 型の不変量を用いて研究されている.

高次元の場合の余次元 2 の接触埋め込みの分類問題は, まだ十分に研究されていない. 理由として, 余次元 2 の接触埋め込みを見つけることが困難であること, 不変量の系統的な計算方法がないことが挙げられる. そこで, 次の問題を考える.

問題 2. $n \geq 1$ のとき, $2n+1$ 次元接触多様体 (L, ξ) の (S^{2n+3}, ξ_{std}) への二つの接触埋め込みで, C^∞ 埋め込みとしてアイソトピックであるが接触埋め込みとしてはアイソトピックでないものは存在するか.

この問題 2 に部分的に答えるために, **相対オイラー数**という不変量を計算する. この不変量は横断的結び目の自己絡み数の高次元への自然な一般化である. $2n+3$ 次元の正の接触多様体 (M, ξ) 内の null-homologous な余次元 2 の正の接触部分多様体 $(L, \xi|_{TL})$ とそのザイフェルト超曲面 Σ $(L = \partial\Sigma)$ の**相対オ**

イラー数 $e_{\rm rel}(L,\Sigma)$ は $e_{\rm rel}(L,\Sigma) = -\langle e(\xi, X_\Sigma), [\Sigma, \partial\Sigma]\rangle$ で定義される．ここで, X_Σ は $L = \partial\Sigma$ に沿った $\xi|_{T\Sigma}$ に接する Σ の外向きベクトル場, $e(\xi, X_\Sigma) \in H^{2n+2}(M, L; \mathbf{Z})$ は X_Σ に対する相対オイラー類であり, $[\Sigma, \partial\Sigma] \in H_{2n+2}(M, L; \mathbf{Z})$ は $(\Sigma, \partial\Sigma)$ に代表される相対ホモロジー類である．横断的結び目 L とそのザイフェルト曲面 Σ から決まる自己絡み数 $sl(L,\Sigma)$ は相対オイラー数 $e_{\rm rel}(L,\Sigma)$ に等しい．

この論文の後半では, ブレイド埋め込みから得られる巡回分岐被覆の接触埋め込みの相対オイラー数を計算する．

定理 5. n を正の整数とする．M を正の接触構造 ξ をもつ $2n+3$ 次元ホモロジー球面とする．L を $2n+1$ 次元の向きづけられた球面で (M,ξ) 内の正の接触部分多様体とする．K を $2n-1$ 次元の向きづけられた球面で $(L, \xi|_{TL})$ 内の正の接触部分多様体とする．任意の正の整数 k に対して, $(L, \xi|_{TL})$ の $(K, \xi|_{TK})$ で分岐する k 重巡回被覆 $(L_{K,k}, (\xi|_{TL})_{K,k})$ の接触埋め込み $j\colon (L_{K,k}, (\xi|_{TL})_{K,k}) \to (M,\xi)$ と $j(L_{K,k})$ のザイフェルト超曲面 $\Sigma_{j(L_{K,k})}$ であって,

$$e_{\rm rel}(j(L_{K,k}), \Sigma_{j(L_{k,k})}) = k \cdot e_{\rm rel}(L) - (k-1) \cdot e_{\rm rel}(K)$$

を満たすものが存在する．さらに, 任意の K のザイフェルト超曲面 Σ_K と L のザイフェルト超曲面 Σ_L に対し, $\Sigma_{j(L_{K,k})}$ は, Σ_K の Σ_L 内への境界を固定した押し込み Σ'_K に沿って分岐し, $H^1(\Sigma_L \backslash \Sigma'_K; \mathbf{Z})$ 内の Σ'_K のメリディアン円の双対元の $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ 簡約に対応する Σ_L の k 重巡回被覆と微分同相になるようにとれる．

高次元接触構造の柔軟性の研究は, Borman, Eliashberg と Murphy の高次元の overtwisted な接触構造の分類と Casals, Murphy と Presas の overtwisted な接触構造の特徴づけによってここ数年で大きく発展した．これらの結果と定理 5 を合わせて次の定理を得る．(2) は上記の問題 2 において n が偶数の場合の解答を与える．

定理 6. (1) m を整数とし n を正の整数とする．このとき, S^{2n+1} 上のある overtwisted な接触構造 η_m の (S^{2n+3}, ξ_{std}) への接触埋め込みであって, その相対オイラー数が $2m+1$ に等しく, 標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する．

(2) n を正の偶数とする．このとき, S^{2n+1} 上のある overtwisted な接触構造 ξ が存在し, ξ の (S^{2n+3}, ξ_{std}) への異なる相対オイラー数をもつ無限個の接触埋め込みであって, それらは標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する．特に, 任意の整数 m に対し, S^5 上の唯一つの overtwisted な接触構造の (S^7, ξ_{std}) への接触埋め込みであって, その相対オイラー数が $2m+1$ に等しく, 標準的な埋め込みにアイソトピックであるものが存在する．