論文の内容の要旨

論文題目： Besov and Triebel-Lizorkin spaces associated to non-negative self-adjoint operators

(非負自己共役作用素に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間)

氏　　名：胡 国荣

本論文の目的は，Gauss 型上界評価を満たす熱核を持つ非負自己共役作用素に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間の理論を構築することである．よく知られているように，$\mathbb{R}^n$ 上の Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間は Lebesgue, (fractional) Sobolev, Hardy, BMO, Hölder-Zygmund 空間などの多くの古典的な関数空間を含み，偏微分方程式などに活用されていて非常に重要なものである．近年，Kerkyacharian-Petrushev はかなり一般的な設定で Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間を構成し，それらのフレーム特徴付けなどの性質を示した ([1])．彼らの導入した空間をより正確に記述するために，いくつかの記号を準備する．(X,ρ,μ) を doubling 条件，逆 doubling 条件及び non-collapsing 条件を満たす局所コンパクト距離測度空間とする．$L^2(X,d\mu)$ 上の非負自己共役作用素 $\mathscr{L}$ を考える．論文 [1] では，$\mathscr{L}$ の熱核が Gauss 型上界評価かつ Hölder 連続性を満たすという仮定の下で，$\mathscr{L}$ に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間が以下のように定義される．

定義 1. ([1]) $\Phi_0, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が次の条件を満たすとする．

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\Phi_0 \in [0,2^2], & |\Phi_0(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{for } \lambda \in [0, 2^{3/2}], \\ \operatorname{supp}\Phi \in [2^{-2},2^2], & |\Phi(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{for } \lambda \in [2^{-3/2}, 2^{3/2}]. \end{cases}$$

すべての $j=1,2,\cdots$ に対して，$\Phi_j(\lambda)=\Phi(2^{-2j}\lambda)$ とおく．
(i) $s\in\mathbb{R}$, $p\in(0,\infty]$, $q\in(0,\infty]$ に対して，$\mathscr{L}$ に関する Besov 空間 $B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ を次の準ノルムが有限となる超関数 $f\in\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ の全体と定義する．

$$\|f\|_{B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)} := \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left\|2^{js}\Phi_j(\mathscr{L})f\right\|^q_{L^p(X,d\mu)}\right)^{1/q}. \tag{1}$$

(ii) $s \in \mathbb{R}$, $p \in (0,\infty)$, $q \in (0,\infty]$ に対して，$\mathscr{L}$ に関する Triebel-Lizorkin 空間 $F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ を次の準ノルムが有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ の全体と定義する．

$$\|f\|_{F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)} := \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} |2^{js}\Phi_j(\mathscr{L})f|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(X,d\mu)}. \tag{2}$$

上記の定義が Φ_0, Φ によらないことを示すために，Kerkyacharian-Petrushev は次の Peetre 最大不等式の一般化を用いた．

補題 1. ([1, Lemma 6.4]) $t > 0$, $r > 0$ とする．$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ かつ $\operatorname{supp}\Phi \subset [0, t^2]$ とする．このとき，定数 $c > 0$ が存在して，すべての $f \in \mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ に対し，次の不等式が成り立つ．

$$\sup_{y \in X} \frac{|\Phi(\mathscr{L})f(y)|}{(1+t\rho(x,y))^{d/r}} \leq c[M(|g|^r)(x)]^{1/r}, \quad x \in X.$$

ただし，d は X の "次元"，M は Hardy-Littlewood 最大作用素である．

本論文において我々は，$\mathscr{L}$ の熱核の Hölder 連続性に関する仮定を外して，$\mathscr{L}$ に関する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間の理論を構築する．熱核が Gauss 型上界評価を満たして Hölder 連続性を満たさない非負作用素がたくさん存在するので、我々の設定は [1] の設定を広く拡張している．熱核に Hölder 連続性が仮定されていないとき，[1] での論法に基本的な道具である Peetre 最大不等式の一般化 (Lemma 1) は成立しない．そのため我々は代わりの論法を使わなければいけない．以下，$\mathscr{L}$ の熱核の Hölder 連続性に関する仮定はしない．論文の主結果を述べる．

まず，Chapter 3 では，$\mathscr{L}$ に関連する Besov 及び Triebel-Lizorkin 空間を以下のように導入する．

定義 2. (Definition 3.2 in Chapter 3) $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0,\infty]$ とする．$\Phi_0, \Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が，ある正数 ε 及び非負整数 $M > s/2$ に対し, 次の条件を満たすとする．

$$\begin{cases} |\Phi_0(\lambda)| \geq c > 0 & \text{for } \lambda \in [0, 2^{3/2}\varepsilon], \\ |\Phi(\lambda)| \geq c > 0 & \text{for } \lambda \in [2^{-3/2}\varepsilon, 2^{3/2}\varepsilon], \\ \lambda \mapsto \lambda^{-M}\Phi(\lambda) & \text{belongs to } \mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0}). \end{cases} \tag{3}$$

すべての $j = 1, 2, \cdots$ に対して，$\Phi_j(\lambda) = \Phi(2^{-2j}\lambda)$ とおく．
(i) $p \in (0,\infty]$ に対して, $\mathscr{L}$ に関する Besov 空間 $B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ を準ノルム (1) が有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ の全体と定義する．
(ii) $p \in (0,\infty)$ に対して，$\mathscr{L}$ に関する Triebel-Lizorkin 空間 $F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ を準ノルム (2) が有限となる超関数 $f \in \mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ の全体と定義する．

次の定理は $B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ と $F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ の定義が (Φ_0, Φ) に頼らないことを示す.

定理 1. (Definitions 3.3 and 3.4 in Chapter 3) $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0,\infty]$ とする．(Φ_0, Φ) と $(\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Phi})$ が，ある $M > s/2$ に対して (3) を満たすとする．すべての $j = 1, 2, \cdots$ に対して，$\Phi_j(\lambda) = \Phi(2^{-2j}\lambda)$, $\widetilde{\Phi}_j(\lambda) = \widetilde{\Phi}(2^{-2j}\lambda)$ とおく．
(i) $p \in (0,\infty]$ ならば，次の準ノルムの同値性が成り立つ．

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\|2^{js}\widetilde{\Phi}_j(\mathscr{L})f\right\|^q_{L^p(X,d\mu)} \right)^{1/q} \sim \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\|2^{js}\Phi_j(\mathscr{L})f\right\|^q_{L^p(X,d\mu)} \right)^{1/q}, \quad f \in \mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X).$$

(ii) $p\in(0,\infty)$ ならば，次の準ノルムの同値性が成り立つ．

$$\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}|2^{js}\widetilde{\Phi}_j(\mathscr{L})f|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p(X,d\mu)}\sim\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}|2^{js}\Phi_j(\mathscr{L})f|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p(X,d\mu)},\quad f\in\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X).$$

Chapter 3 では，$B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$, $F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ の完備性及び基本的な埋め込み

$$\mathcal{S}_{\mathscr{L}}(X)\hookrightarrow B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)\hookrightarrow\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X),\quad \mathcal{S}_{\mathscr{L}}(X)\hookrightarrow F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)\hookrightarrow\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$$

も示した．更に，以下の連続的な Littlewood-Paley 型の特徴付けを得た．

定理 2. (Theorem 3.14 in Chapter 3) $s\in\mathbb{R}$, $q\in(0,\infty]$ とする．$\Phi_0,\Phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ が，ある非負整数 $M>s/2$ に対して (3) を満たすとする．
(i) $p\in(0,\infty]$ ならば，

$$\|f\|_{B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)}\sim\|\Phi_0(\mathscr{L})f\|_{L^p(X,d\mu)}+\left(\int_0^1 t^{-sq}\left\|\Phi(t^2\mathscr{L})f\right\|^q_{L^p(X,d\mu)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q},\quad f\in\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X).$$

(ii) $p\in(0,\infty)$ ならば，

$$\|f\|_{F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)}\sim\|\Phi_0(\mathscr{L})f\|_{L^p(X,d\mu)}+\left\|\left(\int_0^1 t^{-sq}|\Phi(t^2\mathscr{L})f|^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\right\|_{L^p(X,d\mu)},\quad f\in\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X).$$

Chapter 4 では，$B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ と $F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ の性質をより深く調べ，アトム分解による特徴付け，補間定理，lifting property，埋め込み定理などを得た．以下，アトム分解による特徴付けについて述べる．$\mathscr{L}$ に関するアトムは次のように導入される．

定義 3. (Definition 4.2 in Chapter 4) $K,S\in\mathbb{N}_0$ とする．$Q\in\mathscr{D}_k$ ($k\in\mathbb{N}_0$) とする．ただし，$\mathscr{D}_k$ は X 上の半径が粗く 2^{-k} の “dyadic cube” の全体の集合 (Lemma 4.1 in Chapter 4 を参照) である．
(A) $k\in\mathbb{N}$ の場合，関数 $a_Q\in L^2(X,d\mu)$ が $m\in\{K,S\}$ に対し次の条件 (a), (b), (c) を満たすとき，a_Q を Q についての (K,S)-アトムと呼ぶ．
(a) $a_Q\in D(\mathscr{L}^m)$.
(b) $\mathrm{supp}(\mathscr{L}^m a_Q)\subset B(z_Q,C2^{-k})$．ただし，$z_Q$ は Q の “中心” である (cf. Lem. 4.1 in Chap. 4).
(c) $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X}|\mathscr{L}^m a_Q(x)|\leq 2^{2km}[\mu(Q)]^{-1/2}$.
(B) $k=0$ の場合，関数 $a_Q\in L^2(X,d\mu)$ が $m\in\{K,0\}$ に対し条件 (a), (b), (c) を満たすとき，a_Q を Q についての (K,S)-アトムと呼ぶ．

$B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ のアトム分解は以下のようになる ($F^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ のアトム分解についても同様である).

定理 3. (Theorem 4.4 in Chapter 4) $s\in\mathbb{R}$, $p\in(0,\infty)$, $q\in(0,\infty)$ とする．K を任意の非負整数，S を $s/2$ より大きい非負整数とする．このとき，定数 $C>0$ が存在して，任意の (K,S)-アトムの列 $\{a_Q\}_{Q\in\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathscr{D}_k}$ 及び任意の複素数列 $w=\{w_Q\}_{Q\in\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathscr{D}_k}$ に対し，

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{Q\in\mathscr{D}_k}w_Q a_Q\right\|_{B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)}\leq C\|w\|_{b^s_{p,q}}$$

が成り立つ．ただし，$b^s_{p,q}$ は [2] で導入される数列空間である．

逆に，定数 $C' > 0$ が存在して，任意的に与えられた $f \in B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ と任意の $K, S \in \mathbb{N}_0$ に対して，(K,S)-アトムの列 $\{a_Q\}_{Q\in\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathscr{D}_k}$ 及び

$$\|w\|_{b^s_{p,q}} \le C'\|f\|_{B^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)}$$

となる複素数列 $w = \{w_Q\}_{Q\in\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathscr{D}_k}$ が存在し，

$$f = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{Q\in\mathscr{D}_k} w_Q a_Q$$

が成り立つ．ここで，級数の収束は $\mathcal{S}'_{\mathscr{L}}(X)$ の意味での収束である．

Chapter 5 では，homogeneous 版の空間 $\dot{B}^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ と $\dot{F}^{s,\mathscr{L}}_{p,q}(X)$ を導入し，それらの性質を調べる．特に，$\dot{F}^{0,\mathscr{L}}_{p,2}(X)$ と $H^p_{\mathscr{L}}(X)$ が同値な空間であることを証明した．

Chapter 6 では，我々の構築した抽象的な理論が具体的な stratified Lie groups の場合に応用される．G を stratified Lie group とし，G 上の任意の sub-Laplaican Δ を考える．Δ は非負自己共役作用素であるから，Chapters 3–5 の理論によって，$B^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $F^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $\dot{B}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $\dot{F}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$ が定義される．これらに対して, 次のことを証明した．(a) $B^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $F^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $\dot{B}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$, $\dot{F}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$ は Δ の選択に頼らない (Theorem 6.7 in Chapter 6)．(b) G 上の畳み込み特異積分作用素の $\dot{B}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$-有界性及び $\dot{F}^{s,\Delta}_{p,q}(G)$-有界性 (Theorem 6.11 in Chapter 6)．

Chapter 7 では, X がリーマン多様体, $\mathscr{L}$ が X 上の Laplace-Beltrami 作用素の場合に, 空間 $F^{0,\mathscr{L}}_{p,2}(X)$ と非接最大関数によって定義される Hardy 空間 $H^p_{\max,\mathscr{L}}(X)$ との同値性を示した．

参考文献

[1] G. Kerkyacharian and P. Petrushev,Heat kernel based decomposition of spaces of distributions in the framework of Dirichlet spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), 121–189.

[2] M. Frazier and B. Jawerth, A discrete transform and decompositions of distribution spaces, *J. Funct. Anal.* **93** (1990), 34–170.