



Universidade de Brasília – UnB  
Faculdade UnB Gama – FGA  
Engenharia Aeroespacial

# **Caracterização de Incertezas em Modelos Estruturais Dinâmicos de Painéis Honeycomb Al-Al**

**Autor:** Odilon P. Machado Neto, Samantha de Oliveira Gil  
**Orientador:** Prof. Dr. Sergio Henrique da Silva Carneiro

Brasília, DF  
2017





Odilon P. Machado Neto, Samantha de Oliveira Gil

## **Caracterização de Incertezas em Modelos Estruturais Dinâmicos de Painéis Honeycomb Al-Al**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Sergio Henrique da Silva Carneiro

Brasília, DF

2017

---

Odilon P. Machado Neto, Samantha de Oliveira Gil      Caracterização de Incertezas em Modelos Estruturais Dinâmicos de Painéis Honeycomb Al-Al/ Odilon P. Machado Neto, Samantha de Oliveira Gil. – Brasília, DF, 2017-  
80 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Henrique da Silva Carneiro

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB  
Faculdade UnB Gama – FGA , 2017.

1. Painel honeycomb. 2. Incerteza. I. Prof. Dr. Sergio Henrique da Silva Carneiro. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Caracterização de Incertezas em Modelos Estruturais Dinâmicos de Painéis Honeycomb Al-Al

CDU 02:141:005.6

---

Odilon P. Machado Neto, Samantha de Oliveira Gil

## **Caracterização de Incertezas em Modelos Estruturais Dinâmicos de Painéis Honeycomb Al-Al**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 08 de Dezembro de 2017:

---

**Prof. Dr. Sergio Henrique da Silva  
Carneiro**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Rodrigo Arbey Muñoz**  
Membro

---

**Profa. Dra. Maura Angelica Milfont  
Shzu**  
Membro

Brasília, DF  
2017

*Dedicamos o trabalho para aqueles que acreditaram  
e também para aqueles que não acreditaram no nosso sucesso.*



# Agradecimentos

Eu, Odilon Neto, agradeço a agradeço a minha família, principalmente aos meus pais pelo suporte e confiança, ao professor Ronni Geraldo Gomes de Amorim por todo apoio no início do meu curso e a minha companheira Samantha, por todo o seu esforço, dedicação e carinho

Eu, Samantha Gil, agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização de mais uma etapa da minha vida, em especial à minha família pelo suporte que me foi proporcionado ao longo da minha vida e por me ensinar o verdadeiro significado da palavra "Família". Agradeço de coração a minha mãe, que sempre acreditou em mim e sempre batalhou por mim: a você devo todo o meu sucesso. Agradeço ao Odilon Neto, por sua dedicação e paciência comigo ao longo da graduação, por sua companhia, sem você a jornada seria ainda mais difícil. Agradeço aos meus amigos Camila Caetano, Augusto Modesto, Alexandre Correia, Tatiane Lima, Roni Filho, Diogo Oliveira e a tantos outros que me incentivaram a perseverar na graduação e a acreditar em mim mesma. Agradeço ao Professor Doutor Domenico Simone por acreditar e depositar a fé em mim e a incentivar todos os alunos a serem engenheiros mais humanos. Foram inúmeras as pessoas que se doaram para me ajudar nessa longa jornada de 6 anos e é com carinho e gratidão que me despeço dos meus colegas, dos professores e da UnB.

Nós agradecemos ao Professor Doutor Sergio Carneiro por todas as orientações, por acreditar em nós e aceitar nos orientar.



*“Ideias, e somente ideias, podem iluminar a escuridão.”*

(Ludwig von Mises)



# Resumo

No Trabalho de Conclusão de Curso 1, foi apresentado um estudo exploratório no impacto de incertezas associadas às dimensões de uma viga engastada de aço no cálculo das frequências naturais e, no presente trabalho, seu uso foi aplicado para um caso mais complexo: um painel sanduíche. O atual escopo consiste no Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações Estratégicas (SGDC), um programa do Governo Brasileiro lançado com o objetivo de prover cobertura de serviços de Internet aos brasileiros e estabelecer soberania nas comunicações estratégicas do governo brasileiro. Espera-se que o SGDC 2 entre em operação até 2022 e, para auxiliar na prevenção de possíveis problemas relacionados à sua operação, desde o lançamento até o fim da sua vida útil, é importante a construção de um modelo computacional capaz de auxiliar na previsão dos modos de vibração dos painéis sanduíches do tipo *honeycomb* de modo que seja possível caracterizar as incertezas associadas ao modelo e às dimensões dos painéis. O presente trabalho apresenta uma análise numérica e experimental nos modos naturais de vibração do painel sanduíche que será utilizado no SGDC 2, cuja metodologia se fundamenta no uso do Método de Monte Carlo. Ao final do trabalho, percebe-se que a incerteza de método é maior que a incerteza de parâmetros de entrada.

**Palavras-chaves:** painéis sanduíche, vibração, Monte Carlo, análise de incerteza, SGDC



# Abstract

In the Graduation Thesis 1 was presented an exploratory study on impact of uncertainties associated with the dimensions of a steel cantilever in natural frequencies and, in this present work, your use has been expanded to a more complex case: a sandwich panel. The current scope consists of the Geostationary Satellite of Defense and Strategic Communications (SGDC), a Brazilian Government program launched with the objective to provide a coverage of Internet service to Brazilians and establish sovereignty in strategic communications from the Brazilian Government. Is expected to launch the SGDC-2 until 2022 and, to assist in the prevention of possible problems related to your operation, since the launch to the end of your life, it is important the construction of a computational model capable to assist in the prediction of vibration modes of the *honeycomb* sandwich panels so that it is possible to characterize the uncertainties associated with the model and the dimensions of the panels. This paper presents a numerical and experimental analysis on natural modes of vibration of sandwich panel that will be used in the SGDC 2, whose methodology is based on the use of the Monte Carlo method. At the end of this work, is noted that the method uncertainty is greater than the input parameter uncertainty.

**Key-words:** sandwich panels. vibration, Monte Carlo, uncertainty analysis, SGDC



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Constituição de um painel sanduíche . . . . .	28
Figura 2 – Descrição dos graus de liberdade do elemento Shell 181 . . . . .	29
Figura 3 – Representação grid de medição e pontos de excitação (círculos) para o painel de 10 mm de espessura . . . . .	35
Figura 4 – Representação esquemática do passo 1 . . . . .	36
Figura 5 – Representação de um exemplo com 50 pontos selecionados . . . . .	36
Figura 6 – Representação esquemática do passo 2 . . . . .	36
Figura 7 – Representação esquemática do passo 3 . . . . .	37
Figura 8 – Representação esquemática do passo 4 . . . . .	37
Figura 9 – Representação esquemática do passo 1 . . . . .	38
Figura 10 – Representação esquemática do passo 2 . . . . .	39
Figura 11 – Representação esquemática do passo 3 . . . . .	39
Figura 12 – Representação esquemática do passo 4 . . . . .	39
Figura 13 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do Núcleo da placa . . . . .	44
Figura 14 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	45
Figura 15 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do Núcleo da placa . . . . .	46
Figura 16 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	47
Figura 17 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade da Lâmina da placa e do núcleo . . . . .	48
Figura 18 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	49
Figura 19 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa . . . . .	50
Figura 20 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	50
Figura 21 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa . . . . .	52
Figura 22 – Histograma para os valores de entrada da variação de espessura do Núcleo da placa . . . . .	52
Figura 23 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	52
Figura 24 – Histograma para os valores de entrada da variação do módulo de elas- ticidade da placa . . . . .	53
Figura 25 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	54
Figura 26 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do núcleo e da lâmina da placa . . . . .	55

Figura 27 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa . . . . .	55
Figura 28 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura do Núcleo da placa . . . . .	56
Figura 29 – Histograma para os valores de entrada da variação do módulo de elasticidade da placa . . . . .	56
Figura 30 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração . . . . .	56
Figura 31 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	68
Figura 32 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	70
Figura 33 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	72
Figura 34 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	74
Figura 35 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	76
Figura 36 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	78
Figura 37 – Sete primeiros modos de vibração . . . . .	80

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Média das frequências naturais . . . . .	41
Tabela 2 – Comparação de desvio padrão para cada caso . . . . .	42
Tabela 3 – Amostras com novas frequências ao selecionar 100 pontos . . . . .	42
Tabela 4 – Amostras com novas frequências para o caso de 100 pontos . . . . .	42
Tabela 5 – Quantidade de amostras com novas frequências para cada caso . . . . .	43
Tabela 6 – Comparação dos erros percentuais das simulações . . . . .	43
Tabela 7 – Valores nominais de frequências naturais . . . . .	44
Tabela 8 – Valores médio e desvio padrão para a simulação da variação da densidade do núcleo . . . . .	45
Tabela 9 – Dados das maiores e menores frequências e erro percentual obtidos para a variação do Núcleo da placa . . . . .	46
Tabela 10 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação da densidade das lâminas . . . . .	47
Tabela 11 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação da densidade das Lâminas . . . . .	48
Tabela 12 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das duas densidades . . . . .	49
Tabela 13 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das duas densidades . . . . .	49
Tabela 14 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das espessuras da lâmina . . . . .	51
Tabela 15 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das espessuras das Lâminas . . . . .	51
Tabela 16 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das duas espessuras . . . . .	53
Tabela 17 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das duas espessuras . . . . .	53
Tabela 18 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação do módulo de elasticidade . . . . .	54
Tabela 19 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação do módulo de elasticidade . . . . .	55
Tabela 20 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação de todos os parâmetros . . . . .	57
Tabela 21 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para variação de todos os parâmetros . . . . .	57
Tabela 22 – Casos experimental e numérico . . . . .	58



# Lista de abreviaturas e siglas

FDP Função de Densidade de Probabilidade

FRF Função de Resposta em Frequência

MEF Método dos Elementos Finitos

MMC Método de Monte Carlo



# Lista de símbolos

$L$	Comprimento
$q_n$	Coordenada normalizada
$Th_L$	Espessura da lâmina
$Th_N$	Espessura do núcleo
$\rho_L$	Densidade da lâmina
$\rho_N$	Densidade do núcleo
$\alpha$	Fator de forma
$\beta$	Fator de escala
$\Gamma$	Função gama
$W$	Largura
$E$	Módulo de Elasticidade



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
<b>1.1</b>	<b>Contextualização</b>	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>24</b>
1.2.1	Objetivo geral	24
1.2.2	Objetivos específicos	24
<b>1.3</b>	<b>Organização do trabalho</b>	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Materiais compósitos</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Painéis honeycomb</b>	<b>27</b>
<b>2.3</b>	<b>Elementos Finitos</b>	<b>28</b>
<b>2.4</b>	<b>Discretização do domínio</b>	<b>28</b>
<b>2.5</b>	<b>Shell 181</b>	<b>29</b>
<b>2.6</b>	<b>Frequência Natural</b>	<b>29</b>
<b>2.7</b>	<b>Grau de liberdade</b>	<b>30</b>
<b>2.8</b>	<b>Modo normal</b>	<b>30</b>
<b>2.9</b>	<b>Função de Resposta em Frequência</b>	<b>30</b>
<b>2.10</b>	<b>Análise Modal</b>	<b>31</b>
<b>2.11</b>	<b>Média</b>	<b>31</b>
<b>2.12</b>	<b>Variância e desvio padrão</b>	<b>32</b>
<b>2.13</b>	<b>Normalização da função de densidade de probabilidade</b>	<b>32</b>
<b>2.14</b>	<b>Distribuição Gama</b>	<b>32</b>
<b>2.15</b>	<b>Distribuição de probabilidade</b>	<b>32</b>
<b>2.16</b>	<b>Método de Monte Carlo</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>35</b>
<b>3.1</b>	<b>Método experimental</b>	<b>35</b>
3.1.1	Passo 1 - Dados de entrada	35
3.1.2	Passo 2 - Modificação da FRF	36
3.1.3	Passo 3 - Randomizar a seleção de pontos da FRF	37
3.1.4	Passo 4 - Aplicação da Rotina de Monte Carlo	37
<b>3.2</b>	<b>Método numérico</b>	<b>37</b>
3.2.1	Passo 1 - Criação do modelo em ambiente APDL	37
3.2.2	Passo 2 - Interface MATLAB-APDL	38
3.2.3	Passo 3 - Alterações dos valores de entrada	39
3.2.4	Passo 4 - Refinamento dos dados obtidos	39

3.2.5	Passo 5 - Tratamento estatístico dos resultados obtidos . . . . .	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Modelo experimental . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Modelo numérico . . . . .</b>	<b>43</b>
4.2.1	Valor nominal . . . . .	44
4.2.2	Varição da densidade do Núcleo . . . . .	44
4.2.3	Varição da densidade das Lâminas . . . . .	46
4.2.4	Varição das duas densidades . . . . .	48
4.2.5	Varição das Espessuras da Lâminas . . . . .	50
4.2.6	Varição das duas Espessuras . . . . .	51
4.2.7	Varição do módulo de elasticidade . . . . .	53
4.2.8	Varição de todos os parâmetros . . . . .	55
<b>4.3</b>	<b>Comparação entre os modelos experimental e numérico . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>59</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>61</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>65</b>
	<b>ANEXO A – HISTOGRAMAS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO DENSIDADE DO NÚCLEO . . . . .</b>	<b>67</b>
	<b>ANEXO B – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO DENSIDADE DAS LÂMINAS . . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>ANEXO C – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO DUAS DENSIDADES . . . . .</b>	<b>71</b>
	<b>ANEXO D – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO ESPESSURA DAS LÂMINAS . . . . .</b>	<b>73</b>
	<b>ANEXO E – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO DUAS ESPESSURAS . . . . .</b>	<b>75</b>
	<b>ANEXO F – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO MÓDULO DE ELASTICIDADE . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>ANEXO G – HISTOGRAMA DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS PARA O CASO GERAL . . . . .</b>	<b>79</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização

Um sistema real, quando submetido a um determinado ambiente, pode exibir uma variabilidade em sua resposta, devido a flutuações no processo de manufatura (SOIZE, 2011), o que acarreta em incertezas associadas ao sistema, tornando assim necessário construir um modelo preditivo utilizando um modelo matemático e computacional para prever a resposta do sistema real (SOIZE, 2005), viabilizando assim a quantificação de riscos, a determinação de probabilidade de falhas e a otimização de projetos (CASTELLO, 2016).

Tal processo de modelagem matemática introduz dois tipos de incertezas: de dados, que ocorrem porque as entradas do sistema projetado não são exatamente iguais às entradas do sistema real, o que exige o uso de variáveis aleatórias (SOIZE, 2005), e as incertezas do modelo, que estão relacionadas à simplicidade do modelo empregado (CASTELLO, 2016). A predição das respostas de um sistema real gera erros entre o valor calculado e o valor real, portanto, um modelo pode ser considerado preditivo se este erro for suficientemente pequeno. Em geral, devido às incertezas de dados e modelo de incertezas, esse erro não é suficientemente pequeno e precisa ser reduzido na modelagem e, conseqüentemente, se torna necessário considerar as incertezas citadas anteriormente e manter o sistema real sob observação, visto que não é possível eliminar ou mesmo prever todas as incertezas do sistema real (SOIZE, 2005).

O presente trabalho visa caracterizar a incerteza associada aos modelos empregados na previsão das frequências naturais de um painel do tipo sanduíche com núcleo *honeycomb* feito de alumínio, que será utilizado no satélite geostacionário brasileiro SGDC-2 e dá continuidade ao Trabalho de Conclusão de Curso 1 (TCC1), que consiste na análise das incertezas associadas aos parâmetros de entrada de uma viga engastada por meio de uma resolução analítica e determinística com base no método de Timoshenko. Para a devida caracterização, foram criados dois modelos, experimental e numérico, ambos utilizando o Método de Monte Carlo (MMC), para que haja a possibilidade de gerar parâmetros aleatórios. Para o modelo experimental, a ferramenta *toolbox EasyMod* (KOUROUSSIS et al., 2012) foi adaptada para que seja possível escolher  $N$  pontos aleatórios na placa e utilizá-los no cálculo da frequência natural. Para o modelo numérico, foi utilizado o Método de Elementos Finitos (MEF) no **Ansys Mechanical APDL** e os parâmetros de entrada foram randomizados. O trabalho de modelagem estocástica de amostras já foi estudado anteriormente pelos autores Rubens Sampaio e Roberta Lima, do departamento de Engenharia Mecânica da PUC Rio (SAMPAIO; LIMA, 2012).

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho de conclusão de curso é a investigação do efeito de incertezas de parâmetros de entrada e do modelo empregado sobre o comportamento dinâmico de painéis *honeycomb*.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral proposto para este TCC 2, os objetivos específicos foram divididos em três partes.

- **Parte A** - Modelo experimental

- a) Coletar dados experimentais das FRF;
- b) Utilizar a ferramenta *toolbox EasyMod* para o cálculo das frequências naturais;
- c) Adaptar a ferramenta para considerar  $N$  pontos da placa;
- d) Aplicar a rotina de Monte Carlo no *EasyMod*;
- e) Realizar uma análise estatística das frequências naturais experimentais;

- **Parte B** - Modelo numérico

- a) Construir uma interface entre o **MATLAB<sup>®</sup>** e o **ANSYS Mechanical APDL**;
- b) Aplicar a rotina de Monte Carlo;
- c) Randomizar os parâmetros de entrada e obter as novas frequências naturais;
- d) Realizar uma análise estatística das frequências naturais numéricas.

- **Parte C** - Modelo experimental  $\times$  numérico

- a) Comparar o impacto dos modelos adotados nas frequências naturais.

## 1.3 Organização do trabalho

No capítulo 2, encontra-se o embasamento teórico necessário para a compreensão dos conceitos utilizados ao longo do trabalho. O capítulo 3 apresenta a metodologia utilizada, que consiste no uso de dois modelos, um experimental e um numérico, cujos código fonte se encontram em <https://github.com/Nolido10/Simulacao-Experimental> e <https://github.com/Nolido10/C-digo-TCC>. O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos

experimental e numericamente, além de apresentar as discussões e as comparações entre os dois métodos adotados. Por fim, no capítulo 5 é feita uma conclusão de tudo que foi apresentado anteriormente.



## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Materiais compósitos

O setor industrial vem exigindo cada vez mais novos materiais que possuam uma boa resistência e um custo baixo, comparado com os sintéticos, além de um baixo impacto ambiental e, nesse cenário, entram os materiais compósitos, que abrangem uma classe de materiais (SILVA, 2014) e consiste na combinação de dois ou mais materiais, com o objetivo de produzir um único com propriedades superiores às dos materiais isolados. São fabricados a partir de dois elementos: um material base, chamado matriz, que é contínua e envolve a outra fase, chamada de fase dispersa ou de reforço (MOREIRA, 2008). A resistência e a rigidez vem do reforço, que é protegido do ambiente externo pela matriz, de modo que o material disperso não entra em contato com meios ácidos ou corrosivos (SILVA, 2014). A combinação dos materiais depende de seu objetivo específico, de sua aplicação e considera-se alguns fatores como (MOREIRA, 2008)

- Resistência a corrosão
- Rigidez
- Peso
- Resistência à fadiga
- Expansão térmica
- Propriedades electromagnéticas
- Condutibilidade térmica
- Comportamento acústico
- Aspecto

### 2.2 Paineis honeycomb

Com o advento da tecnologia, os requisitos exigidos aos materiais mudaram ao longo do tempo. Tal evolução levou ao desenvolvimento de materiais compósitos, que resulta da combinação de dois ou mais materiais com a vantagem de combinar as propriedades positivas de cada material, podendo até mesmo eliminar algumas de suas propriedades negativas (CORREIA, 2004).

Uma estrutura sanduíche de núcleo *honeycomb* de alumínio é composto por duas camadas finas de chapas de liga de alumínio coladas juntamente com um núcleo composto por um conjunto celular de estruturas no formato hexagonal, lembrando uma colmeia

(ALLEN, 1969).

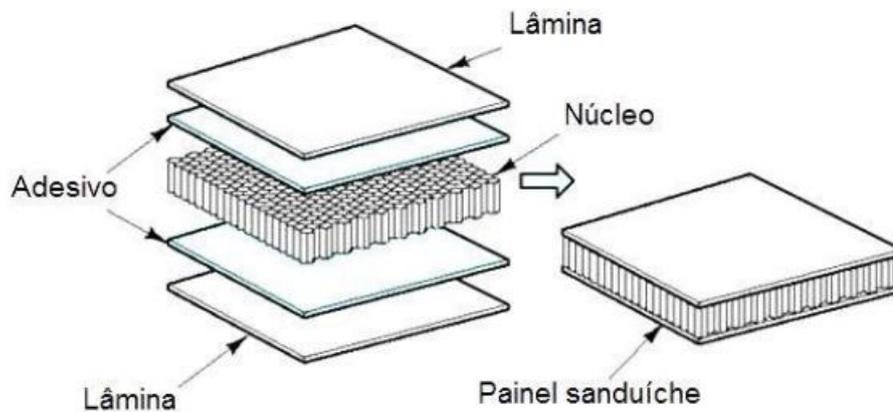


Figura 1 – Constituição de um painel sanduíche (LEITE; FREITAS; SILVA, 2004)

Uma estrutura desse tipo é excelente na absorção de energia e encontra várias aplicações de amortecimento, sendo aplicada em aviões, helicópteros, mísseis, naves espaciais, satélites, etc (COUTO, 2011).

## 2.3 Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é um método numérico utilizado para resolver certos problemas nas áreas de interesse de engenharia e matemática física, como os de análise estrutural. Estes problemas envolvem geometrias, carregamentos e propriedades de materiais. As soluções analíticas para estas questões são aquelas que resultam numa expressão matemática que contém os valores das variáveis desconhecidas em qualquer localização do corpo e são válidas para um número infinito de localizações neste corpo. Estas soluções geralmente requerem a solução de equações diferenciais parciais ou ordinárias que, para geometrias complexas e problemas não lineares, não são usualmente obtidas analiticamente. Para estes problemas complexos, é necessário procurar outros métodos numéricos para obter soluções aceitáveis, como o método dos elementos finitos, que resulta num sistema de equações algébricas simultâneas e contém os valores aproximados das variáveis desejadas apresentadas como um número de pontos discretos dentro do contínuo (LOGAN, 2012b).

## 2.4 Discretização do domínio

Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de nós ou pontos nodais. Ao conjunto de todos esses itens – elementos e nós – dá-se o nome de malha. Em função dessas subdivisões da geometria, as equações matemáticas que regem os comportamento físico não serão resolvidas de maneira exata, mas de forma

aproximada por este método numérico. A precisão do Método dos Elementos Finitos depende da quantidade de nós e elementos, do tamanho e dos tipos de elementos da malha. Ou seja, quanto menor for o tamanho e maior for o número deles em uma determinada malha, maior a precisão nos resultados da análise (LOGAN, 2012a).

## 2.5 Shell 181

O SHELL181 é um elemento de quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó, sendo translações nas direções x,y,z e rotações sobre os eixos x,y,z, e é um elemento voltado para a análise estrutural de cascas finas e moderadamente espessas, podendo ser aplicada na modelagem de camadas de construção de placas sanduíche. Sua precisão é regida pela teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem, também conhecida como Teoria de concha de Mindlin-Reissner. (ANSYS, 2017).

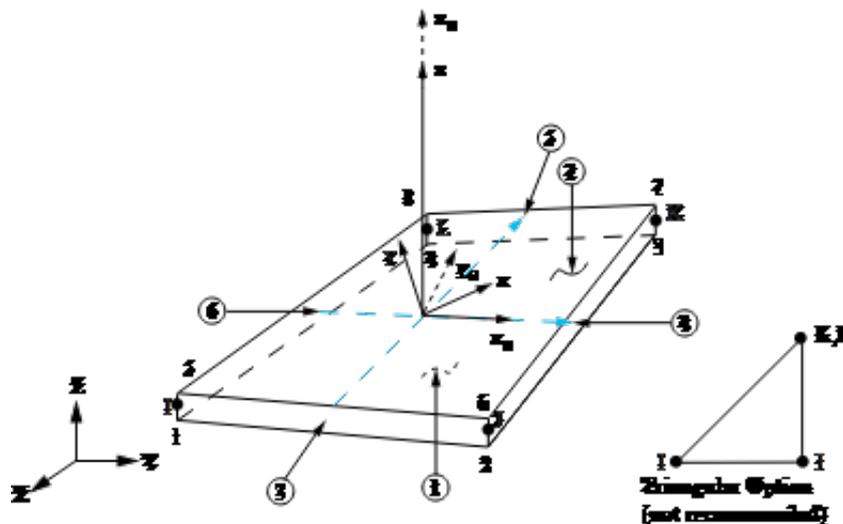


Figura 2 – Descrição dos graus de liberdade do elemento Shell 181 (ANSYS, 2017)

## 2.6 Frequência Natural

As frequências naturais podem ser definidas como as frequências nas quais um objeto tem a tendência de vibrar, caso seja excitado e deixado para vibrar por si só (CASTELLO, 2016). Um sistema vibratório com  $n$  graus de liberdade terá, em geral,  $n$  frequências naturais distintas (SHIGLEY, 1969). Como exemplo, um sistema massa-mola simples possui apenas uma frequência natural dada por (INMAN, 2014):

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

Onde:

$k$  = constante elástica da mola

$m$  = massa da mola

Sabe-se que existem dois tipos de vibração: a livre, que ocorre devido a ação de forças inerentes ao seu sistema, correspondendo com a frequência natural, e a forçada, que ocorre devido a atuação de esforços externos, obrigando o sistema a vibrar na frequência dessa excitação (VIEIRA, 2003).

Um problema de vibração excessiva pode ocorrer com o fenômeno da ressonância, que ocorre ao coincidir a frequência da vibração forçada com uma frequência natural (VIEIRA, 2003).

## 2.7 Grau de liberdade

Os graus de liberdade são parâmetros independentes que descrevem a posição e a configuração deformada de um sistema. Na maioria dos casos, ao se tentar obter uma solução aproximada de um sistema real, utiliza-se um modelo matemático com um número finito de graus de liberdade para permitir o uso de ferramentas computacionais (BOROBIA, 2012).

## 2.8 Modo normal

Um sistema conservativo possui modos normais, onde em determinadas frequências todos os pontos do sistema vibrarão na mesma frequência e em fase (UETA, 2015). O modo normal se caracteriza como um vetor que descreve o movimento relativo entre as massas ou entre os graus de liberdade de um sistema com mais de um grau de liberdade (INMAN, 2014).

## 2.9 Função de Resposta em Frequência

A função de resposta em frequência (FRF) isola as propriedades dinâmicas de uma estrutura, permitindo a obtenção de parâmetros experimentais modais como forma de modo, frequência e amortecimento a partir de um conjunto de medições de FRF (MUSSOI, 2004).

O conceito de função de resposta de frequência se baseia na resposta em regime estacionário que sairá de um sistema quando submetido à uma excitação senoidal. A resposta terá a mesma frequência e amplitude do sinal de entrada com diferença apenas na fase (SEK, 2016).

O sinal de entrada  $F(\omega)$  é relacionado com o sinal de saída  $X(\omega)$  por meio de uma transformada de Fourier no domínio da frequência (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999), obtida ao dividir a resposta do sistema pela entrada, comumente representada por  $H(\omega)$

([SOEIRO, 2001](#)) e por um número complexo, podendo ser representada na forma polar ([MUSSOI, 2004](#)).

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (2.2)$$

Esse tipo de abordagem permite uma maior facilidade em obter as respostas em frequência de um sistema. Vale salientar que, ao analisar o sistema no domínio da frequência, não significa que o sistema está sujeito a entradas senoidais ([LOURENÇO, 2004](#)).

## 2.10 Análise Modal

A análise modal é um método de solução de problemas de oscilações que encontra os valores da frequência dos  $n$  modos normais de vibração baseado em um desacoplamento de termos de coordenadas normalizadas  $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ , cujo passo a passo pode ser visto abaixo ([ROQUE, 2015](#)):

1) Calcular os autovalores e autovetores para resolver o problema de vibração sem amortecimento, identificando assim as frequências naturais e os correspondentes modos de vibração

2) Uso dos autovetores para desacoplar ou diagonalizar o conjunto original de equações acopladas, permitindo a resolução dos  $n$  sistemas desacoplados com um grau de liberdade.

3) Cálculo da contribuição de cada um dos modos para a resposta global. Isto também permite que se reduza o tamanho do problema, eliminando modos que não podem ser excitados e/ou modos que não têm respostas no grau de liberdade em questão. Além disso, os modos de altas frequências que têm pequena contribuição para o sistema em frequências mais baixas podem ser eliminados ou apenas considerados de forma aproximada, reduzindo-se ainda mais o tamanho do sistema a ser analisado.

4) Montagem da equação matricial do sistema, A. Montagem das matrizes de entrada e saída, B e C, usando-se autovetores adequados.

## 2.11 Média

No presente trabalho, utiliza-se a média aritmética, que pode ser definida como a simples soma de todos os valores dividida pelo número total de elementos do conjunto ([NETO, 2001](#)).

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.3)$$

## 2.12 Variância e desvio padrão

A variância é a medida da dispersão estatística de um processo estocástico e representa a distância que os seus valores se encontram do valor desejado. É definida como a soma dos quadrados dos desvios padrões dividido por  $N - 1$  (NETO, 2001).

$$\sigma^2 = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.4)$$

Desvio padrão pode ser definido como a medida do espalhamento dos valores dos elementos em torno de uma média (NETO, 2001).

$$\sigma = x_i - \bar{x} \quad (2.5)$$

## 2.13 Normalização da função de densidade de probabilidade

Normalização é um processo pelo qual a função de densidade de probabilidade (FDP) é modelada para que a área sob a sua curva tenha valor unitário (GERALDO, 2015)

## 2.14 Distribuição Gama

Em teoria das probabilidades e estatística, a distribuição gama é uma família de distribuições contínuas de probabilidade de dois parâmetros, o fator de forma  $\alpha$  e fator de escala  $\beta$ , esses são definidos pelas equações:

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (2.6)$$

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\mu} \quad (2.7)$$

Essa distribuição é a mais adequada para modelagem de sistemas que não admitem valores negativos (SAMPAIO; LIMA, 2012).

## 2.15 Distribuição de probabilidade

A função distribuição de probabilidade associa probabilidades a eventos e pode ser classificada em discreta ou contínua. No primeiro caso, a função é definida para um conjunto discreto e contável, enquanto no segundo caso, a distribuição possui uma função definida para um conjunto contínuo. Essa probabilidade  $F(a) = P(X \leq a)$  é obtida por meio de uma integral que cobre a área sob o gráfico da variável descrito pela sua função de densidade de probabilidade  $f(x)$  (RENTERIA, 2006).

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx \quad (2.8)$$

A função de densidade de probabilidade possui as seguintes propriedades (CASTELLO, 2016):

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Para o caso de uma variável aleatória com distribuição gama, a função de densidade e probabilidade é dada por (SAMPAIO; LIMA, 2012):

$$f(X) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.9)$$

## 2.16 Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo pode ser descrito como um método estatístico, no qual se utiliza uma sequência de números aleatórios para a realização de uma simulação (YORRYAZ, 2009), visando uma melhor aproximação do resultado de um problema estocástico de um sistema real (CASTELLO, 2016).

Sendo assim, *MMC* é utilizado para solucionar um fenômeno físico por meio de simulações matemáticas (YORRYAZ, 2009), tornando desnecessário o uso das equações diferenciais que governam o comportamento deste mesmo fenômeno (NASSER, 2012). Essas simulações, ao contrário de um experimento “real”, podem ter seus parâmetros facilmente alterados e, ainda assim, gerar resultados realistas (YORRYAZ, 2009).

Os números aleatórios utilizados neste método são formalmente chamados de “pseudoaleatórios” pois são gerados baseados em algoritmos matemáticos que procuram simular a aleatoriedade encontrada na natureza (SOBOL, 1994).

O *MMC* é iniciado com a criação de um modelo determinístico que representa o sistema real de interesse (YORRYAZ, 2009) para depois realizar uma simulação das respostas do problema utilizando uma amostragem pseudoaleatória das funções de densidade de probabilidade previamente definidas, estimando assim a solução que define o fenômeno físico (SOBOL, 1994).

Cada geração de novos valores corresponde a um evento ou cenário provável de ocorrer, que é guardado em uma distribuição de probabilidade. A disposição desses eventos em uma distribuição possibilita a avaliação da probabilidade de ocorrência de cada evento,

através de medidas de estatística descritiva, como a média e o desvio padrão (NETO; MOURA; FORTE, 2002).

# 3 Metodologia

## 3.1 Método experimental

### 3.1.1 Passo 1 - Dados de entrada

Para o primeiro passo, é necessário a coleta dos dados de entrada para efetuar os devidos cálculos de frequência natural e, para tal, foi utilizada a FRF fornecida por (DOMINGUES, 2017) e obtida pela excitação no ponto C4. Seu trabalho se dá em uma análise modal experimental com vários painéis e, de todos eles, foi escolhido o painel mais fino cujas propriedades são:

- Espessura ( $Th$ ) = 10 mm;
- Comprimento ( $L$ ) = 670 mm;
- Largura ( $W$ ) = 300 mm;
- Modelo *HoneyComb* = HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,001P (10P) – 9,4 mm – (MIL-C-7438G ou AMS -C-7438);
- Material das faces = Al 2024 T3 NON CLAD (AMS QQA 250/4 e AMS 4037) – 0,3 mm;

O painel selecionado foi dividido em várias partes, totalizando 136 pontos conforme pode ser visto na figura 3:

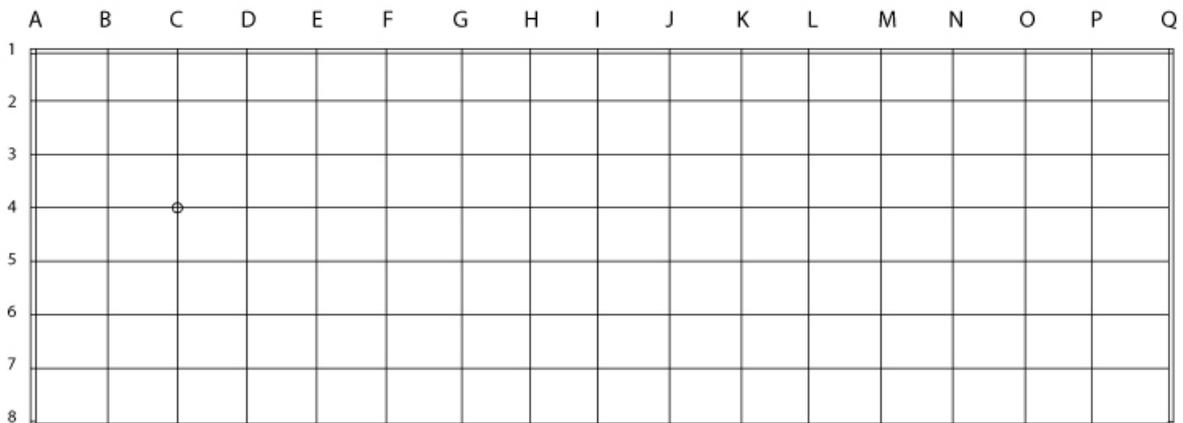


Figura 3 – Representação grid de medição e pontos de excitação (círculos) para o painel de 10 mm de espessura (DOMINGUES, 2017).

Para o cálculo da frequência, utilizou-se a ferramenta *toolbox EasyMod* (KOU-ROUSSIS et al., 2012). A figura 4, encontra-se o esquemático referente ao passo 1 para

uma melhor compreensão.

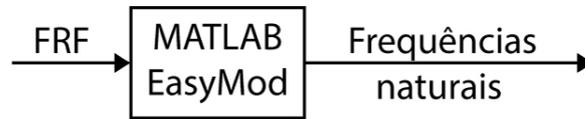


Figura 4 – Representação esquemática do passo 1 - autoria própria

### 3.1.2 Passo 2 - Modificação da FRF

Com o intuito de analisar a incerteza de método associada ao uso do *toolbox EasyMod*, a ferramenta foi modificada de modo que o usuário possa escolher uma quantidade N de pontos que serão utilizados nos cálculos, como representado na figura 5, onde a quantidade de pontos selecionados foi de 50.

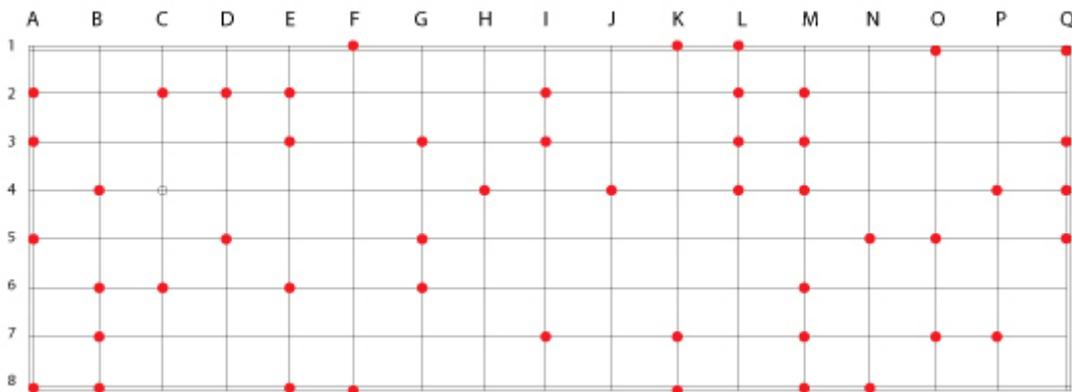


Figura 5 – Representação de um exemplo com 50 pontos selecionados

Após o usuário fornecer a quantidade N de pontos, o **MATLAB**<sup>®</sup> modificará a FRF, zerando todos os 136-N pontos não selecionados pelo usuário e o *EasyMod* calculará a frequência natural da placa com a nova FRF, permitindo que uma comparação entre os resultados obtidos antes e depois de a seleção dos N pontos seja realizada, a fim de verificar o impacto que isso acarreta no cálculo das frequências.

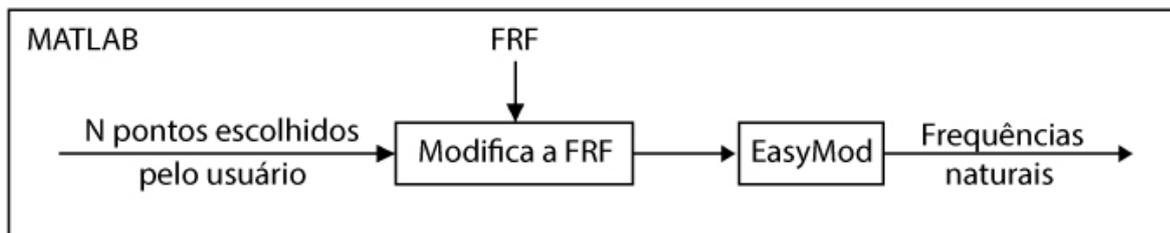


Figura 6 – Representação esquemática do passo 2 - autoria própria

### 3.1.3 Passo 3 - Randomizar a seleção de pontos da FRF

Para que essa seleção de  $N$  pontos seja possível e aleatória, o programa utiliza o comando *randn* no **MATLAB**<sup>®</sup> e, sabendo que o painel possui 136 pontos, o programa seleciona  $(136 - N)$  pontos aleatoriamente, atribui o valor de 0 a cada um desses pontos e salva uma nova FRF. Desse modo, a ferramenta *toolbox EasyMod* executa normalmente com a nova FRF.

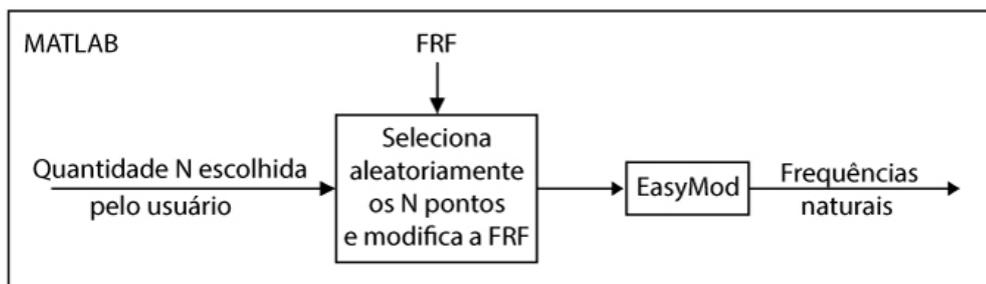


Figura 7 – Representação esquemática do passo 3 - autoria própria

### 3.1.4 Passo 4 - Aplicação da Rotina de Monte Carlo

Foi aplicada a rotina de Monte Carlo na ferramenta, de modo a calcular as frequências para uma quantidade  $X$  de amostras determinada pelo usuário, visando gerar uma média e desvio padrão das frequências, aumentando assim a confiabilidade da comparação final.



Figura 8 – Representação esquemática do passo 4 - autoria própria

## 3.2 Método numérico

### 3.2.1 Passo 1 - Criação do modelo em ambiente APDL

O primeiro passo é a construção da placa *honeycomb* em um arquivo de texto para a aplicação no *software APDL*. É importante a construção de um modelo confiável e, para isso, é necessário que os dados de entrada como as propriedades do material e a geometria da peça sejam correspondentes ao objeto de estudo. O painel *honeycomb* escolhido possui as seguintes dimensões:

- Densidade da Lâmina ( $\rho_L$ ) = 2780 kg/m<sup>3</sup>
- Densidade do Núcleo ( $\rho_N$ ) = 77,64 kg/m<sup>3</sup>
- Módulo de Elasticidade da Lâmina ( $E$ ) = 70 GPa
- Espessura da Lâmina ( $Th_L$ ) = 9,4 mm;
- Espessura do Núcleo ( $Th_N$ ) = 0,3 mm;
- Comprimento ( $L$ ) = 670 mm;
- Largura ( $W$ ) = 300 mm;

O elemento utilizado foi o *SHELL181*, por conta da qualidade satisfatória dos seus resultados e do seu baixo custo computacional, principalmente quando comparados com elementos *solid*. Para facilitar a construção, o núcleo do painel utilizado na simulação numérica é maciço e homogeneizado, porém, foi utilizada a densidade do núcleo do painel real, que foi medida no laboratório com base na divisão da massa pelo volume. Vale especificar que o módulo de elasticidade do núcleo não foi variado e possui um valor fixo de ???AQUI??? ARRUMAR AQUI pois seu material é ortotrópico, o que eleva o grau de dificuldade na análise de incerteza, visto que seria preciso variar seu módulo de elasticidade nas três dimensões.

Portanto, com essas informações, a placa foi feita em arquivo texto e inserida no **APDL** para gerar as frequências naturais.

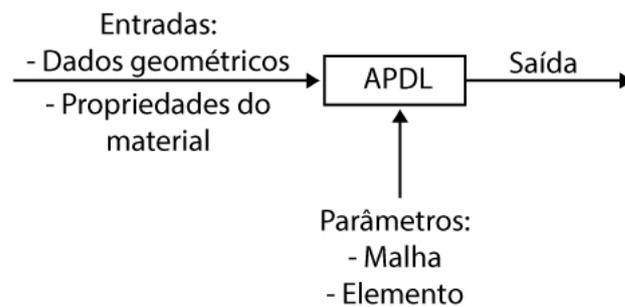


Figura 9 – Representação do esquemática passo 1 - autoria própria

### 3.2.2 Passo 2 - Interface MATLAB-APDL

Esse passo se constituiu na criação da interface entre o **APDL** e o **MATLAB**<sup>®</sup>. Nesse caso, o **MATLAB**<sup>®</sup> envia as informações do arquivo texto gerado previamente para o **APDL** sem a abertura efetiva desse, de modo que seja executado em segundo plano. Os dados do arquivo texto são processados pelo **Ansys** e os resultados são retornados para o **MATLAB**<sup>®</sup>, que os salva em outros arquivos de texto.

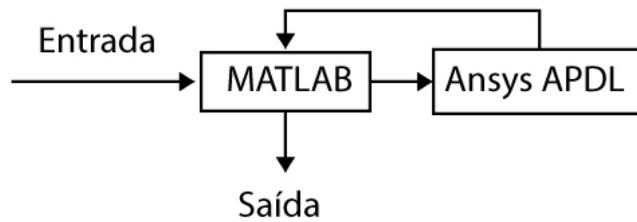


Figura 10 – Representação do esquemática passo 2 - autoria própria

### 3.2.3 Passo 3 - Alterações dos valores de entrada

Para a criação de um modelo probabilístico, é necessária a alteração dos valores de entrada e, para tal, foi criado um programa que lê o arquivo base que possui a placa, armazena suas linhas, seleciona o valor escolhido para alteração e o substitui por um valor aleatório descrito por uma função de probabilidade gama e reescreve o arquivo de texto com esse valor novo.

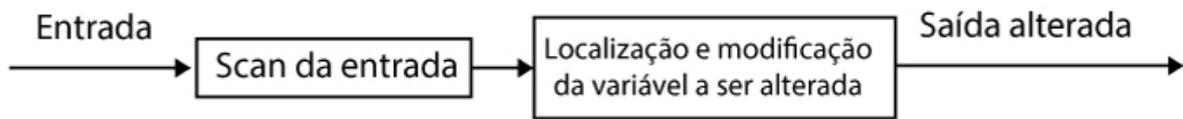


Figura 11 – Representação esquemática do passo 3 - autoria própria

### 3.2.4 Passo 4 - Refinamento dos dados obtidos

Os arquivos de saída do APDL possuem um template próprio, esse possui muitas informações não necessárias para a execução desse trabalho, além disso, é impossível a execução de um tratamento estatístico com o arquivo puro. Tendo em vista esse problema, um tratamento baseado na comparação lógica foi aplicado para a captura dos resultados obtidos em cada simulação.



Figura 12 – Representação esquemática do passo 4 - autoria própria

### 3.2.5 Passo 5 - Tratamento estatístico dos resultados obtidos

A partir dos resultados obtidos após o processamento, foi efetuado um tratamento estatístico obtendo a média, erro relativo e histograma das frequências.



## 4 Resultados e discussão

Os resultados apresentados aqui possuem apenas 2 algarismos significativos. No entanto, os cálculos foram efetuados no **MATLAB**<sup>®</sup>, de modo que todos os algarismos foram considerados.

### 4.1 Modelo experimental

Com uma excitação no ponto C4, uma tolerância no amortecimento e na frequência de 1%, a ferramenta *toolbox EasyMod* foi utilizada para a placa:

- Espessura ( $Th$ ) = 10 mm;
- Comprimento ( $L$ ) = 670 mm;
- Largura ( $W$ ) = 300 mm;
- Modelo *HoneyComb* = HexWeb CRIII – Al 5056 – 1/4” – 0,001P (10P) – 9,4 mm - (MIL-C-7438G ou AMS -C-7438);
- Material das faces = Al 2024 T3 NON CLAD (AMS QQA 250/4 e AMS 4037) – 0,3 mm;

Foram utilizadas 100 amostras para todas as simulações. Na tabela 1, encontram-se as médias dos seis primeiros modos das frequências naturais da placa ao considerar os casos de 136, 120, 100, 50 e 30 pontos. O caso de 136 pontos é o caso completo, onde não há omissão de algum ponto da placa.

Tabela 1 – Média das frequências naturais

Modos	Frequência (Hz)				
	136 pontos	120 pontos	100 pontos	50 pontos	30 pontos
1	159,30	159,29	159,29	159,28	159,27
2	201,28	201,29	201,30	201,28	201,29
3	432,23	432,59	432,69	432,50	432,44
4	727,47	727,16	722,61	701,46	684,99
5	759,21	759,06	758,42	757,57	753,36
6	851,60	851,91	850,05	844,42	841,13

A diferença entre as frequências naturais do caso completo e dos outros casos foram baixas para os 3 primeiros modos. A diferença só se tornou notável a partir do quarto modo. Nos quintos e sextos modos, as diferenças foram menores que o quarto modo e essas diferenças ocorrem pois, ao selecionar menos pontos, novas frequências naturais surgem,

dependendo dos pontos escolhidos. Na tabela 2 é possível ver o desvio padrão para cada caso e para cada modo.

Tabela 2 – Comparação de desvio padrão para cada caso

Modos	Desvio Padrão (Hz)			
	120 pontos	100 pontos	50 pontos	30 pontos
1	0,021	0,032	0,051	0,061
2	0,058	0,10	0,19	0,21
3	0,83	1,02	1,37	1,48
4	0,80	31,88	80,58	100,20
5	0,69	4,56	16,75	31,60
6	0,86	13,25	38,25	50,360

No quarto modo, o desvio padrão aumenta conforme menos pontos são selecionados, comprovando que estão surgindo novas frequências. Para o caso de 100 pontos, do total de 100 amostras, 5 tiveram novas frequências, nos quais podem ser visualizadas nas tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Amostras com novas frequências ao selecionar 100 pontos

Modos	Amostra nº 46		Amostra nº 51		Amostra nº 57	
	F (Hz)	Erro (%)	F (Hz)	Erro (%)	F (Hz)	Erro (%)
1	159,27	0,013	159,28	0,009	159,30	0,0052
2	201,17	0,052	201,47	0,096	201,08	0,099
3	432,70	0,10	347,49	19,60	431,68	0,12
4	435,60	40,12	429,80	40,91	602,59	17,16
5	728,16	4,09	725,59	4,42	726,14	4,35
6	758,94	10,88	758,98	10,87	759,22	10,84

Tabela 4 – Amostras com novas frequências para o caso de 100 pontos

Modos	Amostra nº 82		Amostra nº 85	
	F (Hz)	Erro (%)	F (Hz)	Erro (%)
1	159,31	0,0065	159,31	0,012
2	201,11	0,086	201,20	0,038
3	370,37	14,31	432,56	0,075
4	432,80	40,50	593,99	18,34
5	725,62	4,42	725,12	4,49
6	759,53	10,81	759,44	10,82

Portanto, não há como prever quais novas frequências irão surgir, pois a seleção de pontos é aleatória. Na tabela 5, é fornecida a número de amostras que tiveram o surgimento de novas frequências para cada caso. Portanto, nota-se que quanto menos pontos selecionados, maior é a quantidade de amostras com novas frequências.

Tabela 5 – Quantidade de amostras com novas frequências para cada caso

<b>120 pontos</b>	<b>100 pontos</b>	<b>50 pontos</b>	<b>30 pontos</b>
0	5	10	16

Na tabela 6, encontra-se o erro percentual de cada caso em relação ao caso completo.

Tabela 6 – Comparação dos erros percentuais das simulações

<b>Modos</b>	<b>Erro (%)</b>			
	120 pontos	100 pontos	50 pontos	30 pontos
1	0,0019	0,0038	0,0099	0,014
2	0,0063	0,010	0,0017	0,0065
3	0,083	0,23	0,0628	0,048
4	0,042	1,65	3,57	5,83
5	0,019	0,23	0,21	0,77
6	0,036	0,50	0,84	1,22

Pode-se afirmar que, quanto menor a quantidade de pontos da placa selecionados, maior é o erro no cálculo das frequências naturais.

## 4.2 Modelo numérico

Para o caso das simulações numéricas, foram escolhidos os dados de entrada de densidade das lâminas e do núcleo, módulo de elasticidade e espessuras das lâminas e do núcleo. Afim de analisar o impacto de cada entrada nas frequências naturais, foram efetuadas as seguintes simulações:

- Densidade do Núcleo;
- Densidade da Lâmina;
- Densidade da Lâmina+Densidade do Núcleo;
- Espessura da Lâmina;
- Espessura da Lâmina + Espessura do Núcleo;
- Módulo de Elasticidade da Lâmina;
- Variando tudo.

Nos resultados são apresentados o histograma dos parâmetros de entrada e de dois modos de vibração, os demais modos se encontram no anexo. São apresentados as análises estatísticas e os desvios padrão dos dois primeiros modos de vibração foram considerados pequenos ao serem inferiores a  $1Hz$ .

## 4.2.1 Valor nominal

Realizada a simulação com os valores nominais, obtêm-se os seguintes valores para as frequências naturais:

Tabela 7 – Valores nominais de frequências naturais

Modos	Valor nominal ( $Hz$ )
1	159,56
2	204,88
3	427,13
4	438,79
5	728,79
6	767,01
7	845,70

Esses valores serão considerados os valores nominais, que serão utilizados como parâmetros para a comparação com as simulações realizadas nesse trabalho.

## 4.2.2 Variação da densidade do Núcleo

O núcleo do painel *honeycomb* é composto de alumínio 5056 e a densidade desse foi estimada com base no seu peso e volume ocupado. Aplicando um desvio padrão de 10% do valor médio da densidade à distribuição gama, obteve-se o intervalo de  $77,64 \pm 2,00 \text{ kg/m}^3$ , conforme apresentado na figura 13.

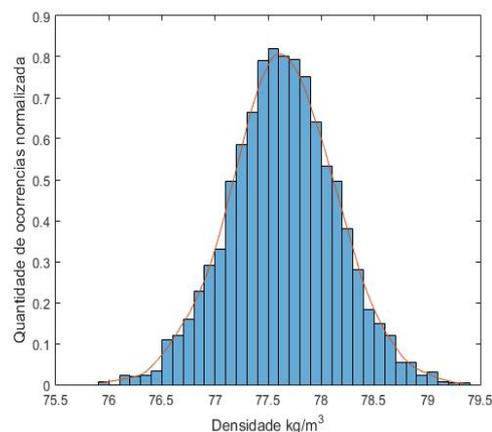


Figura 13 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do Núcleo da placa

Por meio do histograma representado na figura 13, a curva que descreve a variação da densidade do núcleo é semelhante a uma curva de uma distribuição normal, porém, essa se trata de uma distribuição gama e, como pode ser visto, os resultados não apresentam

valores negativos. Também é possível notar que algumas barras se encontram acima da curva de função de densidade de probabilidade (FDP), isso se dá por conta da quantidade de amostras analisadas. Como saída, foram obtidas as seguintes primeiras frequências naturais:

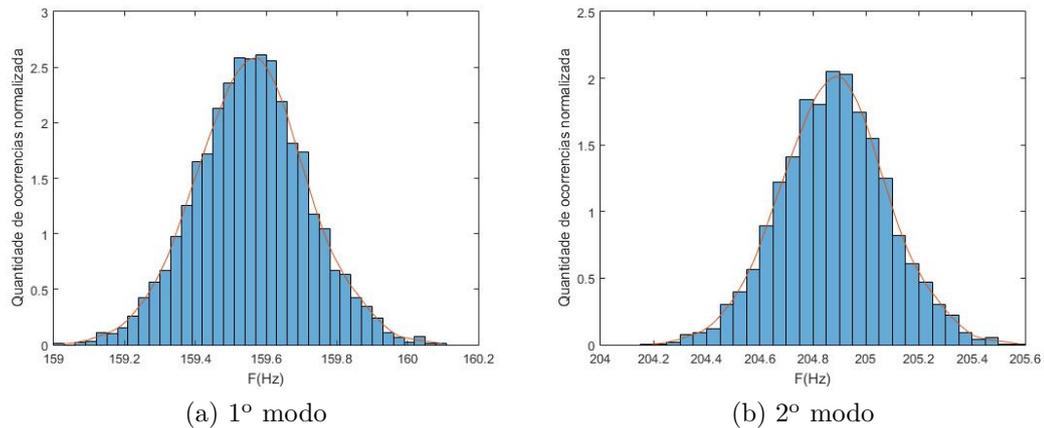


Figura 14 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 8 – Valores médio e desvio padrão para a simulação da variação da densidade do núcleo

<b>Modos</b>	<b>Valor médio (Hz)</b>	<b>Desvio Padrão (Hz)</b>
1	159,56	0,16
2	204,88	0,20
3	427,13	0,42
4	438,78	0,43
5	728,79	0,71
6	767,01	0,75
7	845,70	0,83

Conforme visto na figura 14 e na tabela 8, os valores médios para a primeira e a segunda frequência natural permanecem iguais aos valores nominais. O desvio padrão para cada simulação apresentou um baixo valor e crescente, apresentando um intervalo entre  $0,16Hz$  e  $0,83Hz$  e, por fim, a função de densidade de probabilidade (FDP) assemelha-se a uma curva normal, porém, como citado anteriormente, foi utilizada uma distribuição gama.

Tabela 9 – Dados das maiores e menores frequências e erro percentual obtidos para a variação do Núcleo da placa

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	159,02	160,10	0,033
2	204,20	205,58	0,069
3	425,70	428,58	0,070
4	437,31	440,27	0,11
5	726,36	731,26	0,12
6	764,46	769,62	0,13
7	842,88	848,57	0,14

Analisando pela tabela 9, o impacto nos valores das frequências mínima e máxima foi pouco, mesmo com uma variação de  $2,00 \text{ kg/m}^3$  nos valores da densidade do núcleo. O erro percentual foi progressista, aumentando da menor para a maior frequência, partindo de um valor de 0,033% e atingindo um valor máximo de 0,14%.

### 4.2.3 Variação da densidade das Lâminas

A lâmina do painel *honeycomb* é composta de liga de alumínio, sendo assim seu valor é amplamente conhecido e tabelado e, assim como no caso da densidade do núcleo, essa densidade foi modelada ao aplicar um desvio padrão de 10% do valor médio da densidade à distribuição gama. Com isso, obteve-se o intervalo de  $2780 \pm 80 \text{ kg/m}^3$ , conforme apresentado na figura 15

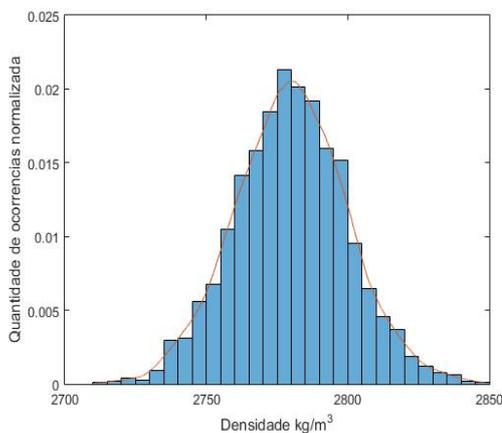


Figura 15 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do Núcleo da placa

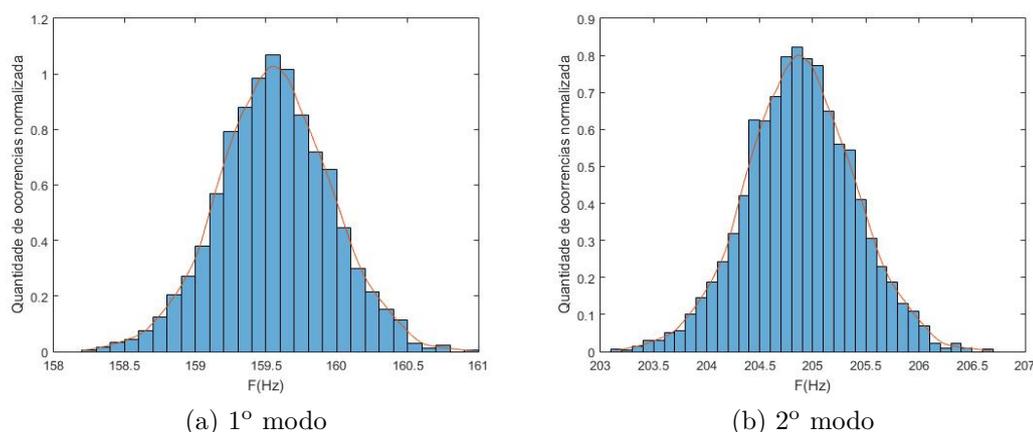


Figura 16 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 10 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação da densidade das lâminas

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,56	0,39
2	204,88	0,50
3	427,13	1,06
4	438,78	1,09
5	728,80	1,81
6	767,02	1,90
7	845,71	2,10

Conforme visto na figura 16 e na tabela 10, os valores médios para a primeira e a segunda frequência natural permanecem iguais aos valores nominais. O desvio padrão para cada simulação apresentou um baixo valor e crescente, com um intervalo entre  $0,39Hz$  e  $2,10Hz$ , sendo maior que o intervalo de desvio padrão do caso da variação da densidade do núcleo. A função de densidade de probabilidade (FDP) assemelha-se a uma curva normal, porém, como citado anteriormente, foi utilizada uma distribuição gama.

Como pode ser observado pela tabela 11, a variação da densidade da lâmina já apresenta um impacto maior nas frequências naturais e, assim como a densidade do núcleo, a evolução do erro é progressista, variando de um valor mínimo de  $0,085\%$  para a primeira frequência para  $0,37\%$  para a última frequência natural.

Tabela 11 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação da densidade das Lâminas

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	158,20	160,96	0,085
2	203,14	206,68	0,17
3	423,50	430,88	0,18
4	435,05	442,63	0,30
5	722,60	735,20	0,32
6	760,49	773,76	0,35
7	838,51	853,14	0,37

#### 4.2.4 Variação das duas densidades

A seguinte simulação teve como objetivo a análise do impacto da variação das duas densidades aplicadas simultaneamente, associando um desvio padrão de 10% do valor médio das densidades para a distribuição gama, cujo intervalo é o mesmo apresentado anteriormente,  $77,64 \pm 2,00 \text{ kg/m}^3$  e  $2780 \pm 80 \text{ kg/m}^3$ .

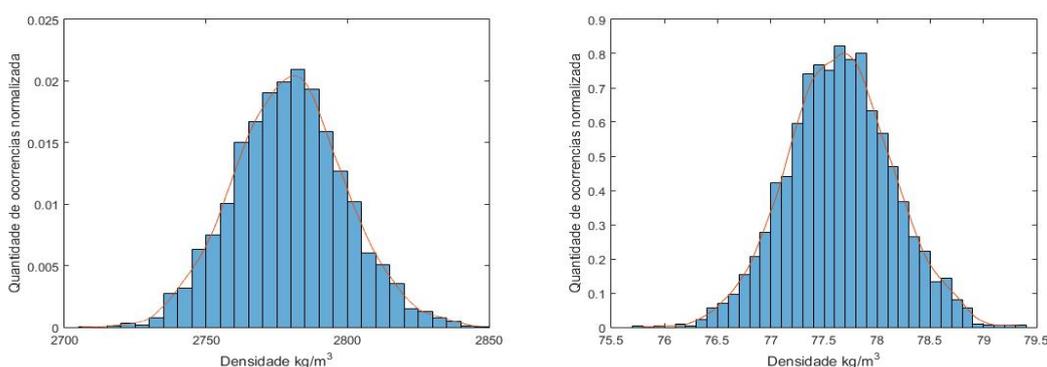


Figura 17 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade da Lâmina da placa e do núcleo

Ao variar as duas densidades, o impacto nas frequências naturais foi maior do que os casos de densidade apresentados anteriormente. Nota-se que o erro percentual sofreu um rápido aumento onde, no segundo modo, o erro foi de 0,20% enquanto o erro percentual no caso da densidade da lâmina necessitou de 3 modos para atingir um valor próximo.

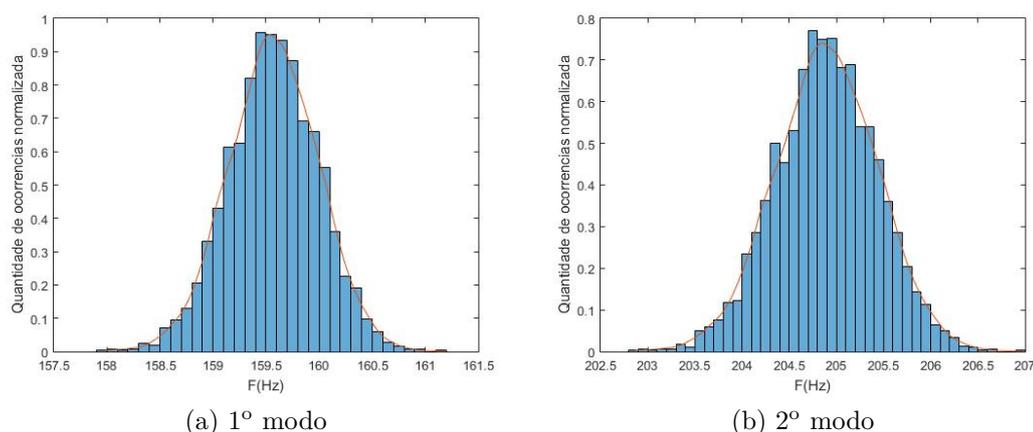


Figura 18 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 12 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das duas densidades

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,56	0,42
2	204,89	0,54
3	427,15	1,12
4	438,80	1,16
5	728,83	1,92
6	767,06	2,02
7	845,75	2,23

Conforme visto na figura 18 e na tabela 12, o valores médio permanece constante para o primeiro modo e apresenta um valor diferente para o segundo modo. O desvio padrão para cada simulação apresentou um baixo valor e crescente, com um intervalo entre  $0,42Hz$  e  $2,23Hz$ , sendo que a variação combinada gera um desvio padrão maior do que as variações individuais. Por fim, a função de densidade de probabilidade (FDP) se assemelha um pouco a uma curva normal por não ser simétrica, porém, como citado anteriormente, foi utilizada uma distribuição gama.

Tabela 13 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das duas densidades

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	157,99	161,18	0,099
2	202,86	206,97	0,20
3	422,93	431,49	0,21
4	434,47	443,25	0,35
5	721,63	736,23	0,37
6	759,48	774,85	0,40
7	837,40	854,34	0,42

## 4.2.5 Variação das Espessuras da Lâminas

A placa *honeycomb* é composta por duas lâminas de alumínio e essas foram variadas de maneira simultânea a fim de analisar o impacto da espessura das lâminas nas frequências naturais. Ao adotar um desvio padrão de 10% do valor médio da espessura para a distribuição gama, obteve-se o intervalo de  $0,3 \pm 0,04$  mm.

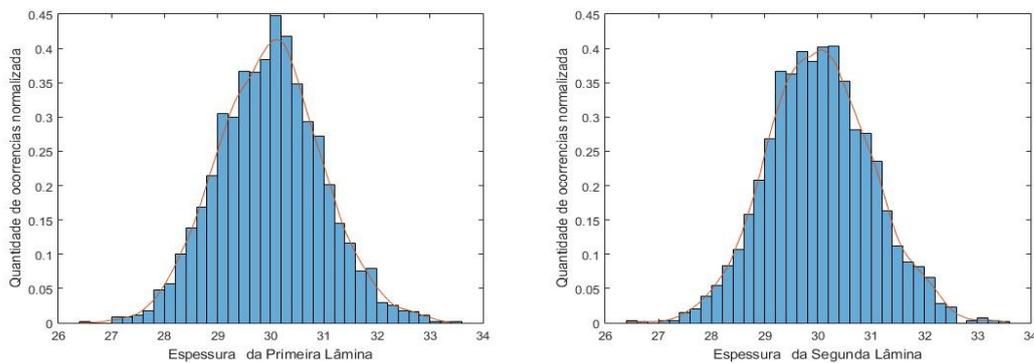


Figura 19 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa

Diferente dos casos analisados anteriormente, seu erro percentual é progressivo somente a partir do terceiro modo de vibração, pois no intervalo entre o segundo e terceiro modos de vibração, ocorre uma particularidade não vista anteriormente, o valor do erro percentual diminui de 0,26 % para 0,25 %

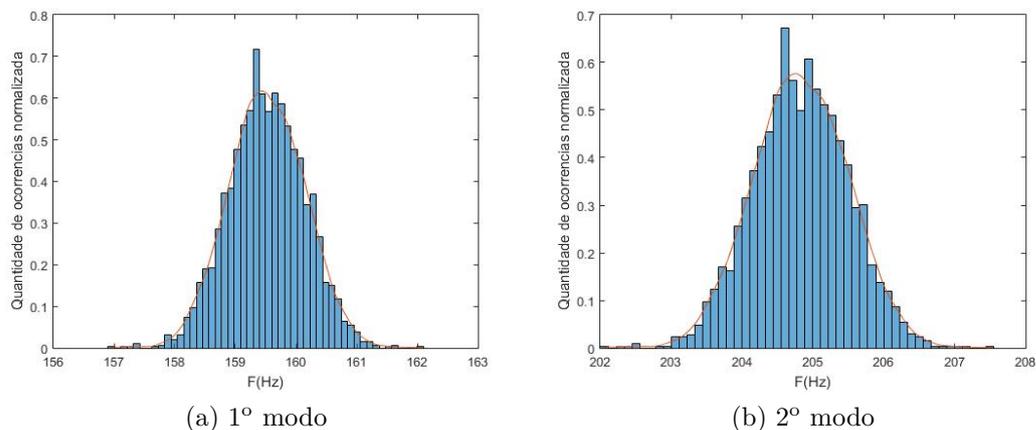


Figura 20 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 14 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das espessuras da lâmina

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,51	0,62
2	204,82	0,66
3	427,01	1,33
4	438,66	1,27
5	728,60	1,70
6	766,81	2,16
7	845,49	2,34

Conforme visto na figura 20 e na tabela 14, nenhum dos valores médios para as frequências naturais permaneceram iguais aos valores nominais. O desvio padrão para cada simulação apresentou um baixo valor e crescente, com um intervalo entre  $0,62Hz$  e  $2,34Hz$ . A função de densidade de probabilidade (FDP) se assemelha a uma curva normal, porém, houve um pico, distorcendo assim a FDP.

Tabela 15 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das espessuras das Lâminas

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	156,93	162,08	0,13
2	202,04	207,54	0,26
3	421,40	432,43	0,25
4	433,32	443,79	0,34
5	721,32	735,35	0,43
6	757,62	775,42	0,46
7	835,65	854,92	0,53

#### 4.2.6 Variação das duas Espessuras

Após análise do impacto de cada espessura individual, foi feita uma análise do impacto das duas espessuras ao variá-las simultaneamente, sendo que essas apresentam o mesmo intervalo de variação obtido anteriormente,  $0,3\pm 0,04$  mm e  $9,4\pm 0,4$  mm, ao considerar um desvio padrão de 10% do valor médio.

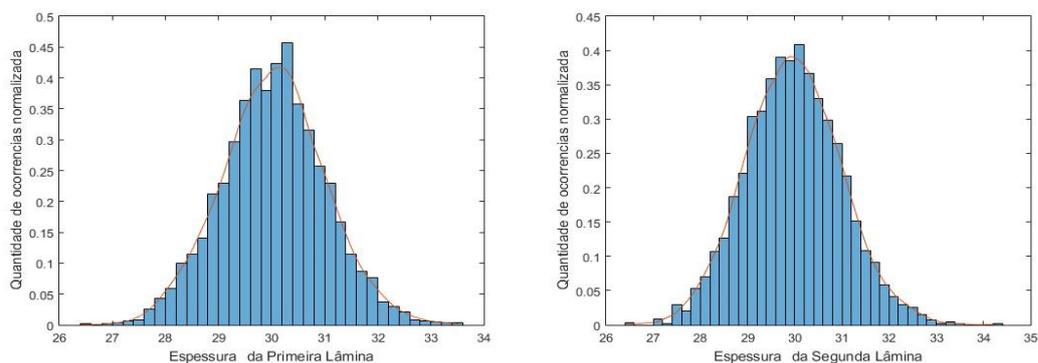


Figura 21 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa

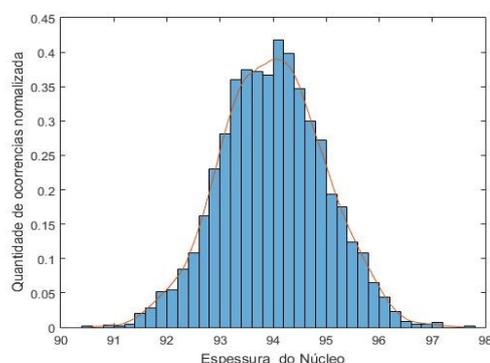


Figura 22 – Histograma para os valores de entrada da variação de espessura do Núcleo da placa

Quando as espessuras das lâminas e do núcleo variam simultaneamente, nota-se que o impacto dessa entrada nas frequências naturais é muito grande, pois o seu menor erro, 0,34% é equivalente ao quarto maior erro da lâmina variando sozinha. Entre a segunda e a terceira frequência natural, o valor do erro permanece constante e, em seguida, aumenta até o valor máximo de 1,30%.

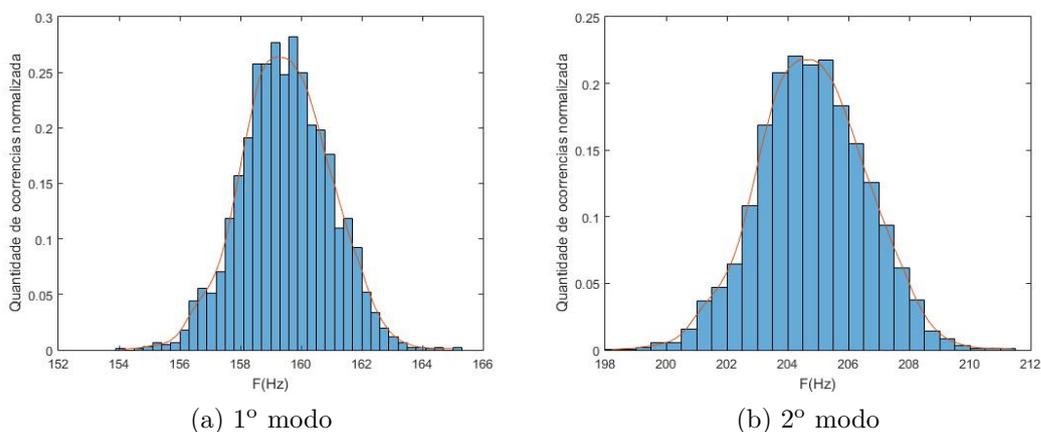


Figura 23 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 16 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação das duas espessuras

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,49	1,45
2	204,80	1,76
3	426,97	3,62
4	438,62	3,64
5	728,53	5,74
6	766,73	6,30
7	845,40	6,92

Conforme visto na figura 23 e na tabela 16, a variação nos valores médios da saída foram maiores em relação aos valores nominais. O desvio padrão apresentou um maior valor quando comparado com os casos apresentados anteriormente, variando de  $1,45Hz$  a  $6,92Hz$ . A FDP assemelha-se a uma curva normal, embora seja de distribuição gama.

Tabela 17 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação das duas espessuras

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	154,09	165,01	0,31
2	198,21	211,37	0,64
3	413,36	440,43	0,64
4	424,91	452,07	0,98
5	706,83	749,29	1,10
6	742,97	789,88	1,21
7	819,35	870,85	1,30

#### 4.2.7 Variação do módulo de elasticidade

Para a variação do módulo de elasticidade, o desvio padrão de 10% do valor médio foi aplicado a distribuição gama, traduzindo-se em uma variação de  $70 \pm 1 GPa$ .

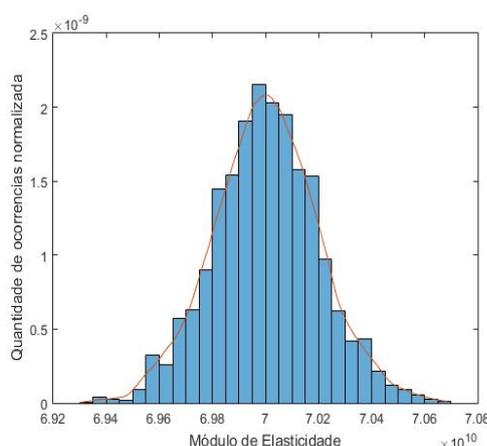


Figura 24 – Histograma para os valores de entrada da variação do módulo de elasticidade da placa

O módulo de elasticidade apresentou um baixo impacto nas frequências naturais, uma vez que seu erro assume um erro máximo de 0,18% e, novamente, os valores do erro percentual do segundo e terceiro modos de vibração apresentaram um mesmo valor, no caso, de 0,092% .

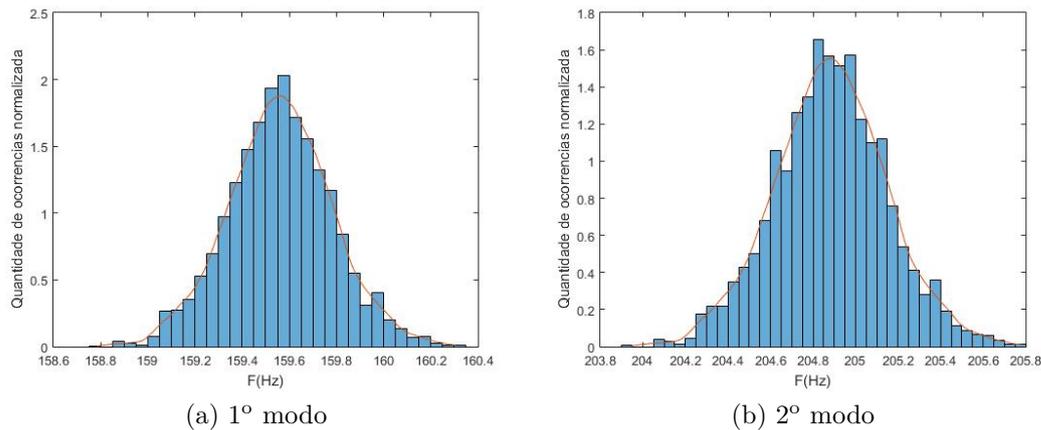


Figura 25 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 18 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação do módulo de elasticidade

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,56	0,22
2	204,88	0,26
3	427,13	0,54
4	438,78	0,55
5	728,80	0,86
6	767,03	0,95
7	845,71	1,04

Conforme visto na figura 25 e na tabela 18, os valores médios para a primeira e a segunda frequência natural permanecem iguais aos valores nominais. O desvio padrão para cada simulação apresentou um baixo valor e crescente, com um intervalo entre 0,22Hz e 1,04Hz, sendo o caso com o 2º menor desvio padrão, pois o menor é o do caso da densidade do núcleo. A função de densidade de probabilidade (FDP) assemelha-se a uma curva normal.

Tabela 19 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para a variação do módulo de elasticidade

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	158,78	160,31	0,044
2	203,94	205,79	0,092
3	425,20	429,01	0,092
4	436,84	440,66	0,14
5	725,74	731,75	0,16
6	763,65	770,29	0,17
7	842,01	849,29	0,18

#### 4.2.8 Variação de todos os parâmetros

Por fim, para a última simulação, reuniu-se todas as variações efetuadas anteriormente em uma única simulação, afim de avaliar um impacto mais realista.

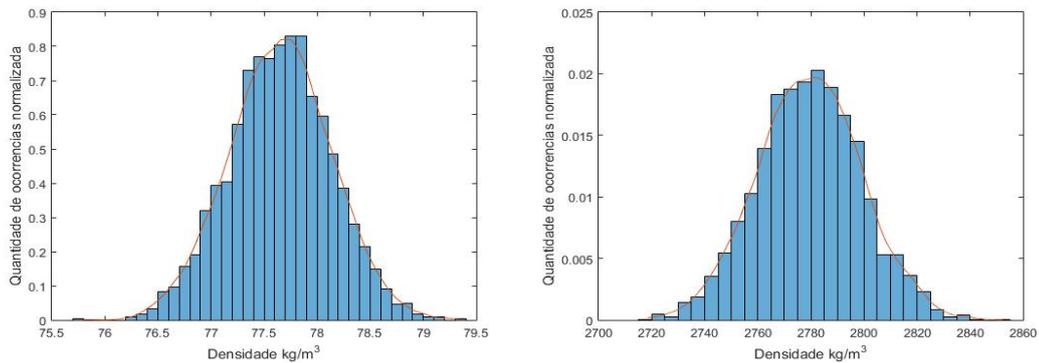


Figura 26 – Histograma para os valores de entrada da variação de densidade do núcleo e da lâmina da placa

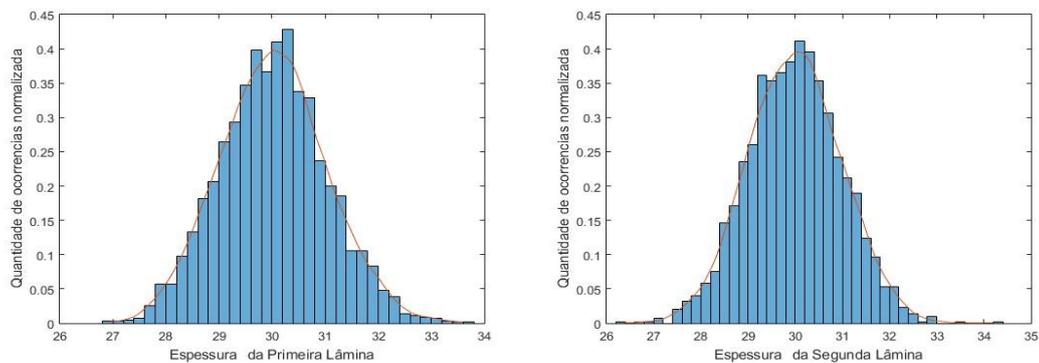


Figura 27 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura da primeira e segunda lâminas da placa

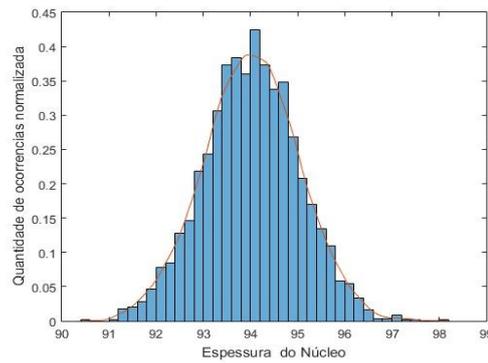


Figura 28 – Histograma para os valores de entrada da variação da espessura do Núcleo da placa

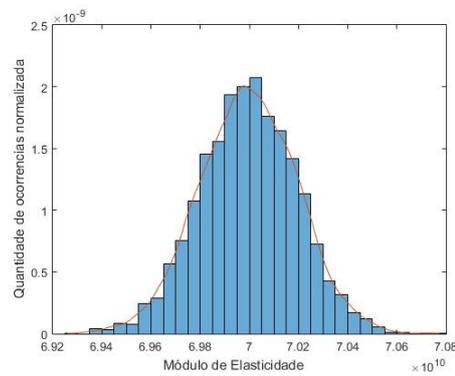


Figura 29 – Histograma para os valores de entrada da variação do módulo de elasticidade da placa

A última simulação realizada variou todos os parâmetros de entrada, de modo que o impacto dessa variação nas frequências naturais foi maior, atingindo um erro máximo de 1,65%. O erro de 0,39% apresentado pela primeira frequência se assemelha ao erro obtido pela simulação das duas espessuras de 0,31%. Os modos dois e três possuem valores próximos entre si como em quase todas as simulações anteriores.

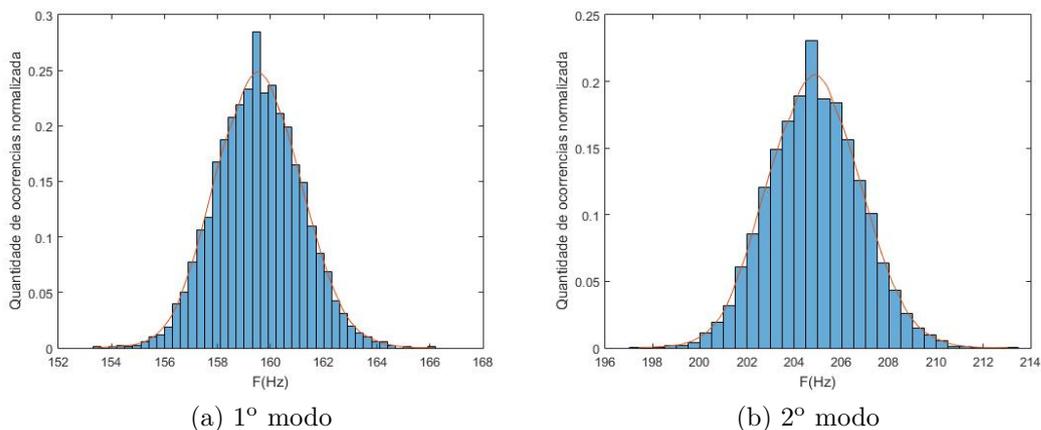


Figura 30 – Histograma do primeiro e segundo modo de vibração

Tabela 20 – Valores médio e desvio padrão da simulação da variação de todos os parâmetros

Modos	Valor médio (Hz)	Desvio Padrão (Hz)
1	159,53	1,58
2	204,85	1,92
3	427,07	3,96
4	438,72	3,99
5	728,70	6,32
6	766,91	6,91
7	845,60	7,59

Conforme visto na figura 30 e na tabela 20, os valores médios não são iguais aos valores nominais. O desvio padrão apresentado possui um intervalo entre  $1,58Hz$  e  $7,59Hz$ , sendo o caso com os maiores valores de desvio padrão. A função de densidade de probabilidade (FDP) assemelha-se a uma curva normal, porém, devido ao surgimento do pico, a curva foi distorcida.

Tabela 21 – Dados das maiores e menores frequências e do erro percentual obtidos para variação de todos os parâmetros

Modos	Valor mínimo (Hz)	Valor máximo (Hz)	Erro (%)
1	153,47	166,18	0,39
2	197,41	213,05	0,80
3	411,71	444,01	0,81
4	423,20	455,88	1,30
5	703,98	756,63	1,41
6	739,98	796,63	1,55
7	816,05	878,30	1,65

### 4.3 Comparação entre os modelos experimental e numérico

O modelo utilizado para a análise experimental, que consiste no uso da ferramenta *toolbox EasyMod*, foi utilizado no presente trabalho para a análise da incerteza associada ao método, permitindo a análise do impacto ao selecionar menos pontos da placa 3 no cálculo da frequência natural do painel enquanto o modelo numérico foi utilizado para analisar os impactos nas frequências naturais associados à incerteza dos dados de entrada, que são a densidade, espessura e módulo de elasticidade.

Nota-se que a incerteza de método é maior que a incerteza dos dados de entrada pois o erro percentual se tornava maior a medida que o número de pontos de análise diminuía. Esse erro crescia devido ao surgimento de novas frequências, geralmente nos terceiros e quarto modos de vibração. O que ocorre é que a diferença entre as frequências existentes e as novas que surgiram é uma forma de o *toolbox EasyMod* adaptar a falta de

informações provenientes da limitação da quantidade de pontos. O caso completo, de 136 pontos, teve um menor erro percentual pois não surgiu nenhuma nova frequência.

Na tabela 22, efetua-se uma comparação entre o caso completo experimental e o caso padrão numérico, onde pode-se visualizar o erro percentual entre os dois casos. Nota-se o modelo numérico apresentou uma frequência a mais que os dados experimentais na faixa de  $427Hz$  e  $436Hz$ . Isso ocorre pois a diferença entre as frequências do terceiro e do quarto modos são pequenas, sendo menores que  $10Hz$ , dificultando assim a identificação via método experimental (DOMINGUES, 2017).

Tabela 22 – Casos experimental e numérico

Modos	Experimental	Numérica	Erro (%)
	Caso completo (Hz)	Caso com os valores nominais (Hz)	
1	159,30	159,56	0,16
2	201,28	204,88	1,78
3		427,13	
4	432,23	438,79	1,51
5	727,47	728,79	0,18
6	759,21	767,01	1,02
7	851,60	845,70	0,69

Com base na tabela 22, é possível perceber que o erro percentual entre os casos completos experimental e numérico é baixo, o que implica que é possível utilizar a simulação numérica para prever o comportamento de uma placa em um caso real com um alto grau de confiabilidade, visto que o maior erro apresentado foi de 1,78%.

## 5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo o aprendizado e a análise dos impactos provenientes das incertezas, que são as de dados de entrada e as associadas ao modelo. Para a análise experimental, foi utilizada a ferramenta *toolbox EasyMod*, onde foi possível analisar a incerteza do método, enquanto para a análise numérica, foi utilizado um modelo construído no **ANSYS**, utilizando o Método de Elementos Finitos, sendo possível analisar a incerteza dos dados de entrada ao utilizar variáveis aleatórias. Ambos os modelos utilizaram um painel sanduíche do tipo *honeycomb* e adotaram o Método de Monte Carlo para que seja possível gerar uma análise estatística e aumentar o grau de confiabilidade.

A função de densidade de probabilidade (FDP) foi gerada apenas para a simulação numérica, pois a simulação experimental não possuía uma quantidade de amostras suficiente, pois demandava um alto custo computacional e o foco foi maior na simulação numérica. A metodologia foi fundamentada na literatura e no uso dos softwares **MATLAB<sup>®</sup>** e **Ansys Mechanical APDL**.

Foram feitos dois programas pelo **MATLAB<sup>®</sup>**, um experimental e um numérico, cada um capaz de calcular as frequências naturais do painel sanduíche. Para o programa experimental, foi adaptada a ferramenta *toolbox EasyMod* para que seja possível o usuário escolher a quantidade  $N$  de pontos da placa utilizados nos cálculos das frequências. Com isso, foi possível analisar o impacto nas frequências naturais ao realizar diferentes simulações com a *toolbox EasyMod* em quatro casos, sendo eles: considerando 120, 100, 50 e 30 pontos e cada caso com 100 amostras, para considerar a rotina de Monte Carlo. É perceptível que, quanto menor a quantidade de pontos selecionados, maior é o erro no resultado final. Para o caso de 120 pontos, o erro foi desprezível, pois o maior erro apresentado foi no sexto modo com o valor de 0,036%. Para os outros casos, o erro se tornou maior pois, a medida que menos pontos são selecionados, surgem mais amostras com novas frequências, geralmente no terceiro ou no quarto modo. Quando se escolhe menos pontos para o cálculo das frequências naturais, o *toolbox EasyMod* adapta a falta de informações e acaba gerando novas frequências, portanto, é preciso considerar todos os pontos da placa para obter um resultado mais fiel à realidade. Ainda assim, nota-se que, ao considerar todos os pontos, a frequência do terceiro modo é omitida, pois a diferença entre as frequências do terceiro e do quarto modos é inferior a  $10\text{Hz}$ , não sendo identificado via método experimental, necessitando do modelo numérico para identificar essa frequência omitida.

Para o programa numérico, foi utilizado um arquivo .txt com as informações relativas ao painel no qual o **MATLAB<sup>®</sup>** enviava para o **Ansys Mechanical APDL** e

captava as respostas. Foi feita uma comparação entre os programas experimental e numérico, onde o erro máximo foi de 1,78%, sendo um erro baixo e comprovando que os resultados batem, validando assim o programa numérico. Com isso, calculou-se as frequências naturais para diversas placas, cada uma com uma incerteza atribuída a algum parâmetro de entrada diferente. Notou-se que, em todos os casos, o valor do erro é progressivo, aumentando com os modos de vibração e os valores médios dos casos densidade do núcleo, densidade das lâminas, duas densidades e módulo de elasticidade não variam em relação aos valores nominais. Os valores do erro percentual do segundo e terceiro modos de vibração se mantiveram próximas em quase todas simulações, em algumas o valor foi o mesmo. A variação da densidade do núcleo teve o menor impacto nas frequências naturais, onde o erro variou entre 0,033% e 0,14% e seu desvio padrão variou entre 0,16Hz e 0,83Hz e a variação do caso de todos os parâmetros teve o maior impacto nas frequências naturais, com o erro variando entre 0,39% e 1,65% e seu desvio padrão variando entre 1,58Hz e 7,59Hz. Logo, percebe-se que, quanto maior a variação dos valores dos dados de entrada, maior serão as influências na frequência natural, principalmente nos maiores modos normais do sistema.

Ao comparar os dois modelos, é visto que a incerteza associada ao modelo possui um maior impacto pois, conforme menos pontos do painel foram selecionados, surgiam novas frequências, acarretando em um erro máximo de 5,83% enquanto o maior erro apresentado pelo modelo numérico foi de 1,78%.

O modelo numérico construído pode ser utilizado em outras aplicações além da análise de incerteza, podendo ser aplicado para modelos de otimização e análise de convergência. Tais aplicações auxiliam o engenheiro a dimensionar melhor o sistema, de modo a atender os pré-requisitos do projeto.

# Referências

- ALLEN, H. G. Analysis and design of structural sandwich panels. Pergamon Press, Oxford, 1969. Citado na página 28.
- ANSYS. Theory reference. 2017. Citado na página 29.
- BOROBIA, J. P. *Elemento de Máquinas y Vibraciones*. Argentina: McGraw-hill 3ª ed, 2012. Citado na página 30.
- CASTELLO, D. A. *Quantificação de incertezas e estimação de parâmetros em dinâmica estrutural: Uma introdução a partir de exemplos computacional*. São Carlos-SP: SBMAC, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 23, 29 e 33.
- CORREIA, J. R. Perfis pultrudidos de fibra de vidro (grfp). aplicação de vigas mistas grfp-betão na construção. Instituto Superior Técnico, 2004. Citado na página 27.
- COUTO, C. A. de O. Estudo de blindagem mista contendo compósito cerâmico para proteção contra impactos de micrometeoróides em satélites artificiais. INPE, São José dos Campos, 2011. Citado na página 28.
- DOMINGUES, A. C. Correlação teórico-experimental de modelos de estruturas aeroespaciais leves. Universidade de Brasília, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 58.
- GERALDO. Histogramas e matching. UFMA, 2015. Citado na página 32.
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc- 4ª ed, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- KOUROUSSIS, G. et al. Easymod: A matlab/scilab toolbox for teaching modal analysis. Proceedings of the 19th International Congress on Sound and Vibration, Vilnius (Lithuania), 2012. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 35.
- LEITE, M.; FREITAS, M.; SILVA, A. Sandwich construction. DesignStudio, 2004. Citado na página 28.
- LOGAN, D. A first course in the finite element method. global engineering: Christopher m. shortt. Stanford, 2012. Citado na página 29.
- LOGAN, D. L. A first course in the finite element method. Global Engineering: Christopher M. Shortt, 2012. Citado na página 28.
- LOURENÇO, J. M. G. D. A. Resposta em frequência. Instituto Politécnico de Setúbal, 2004. Citado na página 31.
- MOREIRA, A. M. Materiais de construção i - materiais compósitos. Departamento de Engenharia Civil - Instituto Politécnico de Tomar, 2008. Citado na página 27.
- MUSSOI, F. L. R. Resposta em frequência: filtros passivos. Florianópolis, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.

NASSER, R. B. Mccloud service framework: Arcabouço para desenvolvimento de serviços baseados na simulação de monte carlo na cloud. Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 33.

NETO, B. *Como fazer experimentos: pesquisa e desenvolvimento na ciência e na indústria*. Campinas: Editora Unicamp, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

NETO, J. F. C.; MOURA, J. H.; FORTE, S. H. A. C. Modelo prático de previsão de fluxo de caixa operacional para empresas comerciais considerando os efeitos do risco, através do método de monte carlo. Fortaleza, 2002. Citado na página 34.

RENTERIA, A. R. *Teoria da probabilidade*. PUC RIO, 2006. Disponível em: <[http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0210463\\_06\\_cap\\_04.pdf](http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0210463_06_cap_04.pdf), acessoem13/11/2016>. Citado na página 32.

ROQUE, A. *Física II- Ondas, Fluidos e Termodinâmica*. USP, 2015. Disponível em: <<http://sisne.org/Disciplinas/Grad/Fisica2FisMed/aula10.pdf>, acessoem09/11/2016>. Citado na página 31.

SAMPAIO, R.; LIMA, R. Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 23, 32 e 33.

SCHWARZ, B. J.; RICHARDSON, M. H. Experimental modal analysis. Vibrant Technology, Inc. Jamestown, California, 1999. Citado na página 30.

SEK, M. Frequency response function (frf). Victoria University, Melbourne, Australia, 2016. Citado na página 30.

SHIGLEY, J. E. *Dinâmica de máquinas*. São Paulo-SP: Edgar Blucher, 1969. Citado na página 29.

SILVA, I. L. A. da. Propriedades e estrutura de compósitos poliméricos reforçados com fibras contínuas de juta. Universidade Estadual do Norte Fluminense, Darcy Ribeiro, UENF, Campo dos Goytacazes - RJ, 2014. Citado na página 27.

SOBOL, L. M. A. Primer for the monte carlo method. Florida, 1994. Citado na página 33.

SOEIRO, N. S. Análise modal experimental. Universidade Federal do Pará. Belém, Pará, 2001. Citado na página 31.

SOIZE, C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. Université de Marne, 2005. Citado na página 23.

SOIZE, C. Stochastic modeling of uncertain in computational structural dynamics-recent theoretical advances. Université Paris, 2011. Citado na página 23.

UETA, V. M. N. *Análise de um sistema de vibração com três graus de liberdade: comparação entre três métodos de solução*. UFRJ, 2015. Disponível em: <<http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10012765.pdf>, acessoem10/11/2016>. Citado na página 30.

VIEIRA, F. Métodos e técnicas de análise de vibração. Barra do Piraí, 2003. Citado na página [30](#).

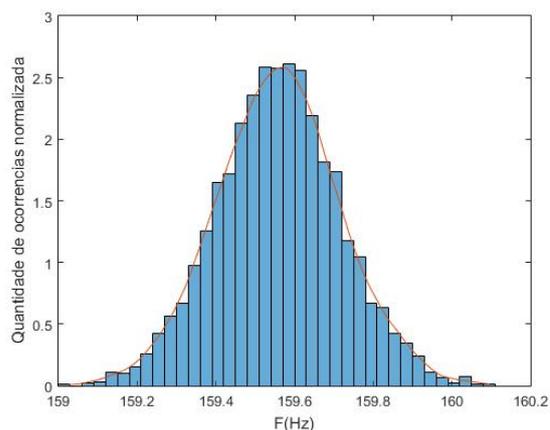
YORIYAZ, H. Método de monte carlo: princípios e aplicações em física médica. Revista Brasileira de Física Médica, São Paulo, Brasil, 2009. Citado na página [33](#).



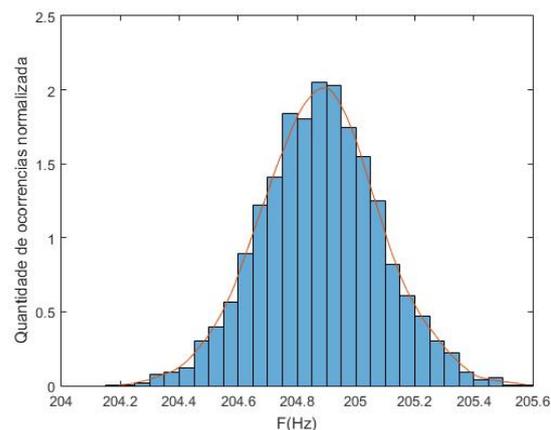
# Anexos



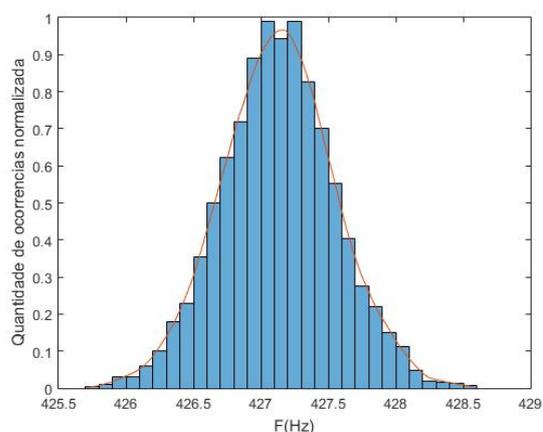
# ANEXO A – Histogramas das frequências naturais para o caso densidade do núcleo



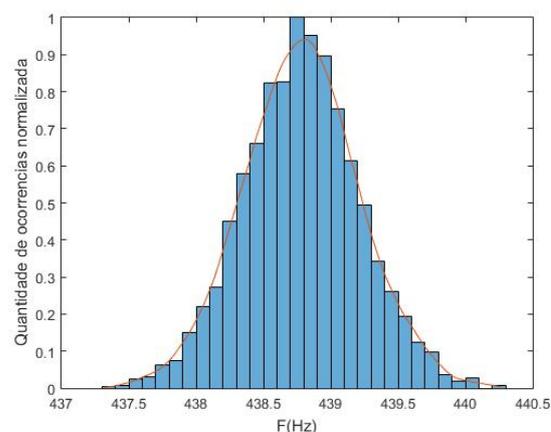
(a) 1º modo



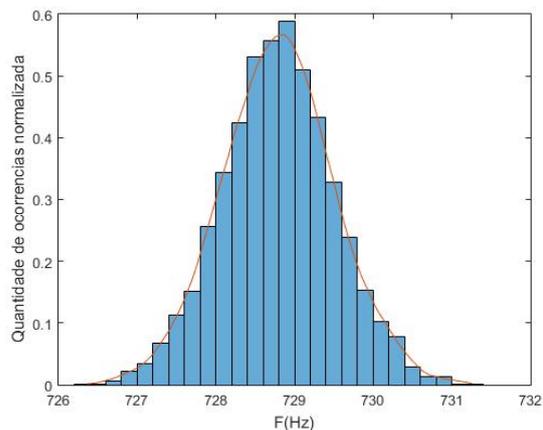
(b) 2º modo



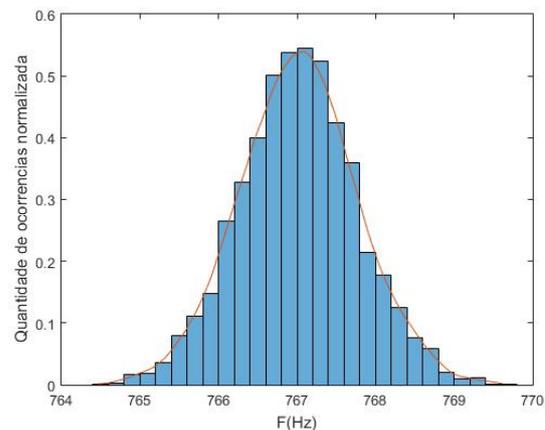
(c) 3º modo



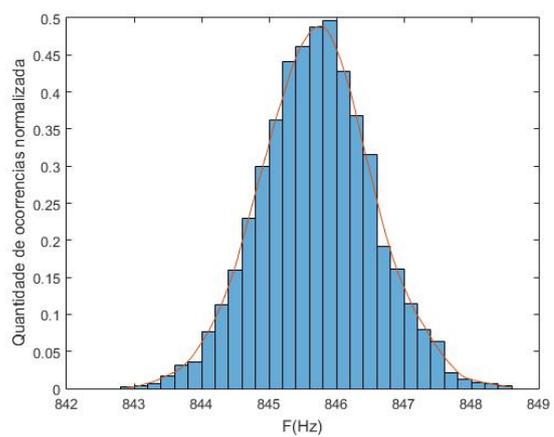
(d) 4º modo



(e) 5º modo



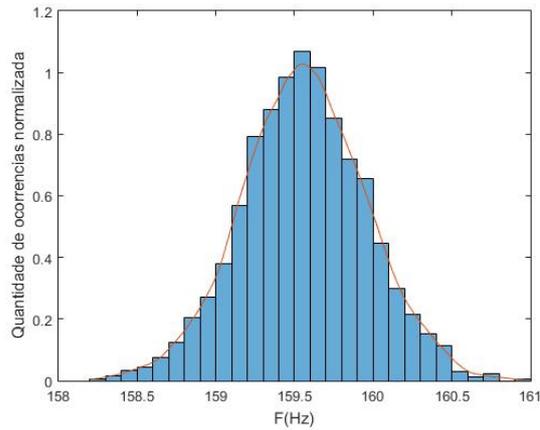
(f) 6º modo



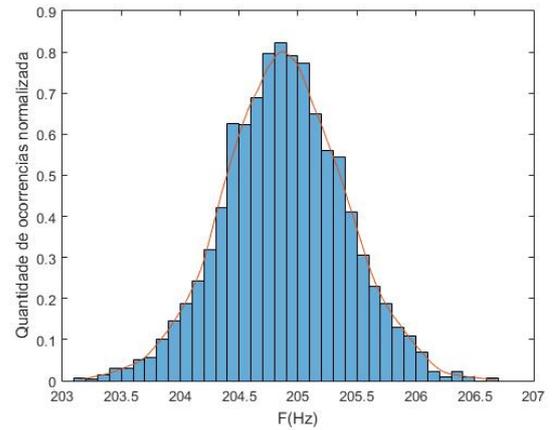
(g) 7º modo

Figura 31 – Sete primeiros modos de vibração

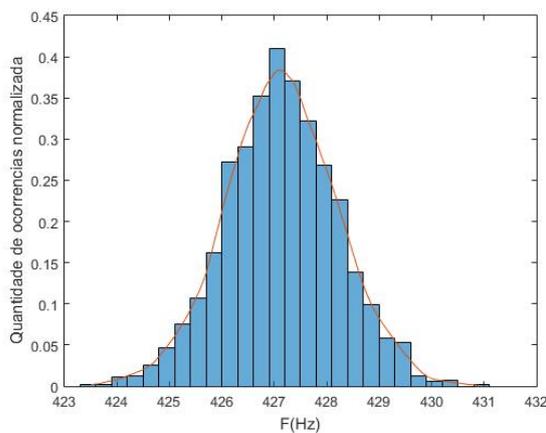
# ANEXO B – Histograma das frequências naturais para o caso densidade das lâminas



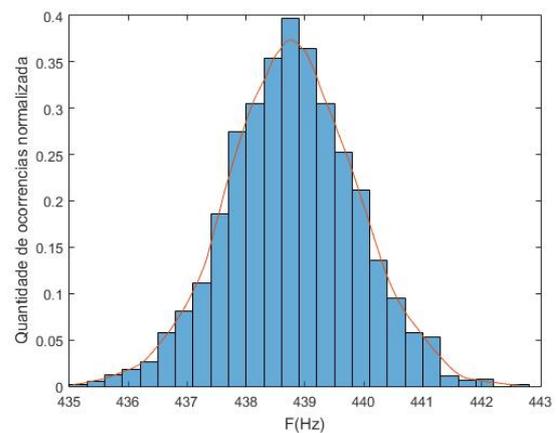
(a) 1º modo



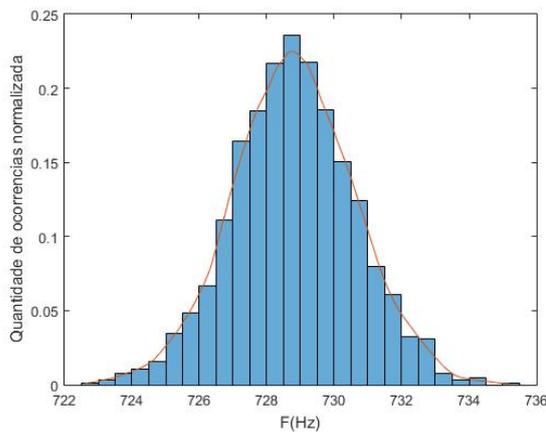
(b) 2º modo



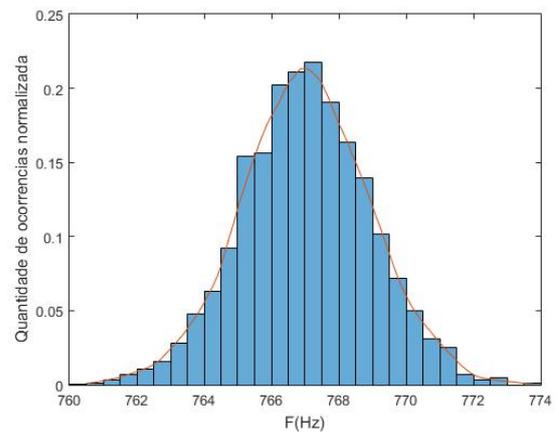
(c) 3º modo



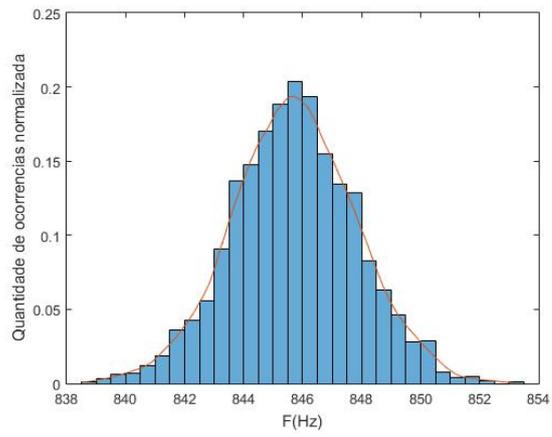
(d) 4º modo



(e) 5º modo



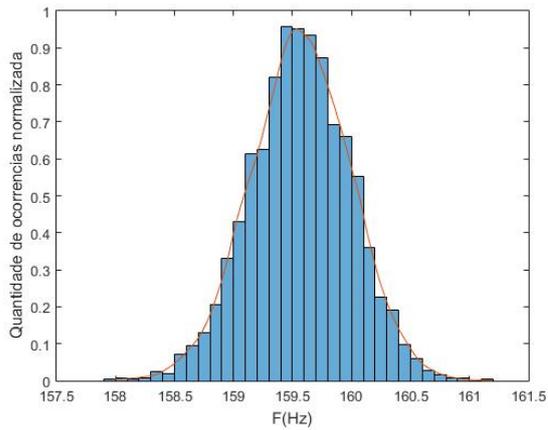
(f) 6º modo



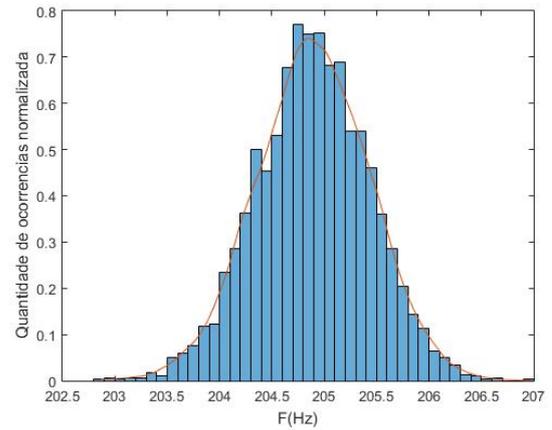
(g) 7º modo

Figura 32 – Sete primeiros modos de vibração

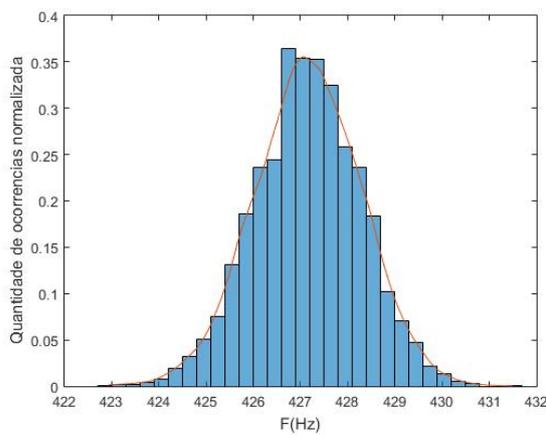
# ANEXO C – Histograma das frequências naturais para o caso duas densidades



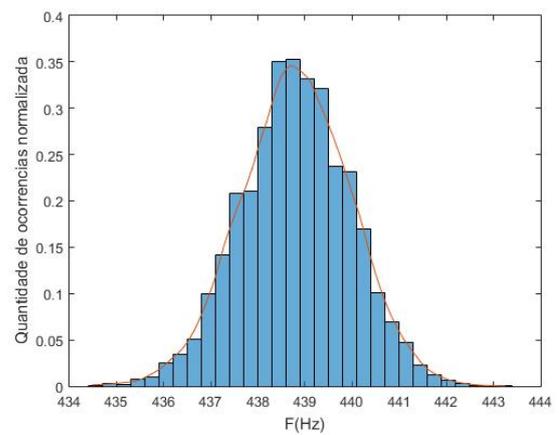
(a) 1º modo



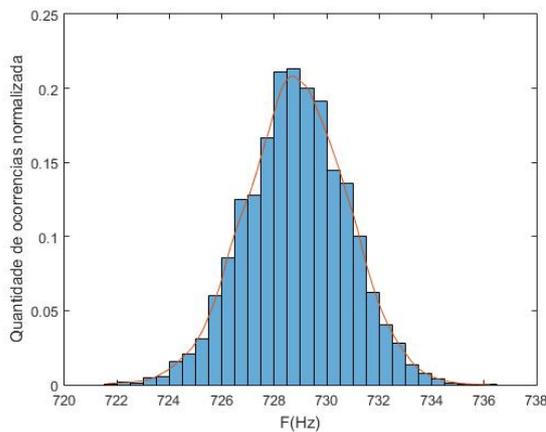
(b) 2º modo



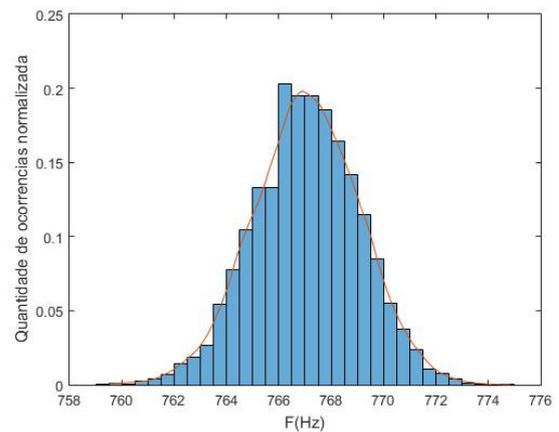
(c) 3º modo



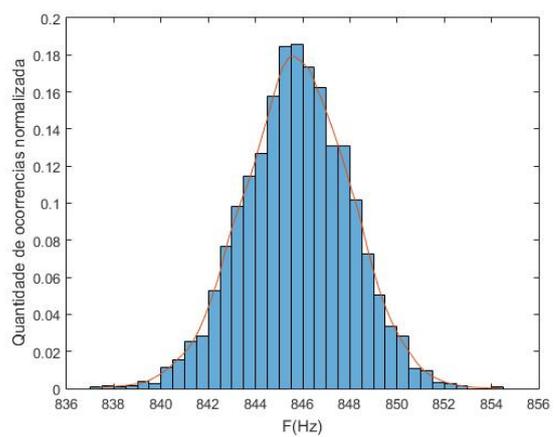
(d) 4º modo



(e) 5º modo



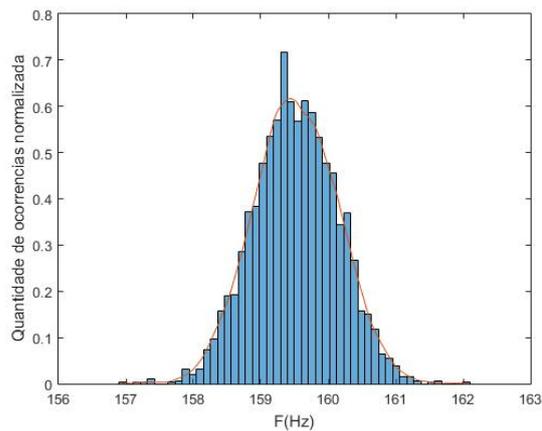
(f) 6º modo



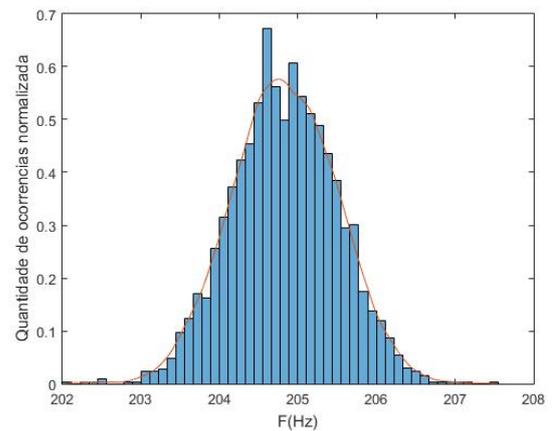
(g) 7º modo

Figura 33 – Sete primeiros modos de vibração

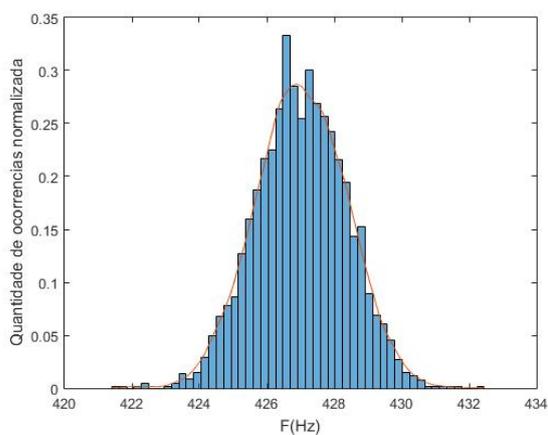
# ANEXO D – Histograma das frequências naturais para o caso espessura das lâminas



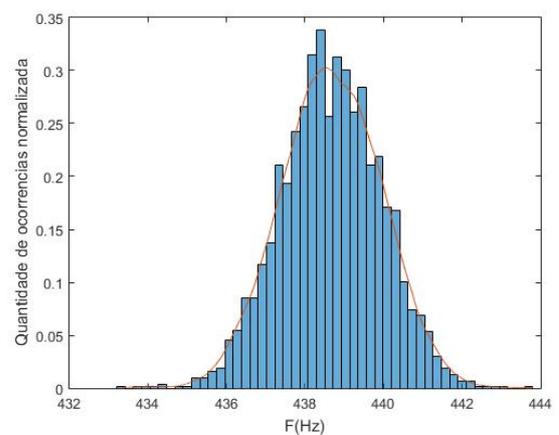
(a) 1º modo



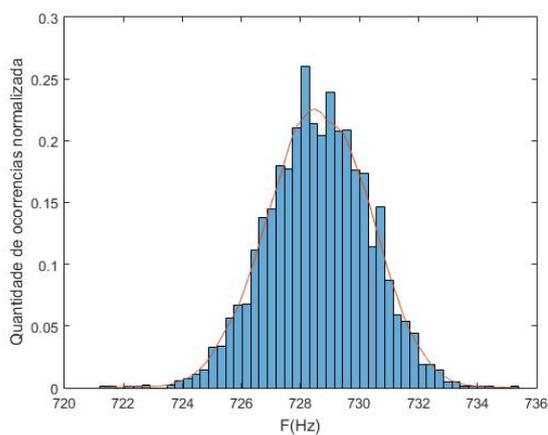
(b) 2º modo



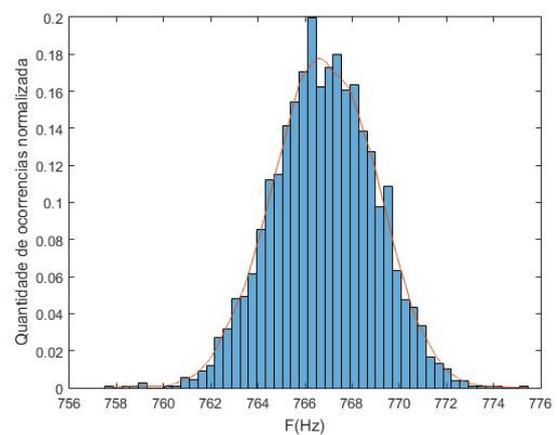
(c) 3º modo



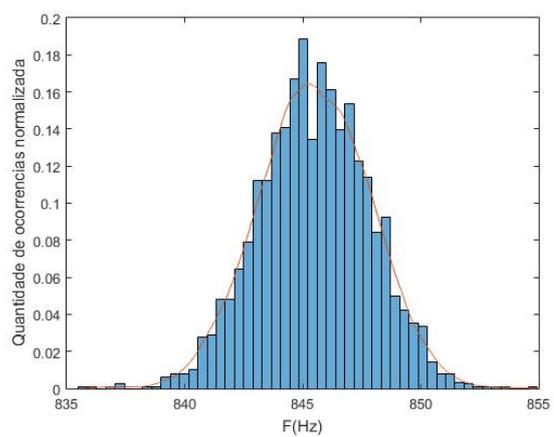
(d) 4º modo



(e) 5º modo



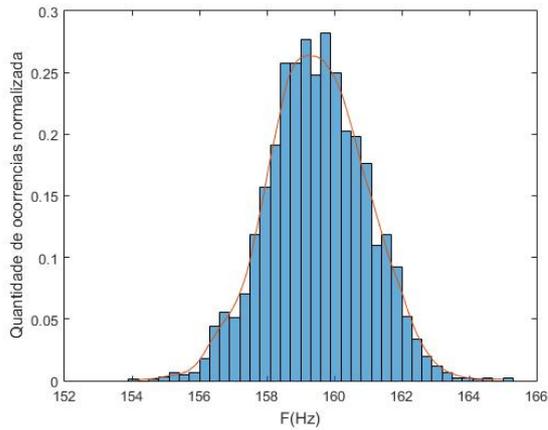
(f) 6º modo



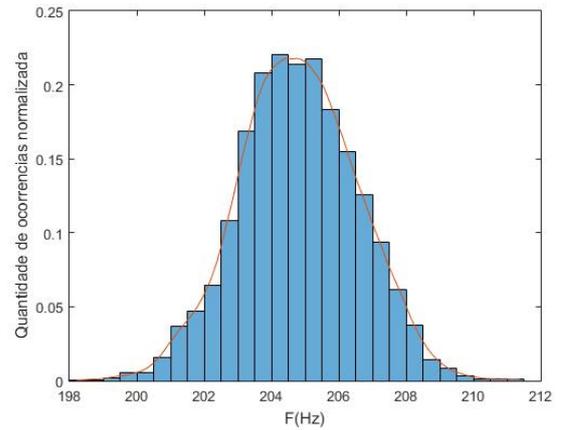
(g) 7º modo

Figura 34 – Sete primeiros modos de vibração

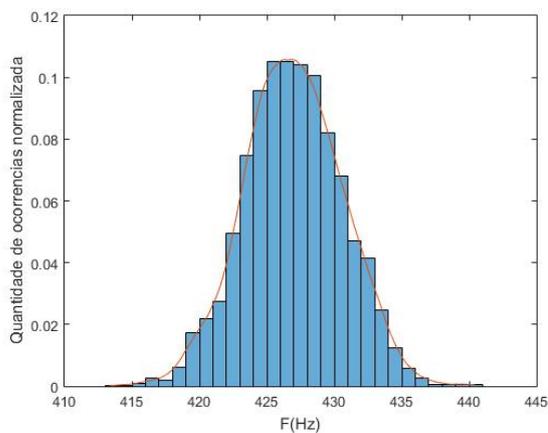
# ANEXO E – Histograma das frequências naturais para o caso duas espessuras



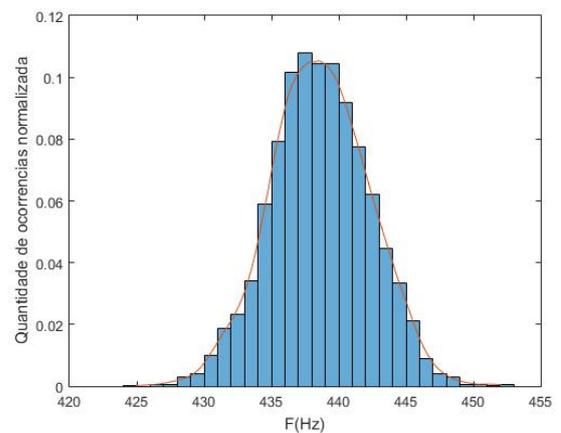
(a) 1º modo



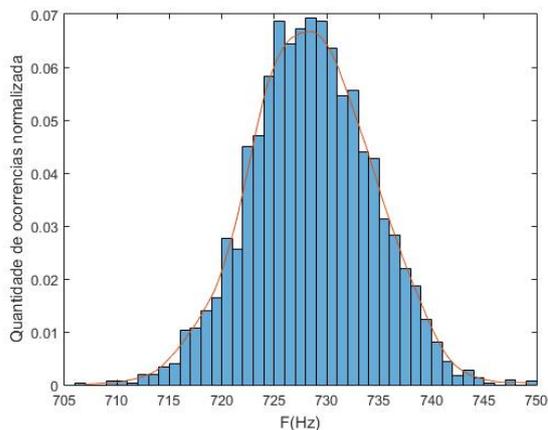
(b) 2º modo



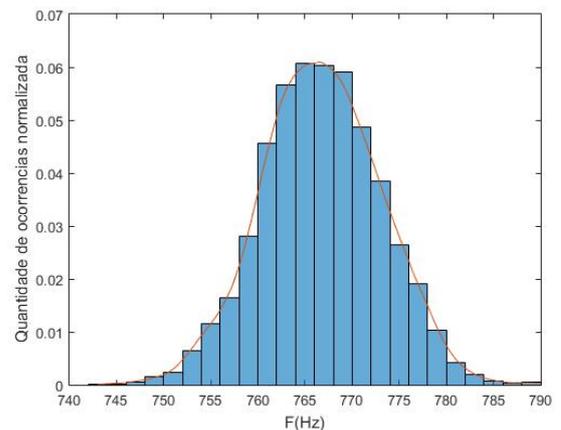
(c) 3º modo



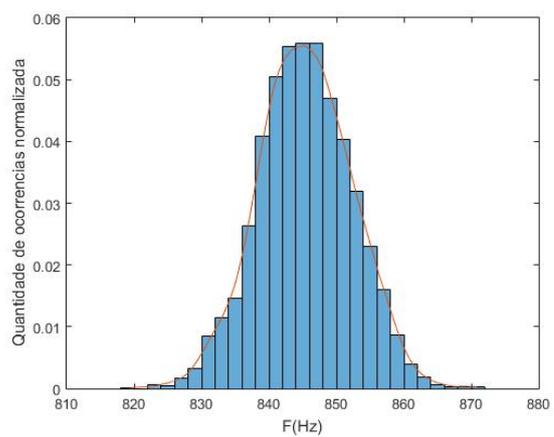
(d) 4º modo



(e) 5º modo



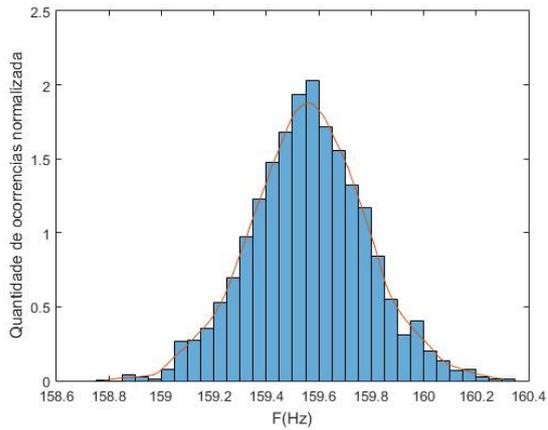
(f) 6º modo



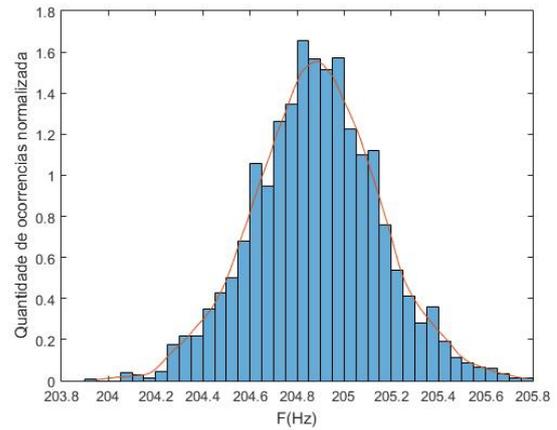
(g) 7º modo

Figura 35 – Sete primeiros modos de vibração

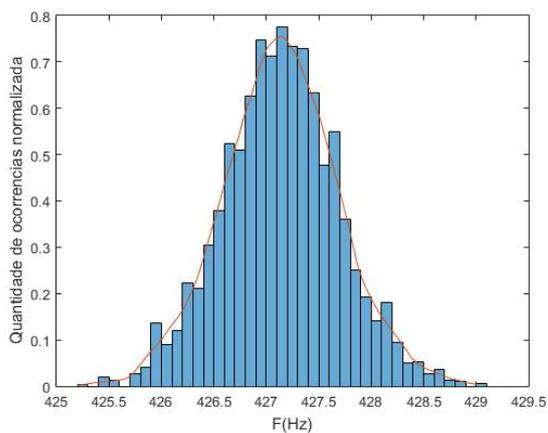
# ANEXO F – Histograma das frequências naturais para o caso módulo de elasticidade



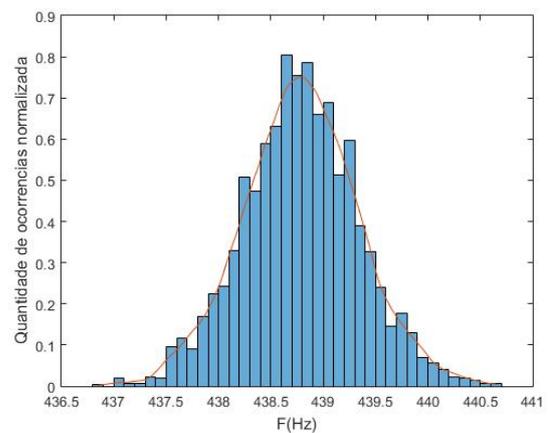
(a) 1º modo



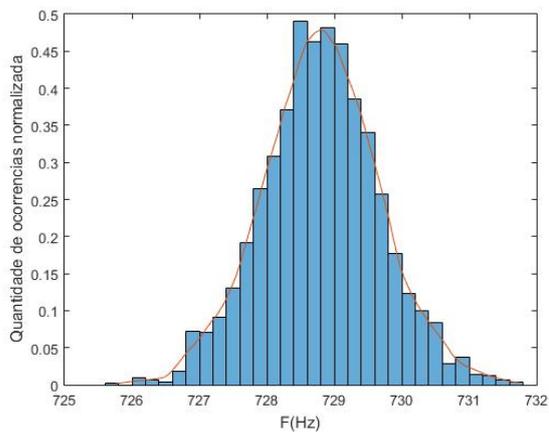
(b) 2º modo



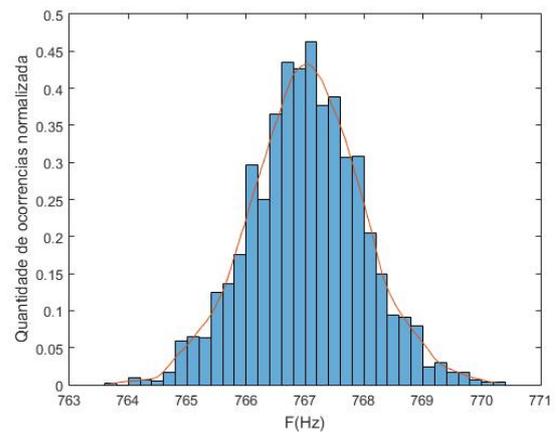
(c) 3º modo



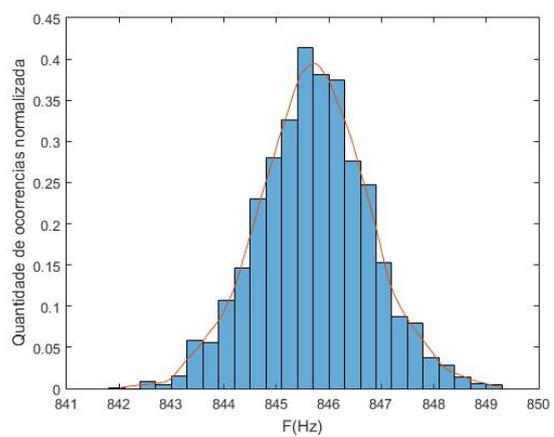
(d) 4º modo



(e) 5º modo



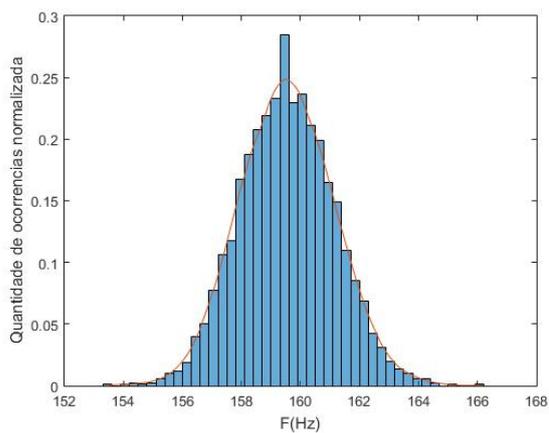
(f) 6º modo



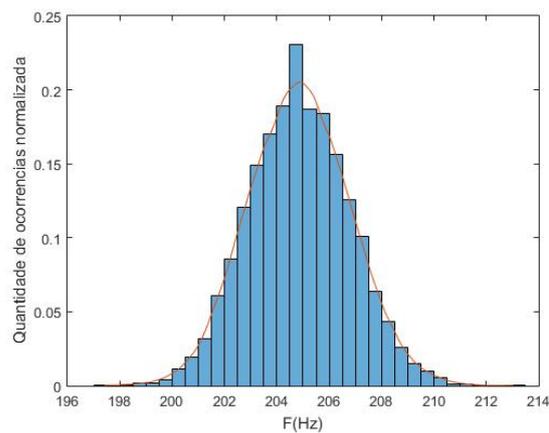
(g) 7º modo

Figura 36 – Sete primeiros modos de vibração

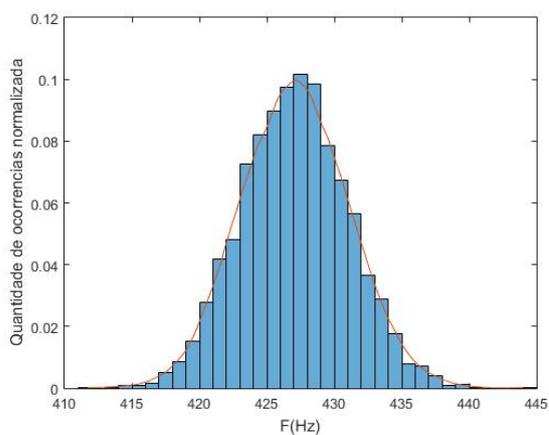
# ANEXO G – Histograma das frequências naturais para o caso geral



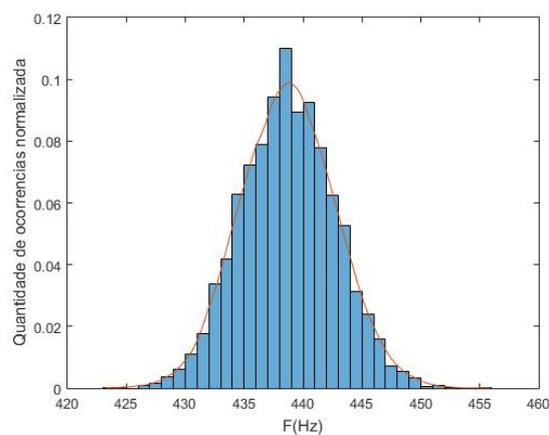
(a) 1º modo



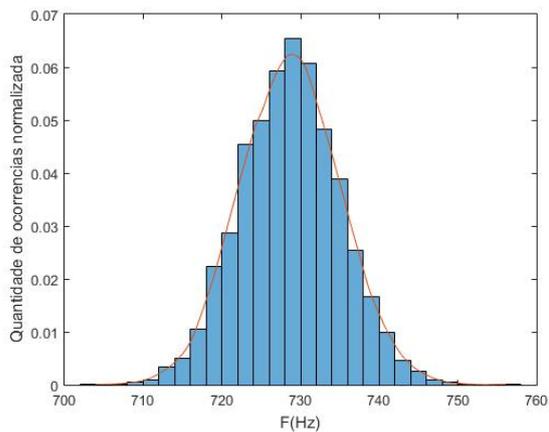
(b) 2º modo



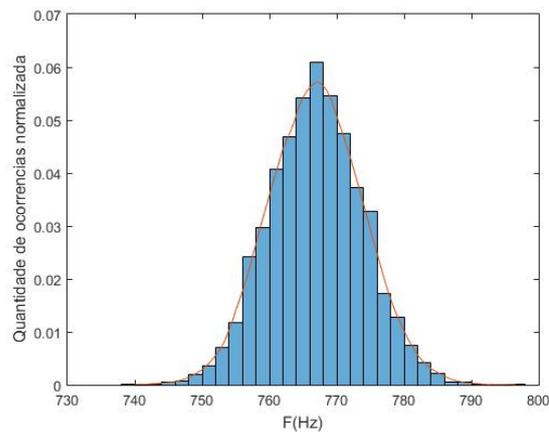
(c) 3º modo



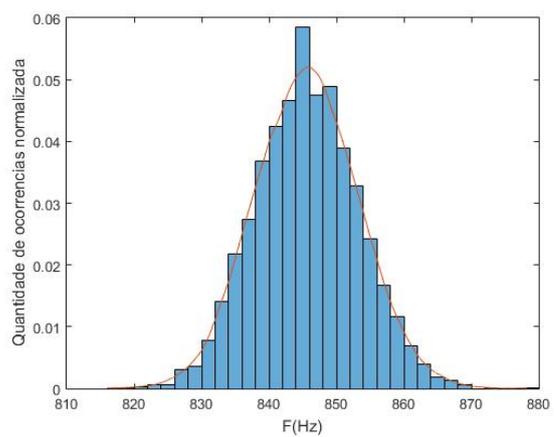
(d) 4º modo



(e) 5º modo



(f) 6º modo



(g) 7º modo

Figura 37 – Sete primeiros modos de vibração