

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E
AMBIENTAL

UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DAS
DIFERENÇAS FINITAS E ELEMENTOS FINITOS
A PROBLEMAS TÉRMICOS

MARCELO AUGUSTO VASCONCELOS
ORIENTADOR: LINEU JOSÉ PEDROSO

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM
ESTRUTURAS

BRASÍLIA/DF: JULHO/2018

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**{UMA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DAS DIFERENÇAS
FINITAS E ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS
TÉRMICOS}**

{MARCELO AUGUSTO VASCONCELOS}

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:



**LINEU JOSÉ PEDROSO, Dr. Ing. (UnB)
(ORIENTADOR)**



**LENILDO SANTOS DA SILVA, Dr. Ing. (UnB)
(EXAMINADOR INTERNO)**



**MARCUS VINICIUS GIRÃO DE MORAIS, Dr. Ing. (UnB)
(EXAMINADOR EXTERNO)**

DATA: BRASÍLIA/DF, 10 de JULHO de 2018.

VASCONCELOS, MARCELO AUGUSTO

Uma Aplicação dos Métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos a Problemas Térmicos [Distrito Federal] 2018

xiii, 99 p., 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2018)

Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. Introdução | 5. Resultados e Discussão |
| 2. Fundamentação Teórica | 6. Conclusões e Perspectivas Futuras |
| 3. Método das Diferenças Finitas | 7. Bibliografia |
| 4. Método dos Elementos Finitos | 8. Apêndice |
| I. ENC/FT/UnB | II. Título (série) |

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

Vasconcelos, M. A. (2018). Uma Aplicação dos Métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos a Problemas Térmicos. Monografia de Projeto Final, Publicação G.PF-001/2018, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 99 p.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Marcelo Augusto Vasconcelos

TÍTULO DA MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL: Uma Aplicação dos Métodos das Diferenças Finitas e Elementos Finitos a Problemas Térmicos

GRAU / ANO: Bacharel em Engenharia Civil / 2018

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Marcelo Augusto Vasconcelos

Avenida Castanheira, n.º 504, Vila Novo Paraíso

68570000-Município de São Geraldo do Araguaia/PA-Brasil

Agradecimentos

A Deus

À minha família e amigos

Ao professor Lineu pela orientação

Aos professores e funcionários da Universidade de Brasília

Resumo

Neste trabalho estudou-se a condução de calor através de corpos sólidos, e se utilizou o Método das Diferenças Finitas (MDF) e Elementos Finitos (MEF) para analisar quatro casos simples exemplificando a distribuição de calor. Os métodos numéricos necessitam ter os seus domínios discretizados, no MDF essa discretização ocorre por meio de pontos nodais, já no MEF a discretização ocorre por meio de elementos finitos. Em ambos os métodos é formado um sistema linear de equações que precisa ser resolvido para obter o valor da temperatura; as rotinas computacionais desenvolvidas estão disponíveis no APÊNDICE A. Os Casos 1 e 2 são modelados em seus estados estacionários e transientes, além de serem tratados como problemas bidimensionais, o Caso 3 é um problema tridimensional estacionário e o Caso 4 é um problema axissimétrico modelado como problema estacionário bidimensional. Verificou-se que ambos os métodos tem resultados satisfatórios para a análise térmica.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	GENERALIDADES	1
1.2	JUSTIFICATIVAS	4
1.3	OBJETIVOS	4
1.4	METODOLOGIA	5
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	CONDUÇÃO DE CALOR	6
2.2	HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS	7
2.3	EQUAÇÃO GERAL DO FLUXO DE CALOR EM COORDENADAS CAR- TESIANAS	7
2.4	EQUAÇÃO GERAL DO FLUXO DE CALOR EM COORDENADAS CI- LÍNDRICAS	9
2.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO	10
2.6	CONDIÇÕES INICIAIS	11
3	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	12
3.1	INTRODUÇÃO	12

3.2	EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS EM COORDENADAS CARTESIANAS	13
3.3	PROCESSO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL	15
3.4	INTERPOLAÇÃO	16
3.5	MATRIZ NO MATLAB	16
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	18
4.1	INTRODUÇÃO	18
4.2	DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	19
4.3	FORMULAÇÃO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DO CALOR	20
4.4	ELEMENTOS TRIANGULARES	21
4.5	MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO TRIANGULAR	24
4.6	MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL	25
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	27
5.1	PROPRIEDADES DO CONCRETO	27
5.2	CASO 1: Problema 2D em Regime Estacionário e Transiente (Exemplo de Aplicação do MDF)	28
5.2.1	ESTACIONÁRIO	28
5.2.2	TRANSIENTE	30
5.3	CASO 2: Problema 2D em Regime Estacionário e Transiente	34
5.3.1	ESTACIONÁRIO 2D: Método das Diferenças Finitas	35
5.3.2	TRANSIENTE 2D: Método das Diferenças Finitas	36
5.3.3	ESTACIONÁRIO 2D: Método dos Elementos Finitos	41

5.4	CASO 3: Problema 3D em Regime Estacionário (Bloco Cúbico)	45
5.5	CASO 4: Problema 3D (Axissimétrico) Estacionário (Geometria Cilíndrica)	50
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	55
6.1	CASO 2	60
6.1.1	ESTACIONÁRIO 2D: Método das Diferenças Finitas	60
6.1.2	TRANSIENTE 2D: Método das Diferenças Finitas	64
6.1.3	ESTACIONÁRIO: Método dos Elementos Finitos	68
6.2	CASO 3	74
6.2.1	ESTACIONÁRIO 3D	74
6.3	CASO 4	79
6.3.1	MALHA (a): Matriz dos Coeficientes Global	79
6.3.2	MALHA (b): Matriz dos Coeficientes Global	81
6.3.3	MALHA (c): Matriz dos Coeficientes Global	83

Lista de Figuras

2.1	Elemento Diferencial (R.,D. C., & G.,D. L. (1977))	7
2.2	Sistema de eixos em coordenadas cilíndricas (R.,D. C., & G.,D. L. (1977)) .	10
3.1	Discretização do domínio)	13
3.2	Operador de diferenças finitas (2D)	13
3.3	Linhas e colunas da matriz 2D (Matlab, 2012a)	16
3.4	Linhas, colunas e fatias da matriz 3D (Matlab, 2012a)	17
3.5	Exemplo de aplicação (Matlab, 2012a)	17
4.1	Discretização de um domínio em elementos	19
4.2	Elemento triangular	23
4.3	Elemento triangular de ângulo reto	24
4.4	Domínio discretizado com dois elementos triangulares	25
5.1	Problema físico proposto, limitado a uma região do domínio de interesse . .	28
5.2	Resposta em Regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 0$	29
5.3	Resposta em Regime regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 8$	29
5.4	Resposta em Regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 100$	29

5.5	Comparação entre os regimes Estacionário (linha vermelha) e Transiente (pontos pretos) para o ponto P da malha	30
5.6	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 0$	31
5.7	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 1\Delta T$	31
5.8	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 2\Delta T$	31
5.9	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 3\Delta T$	32
5.10	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 4\Delta T$	32
5.11	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 5\Delta T$	32
5.12	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 6\Delta T$	33
5.13	Resposta Transiente no <i>tempo</i> $t = 7\Delta T$	33
5.14	Geometria e condições de contorno do caso 2	34
5.15	Malha do caso 2	35
5.16	Resposta em regime estacionário, valor da temperatura nos pontos da malha	35
5.17	Resposta em Regime estacionário para o caso 2	36
5.18	Resposta em regime transiente no <i>tempo</i> $t = 0$ dias	37
5.19	Interpoção da Resposta em Regime estacionário no <i>tempo</i> $t = 0$ dias . . .	37
5.20	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 3,05 dias	38
5.21	Resposta em Regime estacionário no <i>Tempo</i> = 3,05 dias	38
5.22	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 7,22 dias	38
5.23	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 7,22 dias	39
5.24	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 28,05 dias	39
5.25	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 28,05 dias	39
5.26	Resposta em regime transiente no <i>Tempo</i> = 90 dias	40

5.27	Resposta em regime transiente no $T_{tempo} = 90 \text{ dias}$	40
5.28	Malha 1	41
5.29	Malha 2	42
5.30	Malha 3	43
5.31	Condições de contorno do problema 3D	45
5.32	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 1	46
5.33	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 2	46
5.34	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 2	46
5.35	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 3	47
5.36	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 4	47
5.37	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 5	47
5.38	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 6	47
5.39	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 6	48
5.40	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 7	48
5.41	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 8	48
5.42	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 9	49
5.43	Resposta em regime estacionario <i>fatia</i> 10	49
5.44	Cilindro com as Malhas (a), (b) e (c)	50
5.45	Convergência para o valor da temperatura no nós 3, 5 e 7	54

Lista de Símbolos

Letras Latinas

A	Área da face do elemento diferencial
$\delta Q_{\text{aumento}}$	Aumento de energia
C_p	Calor específico
$\delta Q_{\text{geração}}$	Calor gerado
k	Condutividade térmica
x	Coordenada na direção x
y	Coordenada na direção y
z	Coordenada na direção z
c_i	Constantes
$2A$	Determinante da matriz
Q_x	Fluxo de calor na direção x
Q_y	Fluxo de calor na direção y
Q_z	Fluxo de calor na direção z
$\delta Q_{x\text{entra}}$	Fluxo na direção x que entra no elemento infinitesimal
$\delta Q_{x\text{sai}}$	Fluxo na direção x que sai no elemento infinitesimal
$\delta Q_{x\text{entra}}$	Fluxo na direção x líquido no elemento infinitesimal
f_i^e	Forças nodais
w_k	Função peso
H	Geração interna de calor
Fo	Número de Fourier
n	Loop no tempo
C	Matriz de conectividade
$K_{i,j}^e$	Matriz do elemento
\mathbf{A}	Matriz dos coeficientes
r	Raio

\bar{T}	Temperatura aproximada
$T_{i,j}^n$	Temperatura na linha i , e coluna j , no tempo n
u_i	Variável de campo estudada

Letras Gregas

θ	Ângulo
Γ	Contorno
ρ	Densidade do material
Ω	Domínio
Ω_e	Domínio do elemento
δx	Dimensão infinitesimal na direção x
δy	Dimensão infinitesimal na direção y
δz	Dimensão infinitesimal na direção z
ψ_i^e	Função de forma
Δt	Incremento de tempo
δt	Incremento infinitesimal no tempo
Δ	Incremento no espaço
∇^2	Operador diferencial de segunda ordem

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

O campo de muitos problemas físicos de engenharia conduz a equações diferenciais parciais de segunda ordem, como é o caso da equação do calor. O estudo desta equação está inserido no grupo de equações ditas parabólicas, que possuem soluções analíticas explícitas. No entanto, há algumas dificuldades para a obtenção de soluções analíticas para os problemas reais, entre eles, podemos citar que os coeficientes das equações que podem ser variáveis, algumas funções não possuem primitivas, e a não linearidade de alguns parâmetros, além de geometria complexas. Assim, os métodos numéricos são mais adequados para a solução dessa equação, pela transformação da equação contínua em um sistema discreto. Nesse sentido, o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) são importantes para o estudo da equação do calor ao possibilitar uma solução computacional aproximada.

O fenômeno de transferência de calor é importante em todas as áreas da engenharia e das ciências físicas. No caso da engenharia civil, por exemplo, esse fenômeno é responsável pelo surgimento de tensões térmicas em estruturas de concreto que podem comprometer a integridade estrutural elemento. Assim, a consideração de seus efeitos tem por objeto aumentar a duração de vida dos elementos projetados.

O estudo da transferência de calor se baseia nos principais tipos de processos: Condução, Convecção e Radiação.

A condução ocorre quando o calor é transferido de um ponto à outro, por exemplo, em um corpo sólido as moléculas estão em contato umas com as outras permitindo a

transferência de energia pelo movimento dos elétrons. Dessa forma o transporte dependerá da condutividade térmica do material submetido há um gradiente de temperatura. Um exemplo de aplicação pode ser uma chapa de metal aquecida, em que pelas propriedades do metal permite que o calor se propague em todas as dimensões da placa alterando a temperatura do local.

A convecção é característica de líquidos e gases. As suas moléculas ao receberem energia aumentam a temperatura, de forma a se movimentar da região mais quente (mais energética) para a região mais fria (menos energética). Se o movimento das moléculas é causado por um variação da densidade provenientes de um aumento de temperatura, a convecção é dita livre. Caso esse movimento seja induzido por uma força externa é chamado de convecção forçada.

A Radiação térmica é emitida por todos os tipos de corpos, sejam eles sólidos, líquidos ou gasosos em um processo natural de emissão de energia. O transporte acontece por meio de ondas eletromagnéticas emitidas pelo corpo, por isso não é necessário um meio físico para a propagação. A ondas tem as mesmas propriedades de ondas mecânicas: podendo serem refletidas, refratadas e difratadas. A quantidade de energia emitida é proporcional à temperatura do corpo emissor.

Para os fenômenos físicos estudados é importante lembrar que há conservação de energia. Que em outras palavras, significa que a mudança de temperatura no interior de um sólido depende do fluxo de energia que entra pelos contornos somados à energia interna gerada.

Nesta seção também é apresentada uma bibliografia resumida baseada em textos técnicos da literatura que foram efetivamente usados no desenvolvimento deste projeto final de graduação, e não como uma forma de situar esse trabalho em relação à contribuição que outros autores fizeram ao tema estudado. Sendo abordado brevemente os principais tópicos em destaque que auxiliaram no entendimento do comportamento do fluxo de calor, bem como na maneira matemática de simular um problema.

Em Croft e Lilley (1977) é apresentada a teoria base do fluxo de calor (lei de Fourier), sua formulação matemática para os problemas unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D). Juntamente com as equações diferenciais parciais que simulam o problema, são apresentadas as equações de diferenças finitas, e suas propriedades de convergência e estabilidade.

Haberman (1987) aborda equações diferenciais parciais e aplicações, e no pri-

meiro capítulo tem uma apresentação mais moderna da formulação da equação do calor. Mas foi utilizado, sobretudo, para explicar melhor alguns conceitos como condições de contorno, condições iniciais, lei de Fourier, etc.

Segundo Neville (1997) o comportamento térmico das estruturas não estão restritos apenas a estruturas de concreto massa, mas a qualquer estrutura que esteja submetida a gradientes térmicos que possam causar fissuração. As tensões térmicas no interior do sólido são formadas porque a baixa difusividade térmica do concreto impede que haja uma troca rápida de calor com o ambiente, se as tensões de tração formadas forem maior que a resistência do concreto surgem as fissuras. Sendo que a principal causa desse diferencial de temperatura é a geração interna de calor, onde a velocidade de dissipação do calor de hidratação é o principal fator e não apenas a quantidade gerada de energia térmica. Para se ter uma ideia, sobre o comportamento térmico do concreto, estima-se que metade do calor se desprende de 1 a 3 dias, de três quartos aos 7 dias e 83 % a 91 % em 6 meses, com base no que foi observado por Bogue.

Ruggiero e Lopes (2004) é uma publicação de cálculo numérico, apresentando, entre outras coisas, técnicas de resolução de sistemas lineares. Para esse texto se utilizou a técnica de iteração Gauss-Seidel.

Rao (2004) apresenta os conceitos fundamentais de elementos finitos numa linguagem de fácil compreensão, possibilitando um melhor entendimento do assunto estudado, e também serviu de auxílio teórico para a elaboração do texto.

Reddy (2006) foi a principal referência sobre o Método dos Elementos Finitos aplicados neste trabalho, nele é encontrado uma formulação rigorosa e concisa do método, contendo todo o conteúdo necessário para uma análise de elementos finitos, incluindo a parte computacional.

Em Wang e Anderson (1995) é apresentado os fundamentos necessários para o desenvolvimento dos algoritmos utilizados neste trabalho para resolver os sistemas lineares gerados no Método das Diferenças Finitas pelo método Gauss-Seidel.

As duas publicações: Vasconcelos e Pedroso (2014a) e Vasconcelos e Pedroso (2014b), são sobre o método das diferenças finitas, no entanto são aplicadas à problemas estacionários e transientes envolvendo barragens e reservatórios.

Em Coelho (2016) tem uma abordagem mais realista dos problemas envolvendo efeitos térmicos, sendo abordado o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos em problemas aplicados à barragens.

Nithiarasu, Lewis e Seetharamu (2016) faz a formulação da equação da condução do calor pelo Método de Galerkin.

O tratamento de problemas térmicos em barragens de concreto, tem sido objeto de vários estudos anteriores pelo Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDFE) da Universidade de Brasília. No caso do presente texto, ele está baseado numa série de trabalhos anteriores elaborados pelo GDFE, entre os quais, podemos citar Coelho(2016), Pedroso (1997), Pedroso (2001), Pedroso (2011), e Vasconcelos e Pedroso (2014a , 2014b, 2015), além de discussões nas seções de orientação (Pedroso, 2018).

Nesse sentido retomou-se os estudos realizados nos trabalhos de iniciação científica realizados no período 2014-2015, sobre o comportamento térmico de regiões retangulares submetidas à diferentes temperaturas em seu contorno.

1.2 JUSTIFICATIVAS

A importância do estudo deste conteúdo está nos efeitos que a variação de temperatura gera nos corpos, seja ele expostos às condições de aquecimento ou resfriamento naturais do planeta, ou provenientes de reações químicas exotérmicas (como ocorre nas estruturas de concreto massa). Para as estruturas de concreto com grandes volumes (concreto massa), esse gradiente de temperatura gera deformações e conseqüentemente tensões de tração. Sabendo que a resistência do concreto à tração é muito baixa, muitas vezes até ignorada nos processos de cálculo de resistência, entender o comportamento das tensões de origem térmica é essencial e pode prevenir falha de projeto de certas estruturas.

1.3 OBJETIVOS

Nesta monografia, procura-se efetuar uma análise estacionária e transiente para o estudo do comportamento da temperatura de sólidos bidimensionais e tridimensionais, com ou sem geração interna de calor, e sujeita a determinadas condições de contorno, que dependem da exposição ao meio ambiente.

1.4 METODOLOGIA

O tema estudado foi desenvolvido com base no Método das Diferenças Finitas e no Método dos Elementos Finitos. Cada um desses métodos exige uma sequência de passos própria, no entanto por serem técnicas aproximadas apresentam algumas similaridades.

O Método das Diferenças Finitas pode ser aplicado seguindo o procedimento dos itens 1 a 6.

1. Estudar a equação geral do fluxo de calor;
2. Transformar a equação contínua numa aproximação de diferenças finitas;
3. Subdividir o domínio do problema em uma malha uniforme;
4. Aplicar a equação de diferenças finitas nos pontos da malha;
5. Resolver o sistema linear gerado, cuja solução é a temperatura nos pontos da malha. O algoritmo utilizado nesse processo é construído em MATLAB;
6. Com os pontos nodais de temperatura encontrados fazer a interpolação para os outros pontos do domínio. Utilizou-se o software Surfer 9 para interpolar a temperatura.

O Método dos Elementos Finitos pode ser aplicado seguindo o procedimento dos itens 1 a 5.

1. Estudar a equação geral do fluxo de calor pelo método de Galerkin;
2. Subdividir o domínio do problema em elementos finitos triangulares;
3. Obter a matriz dos coeficientes global com base na matriz de cada elemento;
4. Solucionar o sistema de equações formados com base nas condições de contorno prescritas (temperaturas), cuja solução é a temperatura nos nós do elemento;
5. Pós-processamento.

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentado a formulação matemática da equação geral que governa o fluxo de calor, a partir de um elemento diferencial de volume, conforme o apresentado em (Croft, Lilley,1977).

2.1 CONDUÇÃO DE CALOR

Em um corpo sólido o calor é transferido de uma região de maior temperatura para outra de menor temperatura, por meio de três processos fundamentais: condução, convecção e radiação. Nesse trabalho apenas a condução será estudada.

A lei de Fourier para a condução de calor foi obtida de observações experimentais, e diz que:

O calor é proporcional à diferença de temperatura e à área normal à direção do fluxo. Portanto, temos a equação:

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

onde, Q_x é dado em (W), e a área A em (m^2), $\frac{\partial T}{\partial x}$ é o gradiente de temperatura na direção do eixo x , é dado em (K/m). O sinal negativo indica que o calor flui da região de maior para a de menor temperatura. A propriedade do material k (W/mK) depende do material estudado, e é conhecida como condutividade térmica.

2.2 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Para facilitar a modelagem matemática do problema físico é comum se utilizar de hipóteses simplificadoras, quando estas são plausíveis.

O material adotado, possui algumas propriedades, necessárias e condizentes à validação das hipóteses da Lei de Fourier: a condutividade térmica k é constante e tem o mesmo valor em todas as direções.

2.3 EQUAÇÃO GERAL DO FLUXO DE CALOR EM COORDENADAS CARTESIANAS

A equação que governa o comportamento da condução de calor é obtida pelo balanço energético em um elemento de volume diferencial. Sendo essa obtida considerando o fluxo de calor nas seis faces do elemento, em três dimensões x , y e z (Figura 2.1).

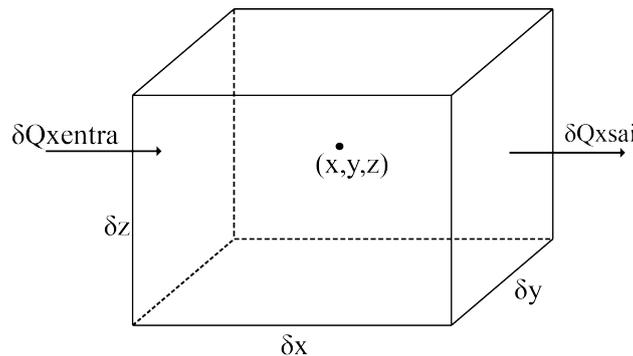


Figura 2.1: Elemento Diferencial (R.,D. C., & G.,D. L. (1977))

Consideramos a taxa de fluxo de calor nas três dimensões, descritas pelas equações:

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$Q_y = -kA \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$Q_z = -kA \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

A equação do calor para o fluxo de calor por condução num sólido tridimensional pode ser obtido, considerando um fluxo na direção x. Para um tempo infinitesimal δt , calculamos a taxa de calor entrando (δQ_{xentra}):

$$\delta Q_{xentra} = -k(\delta y \delta z) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} \cdot \delta t \quad (2.5)$$

A abordagem para o fluxo de calor saindo (δQ_{xsai}) é a mesma para o fluxo de calor entrando. Dessa forma, o valor líquido de calor absorvido é dado por:

$$\delta Q_{xlíquido} = \delta Q_{xentra} - \delta Q_{xsai} \quad (2.6)$$

Então, na direção x, temos que:

$$\delta Q_{xlíquido} = k(\delta x \delta y \delta z) \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} \cdot \delta t \quad (2.7)$$

O fluxo é a soma dos valores líquidos nas três dimensões x, y e z:

$$\delta Q_{fluxo} = k(\delta x \delta y \delta z) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 T}{\partial^2 z} \right) \cdot \delta t \quad (2.8)$$

Alguns materiais, por exemplo o cimento, devido à reações de hidratação, tem a propriedade de geração interna de calor, portanto:

$$\delta Q_{geração} = H(\delta x \delta y \delta z) \cdot \delta t \quad (2.9)$$

Em problemas transientes, o aumento da energia interna no elemento infinitesimal é:

$$\delta Q_{aumento} = \rho(\delta x \delta y \delta z) C_p \frac{\delta T}{\delta t} \cdot \delta t \quad (2.10)$$

A densidade ρ ($\frac{Kg}{m^3}$) do material adotado e o calor específico C_p ($\frac{J}{KgK}$) são constantes.

E fazendo o balanço energético no elemento, temos que o fluxo de calor somado ao calor gerado é numericamente igual ao aumento da energia. Esse comportamento pode ser expresso por:

$$\delta Q_{fluxo} + \delta Q_{geração} = \delta Q_{aumento} \quad (2.11)$$

Agora, podemos apresentar a equação geral do fluxo de calor como:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

A Equação 2.12 pode ser apresentada, da seguinte forma:

$$k \nabla^2 T + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13a)$$

$$\textit{Condições de Contorno.} \quad (2.13b)$$

$$\textit{Condições Iniciais.} \quad (2.13c)$$

onde, H é a geração interna de calor.

2.4 EQUAÇÃO GERAL DO FLUXO DE CALOR EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Quando a região de domínio é circular, é conveniente fazer uma transformação da equação geral do fluxo do calor de coordenadas cartesianas para outros sistemas de coordenadas, que neste caso é coordenadas cilíndricas.

No sistema de coordenadas cartesianas o ponto é identificado pelas suas coordenadas (x, y, z) , já em coordenadas cilíndricas o ponto é identificado por suas coordenadas (r, θ, z) (ver Figura 2.2). Esse sistema é melhor para representar regiões circulares onde existe simetria.

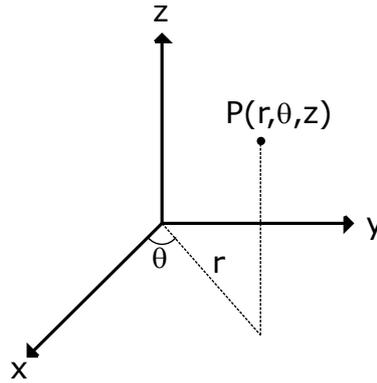


Figura 2.2: Sistema de eixos em coordenadas cilíndricas (R.,D. C., & G.,D. L. (1977))

É possível relacionar as coordenadas cartesianas em coordenadas cilíndricas pelas seguintes relações:

$$x = r \cos \theta \quad (2.14)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2.15)$$

$$z = z \quad (2.16)$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (2.17)$$

Com as devidas aproximações e substituições matemáticas é possível obter a equação do fluxo de calor utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas. Aqui não será apresentada o desenvolvimento passo-a-passo, apenas a equação final:

$$k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

2.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Quando se modela o problema físico por meio de equações diferenciais parciais é necessário simular o problema com todos os dados necessários para que haja uma solução plausível e com significado, para isso se utiliza as condições de contorno. Existem dois

tipos de condições de contorno: condições de Dirichlet e condições de Neumann. As condições de Dirichlet também conhecidas como temperatura prescritas ocorrem quando se conhecem as temperaturas de pontos ou regiões do contorno, nesse aspecto, se assume que o ambiente externo é conhecido e é responsável por essa temperatura. Já as condições de Neumann o fluxo é conhecido e não as temperaturas.

2.6 CONDIÇÕES INICIAIS

É frequente que muitos dos fenômenos físicos sejam dependentes do tempo, e por isso são chamados de fenômenos transientes. Quando se estuda a condução de calor, sabe-se que para uma melhor simulação é necessário considerar o comportamento do fluxo de calor variando no tempo para prever a temperatura futura. No estudo transiente realizado, considerou que para o tempo inicial $t = 0$ s, o valor da temperatura inicial é conhecida.

Capítulo 3

MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Neste capítulo é apresentado o Método das Diferenças Finitas, com base na transformação da equação da condução do calor de uma equação contínua numa equação discreta e aspectos relacionados à programação das rotinas computacionais em Matlab, conforme o apresentado em (Croft, Lilley,1977).

3.1 INTRODUÇÃO

É uma técnica numérica utilizada para resolver equações diferenciais parciais, e consiste em transformar um problema contínuo em um problema discreto, ao subdividir o domínio de interesse em partes menores. Uma malha regular ($\Delta X = \Delta Y$) é estabelecida sobre a região a ser estudada, formando pontos nodais ($T_{i,j}$). A solução obtida é uma aproximação e não vale para toda a região do domínio, ficando restrita aos pontos nodais. Um exemplo para o caso bidimensional (2D) é apresentado na Figura 3.1.

A aproximação de diferenças finitas consiste em percorrer os pontos do domínio com um operador de diferenças finitas. O operador é a substituição da derivada contínua por uma derivada de discreta, que para o caso (2D) da equação de Laplace pode ser chamado de fórmula dos cinco pontos (Figura 3.2). A aplicação do operador tem por objetivo formar um sistema de equações a ser resolvido.

Para o problema de distribuição de temperatura a discretização das condições de contorno se baseia na atribuição de valor para os pontos afastados do ponto central $T_{i,j}$

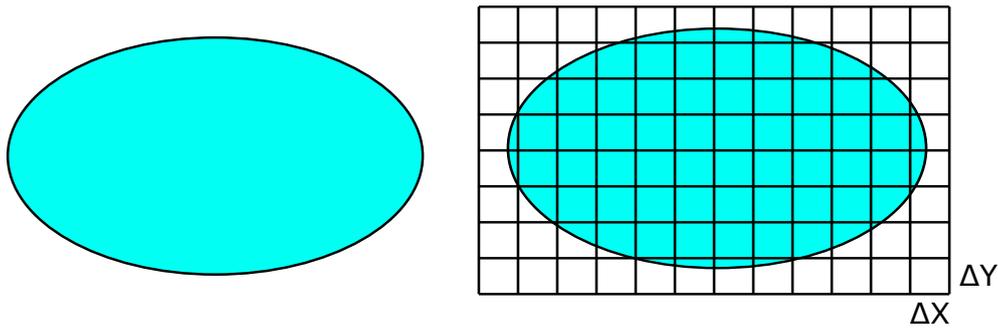


Figura 3.1: Discretização do domínio)

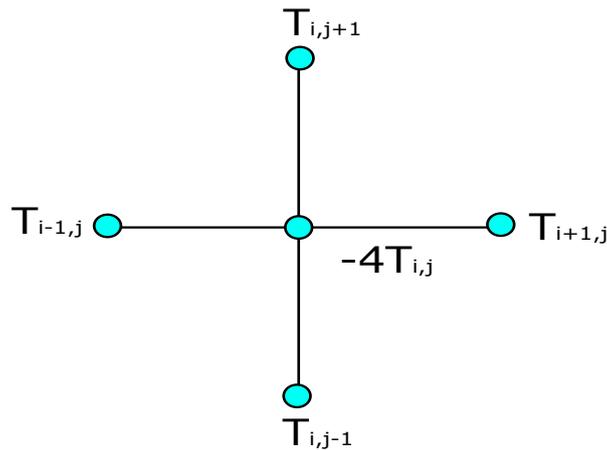


Figura 3.2: Operador de diferenças finitas (2D)

conforme a posição do operador quando este estiver “percorrendo” os pontos da malha.

3.2 EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS FINITAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

A aproximação por Diferenças Finitas é uma técnica que nos permite expressar a equação diferencial parcial (equação do calor), por um conjunto de pontos nos quais se determinará as suas temperaturas. A ideia básica é encontrar a temperatura desses pontos por meio da solução da Equação de Diferenças Finitas explícitas.

Nessa seção, faz-se o desenvolvimento da equação bidimensional (2D) do calor. Em termos de solução computacional temos o seguinte algoritmo para o problema estudado:

$$k \frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + k \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + H = \rho C_p \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.1)$$

$$\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{k} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{k} + \frac{H\Delta^2}{k} = \frac{\rho C_p \Delta^2}{k} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.2)$$

Podemos agrupar alguns termos constantes, sob o nome de número de Fourier (Fo):

$$Fo = \frac{k\Delta t}{\rho C_p \Delta^2}, \quad \text{onde } \Delta = \Delta x = \Delta y \quad (3.3)$$

Efetuada as simplificações devidas, temos:

$$\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{k} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{k} + \frac{H\Delta^2}{k} = \frac{1}{Fo} \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{Fo} T_{i,j}^{n+1} = T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n - 4T_{i,j}^n + \frac{H\Delta^2}{k} + \frac{1}{Fo} T_{i,j}^n \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{Fo} T_{i,j}^{n+1} = T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_{i,j}^n + \frac{H\Delta^2}{k} \quad (3.6)$$

Na Equação 3.6 n significa o “loop” no tempo, enquanto i e j os pontos da malha no espaço.

No entanto, para problemas transientes (2D) temos limitações, na escolha do incremento de tempo, que deve ser encontrado a partir da condição dada pela Equação 3.7.

$$Fo \leq \frac{1}{4} \quad (3.7)$$

Em problemas tridimensionais (3D) a dedução da equação de diferenças finitas é semelhante ao caso 2D, por isso a dedução não será apresentada. É obtida a partir da equação 3.1 com um acréscimo da derivada parcial na direção z no primeiro membro da equação. A equação para o caso 3D é:

$$\frac{1}{Fo} T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i+1,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n + T_{i,j-1,k}^n + T_{i,j,k+1}^n + T_{i,j,k-1}^n - \left(6 - \frac{1}{Fo}\right) T_{i,j,k}^n + \frac{H\Delta^2}{k} \quad (3.8)$$

Para o caso (3D) temos que,

$$Fo \leq \frac{1}{6} \quad (3.9)$$

3.3 PROCESSO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Após aplicar a equação de diferenças finitas em todos os pontos do domínio do problema surge um sistema de equações e incógnitas que precisa ser resolvido. A modelagem depende do número de nós adotados, que define o tamanho do sistema a ser resolvido. De forma simples, quanto maior o número de nós, maior será o número de equações a ser resolvido. Assim, resolver o sistema manualmente pode ser impraticável dependendo da discretização do modelo, por isso se utiliza métodos iterativos nos algoritmos de diferenças finitas, que com o auxílio do computador obtém-se resultados satisfatórios mais rapidamente.

O método de Gauss-Seidel é um processo iterativo para a resolução de sistemas lineares do tipo $aT + b = 0$, sendo a e b constantes, e T a incógnita. E segue o seguinte roteiro:

1. Rearranjar a equação isolando a incógnita no primeiro membro da equação, e todos os outros termos no segundo membro da equação;
2. Atribuir um valor inicial para as incógnitas;
3. Usar o valor dos pontos de temperatura conhecida para calcular os pontos com temperatura desconhecida;
4. Repetir o cálculo até as temperaturas convergirem, ou seja, quando a mudança de temperatura para o mesmo ponto é suficientemente pequena.

3.4 INTERPOLAÇÃO

Ao se resolver os sistemas lineares obtém-se os valores das temperaturas para os pontos discretizados, no entanto é importante fazer uma interpolação desses valores para facilitar a visualização dos resultados obtidos.

No trabalho utilizou-se o software Surfer 9.8.669 para fazer a interpolação dos resultados por um processo chamado de krigagem (que não será explicado no texto). É um programa de mapeamento desenvolvido pela Golden Software Inc. que interpola dados de entrada distribuídos espacialmente para produzir mapas de contorno, vetoriais, de superfície, etc.

Observação: A técnica de krigagem implementada no software às vezes apresenta valores não condizentes, como por exemplo, valores negativos mesmo quando todos os dados são positivos, etc.

3.5 MATRIZ NO MATLAB

Os algoritmos desenvolvidos neste trabalho são implementados em linguagem Matlab, por isso é importante exemplificar como é a convenção adotada no software. Na Figura 3.3 é apresentada a representação das linhas (“row”) e colunas (“column”) para o caso bidimensional.

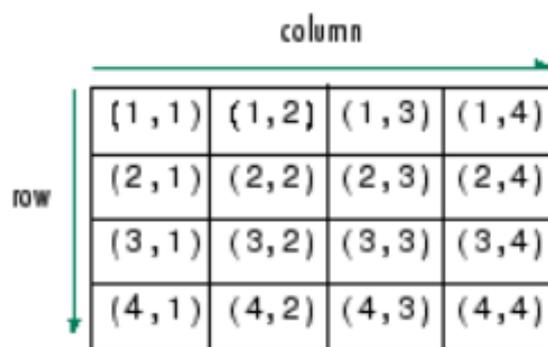


Figura 3.3: Linhas e colunas da matriz 2D (Matlab, 2012a)

Para o caso de matrizes tridimensionais, a representação é apresentada na Figura 3.4. Observe que as linhas e colunas tem a mesma representação que o caso bidimensional, com o acréscimo de um terceiro índice o Matlab apresenta a terceira dimensão chamada de fatia (“page”).

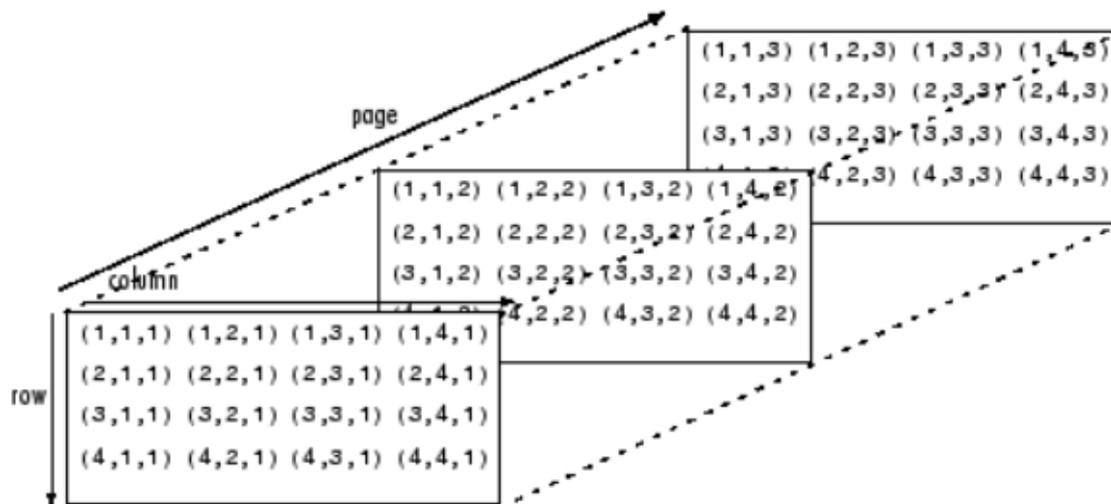


Figura 3.4: Linhas, colunas e fatias da matriz 3D (Matlab, 2012a)

Como exemplo de aplicação a Figura 3.5 ilustra o elemento $A(2,3,2)$, onde o significado de cada índice é a segunda linha, terceira coluna e segunda página, respectivamente.

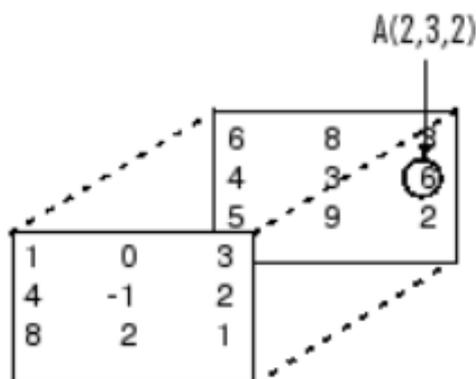


Figura 3.5: Exemplo de aplicação (Matlab, 2012a)

Capítulo 4

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é apresentado a formulação do Método dos Elementos Finitos com base no Método de Galerkin, as propriedades e características do elemento triangular linear, a matriz dos coeficientes para o elemento e o processo de montagem.

4.1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica computacional para resolver problemas com aplicações reais na engenharia, e serviu para se contornar as dificuldades enfrentadas em se obter uma solução exata para problemas com geometrias irregulares e complexas condições de contorno. Seu uso foi difundido com a popularização dos computadores digitais, possibilitando nova alternativa às soluções analíticas (de difícil obtenção), podendo agora ser obtidas soluções aproximadas com rapidez suficiente.

É importante salientar que se as hipóteses adotadas não imporem simplificações ao modelo físico que gerem resultados incorretos de comportamento real da variável de campo é possível obter soluções analíticas, no entanto, essa característica é difícil de ser obtida, sendo mais comum a existência de inacurácia e erros nos modelos.

4.2 DISCRETIZAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

No método dos elementos finitos, Reddy (2006) afirma que discretizar significa que temos de subdividir o domínio (Ω) do problema original composto por uma geometria complexa, em um conjunto de subdomínios (Ω_e) de geometria regular chamados de elementos finitos, em que as equações que governam o fenômeno físico são válidas no interior de cada elemento. Na Figura 4.1 vemos uma geometria qualquer submetida à um determinado carregamento, e à engastes do primeiro e do segundo gênero em seu contorno (Γ). O problema exemplificado foi discretizado em elementos triangulares e quadrangulares, para mostrar que se pode combinar formatos diferentes de elementos. Nesse modelo o elemento triangular é destacado para exemplificar que cada elemento possui um domínio (Ω_e) e um contorno (Γ_e), da mesma maneira que o modelo original.

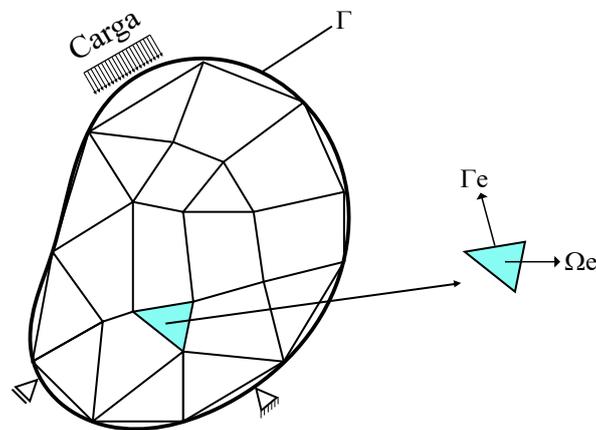


Figura 4.1: Discretização de um domínio em elementos

Segundo Cook (1989) existe um erro associado com a discretização do domínio do problema físico pelo método dos elementos finitos, e está relacionado com os graus de liberdade de cada um. O modelo físico tem infinitos graus de liberdade, enquanto que o modelo em elementos finitos tem uma quantidade finita de graus de liberdade. Já Reddy (2006) relaciona três principais causas para os erros: os elementos podem não discretizar completamente o domínio, a solução é aproximada em cada elemento, e os erros computacionais existentes por exemplo nas técnicas de integração numérica.

Rao (2004) explica que o processo de discretização do domínio está relacionado com a escolha do tipo de elemento, seu tamanho e número de elementos, da localização dos nós, se possui ou não eixos de simetria. Quanto ao tipo de elemento escolhido, dependerá do comportamento da estrutura a ser modelada, podendo ser do tipo 2 nós (linear), 3 nós triângulo (linear), 6 nós triângulo (quadrático), 4 nós tetraedro (linear), etc. De maneira simples, o tamanho dos elementos influencia na precisão da solução, sendo melhor

a aproximação para um maior número de elementos. A existência de descontinuidades (cargas, mudança de seção transversal) no problema físico exige a imposição de nós para simular o efeito gerado pela descontinuidade. Se a geometria e as condições de contorno são simétricas, então a solução pode ser obtida apenas para uma parcela do domínio, pois a outra parcela tem o mesmo comportamento.

Rao (2004) também argumenta que há três métodos de discretização do domínio: o primeiro método chamado de r-método consiste em alterar os nós dos elementos de posição sem alterar o número total de elementos, mas mantendo o grau do polinômio de interpolação; o segundo método chamado de h-método consiste em refinar a malha ao aumentar o número de elementos (aumentando o número de graus de liberdade), mas mantendo o grau do polinômio de interpolação. E por último o p-método em que aumentamos os graus de liberdade aumentando o grau do polinômio de interpolação.

4.3 FORMULAÇÃO DE GALERKIN PARA A EQUAÇÃO DA CONDUÇÃO DO CALOR

Nesta seção será apresentada a formulação da equação da condução do calor utilizando o método de Galerkin conforme o apresentado em (Nithiarasu, Lewis, & Sentharamu, 2016). Segundo Reddy (2006) o Método dos Resíduos Ponderados é uma generalização do método de Ritz, sendo que a principal característica do método é forçar o resíduo a zero (equação 5.11a). Nesse sentido o Método de Galerkin é um caso especial dos resíduos ponderados, quando a função peso é igual a função de aproximação escolhida.

$$\int_{\Omega} w_k (L(\bar{T} + G)) d\Omega = 0 \quad (4.1a)$$

$$L = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \quad (4.1b)$$

onde L é um operador.

\bar{T} é temperatura aproximada.

w_k é a função peso.

Ao organizar a equação 5.11 ela tem a forma:

$$\int_{\Omega} N_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) + G \right\} d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

Ao se aplicar a derivação por partes têm-se:

$$\int_{\Omega} N_k \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) d\Omega = \int_S N_k \left(k_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) \bar{l} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial N_k}{\partial x} k_x \frac{\partial N_m}{\partial x} \{T\} d\Omega \quad (4.3)$$

k e m são os nós.

Com as condições de contorno temos:

$$\int_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \right) \{\bar{T}\} d\Omega - \int_{\Omega} G N_k d\Omega + \int_{S_2} N_k q dS + \int_{S_3} h N_k N_m \{\bar{T}\} dS - \int_{S_3} h T_a N_k dS = 0 \quad (4.4)$$

Organizando na forma matricial temos:

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.5a)$$

$$[\mathbf{K}] = \int_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_k}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{S_3} h N_k N_m dS \quad (4.5b)$$

$$\{\mathbf{f}\} = \int_{\Omega} G N_k d\Omega - \int_{S_2} N_k q dS + \int_{S_3} h T_a N_k dS \quad (4.5c)$$

4.4 ELEMENTOS TRIANGULARES

A temperatura no interior do elemento varia de acordo com a função de aproximação escolhida, para Rao (2004), normalmente se escolhe polinômios pela facilidade de se realizar integração e derivação, além disso, a precisão dos resultados pode ser aumentada com a escolha de um polinômio de maior ordem. Em problemas bidimensionais o polinômio assume a seguinte forma:

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 y^2 + c_6 xy + \dots + c_m y^n \quad (4.6)$$

sendo que,

$$m = \sum_{j=1}^{n+1} j \quad (4.7)$$

Neste trabalho a solução para a temperatura no interior do elemento triangular linear é assumida linearmente em termos dos valores nodais. Quando se resolve o sistema linear resultante da aplicação do método dos elementos finitos, é obtido o valor da temperatura nos nós, e com a função de interpolação se obtém o valor da temperatura no interior do elemento. Portanto a função de interpolação para o elemento triangular linear é:

$$u^e(x, y) = c_1^e + c_2^e x + c_3^e y \quad (4.8)$$

De acordo com Reddy (2006) a solução $u^e(x, y)$ sobre o elemento deve satisfazer algumas condições: $u^e(x, y)$ deve ser contínua, $u^e(x, y)$ deve ser um polinômio completo, os termos de $u^e(x, y)$ devem ser linearmente independentes. Na equação 4.8 há 3 graus de liberdade, pois há também 3 termos linearmente independentes $(1, x, y)$.

Um triângulo é definido por três nós e cada nó é definido por um par de coordenadas (x_i, y_i) . Em Reddy (2006) a equação 4.8 é então aplicada a cada nó do elemento triangular:

$$u_1 = u_h(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \quad (4.9a)$$

$$u_2 = u_h(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \quad (4.9b)$$

$$u_3 = u_h(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 \quad (4.9c)$$

na forma matricial temos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

O conjunto de equações pode ser reorganizado em forma matricial da forma $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{c}$ (Equação 4.10) e depois invertido. Para que tenhamos a solução de \mathbf{c} a matrix dos coeficientes \mathbf{A} deve ser invertida. Em Reddy (2006) há uma explicação mais detalhada

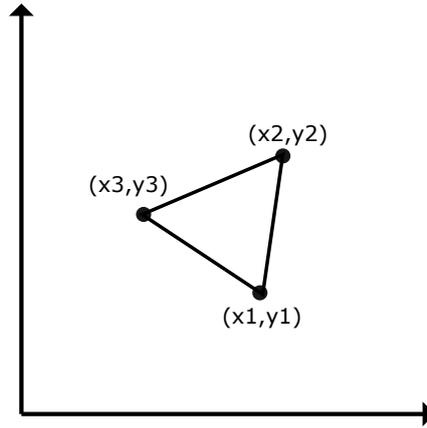


Figura 4.2: Elemento triangular

sobre os requisitos para que ocorra a inversão numérica da matrix. E a solução dos \mathbf{c} é dada por:

$$c_1 = \frac{1}{2A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3) \quad (4.11a)$$

$$c_2 = \frac{1}{2A}(\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3) \quad (4.11b)$$

$$c_3 = \frac{1}{2A}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3) \quad (4.11c)$$

sendo $2A$ o determinante da matrix \mathbf{A} .

E os valores de α_i , β_i e γ_i :

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (4.12a)$$

$$\beta_i = y_j - y_k \quad (4.12b)$$

$$\gamma_i = -(x_j - x_k) \quad (4.12c)$$

Substituindo os valores de \mathbf{c} na equação 4.8, temos:

$$u_h^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \psi_i^e(x, y) \quad (4.13)$$

sendo ψ_i^e :

$$\psi_i^e = \frac{1}{2A_e}(\alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y) \quad (4.14)$$

4.5 MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO TRIANGULAR

A matriz dos coeficientes está relacionada com o armazenamento das informações da geometria do elemento, neste caso para o elemento triangular linear; como também armazena informações sobre as propriedades de como o material se comporta, em outras palavras, sendo a resistência oferecida à variável de campo analisada.

A forma tensorial da matriz dos coeficientes para o elemento é dada por:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{4A_e} (a_{11}^e \beta_i^e \beta_j^e + a_{22}^e \gamma_i^e \gamma_j^e) \quad (4.15)$$

com $a_{11} = a_{22} = k_e$

Neste trabalho se utilizou um elemento triangular linear de ângulo reto como mostrado na Figura 4.3, com um sentido anti-horário para a numeração interna do elemento. E com dimensões de lados a e b .

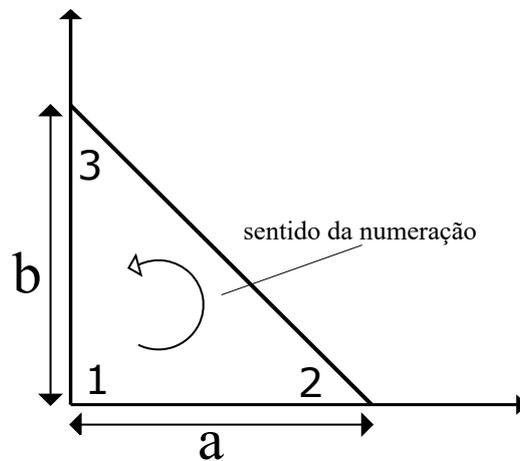


Figura 4.3: Elemento triangular de ângulo reto

Ao substituir as características do elemento apresentado na Figura 4.3 na equação 4.15 obtemos a matriz dos coeficientes para este elemento:

$$K^e = \frac{k_e}{2ab} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -b^2 & -a^2 \\ -b^2 & b^2 & 0 \\ -a^2 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

onde k_e é a condutividade térmica do material.

Observe que esta matriz é constante, mesmo se o elemento é rotacionado, portanto esta característica facilita as análises apresentadas neste texto.

4.6 MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

O domínio discretizado (Figura 4.4) pode ser obtido pela montagem de dois elementos conectados. Segundo Reddy (2006) o processo de obtenção da matriz global é baseado em duas regras: a primeira é referente a continuidade da variável de campo (temperatura nos nós de 1 a 4), a segunda refere-se à variável secundária (fluxo de calor nos nós de 1 a 4).

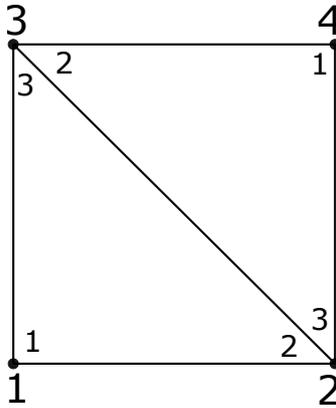


Figura 4.4: Domínio discretizado com dois elementos triangulares

A matriz global pode ser obtida pela soma das matrizes dos coeficientes de cada elemento de acordo com a equação 4.17. A matriz global \mathbf{K} obtida terá a dimensão do número de graus de liberdade do problema, que para a Figura 4.4 é de 4 graus de liberdade (4 nós), ou seja será uma matriz 4x4.

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} k^e \quad (4.17)$$

Um fator importante é a orientação dos elementos na malha com base em sua numeração interna, por isso no algoritmo desenvolvido para calcular a matriz global é necessário definir a matriz de conectividade dos elementos \mathbf{C} .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Sabendo que $K_{i,j}^1$ representa a matriz dos coeficientes do elemento 1 e $K_{i,j}^2$ representa a matriz do elemento 2.

A matriz do elemento 1 é:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 + Q_2^1 \\ f_3^1 + Q_3^1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

A matriz do elemento 2 é:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u4 \\ u3 \\ u2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^2 + Q_1^2 \\ f_2^2 + Q_2^2 \\ f_3^2 + Q_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

A montagem da matriz é a soma da matriz do elemento 1 com a matriz do elemento 2. Essa soma deve levar em consideração a correspondência dos nós globais e os nós de cada elemento. Para a situação descrita na Figura 4.4 a correspondência é a seguinte: os nós 1, 2 e 3 do elemento 1 correspondem aos nós globais 1, 2 e 3; já os nós 1, 2 e 3 do elemento 2 correspondem aos nós globais 4, 3 e 2.

A montagem da matriz é:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{33}^2 & K_{23}^1 + K_{32}^2 & K_{31}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{23}^2 & K_{33}^1 + K_{22}^2 & K_{21}^2 \\ 0 & K_{13}^2 & K_{12}^2 & K_{11}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 + f_3^2 + Q_2^1 + Q_3^2 \\ f_3^1 + f_2^2 + Q_3^1 + Q_2^2 \\ f_4^2 + Q_4^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Capítulo 5

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo é apresentado problemas estacionários e transientes, sendo composto por 4 casos de estudo em que se procura obter a distribuição de temperatura em seu interior. Utiliza-se dois métodos de solução: O Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF)

5.1 PROPRIEDADES DO CONCRETO

Densidade. Os concretos comuns apresentam uma densidade de 2400 kg/m^3 a 2500 kg/m^3 .

Calor Específico. Está relacionado com a capacidade do concreto de armazenar calor, sendo a energia necessária para que haja uma variação de 1 grau Celsius de uma unidade de massa do material. Segundo Furnas (1997) o valor do calor específico de concretos comuns varia de 840 J/kg.K e 1260 J/kg.K .

Geração Interna de Calor. Alguns materiais apresentam geração interna de energia devido a reações químicas exotérmicas, no caso do concreto há as reações de hidratação do concreto.

Condutividade Térmica. A propriedade de conduzir calor no concreto é chamada de condutividade térmica (k). Quando se diz que o corpo é homogêneo e isotrópico está implícito que a condutividade térmica é igual em todas as direções analisadas, ou seja, para um corpo tridimensional temos que $k_x = k_y = k_z$. Segundo Furnas (1997) a condutividade para concretos comuns apresenta valores de $1,4 \text{ W/m.K}$ a $3,6 \text{ W/m.K}$.

5.2 CASO 1: Problema 2D em Regime Estacionário e Transiente (Exemplo de Aplicação do MDF)

Para diminuir o tamanho dos sistemas a resolver, o problema proposto consiste em determinar a temperatura em três pontos no interior de uma região retangular representativo do domínio de uma barragem de concreto em construção por camadas, onde se extrai um bloco retangular, em separado do maciço completo da estrutura, para uma análise preliminar simples. Estudou-se dois tipos de problemas: estacionário e transiente. Nos problemas estacionários, temos 3 situações diferentes de estudos. Já no problema transiente, apenas uma situação. A Figura 5.1 apresenta a modelagem do problema físico de interesse nesse estudo. As condições de contorno e os parâmetros adotados são fictícios e servem apenas para testar o Método das Diferenças Finitas.

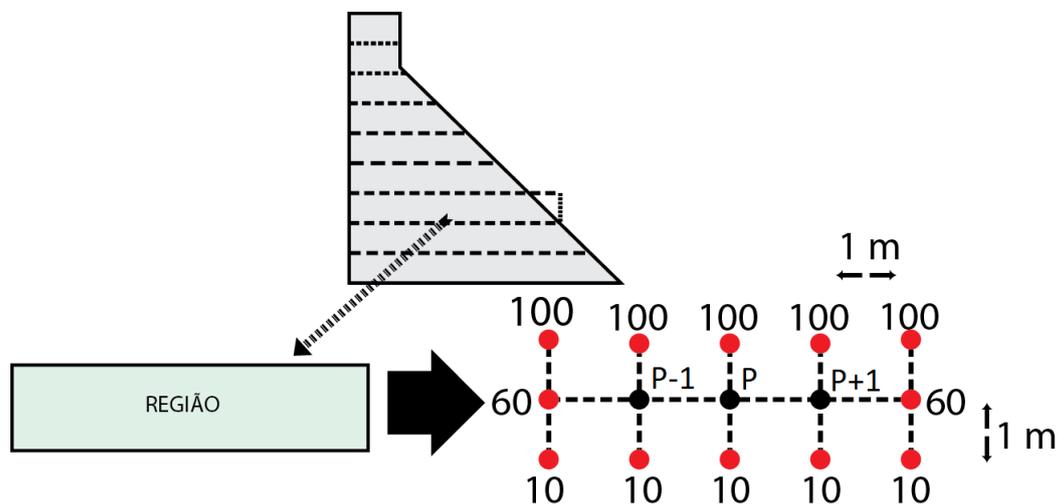


Figura 5.1: Problema físico proposto, limitado a uma região do domínio de interesse

5.2.1 ESTACIONÁRIO

Nesse tipo de problema temos 3 situações considerar, onde o fator determinante é a ausência ou mudança no valor da geração interna de energia (H). Sendo a primeira com $\frac{H\Delta^2}{k} = 0$, a segunda com $\frac{H\Delta^2}{k} = 8$ e finalmente $\frac{H\Delta^2}{k} = 100$.

A Figura 5.2 ilustra a resolução do problema (temperatura em regime estacionário) para a primeira situação. E corresponde ao comportamento em que não há geração interna de energia.

A Figura 5.3 e 5.4 correspondem à situação Estacionária em que há geração

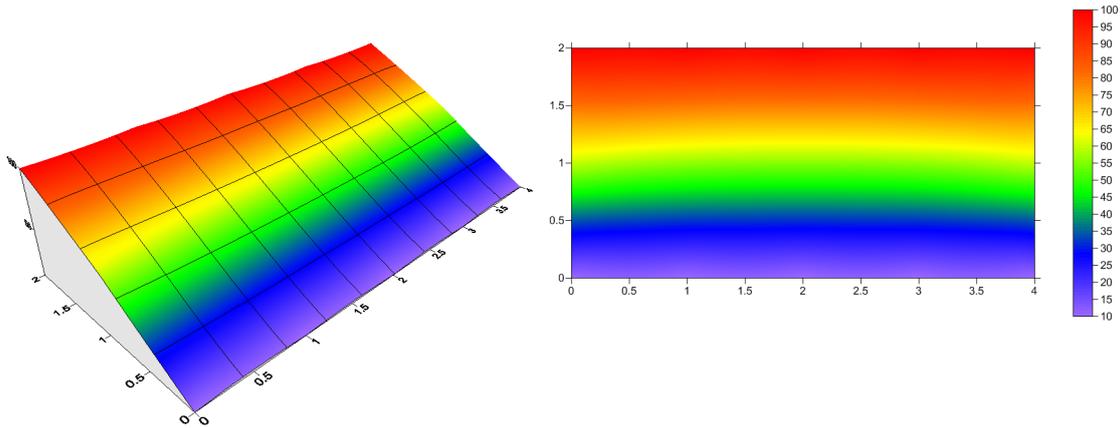


Figura 5.2: Resposta em Regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 0$

interna de calor ($H \neq 0$). Observou-se que com o aumento do termo $\frac{H\Delta^2}{k}$ de 8 para 100, temos uma maior temperatura de equilíbrio. Essa característica pode ser melhor visualizada pelo aumento da parte vermelha na Figura 5.4 se comparada à Figura 5.3.

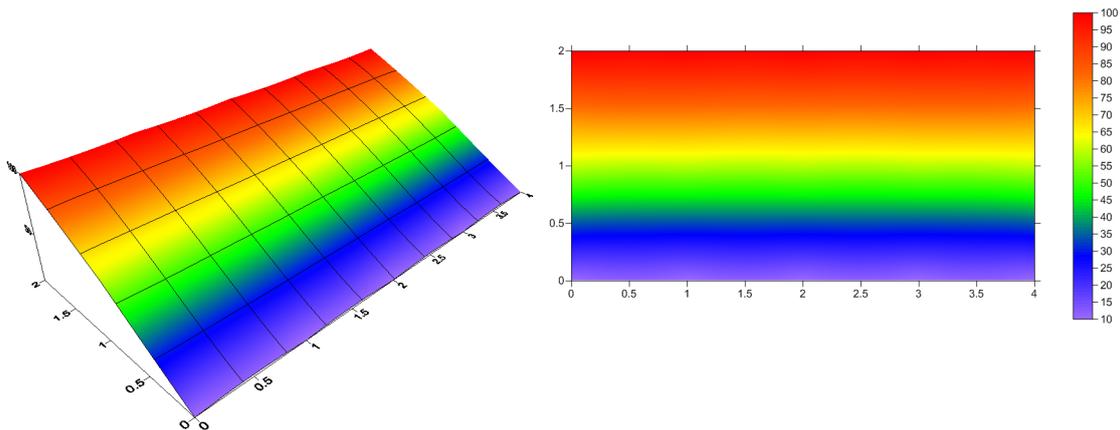


Figura 5.3: Resposta em Regime regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 8$

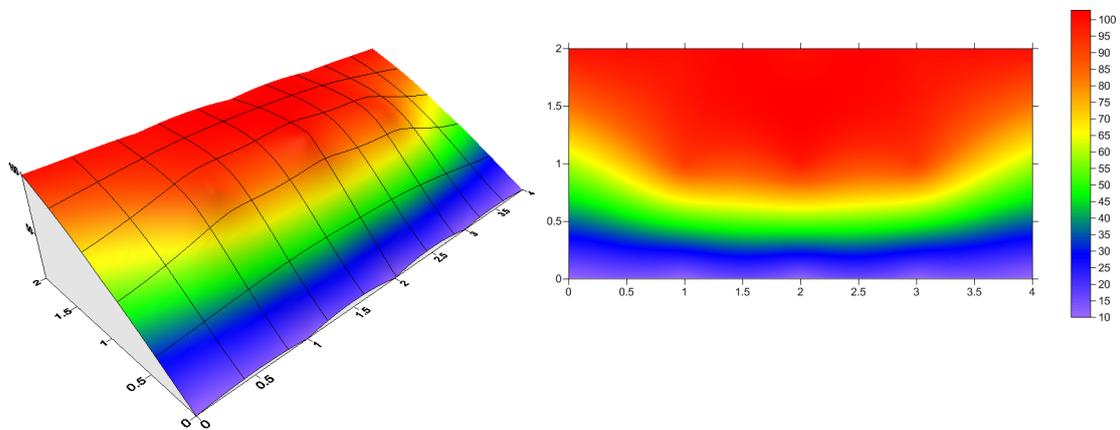


Figura 5.4: Resposta em Regime Estacionário, com $\frac{H\Delta^2}{k} = 100$

5.2.2 TRANSIENTE

No problema transiente o objetivo é observar como a temperatura dos pontos internos da região se comportam ao longo do tempo. Nesse tipo de problema, além das condições de contorno exemplificadas na Figura 5.1, temos as condições iniciais que ocorrem para tempo inicial $t = 0$. Assumimos para o caso, que a temperatura nos pontos internos nesse instante sejam iguais a zero.

O processo de convergência para a temperatura do ponto P (Figura 5.1) pode ser observado na Figura 5.5. Na solução desse problema não há geração interna de calor ($H = 0$), e adotou-se ($Fo = 0.25$), de acordo com a condição necessária. Sendo um caso transiente, temos que a cada iteração (incremento de tempo Δt), calcula-se os valores de temperatura nos três pontos (P-1), (P) e (P+1) e constrói-se o gráfico da temperatura para cada uma dessas iterações (Figura 5.6 a Figura 5.13). Isso significa, que para o problema em estudo foi necessário 7 iterações para que a solução do problema transiente convergisse para valores constantes. Outra observação importante foi que para *tempo* $t = 7\Delta t$ a solução transiente (Figura 5.13) coincide com a solução estacionária (Figura 5.2). Esse comportamento em que o fenômeno transiente converge a valores constantes é observado na Figura 5.5, em que a temperatura para o ponto (P) da malha se aproxima de uma temperatura constante a cada iteração, essa temperatura de equilíbrio é de $55,7\text{ }^\circ\text{C}$.

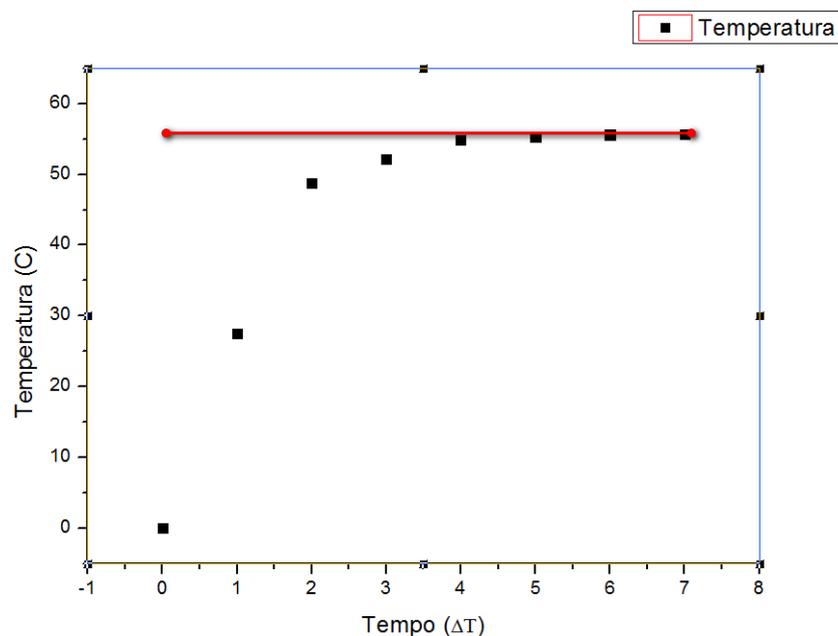
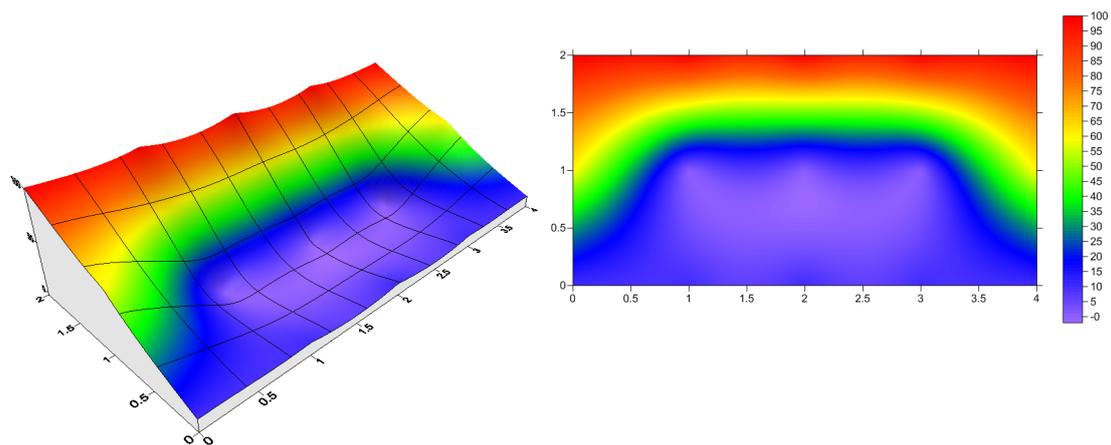
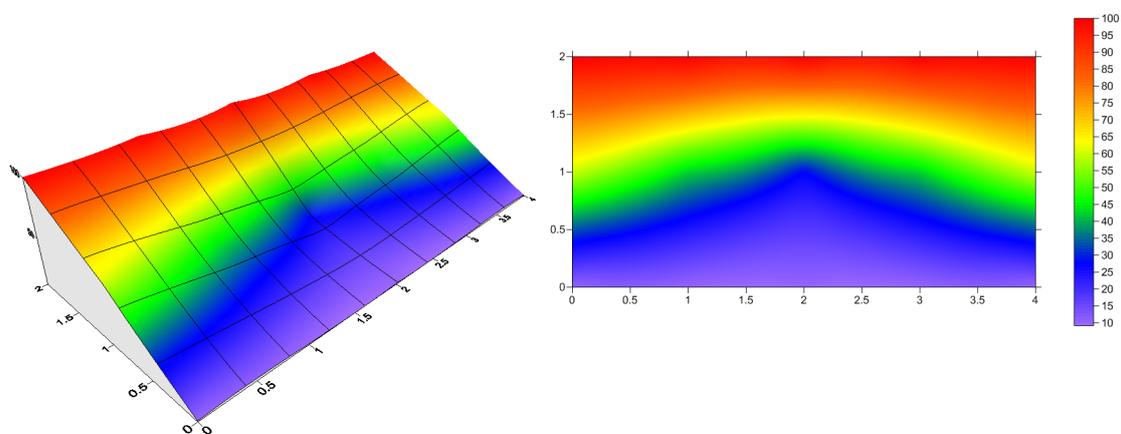
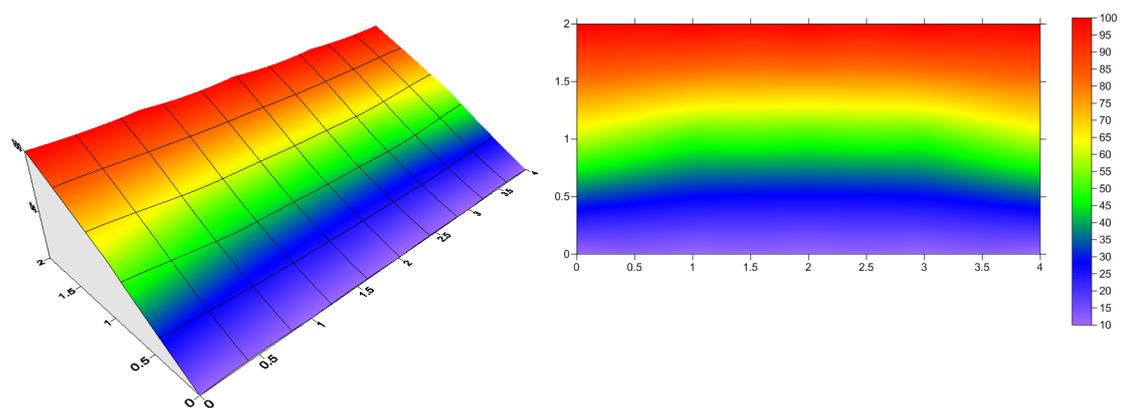


Figura 5.5: Comparação entre os regimes Estacionário (linha vermelha) e Transiente (pontos pretos) para o ponto P da malha

Observar pelas Figuras 5.6 a 5.13, que a medida que o tempo passa, tem-se uma

Figura 5.6: Resposta Transiente no *tempo* $t = 0$ Figura 5.7: Resposta Transiente no *tempo* $t = 1\Delta T$ Figura 5.8: Resposta Transiente no *tempo* $t = 2\Delta T$

distribuição mais uniforme e regular de temperatura na zona de estudo, tendendo para o regime estacionário. Os gráficos foram gerados usando o software surfer versão 9.8.669.

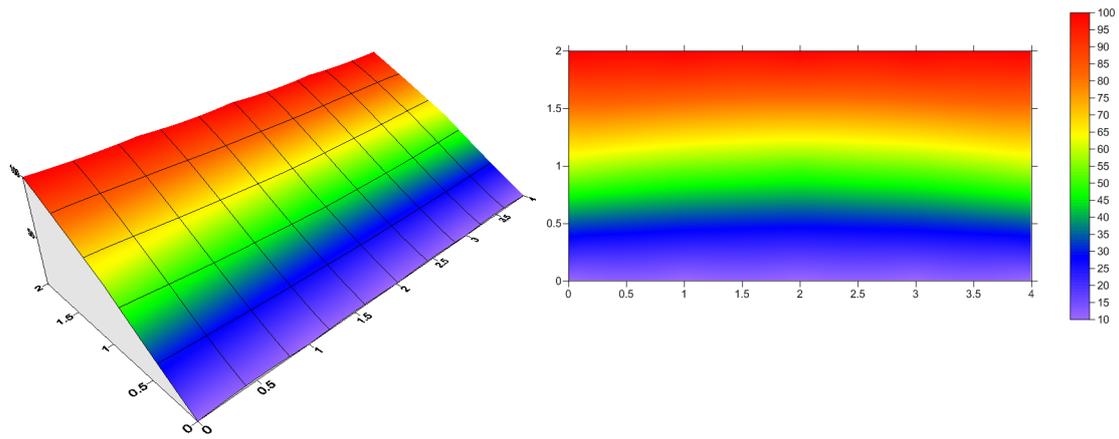


Figura 5.9: Resposta Transiente no *tempo* $t = 3\Delta T$

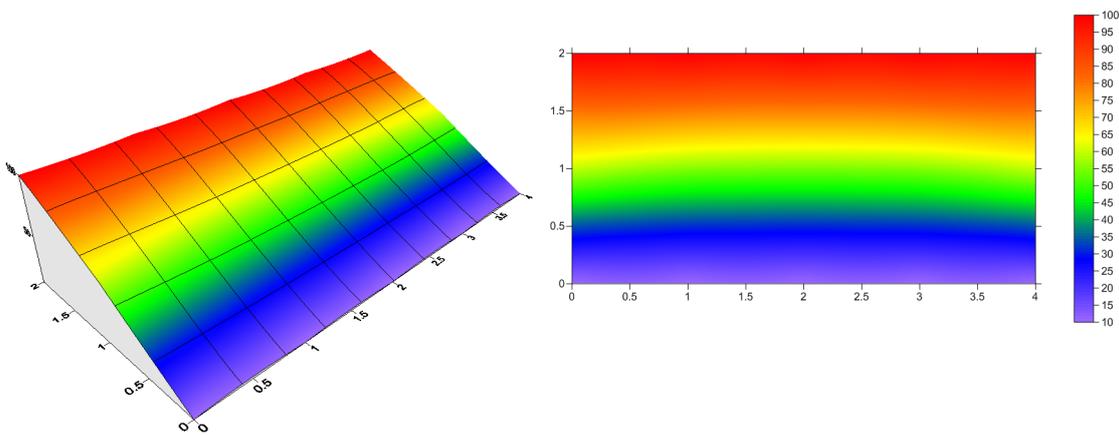


Figura 5.10: Resposta Transiente no *tempo* $t = 4\Delta T$

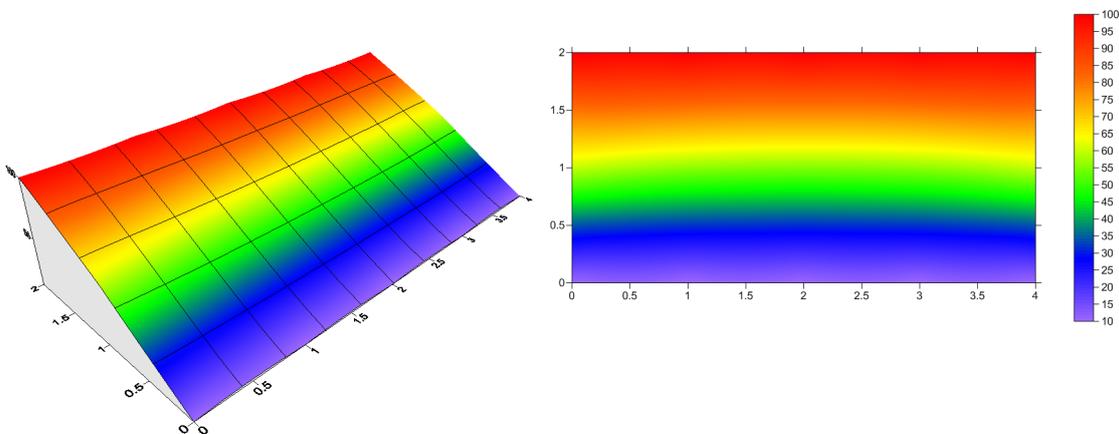


Figura 5.11: Resposta Transiente no *tempo* $t = 5\Delta T$

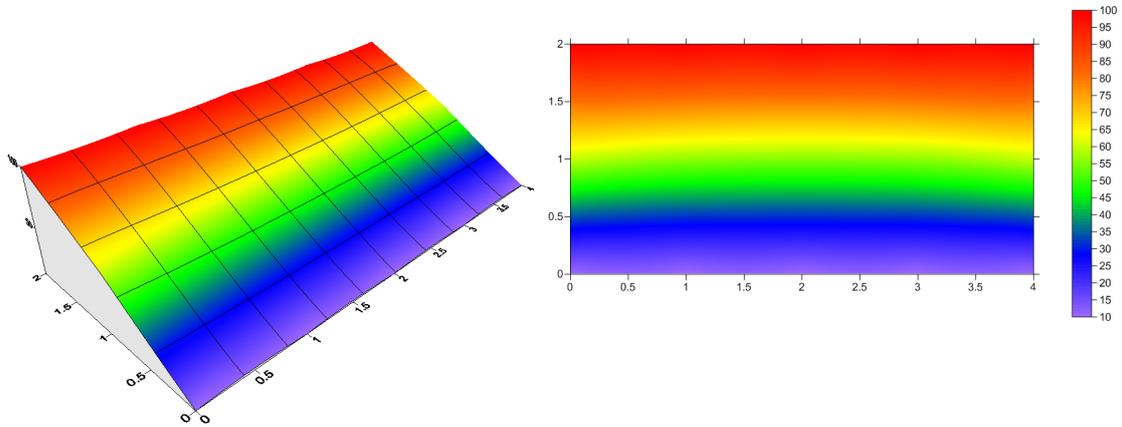


Figura 5.12: Resposta Transiente no *tempo* $t = 6\Delta T$

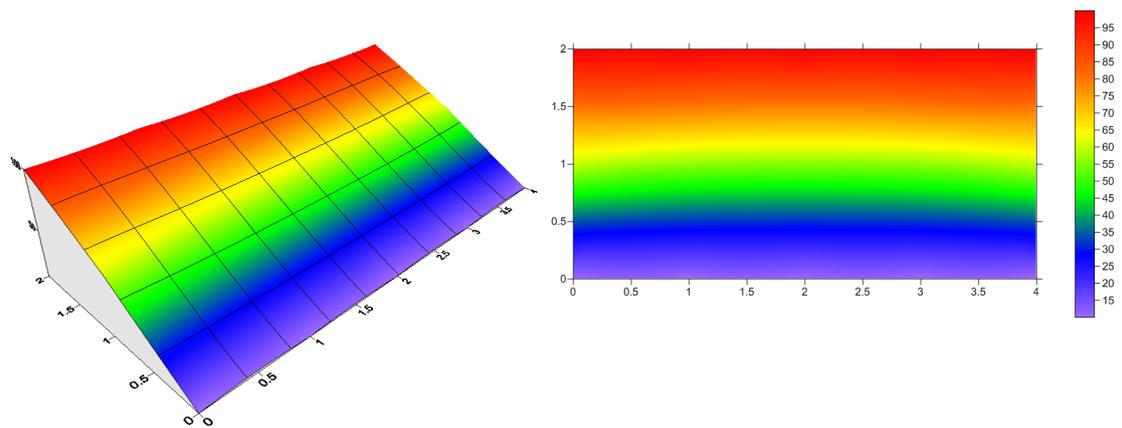


Figura 5.13: Resposta Transiente no *tempo* $t = 7\Delta T$

5.3 CASO 2: Problema 2D em Regime Estacionário e Transiente

Uma geometria plana (2D) quadrada de dimensões de 1,8 m por 1,8 m, feita de concreto é exposta à diferentes temperaturas na sua região de entorno. Na borda superior apresenta uma temperatura de 45 °C, na borda inferior uma temperatura de 18 °C, na borda esquerda e direita com temperatura de 35 °C. Para esse caso se considera a espessura da geometria com valor unitário. O concreto possui condutividade $k = 2W/m.K$. A temperatura inicial é de 25 °C em temperatura uniforme, e se deseja obter a distribuição de temperatura do sólido para o estado estacionário e para o transiente. A geração volumétrica interna de calor é de $134W/m^3$, a densidade $\rho = 2400kg/m^3$ e o coeficiente a pressão constante $C_p = 1000J/kg.K$.

As condições de contorno do problema são ilustradas na Figura 5.14, em que as temperaturas são especificadas.

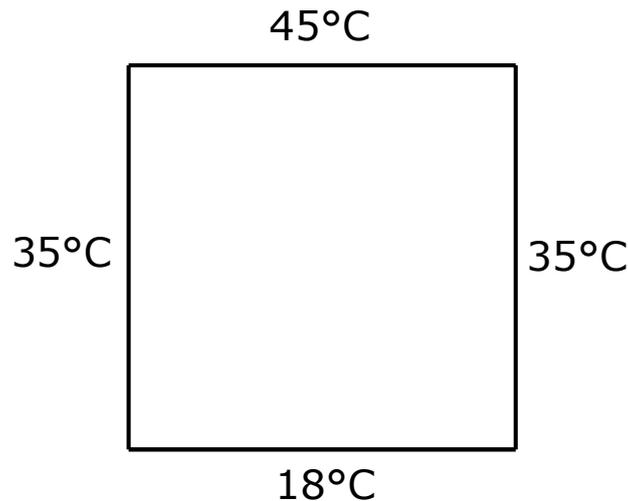


Figura 5.14: Geometria e condições de contorno do caso 2

Para obter a solução do problema, pega-se o modelo contínuo apresentado na Figura 5.14 e o transforma numa malha de pontos nodais (Figura 5.15). Os pontos externos (círculos em vermelho) são as condições de contorno e cada ponto condiz com a temperatura de sua borda já especificada. A malha é uniforme, ou seja, tem os mesmos incrementos no espaço em ambas as direções de 0,20 m. O operador de diferenças finitas percorrem toda a malha gerando um sistema linear que é resolvido iterativamente.

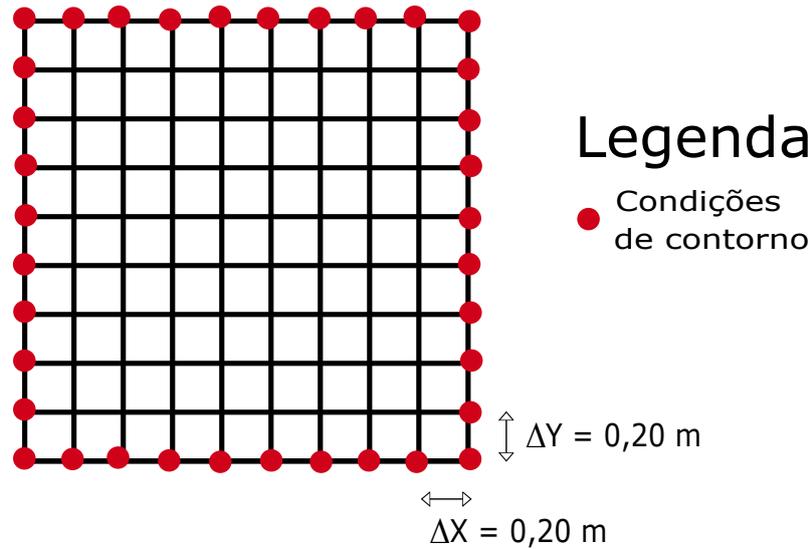


Figura 5.15: Malha do caso 2

5.3.1 ESTACIONÁRIO 2D: Método das Diferenças Finitas

O problema estacionário não leva em consideração as temperaturas iniciais de 25 °C nos pontos interiores do sólido. No entanto, todos os outros dados do problema são levados em consideração.

A solução do problema é obtida para os pontos nodais (Ver Figura 5.16) em que o algoritmo em Matlab fornece a solução em forma de uma matriz com os valores da temperatura. O algoritmo utilizado levou 2944 iterações ou “loops” para resolver o sistema linear formado. O algoritmo desenvolvido para a obtenção da solução está disponibilizado no APÊNDICE A (Caso 2, Estacionário 2D).

Numero de Iterações é: 2944

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	42.8647	46.3893	48.0833	48.7923	48.7949	48.0900	46.3976	42.8710	35.0000
35.0000	42.3979	46.9417	49.4865	50.6262	50.6307	49.4984	46.9564	42.4090	35.0000
35.0000	42.1179	46.8315	49.6363	50.9373	50.9430	49.6514	46.8502	42.1318	35.0000
35.0000	41.5769	45.9718	48.6350	49.8887	49.8948	48.6511	45.9918	41.5918	35.0000
35.0000	40.5530	44.1856	46.3884	47.4330	47.4387	46.4035	44.2044	40.5670	35.0000
35.0000	38.7832	41.1688	42.6421	43.3584	43.3631	42.6546	41.1843	38.7948	35.0000
35.0000	35.7417	36.3993	36.9901	37.3324	37.3357	36.9988	36.4101	35.7498	35.0000
35.0000	30.1113	29.0261	28.9171	28.9759	28.9776	28.9215	29.0315	30.1153	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.16: Resposta em regime estacionário, valor da temperatura nos pontos da malha

A solução é válida para os pontos e não para todo o domínio do problema, no entanto é interessante se obter a solução de forma a visualizar a distribuição da temperatura sobre toda a geometria do sólido, para isso os valores da matriz (Figura 5.16) são interpolados no software surfer 9.8.669 por meio do processo de krigagem, em que os

resultados obtidos para a distribuição da temperatura podem ser visualizados na Figura 5.17.

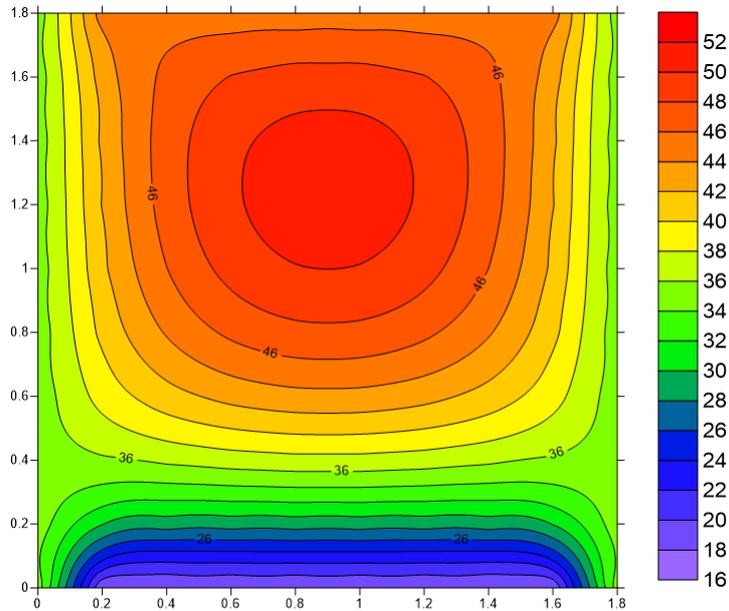


Figura 5.17: Resposta em Regime estacionário para o caso 2

5.3.2 TRANSIENTE 2D: Método das Diferenças Finitas

O fenômeno transiente é mais próximo da situação de problemas reais, sendo interessante notar que a distribuição temperatura dos pontos internos (sem considerar o contorno) varia à medida que o tempo passa. Sendo que para esse modelo é importante se ter uma temperatura inicial como condição inicial.

A Figura 5.18 representa o estado transiente para o *tempo* $t = 0$, ou seja, o algoritmo ainda não percorreu a malha para se obter a solução no tempo, e os valores apresentados são os fornecidos no enunciado do problema (condições de contorno e condição inicial). E para facilitar a visualização a Figura 5.19 apresenta a interpolação dos valores da matriz da Figura 5.18.

É importante notar que, para que haja estabilidade na solução do estado transiente o número de Fourier deve estar dentro do intervalo ($Fo \leq \frac{1}{4}$), sendo assim, adotou-se um valor de 0.10.

Quando se constrói o algoritmo deve se ter em mente o material e suas propriedades, que para os Casos 2 e 3 é o concreto. E a partir do número de Fourier adotado se encontra o valor incremental da temperatura (Δt em segundos), e a cada “loop” no tempo

O tempo em dias é: 0

35	45	45	45	45	45	45	45	45	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	25	25	25	25	25	25	25	25	35
35	18	18	18	18	18	18	18	18	35

Figura 5.18: Resposta em regime transiente no tempo $t = 0$ dias

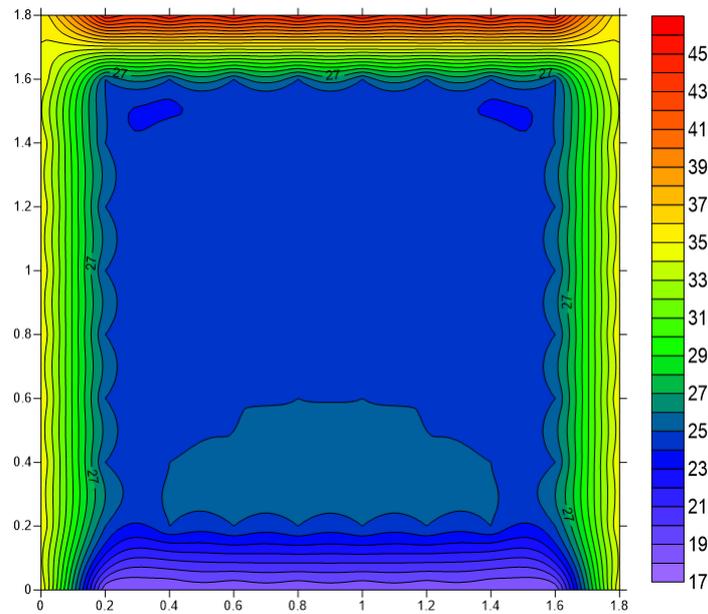


Figura 5.19: Interpção da Resposta em Regime estacionário no tempo $t = 0$ dias

se acrescenta (Δt) ao tempo anterior, e assim por diante. Para exemplificar melhor, temo a Figura 5.20 que ilustra a resposta transiente para o tempo 3,05 dias, que significa que com valor de ($\Delta t = 24000$ segundos) houve $\left(\frac{\frac{86400s}{dia} 3,05 dia}{24000s} \right) = 11$ exatos “loops” do tempo. Além disso, para cada “loop” no tempo o operador de diferenças finitas percorre a malha bidimensional no espaço.

As figuras de 5.21, 5.23, 5.25 e 5.27 são as interpolações das soluções em forma matricial encontradas após se executar o algoritmo desenvolvido para o problema transiente bidimensional apresentado no APÊNDICE (Caso 2, Transiente 2D). As figuras representam a variação da temperatura para os tempos 3,05 dias, 7,22 dias, 28,05 dias e 90 dias, repectivamente.

Podemos observar que o concreto aos 90 dias (Figura 5.27) está com uma dis-

tribuição de temperatura mais estabilizada, sendo em valores condizentes com a solução estacionária (Figura 5.17).

O tempo em dias é: 3.0556

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	37.8956	37.7733	37.4145	37.2667	37.2667	37.4145	37.7733	37.8956	35.0000
35.0000	34.2249	32.7684	31.9249	31.6417	31.6417	31.9249	32.7684	34.2249	35.0000
35.0000	32.7126	30.5242	29.4231	29.0750	29.0750	29.4231	30.5242	32.7126	35.0000
35.0000	32.2436	29.8138	28.6312	28.2644	28.2644	28.6312	29.8138	32.2436	35.0000
35.0000	32.0900	29.5899	28.3879	28.0176	28.0176	28.3879	29.5899	32.0900	35.0000
35.0000	31.8240	29.2419	28.0303	27.6609	27.6609	28.0303	29.2419	31.8240	35.0000
35.0000	30.8378	28.0621	26.8637	26.5108	26.5108	26.8637	28.0621	30.8378	35.0000
35.0000	27.6098	24.8057	23.8332	23.5706	23.5706	23.8332	24.8057	27.6098	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.20: Resposta em regime transiente no $Tempo = 3,05 \text{ dias}$

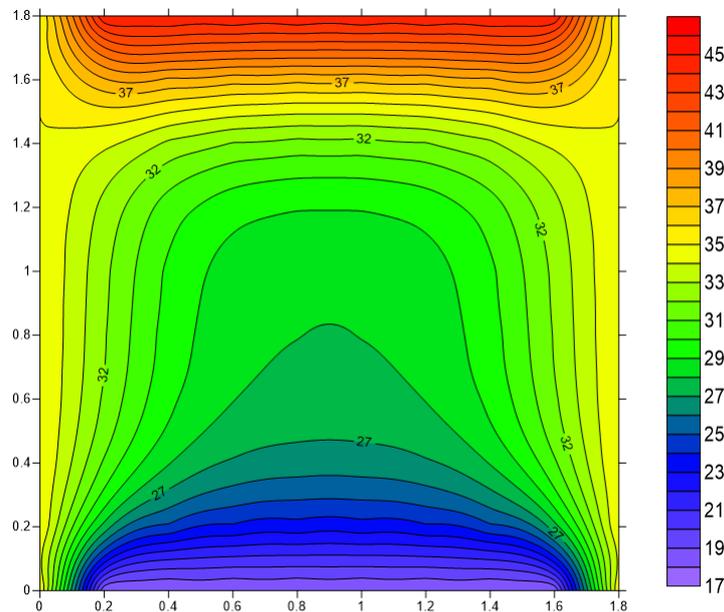


Figura 5.21: Resposta em Regime estacionário no $Tempo = 3,05 \text{ dias}$

O tempo em dias é: 7.2222

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	40.4394	41.9106	42.1696	42.1549	42.1549	42.1696	41.9106	40.4394	35.0000
35.0000	38.0423	38.8996	38.8694	38.7111	38.7111	38.8694	38.8996	38.0423	35.0000
35.0000	36.6207	36.6844	36.2442	35.9108	35.9108	36.2442	36.6844	36.6207	35.0000
35.0000	35.7672	35.2521	34.4936	34.0263	34.0263	34.4936	35.2521	35.7672	35.0000
35.0000	35.1379	34.1994	33.2229	32.6715	32.6715	33.2229	34.1994	35.1379	35.0000
35.0000	34.2986	32.9041	31.7547	31.1573	31.1573	31.7547	32.9041	34.2986	35.0000
35.0000	32.5612	30.5419	29.2798	28.6963	28.6963	29.2798	30.5419	32.5612	35.0000
35.0000	28.4664	25.9982	24.9339	24.5162	24.5162	24.9339	25.9982	28.4664	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.22: Resposta em regime transiente no $Tempo = 7,22 \text{ dias}$

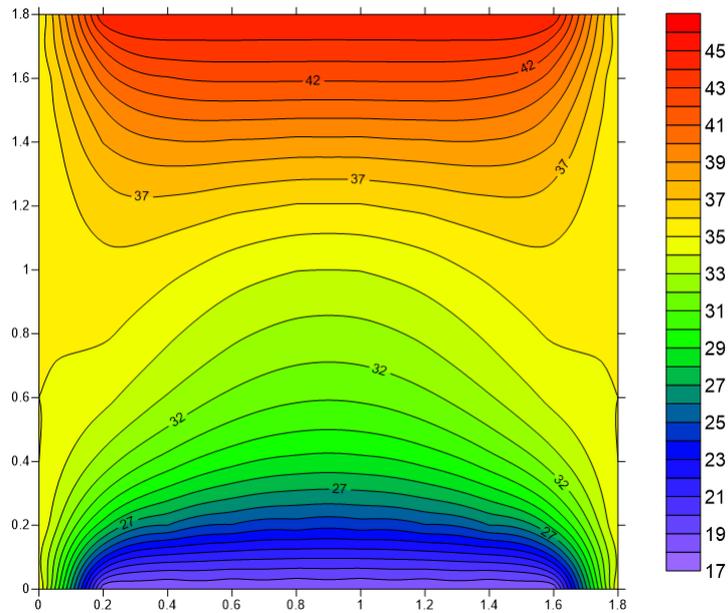


Figura 5.23: Resposta em regime transiente no $Tempo = 7,22$ dias

O tempo em dias é: 28.0556

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	42.5731	45.8391	47.3396	47.9439	47.9439	47.3396	45.8391	42.5731	35.0000
35.0000	41.8492	45.9068	48.0877	49.0309	49.0309	48.0877	45.9068	41.8492	35.0000
35.0000	41.3788	45.4381	47.7533	48.7900	48.7900	47.7533	45.4381	41.3788	35.0000
35.0000	40.7377	44.3899	46.4978	47.4519	47.4519	46.4978	44.3899	40.7377	35.0000
35.0000	39.7155	42.6072	44.2561	45.0022	45.0022	44.2561	42.6072	39.7155	35.0000
35.0000	38.0481	39.7836	40.7711	41.2258	41.2258	40.7711	39.7836	38.0481	35.0000
35.0000	35.1968	35.3725	35.6034	35.7521	35.7521	35.6034	35.3725	35.1968	35.0000
35.0000	29.8213	28.4798	28.1795	28.1354	28.1354	28.1795	28.4798	29.8213	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.24: Resposta em regime transiente no $Tempo = 28,05$ dias

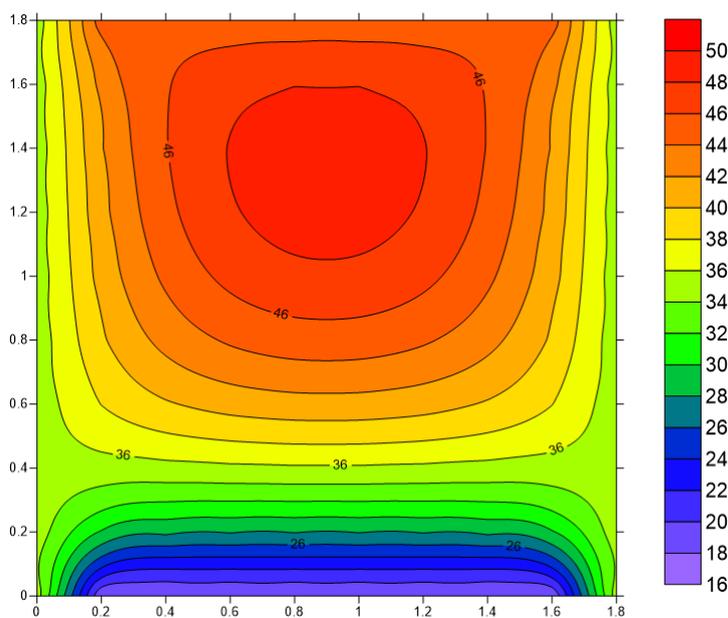


Figura 5.25: Resposta em regime transiente no $Tempo = 28,05$ dias

O tempo em dias é: 90

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	42.8811	46.4181	48.1195	48.8308	48.8308	48.1195	46.4181	42.8811	35.0000
35.0000	42.4267	46.9922	49.5501	50.6938	50.6938	49.5501	46.9922	42.4267	35.0000
35.0000	42.1541	46.8951	49.7164	51.0222	51.0222	49.7164	46.8951	42.1541	35.0000
35.0000	41.6154	46.0394	48.7200	49.9789	49.9789	48.7200	46.0394	41.6154	35.0000
35.0000	40.5890	44.2487	46.4676	47.5171	47.5171	46.4676	44.2487	40.5890	35.0000
35.0000	38.8127	41.2205	42.7071	43.4273	43.4273	42.7071	41.2205	38.8127	35.0000
35.0000	35.7622	36.4351	37.0350	37.3800	37.3800	37.0350	36.4351	35.7622	35.0000
35.0000	30.1214	29.0438	28.9394	28.9995	28.9995	28.9394	29.0438	30.1214	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.26: Resposta em regime transiente no $Tempo = 90$ dias

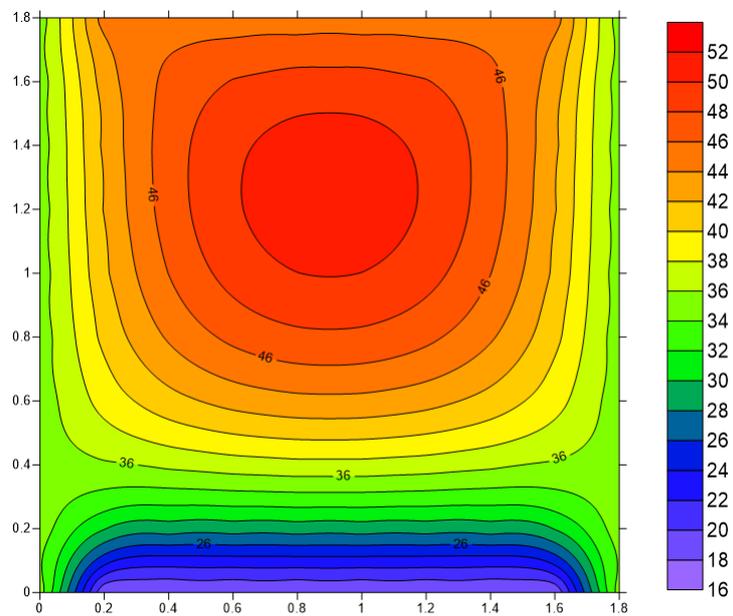


Figura 5.27: Resposta em regime transiente no $Tempo = 90$ dias

5.3.3 ESTACIONÁRIO 2D: Método dos Elementos Finitos

Nesta seção será feita uma análise de convergência ou h-método para o problema apresentado no Caso 2 cujo domínio é uma a geometria plana (2D) de dimensões 1,8 m por 1,8 m. O problema apresenta as mesmas temperaturas no contorno: borda superior apresenta uma temperatura de 45 °C, na borda inferior uma temperatura de 18 °C, na borda esquerda e direita com temperatura de 35 °C. O concreto possui condutividade $k = 2W/m.K$, mas não há geração interna de calor. A análise será baseada na geração de três malhas de elementos triangulares de dimensões constantes, sendo que os lados a e b dos triângulos são iguais.

A malha 1 (Figura 6.28) tem 2 elementos e 4 graus de liberdade (4 nós), e conforme apresentado no Caso 2 todas as temperaturas $T1$ a $T4$ são conhecidas (condições de contorno).

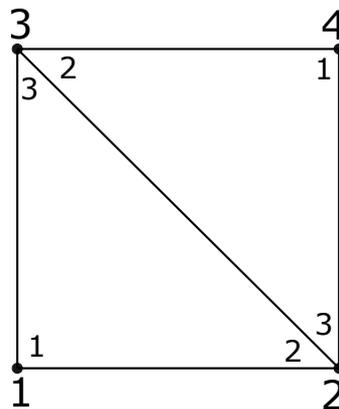


Figura 5.28: Malha 1

A matriz global dos coeficientes da Malha 1 (Equação 5.1) é obtida pela montagem das matrizes do elemento 1 e do elemento 2 (Ver APÊNDICE, Caso 2, Malha 1), sendo que as condições de contorno (temperaturas nodais) são conhecidas, ficando de incógnitas apenas as variáveis secundárias (fluxos $Q1$ a $Q4$).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + Q1 \\ 0 + Q2 \\ 0 + Q3 \\ 0 + Q4 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Se adotarmos para a Malha 1 as temperaturas prescritas são $T1 = 18^\circ C$, $T2 = 18^\circ C$, $T3 = 45^\circ C$ e $T4 = 45^\circ C$. Após resolver o sistema temos que os valores dos fluxos: $Q1 = -27W$, $Q2 = -27W$, $Q3 = 27W$ e $Q4 = 27W$.

A malha 2 (Figura 5.29) tem 8 elementos e 9 graus de liberdade (9 nós), e conforme apresentado no Caso 2 todas as temperaturas com exceção da $T5$ tem os seus valores conhecidos (condições de contorno).

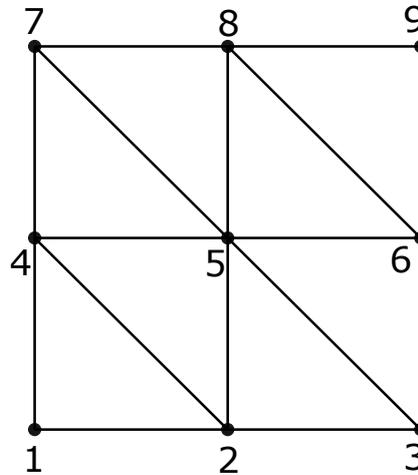


Figura 5.29: Malha 2

A matriz global dos coeficientes da Malha 2 (Equação 5.2) é obtida pela montagem das matrizes dos oito elementos. (Ver APÊNDICE, Caso 2, Malha 2)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \\ T7 \\ T8 \\ T9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + Q1 \\ 0 + Q2 \\ 0 + Q3 \\ 0 + Q4 \\ 0 + 0 \\ 0 + Q6 \\ 0 + Q7 \\ 0 + Q8 \\ 0 + Q9 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Se adotarmos para a Malha 2 as temperaturas prescrita são $T1 = 18^\circ C$, $T2 = 18^\circ C$, $T3 = 18^\circ C$, $T4 = 35^\circ C$, $T6 = 35^\circ C$, $T7 = 45^\circ C$, $T8 = 45^\circ C$ e $T9 = 45^\circ C$. A temperatura $T5$ é uma incógnita e o fluxo $Q5 = 0$. Após resolver o sistema temos que a temperatura $T5 = 33,25^\circ C$ e os valores dos fluxos: $Q1 = -17W$, $Q2 = -30,5W$, $Q3 = -17W$, $Q4 = 10,5W$, $Q6 = 10,5W$, $Q7 = 10W$, $Q8 = 23,5W$ e $Q9 = 10W$.

A malha 3 (Figura 5.30) tem 32 elementos e 25 graus de liberdade (25 nós), e conforme apresentado no caso 2 todas as temperaturas no contorno são conhecidas, e as temperaturas dos nós interiores (nós 7, 8 ,9, 12, 13, 14, 17, 18 e 19) são incógnitas. Os

fluxos nos nós externos são incógnitas (nós 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25) e os fluxos dos nós interiores são conhecidos.

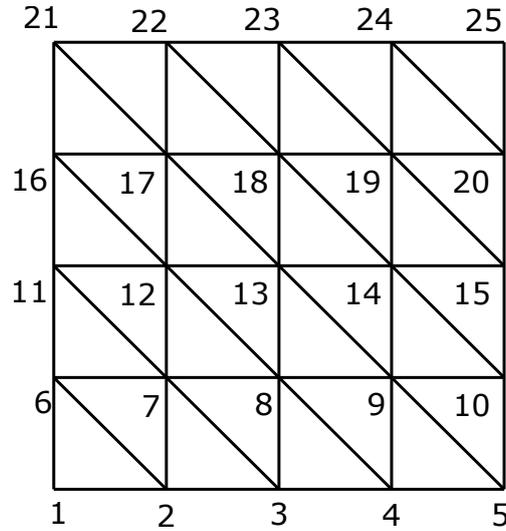


Figura 5.30: Malha 3

A matriz global dos coeficientes da Malha 3 (Equação 5.3) é obtida pela montagem das matrizes dos trinta e dois elementos. (Ver APÊNDICE, Caso 2, Malha 3)

Se adotarmos para a Malha 3 as temperaturas prescritas são $T_1 = 18^\circ C$, $T_2 = 18^\circ C$, $T_3 = 18^\circ C$, $T_4 = 18^\circ C$, $T_5 = 18^\circ C$, $T_6 = 35^\circ C$, $T_{10} = 35^\circ C$, $T_{11} = 35^\circ C$, $T_{15} = 35^\circ C$, $T_{16} = 35^\circ C$, $T_{20} = 35^\circ C$, $T_{21} = 45^\circ C$, $T_{22} = 45^\circ C$, $T_{23} = 45^\circ C$, $T_{24} = 45^\circ C$ e $T_{25} = 45^\circ C$. As temperaturas T_7 , T_8 , T_9 , T_{12} , T_{13} , T_{14} , T_{17} , T_{18} e T_{19} são desconhecidas (incógnitas) e os fluxos $Q_7 = 0$, $Q_8 = 0$, $Q_9 = 0$, $Q_{12} = 0$, $Q_{13} = 0$, $Q_{14} = 0$, $Q_{17} = 0$, $Q_{18} = 0$ e $Q_{19} = 0$. Após resolver o sistema temos que as temperaturas $T_7 = 28,429^\circ C$, $T_8 = 27,027^\circ C$, $T_9 = 28,429^\circ C$, $T_{12} = 33,688^\circ C$, $T_{13} = 33,25^\circ C$, $T_{14} = 33,688^\circ C$, $T_{17} = 38,071^\circ C$, $T_{18} = 38,598$ e $T_{19} = 38,071^\circ C$ e os valores dos fluxos: $Q_1 = -17W$, $Q_2 = -20,858W$, $Q_3 = -18,054W$, $Q_4 = -20,858W$, $Q_5 = -17W$, $Q_6 = 30,142W$, $Q_{10} = 30,142W$, $Q_{11} = 2,624W$, $Q_{15} = 2,624W$, $Q_{16} = -16,142W$, $Q_{20} = -16,142W$, $Q_{21} = 10W$, $Q_{22} = 13,858W$, $Q_{23} = 12,804W$, $Q_{24} = 13,858W$ e $Q_{25} = 10W$.

5.4 CASO 3: Problema 3D em Regime Estacionário (Bloco Cúbico)

Um sólido tridimensional (3D) de dimensões 1,8 m por 1,8 m por 1,8 m, de mesmo material que aquele encontrado no CASO 2 para a condutividade térmica (k), e também leva em consideração a geração interna de calor. Submetido as seguintes condições de contorno: Em sua face superior 45 °C, em sua face inferior 18 °C, em suas laterais esquerda e direita uma temperatura de 35 °C, e também nas faces antero e posterior uma temperatura de 35 °C. O problema deve ser tratado como um caso estacionário. (Ver Figura 5.31)

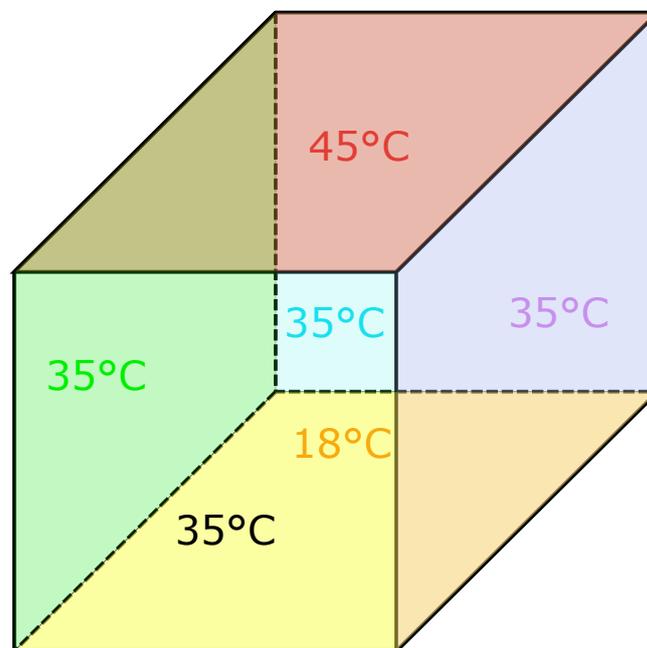


Figura 5.31: Condições de contorno do problema 3D

A malha tridimensional foi feita de 10 linhas e 10 colunas por fatia, sendo um total de 10 fatias. Neste caso o operador diferencial mostrado na Equação 3.8 percorre o espaço nas três direções do domínio (i, j e k) conforme explicado no Capítulo 3 na seção 3.5 MATRIZ NO MATLAB.

As Figuras 5.32, 5.33, 5.35, 5.36, 5.37, 5.38, 5.40, 5.41, 5.42, 2 5.43 representam a resposta estacionário para o problema tridimensional, sendo que cada figura apresenta os valores da temperatura em forma matricial para cada fatia. Para melhor visualizar os resultados, interpola os valores das temperaturas da fatia 2 (Figura 5.34) e da fatia 6 (Figura 5.39). As fatias são como cortes no sólido. Como o problema tem as mesmas condições de contorno em torno dos cortes, não se achou necessário interpolar outras

fatias.

Numero de Iterações é: 7168

(:,:,1) =

35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

Figura 5.32: Resposta em regime estacionario *fatia 1*

(:,:,2) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	39.6441	41.0921	41.5991	41.7792	41.8024	41.6616	41.1722	39.7066	35.0000
35.0000	38.1478	39.5987	40.2366	40.4952	40.5363	40.3471	39.7401	38.2578	35.0000
35.0000	37.5969	38.8783	39.4881	39.7535	39.8053	39.6272	39.0559	37.7348	35.0000
35.0000	37.2725	38.3614	38.8796	39.1118	39.1668	39.0273	38.5495	37.4181	35.0000
35.0000	36.9145	37.7541	38.1331	38.3046	38.3561	38.2712	37.9296	37.0501	35.0000
35.0000	36.2776	36.7241	36.9044	36.9923	37.0350	37.0184	36.8688	36.3892	35.0000
35.0000	34.8218	34.6230	34.5513	34.5475	34.5775	34.6314	34.7244	34.8997	35.0000
35.0000	30.8583	29.8529	29.5967	29.5407	29.5559	29.6373	29.9042	30.8977	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.33: Resposta em regime estacionario *fatia 2*

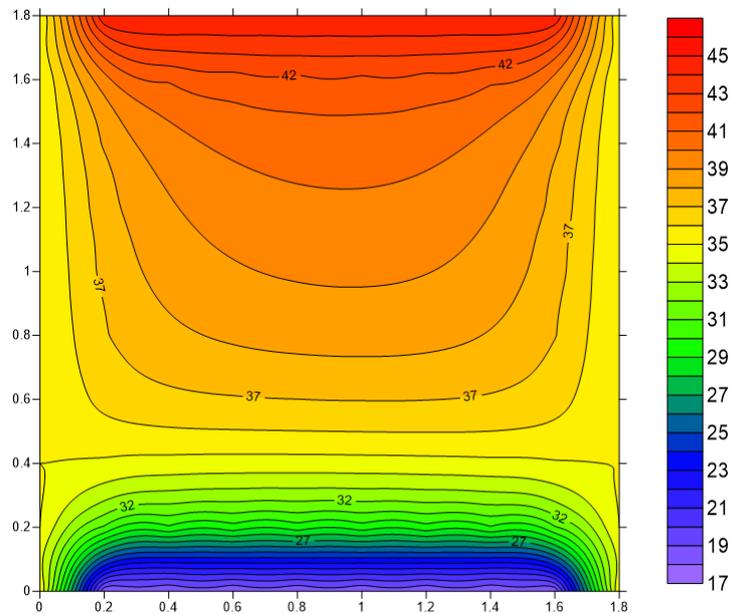


Figura 5.34: Resposta em regime estacionario *fatia 2*

(:, :, 3) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.0921	43.2699	44.1045	44.4174	44.4597	44.2182	43.4152	41.2052	35.0000
35.0000	39.5987	41.9304	43.0207	43.4798	43.5548	43.2219	42.1871	39.7978	35.0000
35.0000	38.8783	40.9859	42.0472	42.5247	42.6195	42.3011	41.3090	39.1282	35.0000
35.0000	38.3614	40.1520	41.0581	41.4786	41.5793	41.3278	40.4946	38.6259	35.0000
35.0000	37.7541	39.1130	39.7737	40.0857	40.1801	40.0261	39.4331	38.0006	35.0000
35.0000	36.7241	37.4228	37.7381	37.9014	37.9795	37.9468	37.6869	36.9271	35.0000
35.0000	34.6230	34.3168	34.2136	34.2173	34.2722	34.3601	34.5019	34.7650	35.0000
35.0000	29.8529	28.4494	28.0650	27.9801	28.0079	28.1392	28.5430	29.9245	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.35: Resposta em regime estacionario *fatia 3*

(:, :, 4) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.5991	44.1045	45.1159	45.5096	45.5653	45.2652	44.2950	41.7468	35.0000
35.0000	40.2366	43.0207	44.3751	44.9621	45.0608	44.6396	43.3573	40.4969	35.0000
35.0000	39.4881	42.0472	43.3846	44.0019	44.1267	43.7184	42.4712	39.8151	35.0000
35.0000	38.8796	41.0581	42.2060	42.7531	42.8859	42.5610	41.5082	39.2261	35.0000
35.0000	38.1331	39.7737	40.6109	41.0191	41.1437	40.9434	40.1945	38.4563	35.0000
35.0000	36.9044	37.7381	38.1424	38.3606	38.4637	38.4173	38.0854	37.1706	35.0000
35.0000	34.5513	34.2136	34.1095	34.1269	34.1992	34.3023	34.4568	34.7374	35.0000
35.0000	29.5967	28.0650	27.6342	27.5407	27.5773	27.7317	28.1878	29.6904	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.36: Resposta em regime estacionario *fatia 4*

(:, :, 5) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.7792	44.4174	45.5096	45.9432	46.0054	45.6761	44.6292	41.9430	35.0000
35.0000	40.4952	43.4798	44.9621	45.6145	45.7247	45.2568	43.8540	40.7838	35.0000
35.0000	39.7535	42.5247	44.0019	44.6934	44.8326	44.3741	42.9963	40.1163	35.0000
35.0000	39.1118	41.4786	42.7531	43.3693	43.5176	43.1489	41.9793	39.4963	35.0000
35.0000	38.3046	40.0857	41.0191	41.4818	41.6208	41.3898	40.5539	38.6635	35.0000
35.0000	36.9923	37.9014	38.3606	38.6128	38.7277	38.6670	38.2877	37.2879	35.0000
35.0000	34.5475	34.2173	34.1269	34.1576	34.2382	34.3415	34.4876	34.7540	35.0000
35.0000	29.5407	27.9801	27.5407	27.4481	27.4888	27.6491	28.1164	29.6446	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.37: Resposta em regime estacionario *fatia 5*

(:, :, 6) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.8024	44.4597	45.5653	46.0054	46.0665	45.7287	44.6672	41.9624	35.0000
35.0000	40.5363	43.5548	45.0608	45.7247	45.8330	45.3500	43.9212	40.8182	35.0000
35.0000	39.8053	42.6195	44.1267	44.8326	44.9693	44.4916	43.0809	40.1596	35.0000
35.0000	39.1668	41.5793	42.8859	43.5176	43.6630	43.2739	42.0693	39.5423	35.0000
35.0000	38.3561	40.1801	41.1437	41.6208	41.7571	41.5069	40.6381	38.7065	35.0000
35.0000	37.0350	37.9795	38.4637	38.7277	38.8404	38.7636	38.3571	37.3234	35.0000
35.0000	34.5775	34.2722	34.1992	34.2382	34.3171	34.4091	34.5361	34.7787	35.0000
35.0000	29.5559	28.0079	27.5773	27.4888	27.5286	27.6830	28.1407	29.6570	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.38: Resposta em regime estacionario *fatia 6*

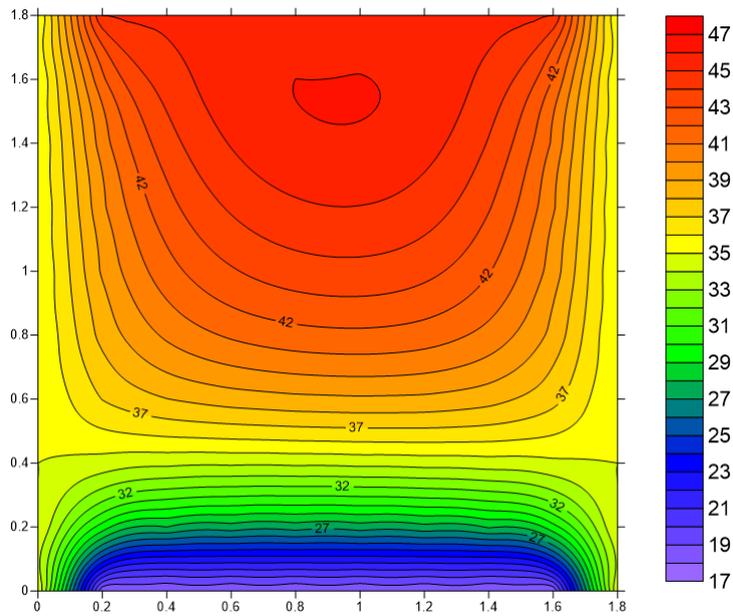


Figura 5.39: Resposta em regime estacionario *fatia 6*

(:, :, 7) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.6616	44.2182	45.2652	45.6761	45.7287	45.4059	44.3964	41.7987	35.0000
35.0000	40.3471	43.2219	44.6396	45.2568	45.3500	44.8881	43.5362	40.5884	35.0000
35.0000	39.6272	42.3011	43.7184	44.3741	44.4916	44.0318	42.6967	39.9304	35.0000
35.0000	39.0273	41.3278	42.5610	43.1489	43.2739	42.8941	41.7478	39.3485	35.0000
35.0000	38.2712	40.0261	40.9434	41.3898	41.5069	41.2550	40.4185	38.5708	35.0000
35.0000	37.0184	37.9468	38.4173	38.6670	38.7636	38.6744	38.2700	37.2649	35.0000
35.0000	34.6314	34.3601	34.3023	34.3415	34.4091	34.4819	34.5857	34.8031	35.0000
35.0000	29.6373	28.1392	27.7317	27.6491	27.6830	27.8221	28.2525	29.7234	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.40: Resposta em regime estacionario *fatia 7*

(:, :, 8) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	41.1722	43.4152	44.2950	44.6292	44.6672	44.3964	43.5434	41.2706	35.0000
35.0000	39.7401	42.1871	43.3573	43.8540	43.9212	43.5362	42.4130	39.9131	35.0000
35.0000	39.0559	41.3090	42.4712	42.9963	43.0809	42.6967	41.5933	39.2733	35.0000
35.0000	38.5495	40.4946	41.5082	41.9793	42.0693	41.7478	40.7962	38.7798	35.0000
35.0000	37.9296	39.4331	40.1945	40.5539	40.6381	40.4185	39.7148	38.1443	35.0000
35.0000	36.8688	37.6869	38.0854	38.2877	38.3571	38.2700	37.9188	37.0454	35.0000
35.0000	34.7244	34.5019	34.4568	34.4876	34.5361	34.5857	34.6636	34.8474	35.0000
35.0000	29.9042	28.5430	28.1878	28.1164	28.1407	28.2525	28.6241	29.9658	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.41: Resposta em regime estacionario *fatia 8*

(:, :, 9) =

35.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	45.0000	35.0000
35.0000	39.7066	41.2052	41.7468	41.9430	41.9624	41.7987	41.2706	39.7568	35.0000
35.0000	38.2578	39.7978	40.4969	40.7838	40.8182	40.5884	39.9131	38.3459	35.0000
35.0000	37.7348	39.1282	39.8151	40.1163	40.1596	39.9304	39.2733	37.8455	35.0000
35.0000	37.4181	38.6259	39.2261	39.4963	39.5423	39.3485	38.7798	37.5354	35.0000
35.0000	37.0501	38.0006	38.4563	38.6635	38.7065	38.5708	38.1443	37.1595	35.0000
35.0000	36.3892	36.9271	37.1706	37.2879	37.3234	37.2649	37.0454	36.4791	35.0000
35.0000	34.8997	34.7650	34.7374	34.7540	34.7787	34.8031	34.8474	34.9623	35.0000
35.0000	30.8977	29.9245	29.6904	29.6446	29.6570	29.7234	29.9658	30.9290	35.0000
35.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	18.0000	35.0000

Figura 5.42: Resposta em regime estacionario *fatia* 9

(:, :, 10) =

35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35

Figura 5.43: Resposta em regime estacionario *fatia* 10

5.5 CASO 4: Problema 3D (Axissimétrico) Estacionário (Geometria Cilíndrica)

A distribuição da temperatura no interior de um cilindro (Figura 5.44) de altura $h = 0,40$ m e raio $r = 0,10$ m é um problema tridimensional axissimétrico, ou seja, é possível obter a distribuição da temperatura para todo o corpo apenas com a análise de uma região específica mediante a consideração de condições de contorno apropriadas (fluxo no eixo central do cilindro igual a zero). O cilindro é submetido a diferentes temperaturas no seu contorno: na parte superior a temperatura $T_s = 60^\circ C$, na parte inferior a temperatura $T_i = 10^\circ C$, e na lateral têm-se $T_l = 30^\circ C$. A condutividade térmica é a mesma em todas as direções e tem valor de $k = 20W/(m^\circ C)$.

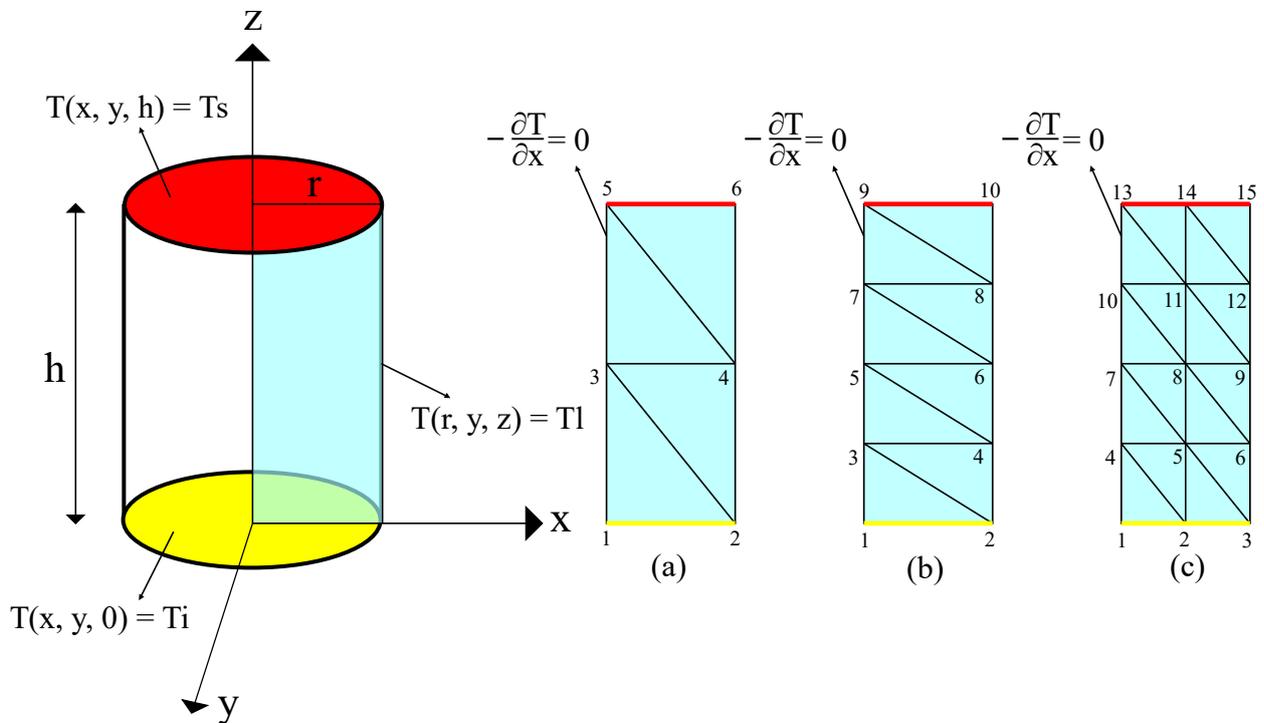


Figura 5.44: Cilindro com as Malhas (a), (b) e (c)

A malha (a) (Figura 5.44) tem 4 elementos e 6 graus de liberdade (6 nós), e todas as temperaturas com exceção da T_3 tem os seus valores conhecidos (condições de contorno). E a matriz global dos coeficientes da malha (a) juntamente com as temperaturas e fluxos são apresentados na Equação 5.4.

$$\begin{pmatrix} 25 & -20 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 25 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 50 & -40 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -40 & 50 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 25 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -20 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + Q1 \\ 0 + Q2 \\ 0 + Q3 \\ 0 + Q4 \\ 0 + Q5 \\ 0 + Q6 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Se adotarmos para a Malha (a) as temperaturas prescritas são: $T1 = 10^\circ C$, $T2 = 10^\circ C$, $T4 = 30^\circ C$, $T5 = 60^\circ C$ e $T6 = 60^\circ C$. A temperatura $T3$ é uma incógnita e o fluxo $Q3 = 0$. Após resolver o sistema temos que a temperatura $T3 = 31^\circ C$ e os valores dos fluxos: $Q1 = -105W$, $Q2 = -100W$, $Q4 = -90W$, $Q5 = 145W$ e $Q6 = 150W$.

A malha (b) (Figura 5.44) tem 8 elementos e 10 graus de liberdade (10 nós), e todas as temperaturas com exceção das $T3$, $T5$ e $T7$ tem os seus valores conhecidos (condições de contorno). Os fluxos nos nós 3, 5 e 7 são conhecidos e os fluxos nos outros nós onde há temperatura prescritas são incógnitas. A matriz global dos coeficientes da malha (b) juntamente com as temperaturas e fluxos são apresentados na Equação 5.5.

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 40 & -20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -20 & 40 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 40 & -20 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 40 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 40 & -20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 40 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & -10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \\ T7 \\ T8 \\ T9 \\ T10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + Q1 \\ 0 + Q2 \\ 0 + Q3 \\ 0 + Q4 \\ 0 + Q5 \\ 0 + Q6 \\ 0 + Q7 \\ 0 + Q8 \\ 0 + Q9 \\ 0 + Q10 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Se adotarmos para a Malha (b) as temperaturas prescritas são: $T1 = 10^\circ C$, $T2 = 10^\circ C$, $T4 = 30^\circ C$, $T6 = 30^\circ C$, $T8 = 30^\circ C$, $T9 = 60^\circ C$ e $T10 = 60^\circ C$. A temperatura $T3$, $T5$ e $T7$ são incógnitas e os fluxos $Q3 = 0$, $Q5 = 0$ e $Q7 = 0$ são conhecidos devido as considerações de simetria. Após resolver o sistema temos que a temperatura $T3 = 25,179^\circ C$, $T5 = 30,714^\circ C$ e $T7 = 37,679^\circ C$; os valores dos fluxos: $Q1 = -151,79W$, $Q2 = -200W$, $Q4 = 296,42W$, $Q6 = -14,28W$, $Q8 = -453,58W$, $Q9 = 223,21W$ e $Q10 = 300W$.

A malha (c) (Figura 5.44) tem 16 elementos e 15 graus de liberdade (15 nós), e as temperaturas com T_4 , T_5 , T_7 , T_8 , T_{10} e T_{11} são as incógnitas, as outras temperaturas são conhecidas. Os fluxos nos nós 4, 5, 7, 8, 10 e 11 são conhecidos e os fluxos nos outros nós onde há temperatura prescritas são incógnitas. A matriz global dos coeficientes da malha (c) juntamente com as temperaturas e fluxos são apresentados na Equação 5.6.

Se adotarmos para a Malha (c) as temperaturas prescritas são: $T_1 = 10^\circ C$, $T_2 = 10^\circ C$, $T_3 = 10^\circ C$, $T_6 = 30^\circ C$, $T_9 = 30^\circ C$, $T_{12} = 30^\circ C$, $T_{13} = 60^\circ C$, $T_{14} = 60^\circ C$ e $T_{15} = 60^\circ C$. A temperatura T_4 , T_5 , T_7 , T_8 , T_{10} e T_{11} são incógnitas e os fluxos $Q_4 = 0$, $Q_5 = 0$, $Q_7 = 0$, $Q_8 = 0$, $Q_{10} = 0$ e $Q_{11} = 0$ são conhecidos. Após resolver o sistema temos que a temperatura $T_4 = 24,87^\circ C$, $T_5 = 25,999^\circ C$, $T_7 = 30,707^\circ C$, $T_8 = 30,512^\circ C$, $T_{10} = 38,105^\circ C$ e $T_{11} = 36,293^\circ C$; os valores dos fluxos: $Q_1 = -74,35W$, $Q_2 = -159,99W$, $Q_3 = -100W$, $Q_6 = 260,04W$, $Q_9 = -20,48W$, $Q_{12} = -401,72W$, $Q_{13} = 109,475W$, $Q_{14} = 237,07W$ e $Q_{15} = 150W$.

$$\begin{pmatrix}
 25 & -20 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -20 & 50 & -20 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -20 & 25 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -5 & 0 & 0 & 50 & -40 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -10 & 0 & -40 & 100 & -40 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -5 & 0 & -40 & 50 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 50 & -40 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -40 & 100 & -40 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -40 & 50 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 50 & -40 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -40 & 100 & -40 & 0 & -10 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -40 & 50 & 0 & 0 & -5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 25 & -20 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & -20 & 50 & -20 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -20 & 25
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \\ T6 \\ T7 \\ T8 \\ T9 \\ T10 \\ T11 \\ T12 \\ T13 \\ T14 \\ T15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+Q1 \\ 0+Q2 \\ 0+Q3 \\ 0+Q4 \\ 0+Q5 \\ 0+Q6 \\ 0+Q7 \\ 0+Q8 \\ 0+Q9 \\ 0+Q10 \\ 0+Q11 \\ 0+Q12 \\ 0+Q13 \\ 0+Q14 \\ 0+Q15 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Para saber se a sequência de malhas escolhida (a), (b) e (c) é apropriada ao problema, realizou-se a análise da convergência dos valores das temperaturas para cada uma das malhas em um mesmo ponto. Na Figura 5.45 observa-se que a temperatura no ponto $(0; 0; 0,2)$ do cilindro, correspondente aos nós 3, 5 e 7 nas malhas teve uma convergência de valores para o aumento do número de elementos. Isso significa que o tamanho e quantidade de elementos adotados são suficientes para uma boa solução.

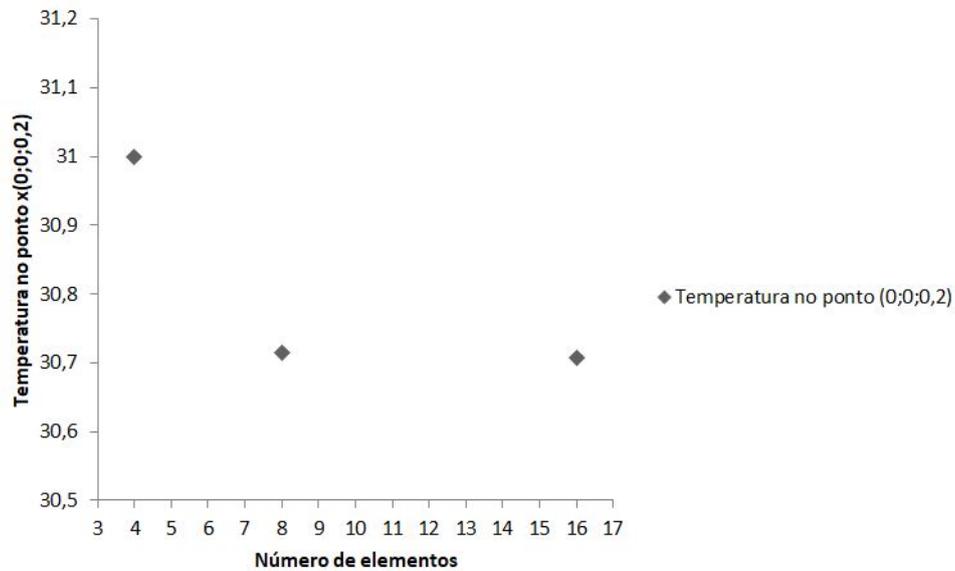


Figura 5.45: Convergência para o valor da temperatura no nós 3, 5 e 7

Capítulo 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Dada a importância e variedade dos problemas envolvendo condução de calor em corpos sólidos, podemos afirmar que o Método das Diferenças Finitas (MDF), é um método simples, mas efetivo para resolver problemas complexos em engenharia, como por exemplo a solução da equação diferencial parcial do calor. No Caso 1: determinou-se numericamente a temperatura em três pontos no interior de uma região representativa retangular, para o estado estacionário a principal característica foi que o aumento da geração interna de calor H , faz aumentar a temperatura de equilíbrio dos pontos internos, já no caso transiente, além da mudança interna da temperatura ao longo do tempo, a temperatura final coincide com a solução do problema estacionário. No Caso 2, faz-se análises em regimes estacionários e transientes e um problema bidimensional com um maior número de pontos da malha para uma melhor discretização do modelo, algo que só foi possível com o auxílio de um algoritmo computacional, nesse caso se verificou que a distribuição de temperatura aos 28,05 dias é bastante próxima de sua resposta estacionária. No Caso 3, passamos a um problema tridimensional (3D), em que a distribuição de temperatura é calculada por fatias, apesar de o caso 3D apresentar valores próximos ao do Caso 2 estacionário.

A solução numérica por elementos finitos feitas no Caso 2 se baseou no h-método, um processo de convergência, em que se busca uma melhor solução à medida que se refina a malha. Foram geradas três malhas com 2, 8 e 32 elementos, respectivamente. No processo de solução se observou que as matrizes globais das malhas, apresentam uma característica semelhante, elas se organizam em "bandas", ou melhor, nas diagonais principais, sendo essa uma característica do método dos elementos finitos. Com relação aos valores se

observou uma convergência nos valores das temperaturas, como pode ser observado para $T_5 = 33,25^\circ C$ na malha 2 e $T_{13} = 33,25^\circ C$ na malha 3. O Caso 4 é um problema axissimétrico, no entanto foi modelado como um problema bidimensional, pela inclusão da condição de fluxo zero no centro do cilindro; foram geradas 3 malhas com 4, 8 e 16 elementos, sendo observado uma convergência no valor das temperaturas.

Em continuidade ao trabalho apresentado acredito ser importante trabalhar com problemas mais realísticos, com análises feitas em geometrias mais complexas para estruturas tridimensionais, utilizar outros tipos de elementos finitos, geração automática de malhas, formulação transiente para os elementos finitos.

Bibliografia

- [1] Bathe KJ. Finite element procedures. New Jersey: Prentice Hall, Inc.; 1996.
- [2] Bofang Z. Thermal Stresses and Temperature Control of Mass Concrete. Burlington: Elsevier Science; 2014.
- [3] Chung TJ. Computational Fluid Dynamics. New York: Cambridge University Press; 2010.
- [4] Coelho ND. Métodos Analíticos e Numéricos para o Estudo dos Efeitos Termomecânicos no Concreto Massa Orientados às Barragens de Gravidade. Brasília; 2016.
- [5] Connor JJ. Finite element techniques for fluid flow. London Boston: Newnes-Butterworths; 1976.
- [6] Cook R, Malkus DS, Plesha ME. Concepts and applications of finite element analysis. New York, NY: Wiley; 1989.
- [7] Cook R. Finite element modeling for stress analysis. New York: Wiley; 1995.
- [8] Croft DR, Lilley DG. Heat Transfer Calculations Using Finite Difference Equations. London: Applied Science Publishers LTD; 1977.
- [9] Equipe de Furnas LdC. Concretos: massa, estrutural, projetado e compactado com rolo: ensaios e propriedades. São Paulo: Pini; 1997.
- [10] Evans G. Numerical Methods for Partial Differential Equations. London: Springer London; 2000.
- [11] Haberman R. Elementary applied partial differential equations : with Fourier series and boundary value problems. New Jersey: Prentice Hall; 1983.
- [12] Matlab and Statistics Toolbox; 2012a. The Mathworks, MA, USA.

- [13] Mehta PK. Concreto: Estrutura, Propriedades e Materiais. São Paulo: Pini; 1994.
- [14] Neville AM. Propriedades do concreto. São Paulo: Pini; 1997.
- [15] Nithiarasu P. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer. Somerset: Wiley; 2016.
- [16] Pedroso LJ. Interação Fluido-Estrutura; 1997. Notas de Aula e Apostila Interna de Curso.
- [17] Pedroso LJ. Métodos Numéricos em Placas : Método das Diferenças Finitas em Placas; 2001. Publicação Didática (Apostila Interna).
- [18] Pedroso LJ. Uma Introdução do Método das Diferenças Finitas Centrais em Cavidades Acústicas 2D; 2011. Publicação Didática.
- [19] Pedroso LJ. Manuscritos, Esquemas, Discussões e Notas de Seções de Orientações, 2017-2018; 2018.
- [20] Rao S. The finite element method in engineering. Amsterdam Boston, MA: Elsevier/Butterworth Heinemann; 2004.
- [21] Reddy JN. An introduction to the finite element method. Boston Burr Ridge, IL New York: McGraw-Hill; 2006.
- [22] Reddy JN, Gartling DK. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. Boca Raton, FL: CRC Press; 2010.
- [23] Ruggiero MG, Lopes Vd. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Makron Books; 2004.
- [24] Tveito A. Introduction to partial differential equations : a computational approach. New York: Springer; 1998.
- [25] Vasconcelos MA, Pedroso LJ. Aplicação do Método das Diferenças Finitas a Problemas Envolvendo Barragem-Reservatório. In: 20º Congresso de Iniciação Científica da UnB, 11º Congresso de Iniciação Científica do DF. Brasília; 2014a. .
- [26] Vasconcelos MA, Pedroso LJ. Um Estudo do Método das Diferenças Finitas Aplicado a Problemas Estacionários e Transientes em Barragens e Reservatórios. In: Proceedings of the XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. Brasília; 2014b. .

- [27] Vasconcelos MA, Pedroso LJ, A CN. Estudo de Diferenças Finitas para a Equação do Calor em Barragens de Concreto. In: Proceedings of the XXXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering. Rio de Janeiro; 2015.
- [28] Wang HF, Anderson MP. Introduction to groundwater modeling : finite difference and finite element methods. San Diego London: Academic Press; 1995.

APÊNDICE A - Lista de Rotinas Computacionais

6.1 CASO 2

6.1.1 ESTACIONÁRIO 2D: Método das Diferenças Finitas

```
clc;
close all;
clear all;

%DEFINIR O NÚMERO DE LINHAS E COLUNAS DA MALHA

S = 10;

%CONDIÇÕES DE CONTORNO SUPERIOR

HS = 45;

for I = 1:1:1

    for J = 1:1:S

        H(I,J) = HS;

    end

end
```

```
end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO INFERIOR

HI = 18;

for I = S:1:S

    for J = 1:1:S

        H(I,J) = HI;

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO ESQUERDA

HE = 35;

for I = 1:1:S

    for J = 1:1:1

        H(I,J) = HE;

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO DIREITA

HD = 35;
```

```
for I = 1:1:S

    for J = S:1:S

        H(I,J) = HD;

    end

end

%CHUTE INICIAL PARA INÍCIO DA ITERAÇÃO

H0 = 25; %podia ser outro valor diferente de 25

for J = 2:1:(S-1)

    for I = 2:1:(S-1)

        H(I,J) = H0;

    end

end

%PARÂMETROS DO MATERIAL

k = 2; %em W/m.K
Cp = 1000; %em J/kg.K
p = 2400; %em kg/m3
Dd = 0.20; %em m

G = 134; %geração interna, em W/m3
```

```
NUMIT = 0;
ERRO = 0.5;

while (ERRO > 0.001)

    for J = 2:1:(S-1)

        for I = 2:1:(S-1)

            OLDVAL = H(I,J);

            H(I,J) = (H(I-1,J) + H(I+1,J) + H(I,J-1) + H(I,J+1) + (G*Dd*Dd)/k)/4 ;

            ERRO = abs(H(I,J) - OLDVAL);

            NUMIT = NUMIT +1;

        end

    end

end

end

fprintf('Numrero de Iterações é:')
disp(NUMIT)
disp(H)
```

6.1.2 TRANSIENTE 2D: Método das Diferenças Finitas

```
clc;
close all;
clear all;

%DEFINIR O NÚMERO DE LINHAS E COLUNAS DA MALHA

S = 10;

%DEFINIR O VALOR DO TEMPO EM MULTIPLOS DE DT

M = 11; %significa 11 vezes o tempo de DT

%CONDIÇÕES DE CONTORNO SUPERIOR

HS = 45;

for I = 1:1:1

    for J = 1:1:S

        H(I,J) = HS;

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO INFERIOR

HI = 18;

for I = S:1:S
```

```
    for J = 1:1:S

        H(I,J) = HI;

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO ESQUERDA

HE = 35;

for I = 1:1:S

    for J = 1:1:1

        H(I,J) = HE;

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO DIREITA

HD = 35;

for I = 1:1:S

    for J = S:1:S

        H(I,J) = HD;

    end

end
```

```
end

%CONDIÇÕES INICIAL

HO = 25;

for J = 2:1:(S-1)

    for I = 2:1:(S-1)

        H(I,J) = HO;
        HNEW(I,J) = HO;

    end

end

end

%PARÂMETROS DO MATEIRIAL

k = 2; %em W/m.K
Cp = 1000; %em J/kg.K
p = 2400; %em kg/m^3
Dd = 0.20; %em m
Fo = 0.10; %adimensional, arbitrado, tendo valor menor ou igual a 0.25

DT = (Fo*p*Cp*Dd)/(k); %em segundos

G = 134; %geração interna, em W/m^3

%CALCULAR A TEMPERATURA NO TEMPO

TIME = 0;
NEND = 100;
```

```
for N = 1:1:M

    for J = 2:1:(S-1)

        for I = 2:1:(S-1)

            D2H = H(I+1,J) + H(I-1,J) + H(I,J+1)+ H(I,J-1);

            HNEW(I,J) = Fo*D2H + (1-4*Fo)*H(I,J) + Fo*(G*Dd*Dd)/k;

        end

    end

    for J = 2:1:(S-1)

        for I = 2:1:(S-1)

            H(I,J) = HNEW(I,J);

        end

    end

    TIME = N*DT;

end

fprintf('O tempo em dias é:')
disp(TIME/86400)
disp(H)
```

6.1.3 ESTACIONÁRIO: Método dos Elementos Finitos

Malha 1

```
clc;
clear all;
close all;

%MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO 1

a = 1.8;
b = 1.8;

ke = 2;

K1 = (ke/(2*a*b))*[(a^2+b^2) -b^2 -a^2;
                  -b^2 b^2 0;
                  -a^2 0 a^2];

F1 = [1;
      1;
      1;
      1];

%MATRIZ DE CONECTIVIDADE

CON = [1 2 3;
       4 3 2];

%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

count = 0;

A = zeros(4,4);
```

```
K = zeros(4,4);
for e = 1:2

    for i = 1:3

        for j = 1:3

            CONE(i) = CON(e,i);
            CONE(j) = CON(e,j);

            I = CONE(i);
            J = CONE(j);

            K(I,J) = K1(i,j);

        end
    end

    count = count + 1;

    A = K + A;
    K = zeros(4,4);

end

disp(A)
```

Malha 2

```
clc;
clear all;
close all;

%MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO 1

a = 0.9;
b = 0.9;

ke = 2;

K1 = (ke/(2*a*b))*[(a^2+b^2) -b^2 -a^2;
                  -b^2 b^2 0;
                  -a^2 0 a^2];

%MATRIZ DE CONECTIVIDADE

CON = [1 2 4;
       5 4 2
       2 3 5
       6 5 3
       4 5 7
       8 7 5
       5 6 8
       9 8 6];

%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

count = 0;

A = zeros(9,9);
K = zeros(9,9);
for e = 1:8
```

```
        for i = 1:3

            for j = 1:3

                CONE(i) = CON(e,i);
                CONE(j) = CON(e,j);

                I = CONE(i);
                J = CONE(j);

                K(I,J) = K1(i,j);

            end

        end

        count = count + 1;

        A = K + A;
        K = zeros(9,9);

    end

    disp(A)
```

Malha 3

```
clc;
clear all;
close all;
```

```
%MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO 1
```

```
a = 0.45;
```

```
b = 0.45;
```

```
ke = 2;
```

```
K1 = (ke/(2*a*b))*[(a^2+b^2) -b^2 -a^2;  
                  -b^2 b^2 0;  
                  -a^2 0 a^2];
```

```
%MATRIZ DE CONECTIVIDADE
```

```
CON = [1 2 6  
       7 6 2  
       2 3 7  
       8 7 3  
       3 4 8  
       9 8 4  
       4 5 9  
       10 9 5  
       6 7 11  
       12 11 7  
       7 8 12  
       13 12 8  
       8 9 13  
       14 13 9  
       9 10 14  
       15 14 10  
       11 12 16  
       17 16 12  
       12 13 17  
       18 17 13  
       13 14 18  
       19 18 14  
       14 15 19
```

```
20 19 15
16 17 21
22 21 17
17 18 22
23 22 18
18 19 23
24 23 19
19 20 24
25 24 20];
```

```
%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL
```

```
count = 0;
```

```
A = zeros(25,25);
```

```
K = zeros(25,25);
```

```
for e = 1:32
```

```
    for i = 1:3
```

```
        for j = 1:3
```

```
            CONE(i) = CON(e,i);
```

```
            CONE(j) = CON(e,j);
```

```
            I = CONE(i);
```

```
            J = CONE(j);
```

```
            K(I,J) = K1(i,j);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    count = count + 1;
```

```
A = K + A;  
K = zeros(25,25);  
  
end  
  
disp(A)
```

6.2 CASO 3

6.2.1 ESTACIONÁRIO 3D

```
clc;  
clear all;  
close all;  
  
%DEFINIR O NÚMERO DE LINHAS, COLUNAS E PÁGINAS DA MALHA  
  
S = 10;  
  
%CONDIÇÕES DE CONTORNO SUPERIOR  
  
HS = 45;  
  
for I = 1:1:1  
  
    for J = 1:1:S  
  
        for K = 1:1:S  
  
            H(I,J,K) = HS;  
  
        end  
  
    end  
  
end
```

```
    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO INFERIOR

HI = 18;

for I = S:1:S

    for J = 1:1:S

        for K = 1:1:S

            H(I,J,K) = HI;

        end

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO ESQUERDA

HE = 35;

for I = 1:1:S

    for J = 1:1:1

        for K = 1:1:S

            H(I,J,K) = HE;
```

```
        end

    end

end

%CONDIÇÕES DE CONTORNO DIREITA

HD = 35;

for I = 1:1:S

    for J = S:1:S

        for K = 1:1:S

            H(I,J,K) = HD;

        end

    end

end

end

%CONDIÇÃO ANTERO

HA = 35;

for I = 1:1:S

    for J = 1:1:S

        for K = 1:1:1

            H(I,J,K) = HA;
```

```
        end

    end

end

%CONDIÇÃO POSTERIOR

HP = 35;

for I = 1:1:S

    for J = 1:1:S

        for K = S:1:S

            H(I,J,K) = HP;

        end

    end

end

end

%CHUTE INICIAL PARA INÍCIO DA ITERAÇÃO

H0 = 25; %podia ser outro valor diferente de 25

for J = 2:1:(S-1)

    for I = 2:1:(S-1)

        for K = 2:1:(S-1)
```

```
H(I,J,K) = H0;

end

end

end

%PARÂMETROS DO MATERIAL

k = 2; %em W/m.K
Cp = 1000; %em J/kg.K
p = 2400; %em kg/m^3
Dd = 0.20; %em m

G = 134; %geração interna, em W/m^3

%CALCULAR A TEMPERATURA NO TEMPO

NUMIT = 0;
ERRO = 0.5;

while (ERRO > 0.01)

    for I = 2:1:(S-1)

        for J = 2:1:(S-1)

            for K = 2:1:(S-1)

                OLD = H(I,J,K);

                H(I,J,K) = (H(I-1,J,K) + H(I+1,J,K) + H(I,J-1,K) + H(I,J+1,K) + ...
```

```
        + H(I,J,K-1) + H(I,J,K+1)+ (G*Dd*Dd)/k)/6;  
  
        ERRO = abs(H(I,J,K) - OLD);  
  
        NUMIT = NUMIT +1;  
  
    end  
  
end  
  
end  
  
end  
  
end  
  
fprintf('Numero de Iterações é:')  
disp(NUMIT)  
disp(H)
```

6.3 CASO 4

6.3.1 MALHA (a): Matriz dos Coeficientes Global

```
clc;  
clear all;  
close all;  
  
%MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO 1  
  
a = 0.10;  
b = 0.20;
```

```
ke = 20;

K1 = (ke/(2*a*b))*[(a^2+b^2) -b^2 -a^2;
                  -b^2 b^2 0;
                  -a^2 0 a^2];

%MATRIZ DE CONECTIVIDADE

CON = [1 2 3
       4 3 2
       3 4 5
       6 5 4];

%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

count = 0;

A = zeros(6,6);
K = zeros(6,6);
for e = 1:4

    for i = 1:3

        for j = 1:3

            CONE(i) = CON(e,i);
            CONE(j) = CON(e,j);

            I = CONE(i);
            J = CONE(j);

            K(I,J) = K1(i,j);

        end

    end

end
```

```
        end

        count = count + 1;

        A = K + A;
        K = zeros(6,6);

    end

disp(A)
```

6.3.2 MALHA (b): Matriz dos Coeficientes Global

```
clc;
clear all;
close all;

%MATRIZ DOS COEFICIENTES PARA O ELEMENTO 1

a = 0.10;
b = 0.10;

ke = 20;

K1 = (ke/(2*a*b))*[(a^2+b^2) -b^2 -a^2;
                  -b^2 b^2 0;
                  -a^2 0 a^2];
```

```
%MATRIZ DE CONECTIVIDADE

CON = [1 2 3
       4 3 2
       3 4 5
       6 5 4
       5 6 7
       8 7 6
       7 8 9
       10 9 8];

%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

count = 0;

A = zeros(10,10);
K = zeros(10,10);
for e = 1:8

    for i = 1:3

        for j = 1:3

            CONE(i) = CON(e,i);
            CONE(j) = CON(e,j);

            I = CONE(i);
            J = CONE(j);

            K(I,J) = K1(i,j);

        end
    end
end
```



```
CON = [1 2 4
       5 4 2
       2 3 5
       6 5 3
       4 5 7
       8 7 5
       5 6 8
       9 8 6
       7 8 10
       11 10 8
       8 9 11
       12 11 9
       10 11 13
       14 13 11
       11 12 14
       15 14 12];

%MONTAGEM DA MATRIZ DOS COEFICIENTES GLOBAL

count = 0;

A = zeros(15,15);
K = zeros(15,15);
for e = 1:16

    for i = 1:3

        for j = 1:3

            CONE(i) = CON(e,i);
            CONE(j) = CON(e,j);

            I = CONE(i);
            J = CONE(j);
```

```
        K(I,J) = K1(i,j);

    end
end

count = count + 1;

A = K + A;
K = zeros(15,15);

end

disp(A)
```