

**VERIFICAÇÃO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS COM  
ARMADURA DE CISALHAMENTO**

**GABRIELLA PINTO VALENTIM**

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURAS  
E CONSTRUÇÃO CIVIL

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

BRASÍLIA / DF: JULHO- 2017

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**VERIFICAÇÃO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS  
COM ARMADURA DE CISALHAMENTO**

**GABRIELLA PINTO VALENTIM**

ORIENTADOR: MARCOS HONORATO DE OLIVEIRA  
COORIENTADOR: MANOEL JOSÉ MANGABEIRA PEREIRA FILHO

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL EM ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

BRASÍLIA / DF: JULHO-2017  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**VERIFICAÇÃO DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO EM LAJES LISAS  
COM ARMADURA DE CISALHAMENTO**

**GABRIELLA PINTO VALENTIM**

MONOGRAFIA DE PROJETO FINAL SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA CIVIL.

**APROVADA POR:**

---

**Prof. Marcos Honorato de Oliveira, D.Sc (UnB)**  
(Orientador)

---

**Prof. Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo, Ph.D(UnB)**  
(Examinador interno)

---

**Prof. Paulo Chaves de Rezende Martins, Dr. ECP(UnB)**  
(Examinador interno)

BRASÍLIA/DF, 06 DE JULHO DE 2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

VALENTIM, GABRIELLA PINTO

**Verificação de Resistência à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento.** [Distrito Federal] 2017.

xiv, 76p. 210 x 297 mm (ENC/FT/UnB, Bacharel, Engenharia Civil, 2017)  
Monografia de Projeto Final - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental.

|   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1. Punção   | 2. Lajes lisas              |
| 3. Método da Superfície de Resistência Mínima ao Cisalhamento | 4. Armadura de cisalhamento |
| I. ENC/FT/UnB   | II. Título (Bacharel)       |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VALENTIM, G.P. (2017). Verificação de Resistência à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento. Monografia de Projeto Final em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 76p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Gabriella Pinto Valentim.

TÍTULO: Verificação de Resistência à Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento.

GRAU: Bacharel em Engenharia Civil      ANO: 2017

É concedida à Universidade de Brasília a permissão para reproduzir cópias desta monografia de Projeto Final e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia de Projeto Final pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Gabriella Pinto Valentim  
QI 23 LT 2/4/6 BL E APT 317 GUARÁ-II  
CEP: 71060-230 Brasília – DF – Brasil  
e-mail: gabriella.valentim@gmail.com

## AGRADECIMENTOS

Esse Trabalho de Conclusão de Curso é fruto de cinco anos de estudos de Engenharia e, durante este tempo, foram muitos os que passaram pela minha vida e merecem meus agradecimentos.

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Senhor e meu Deus, meu Criador e meu Redentor, que me deu forças e me capacitou para chegar até aqui hoje. *Deux Lux Mea Est.*

À minha mãe Maria das Graças, que nunca mediu esforços para me proporcionar a melhor educação que eu pudesse ter, porque o conhecimento seria a minha maior herança. À minha família, em especial, minha irmã Daniella e meu namorado Rômulo, que foram minhas âncoras, meu suporte e meu ombro amigo nos momentos de alegria e de angústia.

Ao meu Orientador, Professor Marcos Honorato, por todos os ensinamentos, correções e consciente orientação. Sempre preocupado com meu bem estar e me incentivando, antes de tudo, a acreditar em mim mesma. Mais do que um orientador, um amigo.

Ao meu coorientador, Manoel Mangabeira, que, com seu vasto conhecimento e entusiasmo com a ciência, me auxiliou na interpretação dos dados e nas análises gráficas. Ao meu amigo, Rafael Sobral, que muito me ajudou na parte de programação em VBA.

A todos os meus amigos da Engenharia Civil que estiveram presentes durante minha vida acadêmica.

Ao Colégio Militar de Brasília, que foi responsável pela minha formação como pessoa, cidadã e aluna. Devo o que sou a esta “Jovem Casa de Velhas Tradições”.

## RESUMO

No sistema estrutural de lajes lisas, as lajes se apoiam diretamente sobre os pilares, dispensando o uso de vigas. Este sistema resulta em uma série de vantagens construtivas, em contrapartida, também pode levar ao fenômeno da punção devido à potencialização do efeito dos esforços cortantes nas regiões de ligação laje-pilar. Tal fenômeno pode levar ao colapso progressivo da estrutura. A melhor maneira de prevenir a punção é utilizando armadura de cisalhamento na região que circunda o pilar.

Os diversos métodos de verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar, como, por exemplo, as recomendações normativas do Eurocode 2 (2014) e NBR 6118 (2014) verificam a resistência à punção na região interna da armadura de cisalhamento em inclinação fixa, o que não é acurado visto que essa inclinação pode variar dentro dessa região da armadura de cisalhamento, modificando deste modo as parcelas resistente do concreto  $V_{R,c}$  e do aço  $V_{R,s}$ .

A resistência ao cisalhamento varia em função da inclinação da superfície de ruptura, que quanto menos inclinada, menor será a contribuição do concreto, mas, em contrapartida, um número maior de camadas de armadura será efetivo no combate ao cisalhamento. Nesse sentido, o Método *Surface of Minimum Shear Resistance* – SMSR proposto por Ferreira (2010) e adaptado por Oliveira (2013) apresenta um método iterativo que checa todas as possíveis superfícies de ruptura dentro da região da armadura de cisalhamento variando a inclinação e a posição destas superfícies, de modo a encontrar a menor resistência possível entre elas. Esta é composta por uma parcela resistente de concreto  $V_{R,c}$  e outra da armadura de cisalhamento  $V_{R,s}$ . Foi aplicada uma rotina computacional em *Visual Basic for Applications* para implementar o SMSR e, além disso, a formulação do Método CCD de arrancamento de conectores de aço foi utilizado para determinar a tensão em cada camada de armadura de cisalhamento.

A rotina do SMSR foi aplicada a um banco de dados de lajes com carregamento simétrico e excêntrico e os resultados foram comparados aos modelos de cálculo do SMSR simplificado de Ferreira (2010), do Eurocode 2 (2014) e da NBR 6118(2014). Para avaliar a precisão, dispersão e segurança dos modelos foram feitas análises estatísticas, análise de dispersão dos resultados e penalização segundo o “*Demeter Points Classification*” (DPC), além de que foram avaliados a influência de alguns parâmetros nas previsões.

## ABSTRACT

In the structural system of flat slabs, the slabs rest directly on the columns, sparing the beams. This system results in a number of constructive advantages; however it can also lead to the punching shear phenomenon due to the potentialization of the effect of shear forces on the slab-column regions. Such phenomenon can lead to progressive collapse of the structure. The best way to prevent punching shear failure is by using shear reinforcement in the region around the columns.

The multiple verification methods for punching resistance of the slab-column connection, such as the building codes Eurocode 2 (2014) and NBR 6118 (2014), verify punching resistance in the region of shear reinforcement while fixing the slope of the rupture surface, which is not accurate since this slope may vary within that region, thereby, modifying the resistant portions of the concrete and steel.

The shear strength varies as a function of the slope of the rupture surface, which the less inclined, the smaller the contribution of the concrete. Nonetheless, a greater number of layers of reinforcement will be effective in the shear combat. In this sense, the Surface Method of Minimum Shear Resistance (SMSR), proposed by Ferreira (2010) and adapted by Oliveira (2013), presents an iterative method that checks all possible rupture surfaces within the shear reinforcement region by varying the slope and position of these surfaces in order to find the smallest possible resistance between them. A computational routine was applied in Visual Basic for Applications to implement the SMSR and, in addition, the CCD Method formulation of pull-out steel connectors was used to determine the stress in each layer of shear reinforcement.

The SMSR routine was applied to a database of slabs which were submitted to symmetric and eccentric loading. The results were compared to different calculation models, such as the simplified SMSR of Ferreira (2010), Eurocode 2 (2014) and NBR 6118 (2014). Statistical analysis, analysis of dispersion of results and penalty according to the Demeter Points Classification (DPC) were carried out in order to evaluate the accuracy, dispersion and safety of the models. In addition, the influence of some parameters was evaluated in the predictions.

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1. JUSTIFICATIVA.....   | 5         |
| 1.2. OBJETIVOS.....   | 5         |
| 1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO .....  | 6         |
| <b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1. PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO.....                | 7         |
| 2.2. REGAN (2000) .....   | 11        |
| 2.3. FUCHS <i>et.al</i> (1995) .....  | 13        |
| 2.4. FERREIRA (2010).....   | 15        |
| 2.5. OLIVEIRA (2013) .....  | 22        |
| 2.6. RECOMENDAÇÕES DO EUROCODE 2:2004.....                                  | 31        |
| 2.7. RECOMENDAÇÕES DA ABNT NBR6118:2014 .....                               | 35        |
| <b>3. ROTINA COMPUTACIONAL .....</b>  | <b>37</b> |
| 3.1. SMSR PARA LAJES COM CARREGAMENTO SIMÉTRICO .....                       | 37        |
| 3.2. SMSR PARA LAJES COM CARREGAMENTO EXCÊNTRICO .....                      | 43        |
| <b>4. METOLOGIA DE AVALIAÇÃO DO SMSR.....</b>                               | <b>47</b> |
| 4.1. Metodologia para coleta do banco de dados .....                        | 47        |
| 4.1.1. Apresentação das Lajes Lisas com carregamento simétrico .....        | 47        |
| 4.1.2. Apresentação das Lajes Lisas com carregamento excêntrico.....        | 49        |
| 4.2. Metodologia de Cálculo .....   | 49        |
| 4.3. Metodologia de Análise dos Resultados .....                            | 52        |
| <b>5. AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO .....</b> | <b>53</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| 5.1. Lajes Lisas submetidas a carregamento simétrico .....             | 53        |
| 5.2. Lajes Lisas submetidas a carregamento excêntrico.....             | 61        |
| <b>6. CONCLUSÃO .....</b>  | <b>71</b> |
| 6.1. Rotina Computacional.....   | 71        |
| 6.2. Metodologia de Avaliação do SMSR.....                             | 71        |
| 6.3. Avaliação dos métodos de estimativa de resistência à punção ..... | 71        |
| 6.3.1. Lajes com carregamento simétrico .....                          | 71        |
| 6.3.2. Lajes com carregamento excêntrico .....                         | 72        |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>                                | <b>73</b> |

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 - Características das lajes ensaiadas por Ferreira (2010) .....  | 17 |
| Tabela 2 - Características das lajes – (OLIVEIRA, 2013).....  | 23 |
| Tabela 3 - Comparação dos métodos SMSR e SMSR-MOD – (OLIVEIRA, 2013).....   | 27 |
| Tabela 4 - Valores de k para pilares retangulares – (EUROCODE 2, 2004).....   | 29 |
| Tabela 5 - Resultados da aplicação do método SMSR de OLIVEIRA para carregamentos excêntricos – (OLIVEIRA, 2013) .....   | 30 |
| Tabela 6 – Características das lajes submetidas a carregamento simétrico .....  | 48 |
| Tabela 7 - Características das lajes submetidas a carregamento excêntrico .....   | 49 |
| Tabela 8 – Resumo das estimativas de resistência à punção para lajes com carregamento simétrico.....                    | 50 |
| Tabela 9 - Resumo das estimativas de resistência à punção para lajes com carregamento excêntrico .....                  | 51 |
| Tabela 10– Escala de demérito do critério DPC .....   | 52 |
| Tabela 11- Comparação da carga última experimental com a capacidade resistente estimada                                 | 54 |
| Tabela 12 - Previsão da posição e inclinação da superfície de ruptura.....  | 55 |
| Tabela 13 - Comparação da carga última experimental com a capacidade resistente estimada – Carregamento excêntrico..... | 62 |
| Tabela 14 - Previsão da posição e inclinação da superfície de ruptura – Carregamento excêntrico .....                   | 62 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 - Ruptura por punção em um edifício na cidade de Giza, Egito [http://gate.ahram.org.eg/News/553522.aspx] .....                         | 1  |
| Figura 2 – Modos de ruptura por punção quando se tem armadura de cisalhamento – Ferreira (2010) .....   | 2  |
| Figura 3 - Punção simétrica (a) e (b), Punção assimétrica (c) e Punção excêntrica (d) em lajes lisas de concreto armado - Tassinari (2011)..... | 4  |
| Figura 4 – Relação entre capacidade resistente à punção e a resistência à compressão do concreto .....  | 7  |
| Figura 5 - Relação entre capacidade resistente à punção e a taxa de armadura flexionada .....   | 8  |
| Figura 6 - Diversos tipos de armadura de cisalhamento – Ferreira (2010) .....   | 9  |
| Figura 7 - Arranjos para a distribuição da armadura de cisalhamento tipo Pinos de Duas Cabeças – Ferreira (2010) .....                          | 10 |
| Figura 8 – Variação da Resistência ao Cisalhamento com $a_i / d$ - Regan (2000).....  | 12 |
| Figura 9 – Resistência ao arrancamento de Pinos de Duas Cabeças - Regan (2000) .....  | 13 |
| Figura 10 – Ruptura do cone de concreto de acordo com o método CCD – Costa (2016).....  | 14 |
| Figura 11–Ensaio de arrancamento de conectores de aço .....   | 14 |
| Figura 12 - Dimensões e esquemas de carregamentos das lajes ensaiadas por Ferreira (2010) .....   | 16 |
| Figura 13 - Sistema de ensaio – vista superior – (Ferreira, 2010) .....   | 18 |
| Figura 14 - Sistema de ensaio: cortes AA e BB – Ferreira (2010).....  | 18 |
| Figura 15 – Resistência ao cisalhamento em função da inclinação da superfície de ruptura - Ferreira (2010).....                                 | 19 |
| Figura 16 - Superfícies de ruptura teóricas dentro da região das armaduras de cisalhamento – Ferreira (2010).....                               | 21 |
| Figura 17 - Superfícies de ruptura práticas dentro da região das armaduras de cisalhamento– Ferreira (2010).....                                | 21 |
| Figura 18 - Pontos de aplicação e placas de distribuição de carga das lajes LN – Oliveira (2013) .....  | 24 |
| Figura 19 - Pontos de aplicação e placas de distribuição de carga das lajes LS e LW – Oliveira (2013) .....                                     | 24 |
| Figura 20 – Esquema de ensaio do pórtico de reação metálico – Oliveira (2013).....  | 25 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 21 - Modelo para verificação da punção do Eurocode 2:2004 .....   | 31 |
| Figura 22– Detalhes típicos para arranjos com <i>studs</i> (EC2, 2004) .....   | 33 |
| Figura 23 - Distribuição do cisalhamento provocada por um momento desbalanceado em pilares interno (EC2, 2004) ..... | 35 |
| Figura 24– Detalhes típicos para arranjos com <i>studs</i> (NBR6118) .....   | 36 |
| Figura 25 – Superfícies de ruptura a serem checadas - Adaptado de Ferreira (2010) .....                              | 38 |
| Figura 26- Rotina programada em VBA para lajes com carregamento simétrico .....                                      | 41 |
| Figura 27 – Fluxograma da rotina de programação em VBA para o SMSR para lajes com carregamento simétrico .....       | 42 |
| Figura 28 - Rotina programada em VBA para lajes com carregamento excêntrico.....                                     | 45 |
| Figura 29 - Fluxograma da rotina de programação em VBA para o SMSR para lajes com carregamento excêntrico .....      | 46 |
| Figura 30 – Análise da precisão dos modelos das lajes submetidas a carregamento simétrico                            | 56 |
| Figura 31– Distribuição das lajes com carregamento simétrico em cada intervalo do DPC ...                            | 57 |
| Figura 32 – Penalizações do método DPC para lajes com carregamento simétrico .....                                   | 57 |
| Figura 33 – Influência de $S_r/d$ na relação $V_u/V_{R,teo}$ .....   | 59 |
| Figura 34 - Influência de $V_s/V_{R,c}$ na relação $V_u/V_{R,teo}$ .....   | 60 |
| Figura 35 - Análise da precisão dos modelos das lajes submetidas a carregamento excêntrico .....                     | 63 |
| Figura 36 - Distribuição das lajes com carregamento excêntrico em cada intervalo do DPC .                            | 64 |
| Figura 37 – Penalizações do método DPC para lajes com carregamento excêntrico .....                                  | 64 |
| Figura 38 – Mapa de fissuração da Laje LS06 – Oliveira (2013) .....  | 66 |
| Figura 39 - Influência de $W_i$ na relação $V_u/V_{R,teo}$ .....   | 66 |
| Figura 40 - Influência de $\beta$ na relação $V_u/V_{R,teo}$ .....   | 68 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

| <b>Símbolo</b>  | <b>Significado</b>  |
|-----------------|---|
| LETRAS ARÁBICAS |   |
| $a_i$           | Projeção horizontal da superfície de ruptura investigada;                           |
| $A_c$           | Área de concreto;   |
| $A_s$           | Área da seção transversal das barras de aço tracionadas;                            |
| $A_{sw}$        | Área de aço da seção transversal de uma camada de armadura de cisalhamento;         |
| $A_{sw, cam}$   | Área de aço por camada de armaduras de cisalhamento;                                |
| $c_1$           | Dimensão do pilar paralela à excentricidade da carga;                               |
| $c_2$           | Dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da carga;                          |
| $c_{máx}$       | Maior lado do pilar;  |
| $c_{mín}$       | Menor lado do pilar;  |
| $d$             | Altura útil da laje;  |
| $e$             | Excentricidade na aplicação do carregamento;  |
| $h_{ef}$        | Comprimento de embutimento efetivo;   |
| $f_c$           | Resistência à compressão do concreto;   |
| $f_{ck}$        | Tensão de resistência característica do concreto à compressão;                      |
| $f_{ct}$        | Resistência à tração do concreto;   |
| $f_{ys}$        | Tensão de escoamento do aço;  |
| $f_{ys,w}$      | Tensão de escoamento do aço das armaduras de cisalhamento;                          |
| $k$             | Coefficiente que relaciona a maior com a menor dimensão do pilar ou área carregada; |
| $\ell$          | Vão entre pilares na direção considerada;   |
| $M_s$           | Momento solicitante na ligação laje-pilar;  |
| $P_u$           | Carga de arranchamento de conectores de aço;  |
| $s_r$           | Distância entre as camadas de armaduras de cisalhamento;                            |
| $s_0$           | Distância da primeira camada de armadura de cisalhamento ao pilar;                  |

|            |  |
|------------|--|
| $u_1$      | Comprimento do perímetro crítico afastado $2d$ da face do pilar;   |
| $u_i$      | Perímetro crítico com geometria igual à do EC2, porém definido a uma distância $a_i$ da face do pilar ou do ponto inferior da superfície de ruptura investigada; |
| $V_{MSRM}$ | Carga de ruptura prevista pelo Método da Superfície de Resistência Mínima ao Cisalhamento;   |
| $V_{Rc}$   | Contribuição do concreto para a capacidade de carga da ligação laje-pilar;   |
| $V_{R,cs}$ | Capacidade de carga da ligação laje-pilar;   |
| $V_{R,s}$  | Contribuição do aço para a capacidade de carga da ligação laje-pilar;  |
| $V_s$      | Carga solicitante no pilar;  |
| $V_u$      | Carga de ruptura da laje;  |
| $W_1$      | Módulo de Resistência Plástica perpendicular à borda do perímetro $u_1$ ;  |

#### LETRAS GREGAS

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\beta$         | Parâmetro que relaciona a transferência de momento fletor com a resistência à punção na ligação laje-pilar; |
| $\eta_c$        | Coefficiente de ponderação;   |
| $\theta$        | Inclinação da superfície teórica de ruptura por punção;   |
| $\rho$          | Taxa de armadura de flexão tracionada da laje;  |
| $\rho'$         | Taxa de armadura de flexão comprimida da laje;  |
| $\xi$           | <i>Size effect</i> ;  |
| $\phi_{flexão}$ | Diâmetro da armadura de flexão;   |
| $\phi_w$        | Diâmetro da armadura de punção;   |

# 1. INTRODUÇÃO

O sistema construtivo em que lajes são diretamente apoiadas sobre pilares é denominado lajes lisas. Este sistema é bastante utilizado em países como EUA, Canadá, parte da Europa e Ásia. Apesar de não ser largamente empregado no Brasil, tal sistema apresenta uma série de vantagens, como por exemplo, a simplificação na geometria e execução das formas, agilidade na concretagem e no processo construtivo como um todo, possibilidade de redução do custo de mão-de-obra, maior facilidade nas instalações elétricas, hidráulicas e de ar condicionado.

É válido apontar algumas das desvantagens que o sistema de lajes lisas oferece, como por exemplo, o fato da edificação apresentar redução na rigidez global principalmente quando sujeita a esforços horizontais, e o controle de flechas demanda mais atenção quando comparado ao sistema convencional, por causa da ausência de vigas que promoveriam maior rigidez à estrutura considerando um modelo estrutural em pórtico espacial.

A principal desvantagem, no entanto, é a possibilidade de ruptura localizada por punção. Segundo Melo (1990), o primeiro caso documentado desse tipo de ruptura aconteceu no edifício Prest-o-life no ano de 1911 na cidade norte-americana de Indianápolis no estado de Indiana. A Figura 1 ilustra o colapso parcial de um edifício na cidade de Giza no Egito em 2014 devido à ruptura por punção na cobertura.



Figura 1 - Ruptura por punção em um edifício na cidade de Giza, Egito  
[<http://gate.ahram.org.eg/News/553522.aspx>]

A punção pode ser caracterizada como uma ruptura brusca causada por tensões de cisalhamento devido à ação de uma carga concentrada em uma área. Em situações de projeto, este fenômeno é comumente observado nas ligações laje-pilar, ligações entre pilares e radiers

ou nos arredores de uma força concentrada. A ruptura por punção se assemelha à de uma viga, de modo a apresentar uma fissura de cisalhamento que se estende das extremidades do pilar até a face superior da laje, dando origem a uma superfície de ruptura com forma de tronco de cone.

Há possíveis soluções para evitar que esse tipo de ruptura ocorra em lajes lisas, como por exemplo, a adoção de concreto com maior resistência à compressão, ou o aumento na taxa de armadura de flexão. Experimentos mostram que tais medidas não são muito eficazes, pois não aumentam significativamente a resistência à punção da laje. Outras medidas possíveis são o aumento da espessura da laje, o que poderia acarretar o aumento no custo da obra, ou a adoção de capitéis na ligação laje-pilar, o que pode não ser compatível com a arquitetura da edificação por causa da restrição da altura útil do pavimento. O modo mais eficiente para aumentar a ductilidade e a capacidade resistente de uma laje lisa é por meio do uso de armaduras de cisalhamento que combatem à punção, que desde que eficazes e posicionadas de forma correta, aumentam a ductilidade da ligação laje-pilar, aumentando assim sua capacidade resistente.

É possível distinguir três modos de ruptura por punção quando se tem armadura de cisalhamento: o esmagamento da diagonal comprimida de concreto próxima à face do pilar Figura 2 (a); o esgotamento da resistência à tração diagonal da ligação laje-pilar quando a ruptura ocorre dentro da região das armaduras de cisalhamento Figura 2 (b); por último, a ruptura pode ocorrer fora da região de armadura de cisalhamento se assemelhando à ruptura de lajes sem armadura de cisalhamento Figura 2 (c).

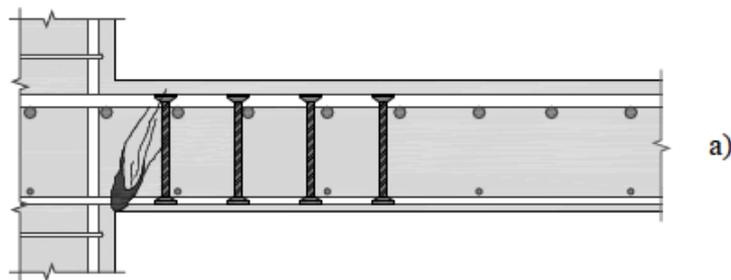


Figura 2 – Modos de ruptura por punção quando se tem armadura de cisalhamento – Ferreira (2010)

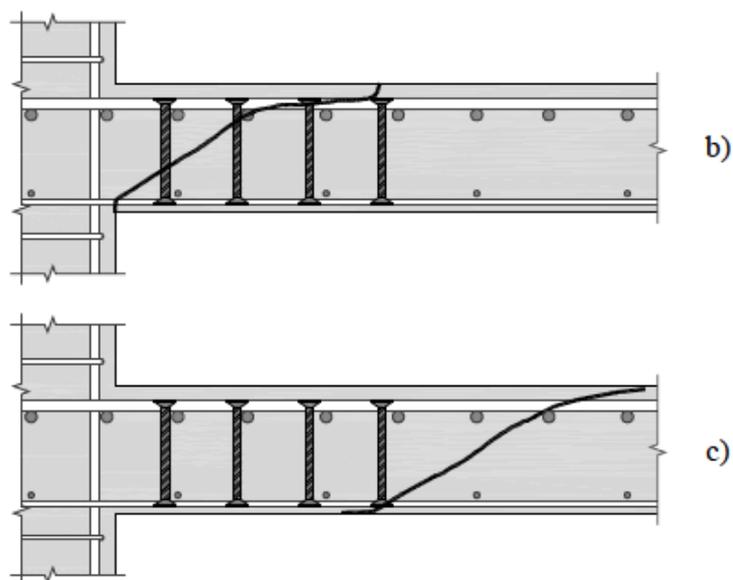


Figura 2 – Modos de ruptura por punção quando se tem armadura de cisalhamento – Ferreira (2010) (continuação)

Ferreira (2010) afirma que um dos fatores que se relaciona diretamente com a resistência à punção é a inclinação da superfície de ruptura formada pela fissura de cisalhamento, uma vez que, considerando os mecanismos clássicos de esforços cortantes, a superfície de ruptura pouco inclinada reduz a contribuição do concreto na resistência da ligação. Normas como Eurocode 2:2004 e CEB-FIP MC90:1993 preveem uma inclinação média da superfície de ruptura em torno de  $26,6^\circ$  em lajes sem armadura de cisalhamento com base em resultados experimentais.

A punção pode ainda ser classificada como simétrica assimétrica ou excêntrica. O caso de punção simétrica ocorre quando há simetria biaxial, como mostra a Figura 3 (a) e (b); o caso de punção assimétrica ocorre em situações de geometria não simétricas ou com simetria uniaxial, porém sem transferência de momento fletor na ligação laje-pilar, como mostra a Figura 3 (c); por último o caso de punção excêntrica ocorre com transferência de momento fletor devido à existência de excentricidade na ligação, como mostra a Figura 3 (d).

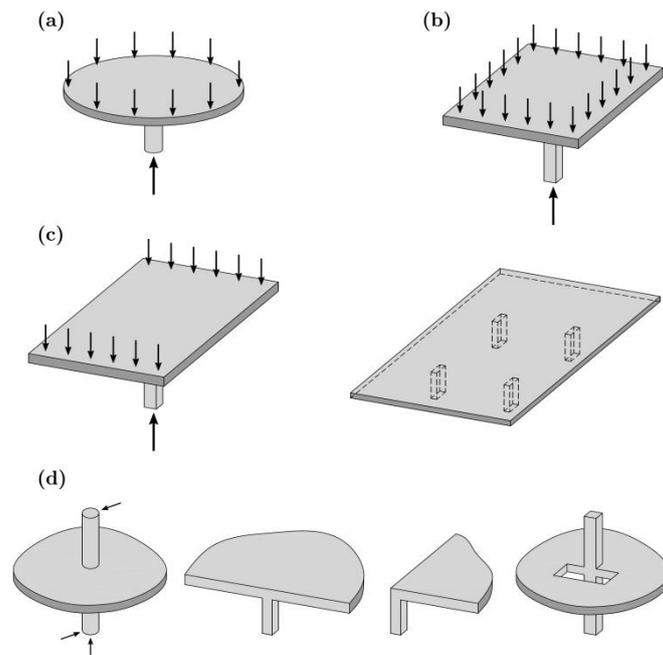


Figura 3 - Punção simétrica (a) e (b), Punção assimétrica (c) e Punção excêntrica (d) em lajes lisas de concreto armado - Tassinari (2011)

Em situações reais de projeto é bastante comum a ocorrência de momentos desbalanceados na ligação laje-pilar devido a variações nas dimensões dos vãos entre pilares, variações nos carregamentos, devido à presença de esforços horizontais nas estruturas, como ação do vento, ações de origem sísmicas, ou devido ao posicionamento do pilar no edifício, se é de borda ou canto ou interno. A transferência de momento da laje para o pilar afeta a distribuição das tensões de cisalhamento na região, pois parte desse momento é transferida por flexão e torção e o restante por excentricidade do cisalhamento, segundo Moe (1961). A combinação da ação do momento com a carga vertical produz dois efeitos que diminuem significativamente a resistência à punção da ligação laje-pilar: o primeiro é a concentração dos esforços de cisalhamento na ligação laje-pilar e o segundo é o aumento na abertura da fissura crítica de cisalhamento que conduz a ruptura.

## **1.1. JUSTIFICATIVA**

Os modelos teóricos de estimativa de resistência à punção em lajes lisas submetidas a carregamentos simétricos e excêntricos apresentam imprecisão ou na previsão da posição da superfície de ruptura e/ou na estimativa da carga última. Ferreira (2010) e Oliveira (2013) propuseram o Método da Superfície de Resistência Mínima ao Cisalhamento (*Surface of Minimum Shear Resistance Method - SMSR*), que checa a resistência à punção em ligações laje-pilar dentro da região de armadura de cisalhamento para casos de carregamento simétrico e excêntrico.

Este trabalho visa estudar um método teórico de verificação de punção dentro da região das armaduras de cisalhamento proposto por 2 teses de Doutorado e testado de maneira simplificada em projeto final de graduação.

## **1.2. OBJETIVOS**

Esta pesquisa tem por objetivo principal desenvolver uma ferramenta computacional para a aplicação do SMSR desenvolvido por Ferreira (2010) e adaptado por Oliveira (2013) para verificação da resistência à punção em ligações laje-pilar submetidas a carregamentos simétricos e excêntricos e com armadura de cisalhamento do tipo Pinos de Duas Cabeças.

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Desenvolver uma rotina computacional com aplicação do SMSR (iterativo);
- Levantar um banco de dados com resultados experimentais de ligações laje-pilar submetidas ao fenômeno de punção;
- Aplicar as rotinas computacionais desenvolvidas ao banco de dados selecionado;
- Fazer uma análise do desempenho das rotinas elaboradas e comparar com outros métodos teóricos de estimativa de resistência à punção.

### **1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO**

Esse projeto é constituído por 6 capítulos. O conteúdo de cada um deles será explicitado a seguir.

No Capítulo 2 são apresentados os trabalhos que foram usados como base bibliográfica para esta pesquisa, sendo eles o Regan (2000) e o Método CCD, além de explicar sucintamente os ensaios e contribuições de Ferreira (2010) e Oliveira (2013) a respeito do SMSR.

No Capítulo 3, a rotina computacional implementada para o cálculo do SMSR é explicada através de fluxogramas. No Capítulo 4, são apresentadas as metodologias para a avaliação do Método SMSR. No Capítulo 5 são mostrados os resultados dos cálculos pelos diferentes métodos empregados juntamente com avaliações estatísticas de dispersão e segurança e estudos de influência de certos parâmetros nos modelos.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões desse trabalho a partir da análise feita no capítulo anterior, justamente com o contexto em que essa pesquisa se insere no estudo da punção.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. PARÂMETROS QUE INFLUENCIAM NA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

Vários são os parâmetros que influenciam na resistência à punção. Dentre os principais, pode-se citar a resistência à compressão do concreto ( $f_c$ ), a taxa de armadura de flexão tracionada ( $\rho$ ), o tamanho e a geometria do pilar, o *size effect* ( $\xi$ ) que leva em consideração a influência da altura útil da laje ( $d$ ), além, é claro, da presença ou não de armadura de cisalhamento.

A ruptura por cisalhamento é governada, dentre outros fatores, pela resistência à tração do concreto ( $f_{ct}$ ), que é comumente relacionada com a resistência à compressão do concreto, e também da própria resistência à compressão do material uma vez que há a possibilidade de ruptura por esmagamento da diagonal comprimida de concreto adjacente ao pilar. De acordo com resultados experimentais, a capacidade resistente à punção é proporcional à raiz cúbica da resistência à compressão do concreto, como mostrado na Figura 4.

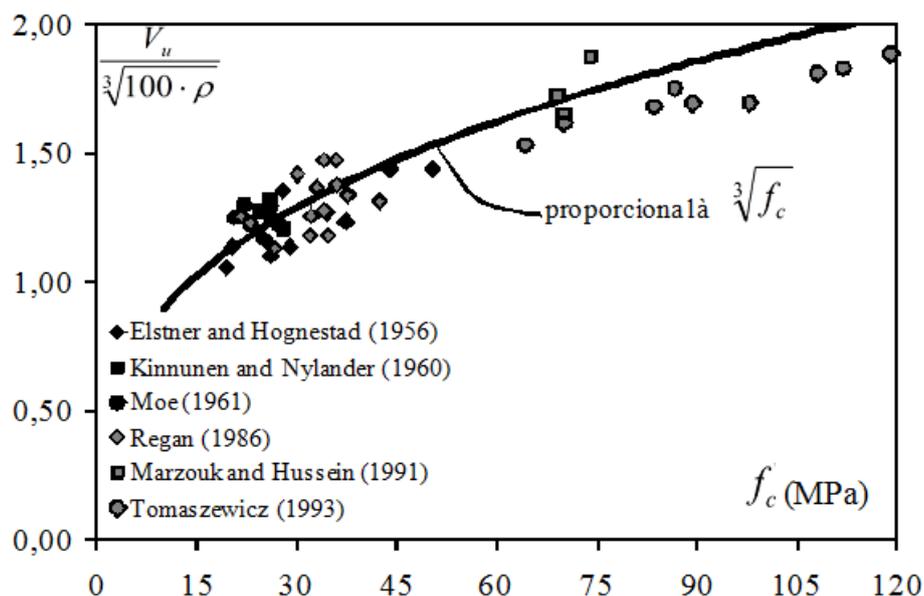


Figura 4 – Relação entre capacidade resistente à punção e a resistência à compressão do concreto

A taxa de armadura de flexão tracionada, que é a razão entre a área de armadura de flexão tracionada ( $A_s$ ) pela área de concreto ( $A_c$ ) influencia na resistência à punção principalmente

na ausência de armadura de cisalhamento. Regan (1981) afirma que o aumento na quantidade de armaduras de flexão tem como efeito o aumento da zona comprimida e, conseqüentemente, na área de concreto não fissurado disponível para resistir ao cisalhamento, além de contribuir com o efeito pino. Resultados experimentais corroboram a proporcionalidade da raiz cúbica da taxa de armadura flexionada com a capacidade resistente à punção como mostrado na Figura 5.

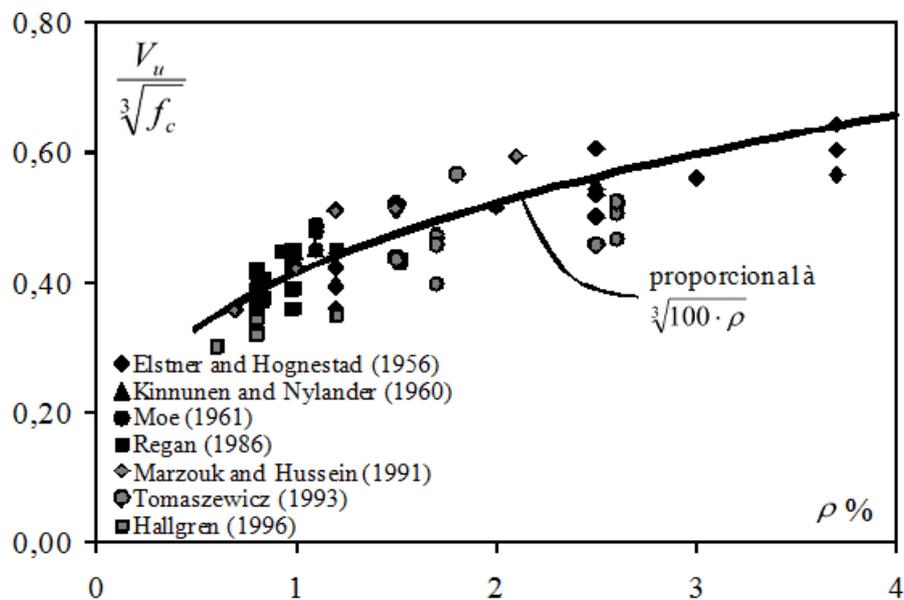


Figura 5 - Relação entre capacidade resistente à punção e a taxa de armadura flexionada

Segundo Oliveira (2003), a geometria e as dimensões do pilar também afetam a resistência de uma laje, pois determinam a forma como as tensões se distribuem na ligação laje-pilar. Vanderbilt (1972) concluiu que lajes com pilares quadrados têm menor resistência que as lajes com pilares circulares, pois nos pilares circulares se observou distribuição uniforme de tensões, enquanto nos pilares retangulares houve concentração de tensão nos cantos da seção quadrada do pilar, mostrando assim, a influência da geometria do pilar. Hawkins *et al.* (1971) afirmam que a tensão de cisalhamento diminui com o aumento da razão entre o maior e menor lado do pilar ( $c_{máx}/c_{mín}$ ), quando esta for maior que 2.

A respeito da relação com o *size effect*, pode-se dizer que os primeiros a alertar que a resistência nominal ao cisalhamento poderia variar de modo não proporcional com a espessura das lajes foram Graf (1938) e Richart (1948). As normas CEB-FIP MC90:1993 e EUROCODE 2:2004 recomendam que o *size effect* deve ser estimado por  $1+(200/d)^{1/2}$ , porém, o Eurocode limita o resultado desta expressão em no máximo 2,0. O efeito desta limitação é reduzir o incremento das estimativas de resistência à punção de lajes lisas com altura útil inferior a 200 mm através da limitação do valor de  $\xi$ . Não há, no entanto, uma base experimental sólida para justificar tal limitação.

Nenhum dos parâmetros apresentados anteriormente é tão eficaz quanto o emprego de armadura de cisalhamento. Uma vez que mais camadas da armadura de cisalhamento são ativadas quando a inclinação da superfície de ruptura diminui. Isto faz com que essa ruptura seja mais dúctil. É importante que essas armaduras de cisalhamento utilizadas na ligação laje-pilar estejam bem ancoradas, para que o aço possa atingir a tensão de escoamento, o que pode tornar a armadura de cisalhamento mais eficiente. Muitas vezes não é possível atingir a tensão de escoamento, uma vez que lajes são normalmente elementos delgados e não apresentam comprimento de ancoragem suficiente para desenvolver tensões no patamar de escoamento. A Figura 6 apresenta diversos tipos de armadura de cisalhamento que normalmente utilizadas em várias condições de projeto. A Figura 7 ilustra possíveis arranjos para a armadura do tipo Pinos de Duas Cabeças.

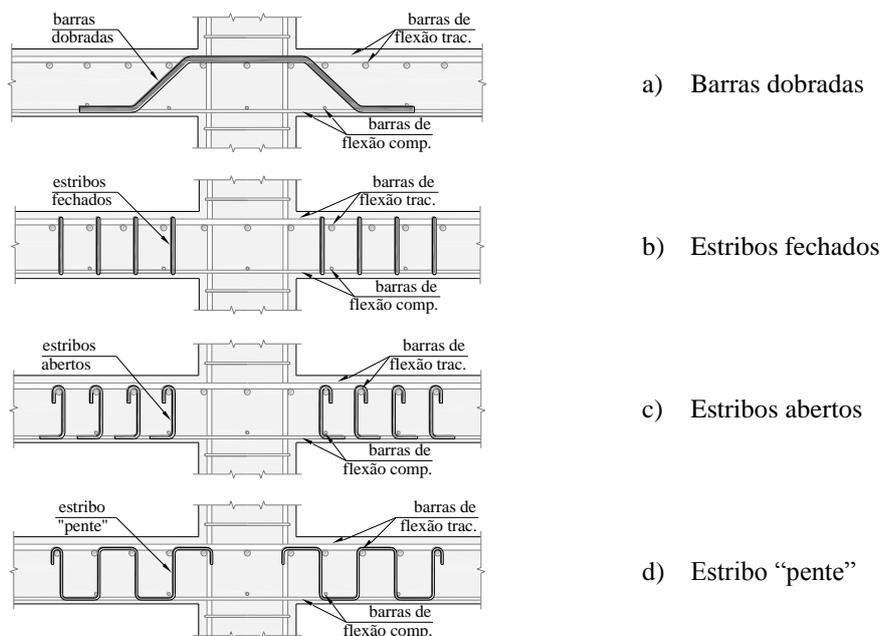


Figura 6 - Diversos tipos de armadura de cisalhamento – Ferreira (2010)

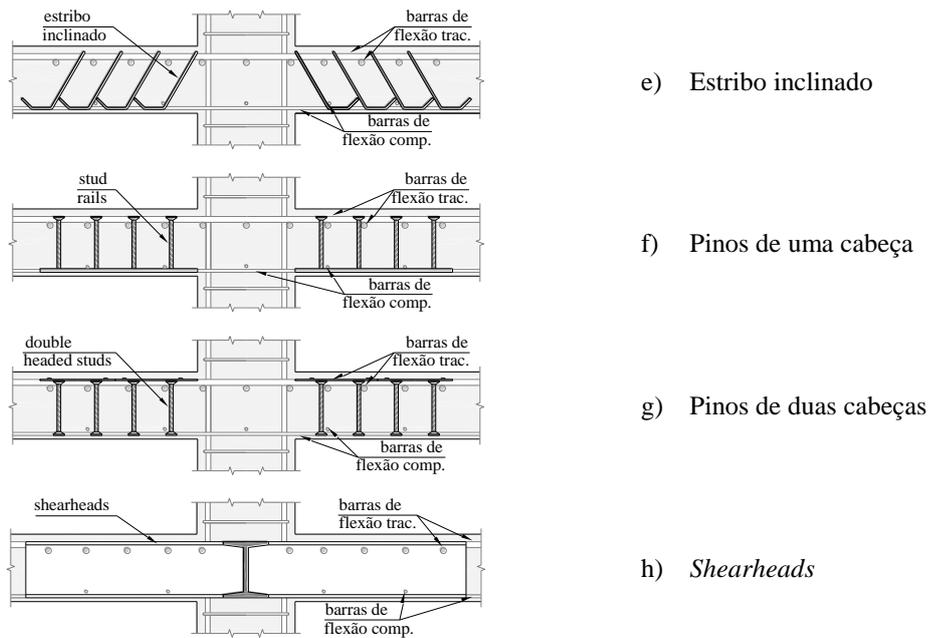


Figura 6 - Diversos tipos de armadura de cisalhamento – Ferreira (2010) (continuação)

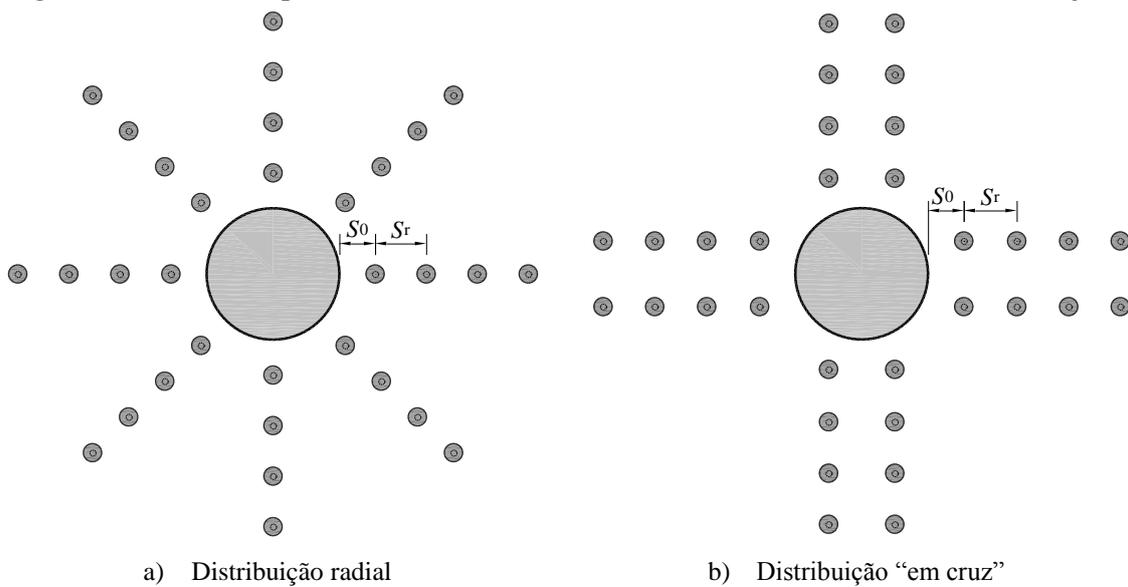


Figura 7 - Arranjos para a distribuição da armadura de cisalhamento tipo Pinos de Duas Cabeças – Ferreira (2010)

## 2.2. REGAN (2000)

Regan (2000) estudou os efeitos da armadura de cisalhamento em lajes lisas e afirma que sua função nessas lajes é similar à de outros elementos de concreto. A armadura de cisalhamento provê tensões verticais ou inclinadas para manter o equilíbrio vertical com forças inclinadas no concreto, enquanto o equilíbrio horizontal é mantido por componentes de flexão de tração e compressão. Porém, este modelo é inadequado quando se trata de resistência à punção em lajes lisas com armadura de cisalhamento.

Para uma laje com pequena quantidade de armadura de cisalhamento bem ancorada, a capacidade resistente à punção é aproximadamente igual à soma da resistência da laje como se ela não tivesse armadura de cisalhamento ( $V_{R,c}$ ), que cresce com a inclinação da superfície de ruptura, e com a resistência de escoamento da armadura de cisalhamento ( $V_s$ ), que decresce com a inclinação da superfície de ruptura.

$$V_c = \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right)^n \cdot u \cdot d \cdot v_c \leq u \cdot d \cdot v_c \quad \text{Equação 1}$$

$$V_s = \sum A_{sw} \cdot f_{ys,w} \quad \text{Equação 2}$$

onde:

$a_i$  é a projeção radial da superfície considerada;

$u$  é o perímetro que a superfície alcança a camada de armadura;

$v_c$  é a tensão última para uma laje sem armadura de cisalhamento;

$n$  é um coeficiente aqui tomado como 1,25 e aplicado a lajes de menor escala como ilustra a Figura 8;

$V_s = \sum A_{sw} \cdot f_{ys,w}$  é a soma das forças que cruzam a superfície de ruptura  $f_{sv} \leq f_{yv}$

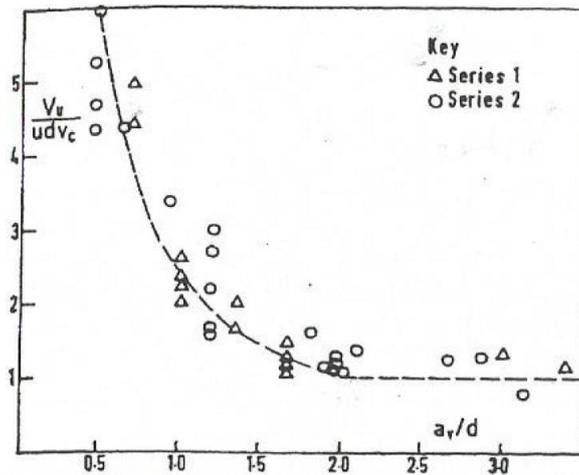


Figura 8 – Variação da Resistência ao Cisalhamento com  $a_i / d$  - Regan (2000)

Deste modo, a resistência à punção será o mínimo entre  $V_{R,c} + V_s$  e corresponde ou à superfície com  $a_i \leq 2 \cdot d$  dentro da região da armadura de cisalhamento ou àquela com  $a_i = 2 \cdot d$ .

A determinação da tensão desenvolvida nas barras aço que são cortadas pela superfície de ruptura é um problema para lajes delgadas. A tensão tem um limite absoluto igual à capacidade da menor ancoragem acima ou abaixo da fissura crítica de cisalhamento. O critério mais comum adotado é a ruptura cônica. A Figura 9 mostra os resultados de ensaios de arrancamento feitos com Pinos de Duas Cabeças. O comprimento de ancoragem foi curto para simular o efeito da punção com esse tipo de armadura e os ensaios foram realizados em região de concreto não fissurado. Todos os testes resultaram em rupturas cônicas, inclusive aqueles na qual a superfície do concreto estava inclinada aproximadamente  $60^\circ$  das barras.

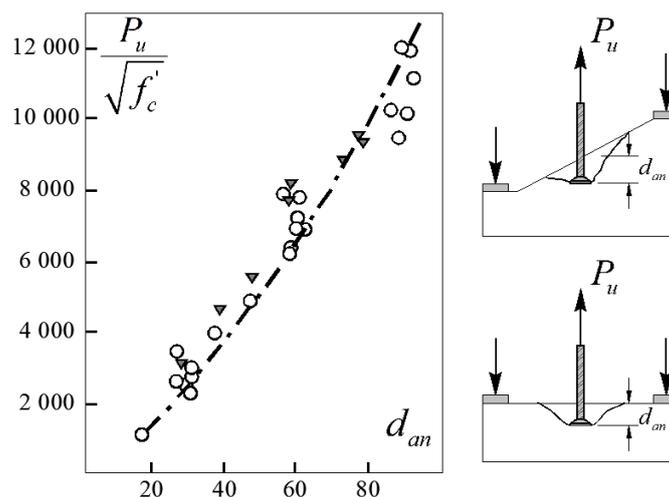


Figura 9 – Resistência ao arrancamento de Pinos de Duas Cabeças - Regan (2000)

### 2.3. FUCHS *et.al* (1995)

No contexto de rupturas cônicas, Fuchs *et. al.* criou o Método *Concrete Capacity Design*. Este método admite que a projeção da ruptura na superfície do concreto assume um formato quadrado, como pode ser visto na Figura 10. Assim, ao ser submetido a uma carga de tração, a resistência última de um conector é calculada assumindo uma inclinação de 35° entre a superfície de ruptura e a superfície do elemento de concreto. A resistência à tração de um conector em concreto, sem influência de borda ou sobreposição de cones de concreto conectores próximos, para regiões de concreto não fissurado, é dado pela Equação 3.

$$N_u = 17,33 \cdot \sqrt{f_c} \cdot h_{ef}^{1,5} \quad \text{Equação 3}$$

Onde:

$N_u$  é a carga de ruptura do cone de concreto (N);

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto de acordo com ensaio de corpo de prova cilíndrico (MPa);

$h_{ef}$  é o comprimento de ancoragem efetivo do conector (mm).



Figura 10 – Ruptura do cone de concreto de acordo com o método CCD – Costa (2016)

Quando comparando a outros modelos de ruptura cônica, o método CCD apresenta bons resultados como mostrado na Figura 11. Nota-se que a curva que melhor se ajustou aos pontos experimentais foi ao do método CCD. Este será o método adotado no trabalho para estimar a tensão nas camadas da armadura de cisalhamento de lajes submetidas à punção no método SMSR.

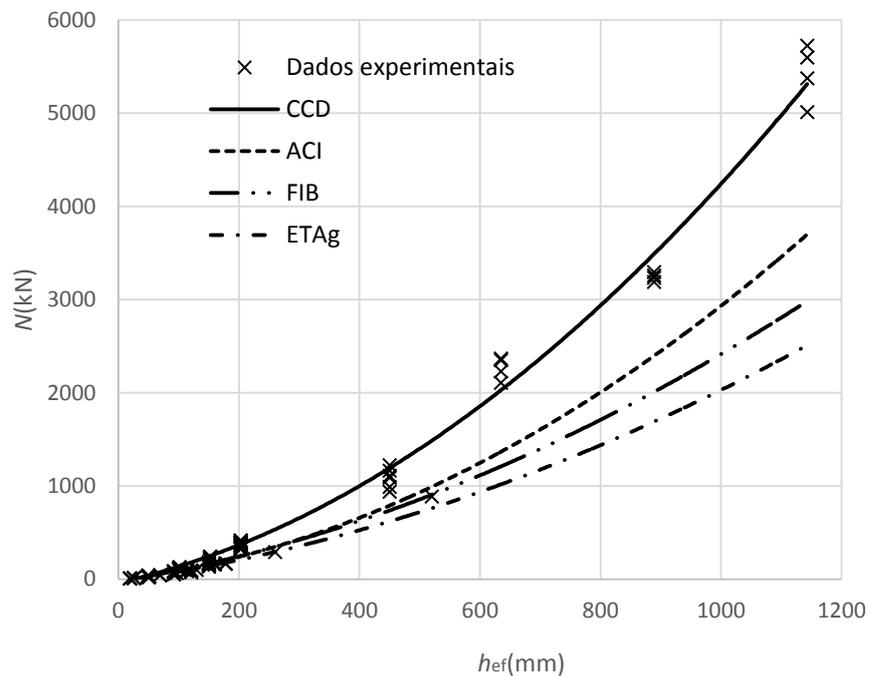


Figura 11–Ensaio de arrancamento de conectores de aço

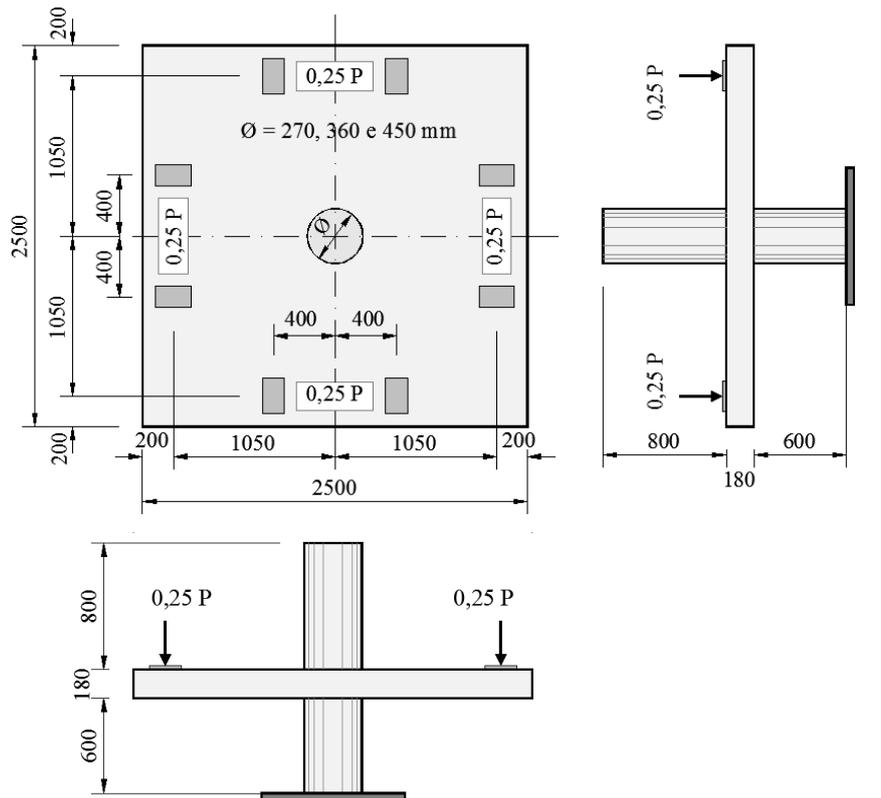
#### **2.4. FERREIRA (2010)**

Ferreira (2010), em sua tese de Doutorado, realizou 16 ensaios experimentais em lajes quadradas com dimensões 2500 mm x 2500 mm e espessura de 180 mm. Tais ensaios ocorreram em duas séries, cada uma com 8 lajes sendo ensaiadas. O esquema de carregamento e as dimensões das lajes estão ilustrados na Figura 12. A armadura de cisalhamento, quando utilizada, foi do tipo Pinos de Duas Cabeças e foi posicionada entre as armaduras de flexão.

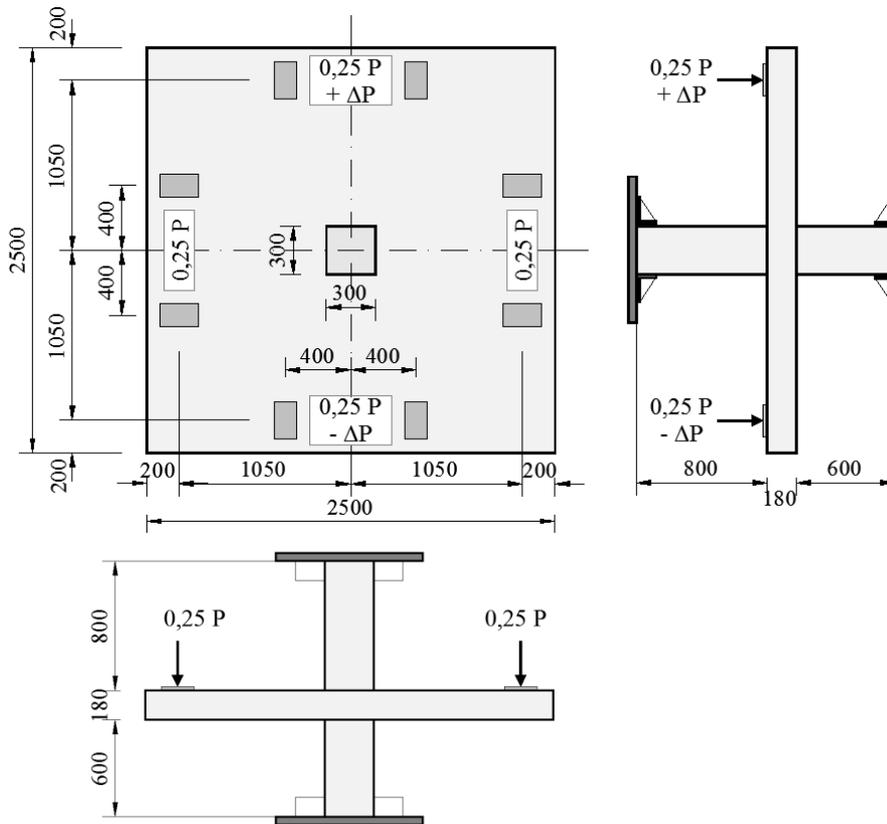
Na primeira série, 8 lajes apoiadas em pilares com seção circular foram ensaiadas com um carregamento simétrico aplicado de modo a não haver transferência de momento fletor. O objetivo desta série era avaliar o modo de ruptura da ligação laje-pilar em relação a algumas variáveis, sendo elas: as dimensões do pilar interno, a taxa de armadura de flexão tracionada, a taxa de armadura de flexão comprimida e a quantidade e distribuição das armaduras de cisalhamento. As lajes da primeira série foram LC 01, LC 02, LC 03, LC 04, LC 05, LC 06, LC 07 e LC 08.

Na segunda série, 8 lajes apoiadas em pilares de seção transversal quadrada com 300 mm de lado foram ensaiadas, de modo a avaliar o efeito da transferência de momento fletor na resistência à punção de ligações laje-pilar com e sem o emprego de armadura de cisalhamento. As lajes da segunda série LS 01, LS 02, LS 05 e LS 07 foram submetidas a um carregamento simétrico e LS 03, LS 04, LS 06 e LS 08 foram submetidas a um carregamento excêntrico. Por fim LS 05 e LS 06 serviram como referência para as outras, pois não possuíam armadura de cisalhamento. A Tabela 1 apresenta as características das lajes da primeira e segunda série.

A armadura de cisalhamento utilizada nos ensaios foi do tipo Pinos de Duas Cabeças com distribuição radial, com exceção da laje LC 04, em que os *studs* foram distribuídos em cruz.



a) Lajes da 1ª série de ensaios



b) Lajes da 2ª série de ensaios

Figura 12 - Dimensões e esquemas de carregamentos das lajes ensaiadas por Ferreira (2010)

Tabela 1 - Características das lajes ensaiadas por Ferreira (2010)

| Série de Ensaio | Laje              | Pilar (mm) | $d$ (mm) | $\rho$ (%) | $f_c$ (MPa) | Armaduras de Cisalhamento |            |                                    | $e$ (mm) |
|-----------------|-------------------|------------|----------|------------|-------------|---------------------------|------------|------------------------------------|----------|
|                 |                   |            |          |            |             | No. Camadas               | No. Linhas | $A_{sw} / Cam.$ (mm <sup>2</sup> ) |          |
| 1ª Série        | LC01*             | 270        | 143      | 1,50       | 48          | 6                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC02*             | 360        | 140      | 1,55       | 47          | 6                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC03*             | 450        | 142      | 1,41       | 49          | 6                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC04*             | 360        | 140      | 1,55       | 48          | 6                         | 12         | 942,5                              | 0        |
|                 | LC05*             | 360        | 140      | 2,05       | 50          | 6                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC06 <sup>o</sup> | 360        | 143      | 1,45       | 49          | 6                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC07 <sup>†</sup> | 360        | 144      | 1,60       | 49          | 7                         | 10         | 785,4                              | 0        |
|                 | LC08*             | 360        | 144      | 1,62       | 48          | 6                         | 12         | 942,5                              | 0        |
| 2ª Série        | LS01*             | 300        | 145      | 1,54       | 48          | 2                         | 12         | 942,5                              | 0        |
|                 | LS02*             | 300        | 143      | 1,46       | 49          | 4                         | 12         | 942,5                              | 0        |
|                 | LS03*             | 300        | 145      | 1,54       | 50          | 2                         | 12         | 942,5                              | 315      |
|                 | LS04*             | 300        | 143      | 1,46       | 49          | 4                         | 12         | 942,5                              | 315      |
|                 | LS05              | 300        | 143      | 1,58       | 50          | --                        | --         | --                                 | 0        |
|                 | LS06              | 300        | 144      | 1,56       | 50          | --                        | --         | --                                 | 315      |
|                 | LS07#             | 300        | 143      | 1,70       | 49          | 4                         | 12         | 1.472,7                            | 0        |
|                 | LS08#             | 300        | 144      | 1,68       | 48          | 4                         | 12         | 1.472,7                            | 315      |

Obs.:

|                              |                              |                   |                     |
|------------------------------|------------------------------|-------------------|---------------------|
| $f_{ys, \phi 16,0} = 557MPa$ | $f_{ys, \phi 20,0} = 541MPa$ |                   |                     |
| * $s_0 = 70mm$               | $s_r = 100mm$                | $\phi_w = 10.0mm$ | $f_{ys,w} = 573MPa$ |
| <sup>†</sup> $s_0 = 55mm$    | $s_r = 80mm$                 | $\phi_w = 10.0mm$ | $f_{ys,w} = 573MPa$ |
| # $s_0 = 70mm$               | $s_r = 100mm$                | $\phi_w = 12.5mm$ | $f_{ys,w} = 530MPa$ |
| <sup>o</sup> $s_0 = 70mm$    | $s_r = 100mm$                | $\phi_w = 10.0mm$ | $f_{ys,w} = 573MPa$ |

$\rho' = 1,14 \%$

Foi necessário atribuir aos segmentos de pilar, nos quais as lajes se apoiavam restrições semelhantes às verificadas em um edifício de múltiplos pavimentos. Para isso foi utilizado o pórtico de reação existente no Laboratório, que foi adaptado também para restringir a translação dos segmentos de pilar. A Figura 13 e a Figura 14 ilustram o sistema de aplicação de cargas.

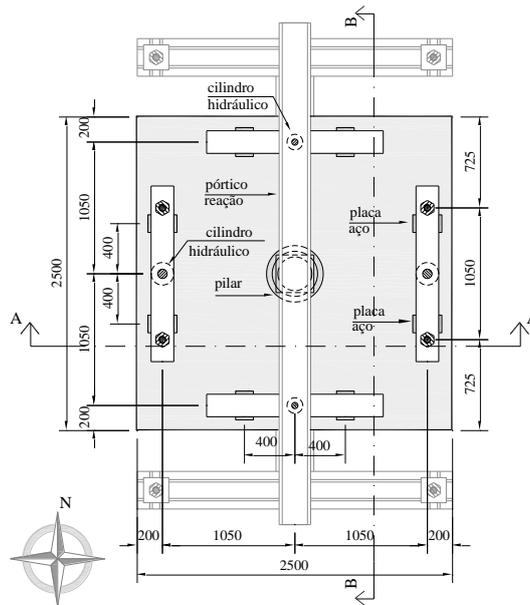


Figura 13 - Sistema de ensaio – vista superior – (Ferreira, 2010)

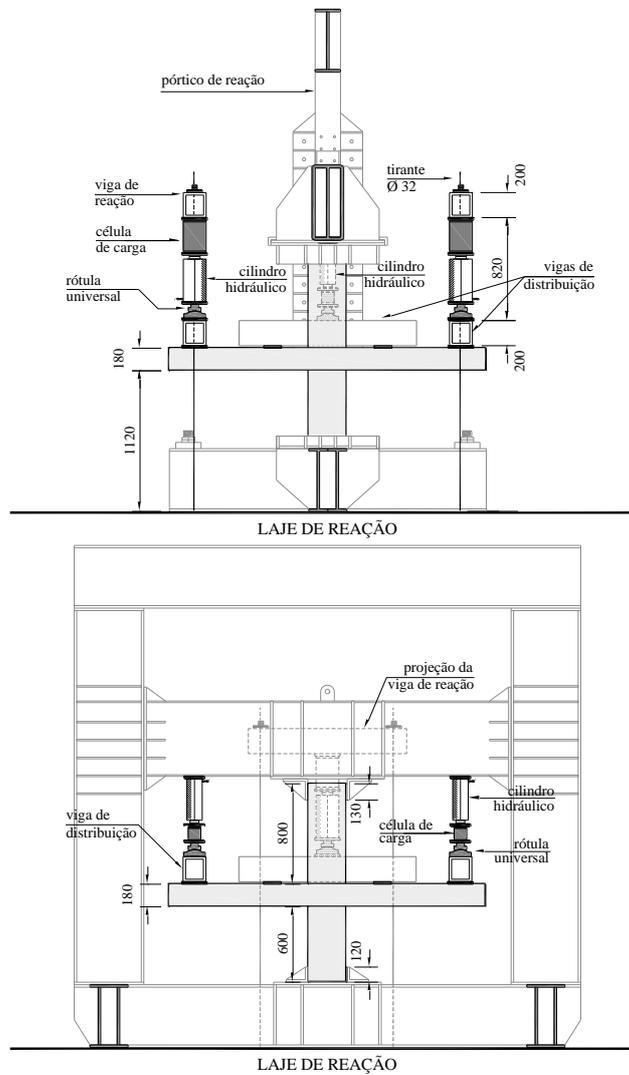


Figura 14 - Sistema de ensaio: cortes AA e BB – Ferreira (2010)

Sabe-se que a resistência ao cisalhamento varia em função da inclinação da superfície de ruptura, pois há menor contribuição do concreto na resistência à punção à medida que a inclinação da superfície de ruptura também diminui, mas também mais camadas de armadura de cisalhamento são ativadas, tornando-as efetivas no combate às tensões de cisalhamento. A Figura 15 ilustra a variação da resistência ao cisalhamento em função do ângulo da superfície de ruptura em uma viga armada com estribos.

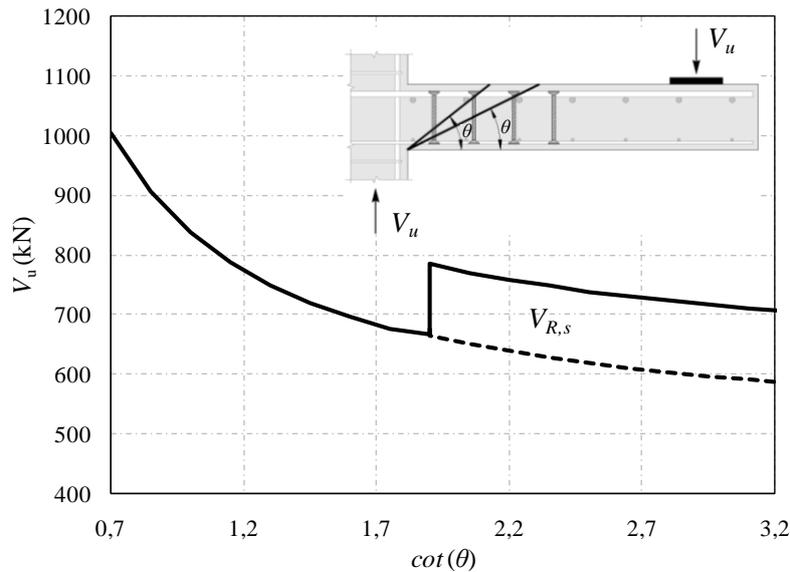


Figura 15 – Resistência ao cisalhamento em função da inclinação da superfície de ruptura - Ferreira (2010)

O autor propôs a Equação 4 para expressar a resistência da ligação laje-pilar à punção. A equação representa o somatório da resistência do concreto dada pela Equação 5 e da resistência da armadura de cisalhamento dada pela Equação 6.

$$V_{R,cs} = \eta_c \cdot V_{RC} \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + V_{R,s} \quad \text{Equação 4}$$

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c')^{1/3} \cdot u_i \cdot d \quad \text{Equação 5}$$

$$V_{R,s} = \sum A_{sw, cam} \cdot f_{ys, w} \quad \text{Equação 6}$$

onde:

$\eta_c$  é um coeficiente aqui assumido como igual a 0,75;

$V_{R,c}$  é a parcela de contribuição do concreto obtida pela Equação 5;

$d$  é a altura útil da laje;

$a_i$  é a projeção horizontal da superfície de ruptura investigada;

$V_{R,s}$  é a parcela de contribuição das armaduras de cisalhamento efetivamente ancoradas e cortadas pela superfície de ruptura;

$\xi$  é o *size effect* determinado como  $\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2$ , com  $d$  em mm;

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada, definida como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ ;

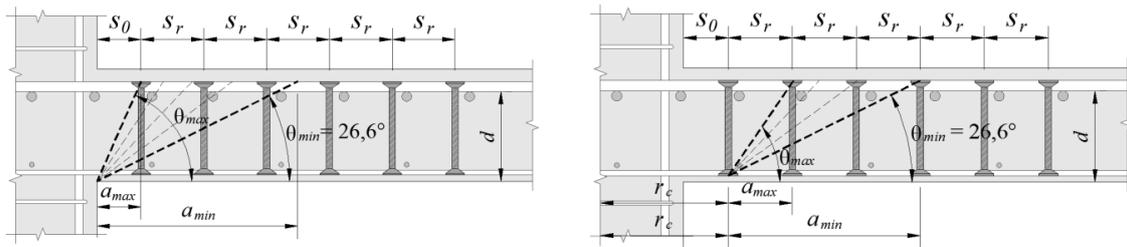
$f_c$  é a resistência a compressão do concreto;

$u_i$  é o perímetro crítico com geometria igual a do EC2 (2004), porém definido a uma distância  $a_i$  da face do pilar ou do ponto inferior da superfície de ruptura investigada;

$A_{sw, cam}$  é a área de aço por camada de armaduras de cisalhamento;

$f_{ys,w}$  é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento.

O autor afirma que cada possível superfície de ruptura deve ser investigada de modo a obter uma representação razoável. Observa-se pela Figura 16(a) que, partindo do princípio de que a fissura crítica se inicia na extremidade do pilar, a máxima inclinação que ela pode atingir é determinada por uma linha traçada da face do pilar até a ancoragem da primeira camada de armaduras. Nessa situação apenas o concreto contribui na resistência à punção. Tal linha varia teoricamente da inclinação máxima, que é função da distância da primeira camada de armaduras até a face do pilar, até uma inclinação mínima dada pela superfície de ruptura de uma laje sem armadura de cisalhamento, que experimentalmente é dada por  $\theta = 26,6^\circ$  de acordo com o EC2(2004). Essa linha ainda pode se iniciar na base das camadas das armaduras de cisalhamento como na Figura 16 (b).

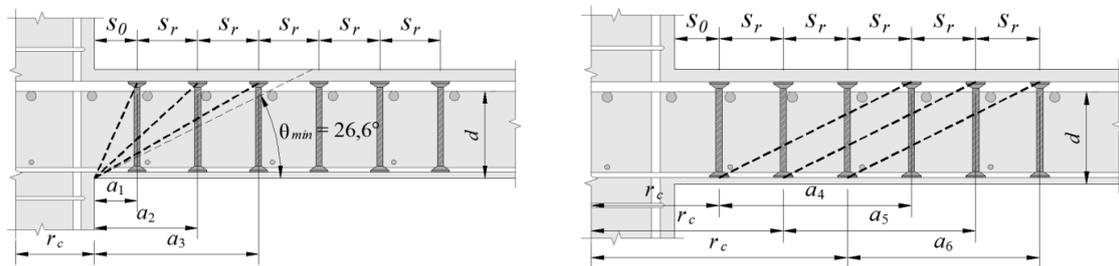


a) superfícies de ruptura iniciando no pilar

b) superfícies de ruptura iniciando na 1ª camada

Figura 16 - Superfícies de ruptura teóricas dentro da região das armaduras de cisalhamento – Ferreira (2010)

Ferreira (2010) simplificou essa investigação, estabelecendo que as superfícies de ruptura irão buscar sempre as extremidades das armaduras de cisalhamento. Assim, o número total de superfícies a serem investigadas será sempre igual ao número de camadas adotadas, como ilustrado nas Figura 17(c) e (d). Tal método foi denominado *Surface of Minimum Shear Resistance (SMSR)*. O autor considerou que a utilização deste método pode ser interessante do ponto de vista de projeto porque ele pode atribuir maior sensibilidade aos projetistas quanto à resistência à punção.



c) superfícies de ruptura práticas iniciando no pilar

d) superfícies de ruptura práticas iniciando nas camadas

Figura 17 - Superfícies de ruptura práticas dentro da região das armaduras de cisalhamento – Ferreira (2010)

## 2.5. OLIVEIRA (2013)

Oliveira (2013), em sua tese de Doutorado, realizou uma série de ensaios experimentais com um total de 16 lajes quadradas com dimensões 2500 mm x 2500 mm e espessura de 180 mm. O objetivo destes ensaios era simular o fenômeno da punção na região em torno de um pilar interno de dimensões 200x400mm com altura total de 1580 mm. A primeira série era composta pelas lajes LN01, LN02, LN03, LN04 e LN05; a segunda série era composta pelas lajes LS01, LS02, LS03, LS04, LS05 e LS06; e a terceira série era composta pelas lajes LW01, LW02, LW03, LW04 e LW05.

Na primeira série, as lajes LN foram submetidas a um carregamento simétrico, ou seja, sem transferência de momento. Na segunda série, as lajes LS foram submetidas a um carregamento excêntrico com momento aplicado na direção de maior inércia do pilar. Por fim, na terceira série, as lajes LW foram sujeitas a um carregamento excêntrico na direção de menor inércia do pilar.

As variáveis analisadas nos ensaios foram: a presença ou não de armadura de cisalhamento, a taxa de armadura de cisalhamento, o número de camadas da armadura de cisalhamento, o tipo de carregamento (simétrico ou excêntrico) e o eixo de flexão dos modelos submetidos à transferência de momento para a ligação laje-pilar. A Tabela 2 apresenta as características principais das lajes ensaiadas.

Quando utilizada, a armadura de cisalhamento foi do tipo Pinos de Duas Cabeças, que foram distribuídos radialmente em torno do pilar em 14 linhas. O número de camadas variou de laje para laje ensaiada.

As Figura 18 e Figura 19 apresentam os pontos de aplicação e placas de distribuição para os 3 tipos de ensaio nas lajes. Na Figura 19, nota-se que o autor aplicou uma carga de  $0,40P$  de um lado e  $0,10P$  do outro, de modo à desbalancear o carregamento e gerar momento na ligação laje-pilar.

Os ensaios foram realizados em um pórtico metálico, montado sobre a laje de reação do Laboratório de Estruturas da Universidade de Brasília. A Figura 20 apresenta o sistema de aplicação de cargas das lajes ensaiadas.

Tabela 2 - Características das lajes – (OLIVEIRA, 2013)

| Série    | Lajes | $d$<br>(mm) | Pilar<br>(mm) | $\rho$<br>(%) | $f_c$<br>(MPa) | $f_{ys,w}$<br>(MPa) | $\phi_w$<br>(mm) | $\phi_{flexão}$<br>(mm) | Armaduras de Cisalhamento |                                       |
|----------|-------|-------------|---------------|---------------|----------------|---------------------|------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
|          |       |             |               |               |                |                     |                  |                         | No. Camadas               | $A_{sw} / Cam.$<br>(mm <sup>2</sup> ) |
| 1ª Série | LN01  | 143         | 400/200       | 1,58          | 55,1           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 3                         | 704                                   |
|          | LN02  | 143         | 400/200       | 1,58          | 53,8           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 6                         | 704                                   |
|          | LN03  | 143         | 400/200       | 1,58          | 51,2           | ---                 | ---              | 16,0                    | ---                       | ---                                   |
|          | LN04  | 143         | 400/200       | 1,58          | 55,5           | 651                 | 6,3              | 16,0                    | 4                         | 436                                   |
|          | LN05  | 142         | 400/200       | 1,60          | 54,8           | 602                 | 12,5             | 16,0                    | 5                         | 1718                                  |
| 2ª Série | LS01  | 143         | 400/200       | 1,58          | 53,6           | ---                 | ---              | 16,0                    | ---                       | ---                                   |
|          | LS02  | 144         | 400/200       | 1,56          | 53,9           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 3                         | 704                                   |
|          | LS03  | 142         | 400/200       | 1,60          | 54,4           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 6                         | 704                                   |
|          | LS04  | 143         | 400/200       | 1,58          | 51,3           | 651                 | 6,3              | 16,0                    | 4                         | 436                                   |
|          | LS05  | 142         | 400/200       | 1,60          | 51,0           | 602                 | 12,5             | 16,0                    | 5                         | 1718                                  |
|          | LS06  | 143         | 400/200       | 1,58          | 53,0           | 597                 | 10,0             | 16,0                    | 6                         | 1100                                  |
| 3ª Série | LW01  | 141         | 200/400       | 1,62          | 50,2           | ---                 | ---              | 16,0                    | ---                       | 704                                   |
|          | LW02  | 143         | 200/400       | 1,58          | 52,2           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 3                         | 704                                   |
|          | LW03  | 142         | 200/400       | 1,60          | 51,5           | 573                 | 8,0              | 16,0                    | 6                         | 704                                   |
|          | LW04  | 142         | 200/400       | 1,60          | 51,5           | 651                 | 6,3              | 16,0                    | 4                         | 436                                   |
|          | LW05  | 142         | 200/400       | 1,60          | 50,6           | 602                 | 12,5             | 16,0                    | 5                         | 1718                                  |

Obs.:

$s_0 = 70mm$  (espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de studs)

$s_r = 100mm$  (espaçamento entre a face do pilar e a primeira camada de studs)

Todas as lajes possuíam armadura de cisalhamento com 14 linhas de *studs* distribuídos de forma radial

$f_{ys} = 577MPa$  (tensão de escoamento da armadura de flexão)

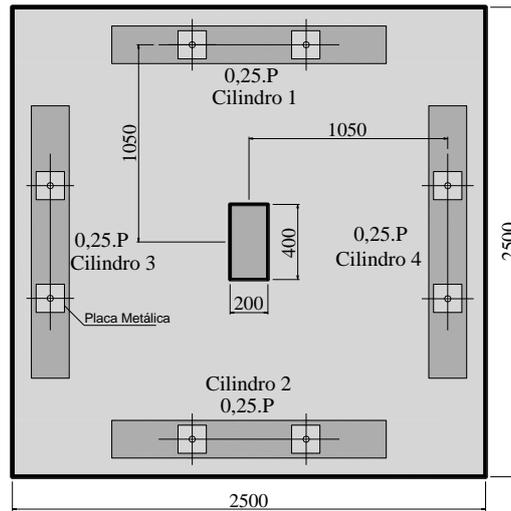


Figura 18 - Pontos de aplicação e placas de distribuição de carga das lajes LN – Oliveira (2013)

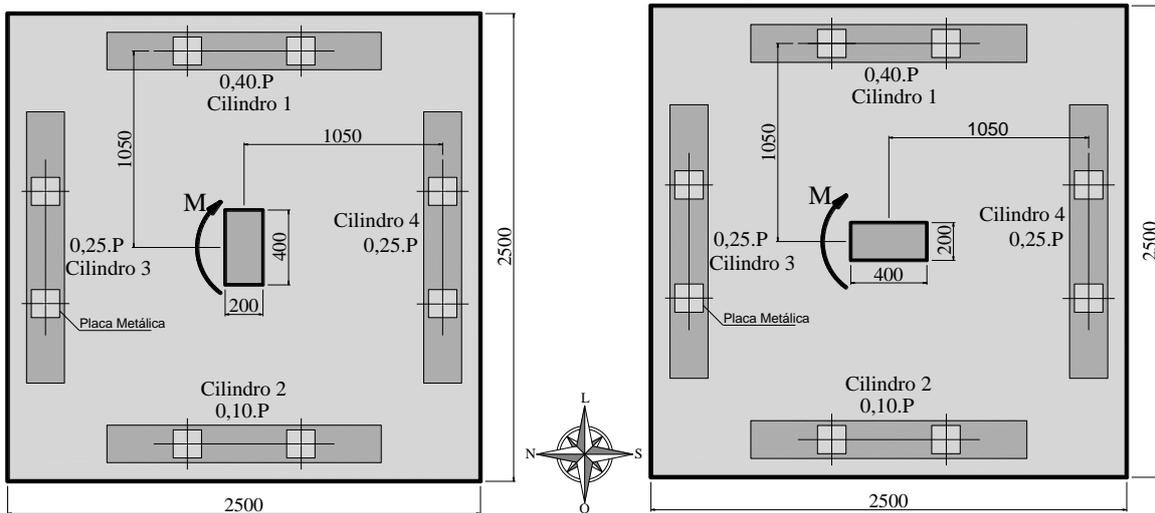
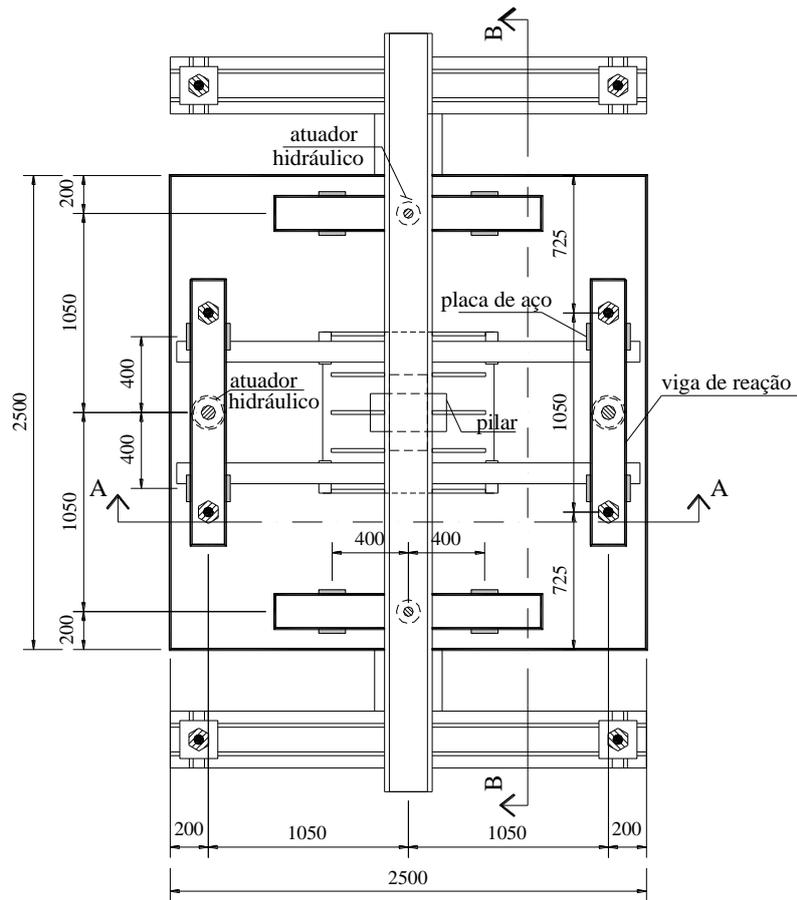
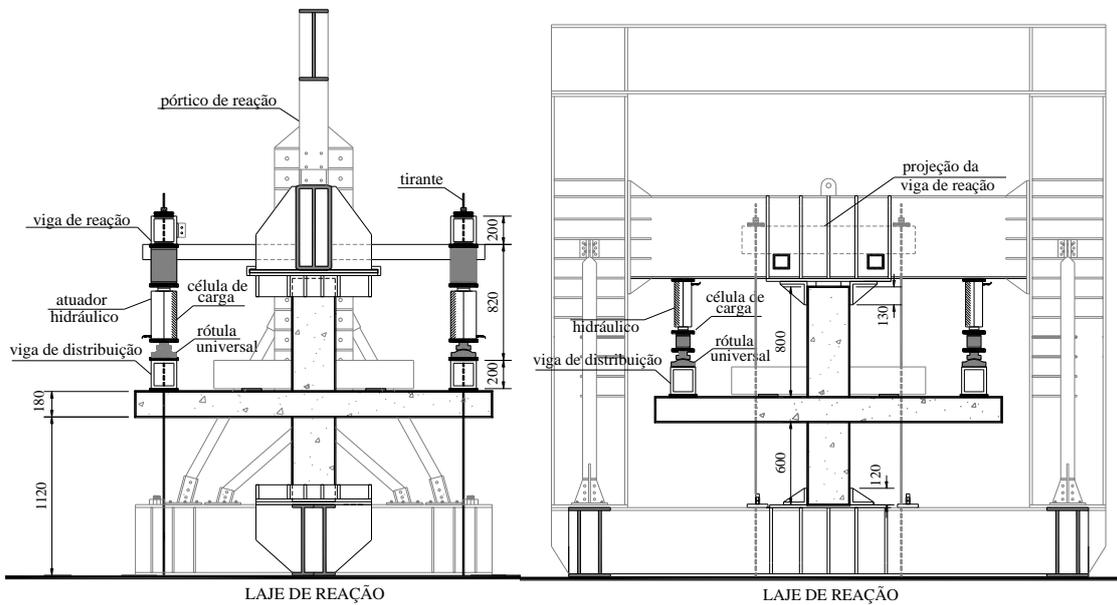


Figura 19 - Pontos de aplicação e placas de distribuição de carga das lajes LS e LW – Oliveira (2013)



a) – Vista Superior



b) - Corte A-A

c) – Corte B-B

Figura 20 – Esquema de ensaio do pórtico de reação metálico – Oliveira (2013)

Oliveira (2013) avaliou os resultados de seus ensaios e também de outros ensaios realizados por diversos autores que compõem um banco de dados voltado para o estudo de punção em lajes lisas. Com base nesses resultados, o autor pôde apresentar uma modificação no SMSR apresentado por Ferreira (2010). Uma das modificações propostas reduz a capacidade resistente do concreto, substituindo o fator 0,18 da Equação 5 de Ferreira (2010) por 0,15 nos casos com e sem transferência de momento fletor. Assim, a resistência à punção de uma ligação laje-pilar com armadura de cisalhamento para um carregamento simétrico utilizando o SMSR modificado por Oliveira (2013) é determinado pela Equação 7.

$$V_{R,cs} = \eta_c \cdot 0,15 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_i \cdot d \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + \sum A_{sw, cam} \cdot f_{ys,w} \quad \text{Equação 7}$$

onde:

$\eta_c$  é um coeficiente aqui assumido como igual a 0,75;

$d$  é a altura útil da laje;

$a_i$  é a projeção horizontal da superfície de ruptura investigada;

$\xi$  é o *size effect* determinado por  $\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2$ , com  $d$  em mm;

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada, definida como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ ;

$f_c$  é a resistência a compressão do concreto;

$u_i$  é o perímetro crítico com geometria igual a do EC2, porém definido a uma distância  $a_i$  da face do pilar ou do ponto inferior da superfície de ruptura investigada;

$A_{sw, cam}$  é a área de aço por camada de armaduras de cisalhamento;

$f_{ys,w}$  é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento.

A Tabela 3 apresenta apenas as lajes do banco de dados que apresentaram ruptura dentro da região da armadura de cisalhamento de modo a verificar a eficiência da modificação do método proposto por Oliveira (2013).

Tabela 3 - Comparação dos métodos SMSR e SMSR-MOD – (OLIVEIRA, 2013)

| Autor                         | Lajes | $V_u$<br>(kN) | Tipo de Ruptura<br>(Ensaio) | SMSR<br>(FERREIRA 2010) |                |              |             | SMSR<br>MOD        |                |             |      |
|-------------------------------|-------|---------------|-----------------------------|-------------------------|----------------|--------------|-------------|--------------------|----------------|-------------|------|
|                               |       |               |                             | $V_{SMSR}$<br>(kN)      | $V_u/V_{SMSR}$ | Med.         | C.V         | $V_{SMSR}$<br>(kN) | $V_u/V_{SMSR}$ | Med.        | C.V  |
| Oliveira<br>(2013)            | LN02  | 1144          | in                          | 1051                    | 1,09           | 1,06         | 0,04        | 943                | 1,21           | 1,19        | 0,03 |
|                               | LN04  | 965           | in                          | 939                     | 1,03           |              |             | 830                | 1,16           |             |      |
| Ferreira<br>(2010)            | LS02  | 1128          | in                          | 1074                    | 1,05           | 1,05         | ---         | 895                | 1,26           | 1,26        | ---  |
| Regan<br>(2009)               | 1     | 881           | in                          | 940                     | 0,94           | 0,93         | 0,02        | 783                | 1,12           | 1,11        | 0,02 |
|                               | 3     | 1038          | fc/in                       | 1135                    | 0,91           |              |             | 946                | 1,10           |             |      |
| Birkle<br>(2004)              | S2    | 574           | in                          | 625                     | 0,92           | 0,91         | 0,07        | 558                | 1,03           | 1,03        | 0,07 |
|                               | S3    | 572           | in                          | 637                     | 0,90           |              |             | 568                | 1,01           |             |      |
|                               | S8    | 1050          | in                          | 1252                    | 0,84           |              |             | 1087               | 0,97           |             |      |
|                               | S9    | 1091          | in                          | 1069                    | 1,02           |              |             | 934                | 1,17           |             |      |
|                               | S11   | 1620          | in                          | 1894                    | 0,86           |              |             | 1647               | 0,98           |             |      |
|                               | S12   | 1520          | in                          | 1681                    | 0,90           |              |             | 1470               | 1,03           |             |      |
| Regan e<br>Samadian<br>(2001) | A2    | 950           | in                          | 914                     | 1,04           | 1,04         | ---         | 775                | 1,23           | 1,23        | ---  |
| Gomes e<br>Regan<br>(1999)    | 2     | 693           | in                          | 606                     | 1,14           | 1,24         | 0,11        | 521                | 1,33           | 1,44        | 0,11 |
|                               | 3     | 773           | in/out                      | 690                     | 1,12           |              |             | 596                | 1,30           |             |      |
|                               | 10    | 800           | in                          | 616                     | 1,30           |              |             | 530                | 1,51           |             |      |
|                               | 11    | 907           | in                          | 644                     | 1,41           |              |             | 558                | 1,62           |             |      |
| Cordovil<br>(1995)            | 8     | 187           | ---                         | 342                     | 0,55           | 0,69         | 0,29        | 285                | 0,66           | 0,86        | 0,34 |
|                               | 11    | 205           | ---                         | 340                     | 0,60           |              |             | 283                | 0,72           |             |      |
|                               | 14    | 302           | ---                         | 331                     | 0,91           |              |             | 296                | 1,20           |             |      |
|                               |       |               |                             |                         |                | <b>Média</b> | <b>0,98</b> |                    |                |             |      |
|                               |       |               |                             |                         |                | <b>C.V</b>   | <b>0,21</b> |                    |                |             |      |
|                               |       |               |                             |                         |                |              |             |                    |                | <b>1,14</b> |      |
|                               |       |               |                             |                         |                |              |             |                    |                | <b>0,20</b> |      |

A partir da análise da Tabela 3, verifica-se que o SMSR-MOD apresentou resultados mais satisfatórios que o SMSR, uma vez que a média da relação  $V_u/V_{SMSR}$  obtida foi 1,14 em comparação a 0,98 de Ferreira (2010). O coeficiente de variação de 0,20 é relativamente alto, mas permaneceu constante em comparação ao método anterior.

Com exceção das lajes de Gomes e Regan (1999), que apresentaram resultados conservadores, e das lajes de Cordovil(1995), que foram contra segurança, o método de Oliveira (2013) é preciso para a situação de carregamento simétrico das lajes.

A respeito de segurança de projeto, percebe-se que o SMSR-MOD apresentou apenas 21% das lajes contra segurança, sendo que metade dessa porcentagem representa as lajes ensaiadas por Cordovil (1995), que apresentou resultados contra a segurança em todos os métodos de cálculo analisados pelo autor em seu trabalho. Portanto, o método é satisfatório em termos de segurança de projeto.

O autor também trouxe uma inovação ao método para o caso de transferência de momento fletor, o que não foi abordado por Ferreira (2010) em seu trabalho. O parâmetro  $\beta$  dado pela Equação 8 foi inserido para relacionar o efeito do momento fletor na ligação laje-pilar. Esse parâmetro é o mesmo do Eurocode 2 (2004) e sua utilização foi bem satisfatória no SMSR-MOD. Deste modo, a resistência à punção de uma ligação laje-pilar com armadura de cisalhamento para um carregamento excêntrico é dada pela Equação 9.

$$\beta = 1 + k \cdot \frac{M_s}{V_s} \cdot \frac{u_1}{W_1} \quad \text{Equação 8}$$

$$V_{R,cs} = \frac{1}{\beta} \cdot \left[ \eta_c \cdot 0,15 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_i \cdot d \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + \sum A_{sw, cam} \cdot f_{ys,w} \right] \quad \text{Equação 9}$$

onde:

$\beta$  é um parâmetro que relaciona a transferência de momento fletor com a resistência à punção na ligação laje-pilar;

$k$  é o coeficiente que relaciona a maior com a menor dimensão do pilar ou área carregada encontrado na Tabela 4;

$M_s$  é o momento solicitante na ligação laje-pilar;

$V_s$  é a carga solicitante no pilar;

$u_1$  é o comprimento do perímetro crítico;

$W_1$  é o Módulo de Resistência Plástica perpendicular à borda do perímetro  $u_1$ ;

$\eta_c$  é um coeficiente aqui assumido como igual a 0,75;

$d$  é a altura útil da laje;

$a_i$  é a projeção horizontal da superfície de ruptura investigada;

$\xi$  é o *size effect* determinado por  $\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2$ , com  $d$  em mm;

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada, definida como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ ;

$f_c$  é a resistência a compressão do concreto;

$u_i$  é o perímetro crítico com geometria igual a do EC2, porém definido a uma distância  $a_i$  da face do pilar ou do ponto inferior da superfície de ruptura investigada;

$A_{sw, cam}$  é a área de aço por camada de armaduras de cisalhamento;

$f_{ys,w}$  é a tensão de escoamento da armadura de cisalhamento.

Tabela 4 - Valores de k para pilares retangulares – (EUROCODE 2, 2004)

|           |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|
| $c_1/c_2$ | 0,50 | 1,00 | 2,00 | 3,00 |
| k         | 0,45 | 0,60 | 0,70 | 0,80 |

onde :

$c_1$  é dimensão do pilar paralela à excentricidade da carga;

$c_2$  é dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da carga;

A Tabela 5 mostra os resultados obtidos pelo SMSR-MOD para carregamentos excêntricos nas lajes.

Tabela 5 - Resultados da aplicação do método SMSR de OLIVEIRA para carregamentos excêntricos – (OLIVEIRA, 2013)

| Autor                                   | Lajes     | $V_u$<br>(kN) | Tipo de Ruptura<br>(Ensaio) | SMSR- (OLIVEIRA 2013) |                |              |             |
|---|-----------|---------------|-----------------------------|-----------------------|----------------|--------------|-------------|
|   |           |               |                             | $V_{SMSR}$<br>(kN)    | $V_u/V_{SMSR}$ | Med.         | C.V         |
| Oliveira<br>(2013)                      | LS02      | 763           | in                          | 585                   | 1,30           | <b>1,31</b>  | <b>0,16</b> |
|   | LS03      | 775           | in                          | 567                   | 1,37           |              |             |
|   | LS04      | 712           | in                          | 523                   | 1,36           |              |             |
|   | LS05      | 926           | in                          | 561                   | 1,65           |              |             |
|   | LS06      | 904           | in                          | 587                   | 1,54           |              |             |
|   | LW02      | 711           | in                          | 657                   | 1,08           |              |             |
|   | LW03      | 733           | in                          | 646                   | 1,13           |              |             |
|   | LW04      | 617           | in                          | 604                   | 1,02           |              |             |
|   | LW05      | 815           | fc/in                       | 622                   | 1,31           |              |             |
| Ferreira<br>(2010)                      | LS04      | 722           | in                          | 585                   | 1,23           | <b>1,31</b>  | <b>0,08</b> |
|   | LS08      | 934           | in                          | 673                   | 1,39           |              |             |
| Kruger<br>(1999)                        | PP16A     | 403           | in                          | 511                   | 0,79           | <b>0,79</b>  | <b>0,04</b> |
|   | PP16B     | 432           | in                          | 567                   | 0,76           |              |             |
| Cordovil<br>(1995)                      | 10        | 219           | ---                         | 186                   | 1,39           | <b>1,38</b>  | <b>0,00</b> |
|   | 16        | 156           | ---                         | 132                   | 1,38           |              |             |
| Hawkins,<br>Bao e<br>Yamazaki<br>(1989) | 14EH0,49  | 226           | ---                         | 250                   | 0,90           | <b>0,76</b>  | <b>0,18</b> |
|   | 9,6EH0,34 | 199           | ---                         | 237                   | 0,84           |              |             |
|   | 9,6EH0,48 | 226           | ---                         | 430                   | 0,53           |              |             |
|   | 14EL0,49  | 354           | ---                         | 430                   | 0,82           |              |             |
|   | 9,6EL0,34 | 290           | ---                         | 393                   | 0,74           |              |             |
|   | 9,6EL0,56 | 345           | ---                         | 483                   | 0,71           |              |             |
|   |           |               |                             |                       |                | <b>Média</b> | <b>1,11</b> |
|   |           |               |                             |                       |                | <b>C.V</b>   | <b>0,29</b> |

Analisando a Tabela 5, verifica-se que a média da relação  $V_u/V_{SMSR}$  foi de 1,11, o que o caracteriza como método preciso. O coeficiente de variação de 0,29 é alto, mas se justifica pelo elevado número de variáveis relacionadas à resistência à punção com transferência de momento fletor.

Quanto à segurança de projeto, ressalta-se que todas as lajes em que se empregaram *studs* como armadura de cisalhamento apresentaram resultados seguros. Nas lajes que apresentaram resultados contra a segurança, a armadura de cisalhamento usada foi do tipo estribo, que não é tão bem ancorado como o *stud*. Logo o método foi considerado satisfatório pelo autor em

termos de segurança de projeto quando *studs* são empregados como armadura de cisalhamento.

## 2.6. RECOMENDAÇÕES DO EUROCODE 2:2004

O Eurocode recomenda que a verificação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armadura de cisalhamento deve ser feita em um perímetro de controle afastado  $2 \cdot d$  da face do pilar ou área carregada, conforme indicado na Figura 21. Já a estimativa da resistência à punção de uma laje desse tipo pode ser feita utilizando-se a Equação 10.

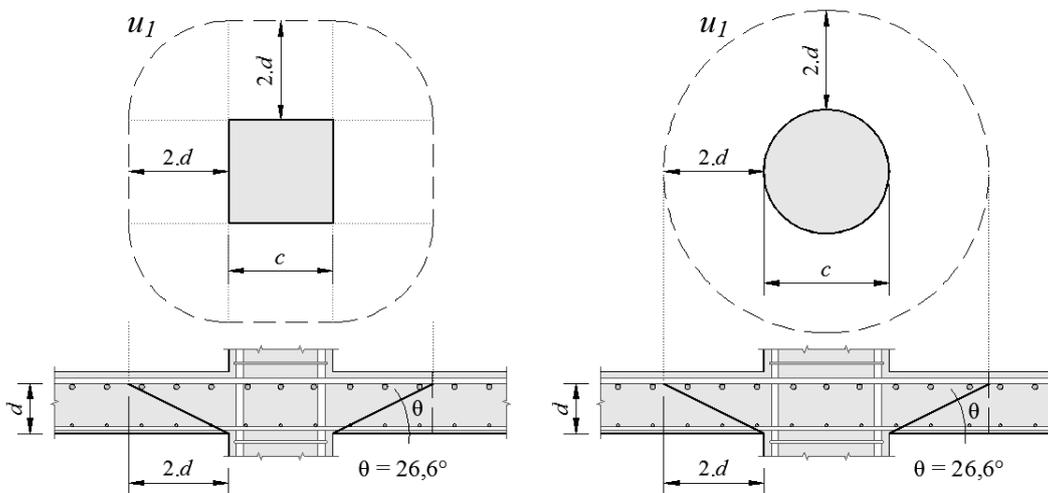


Figura 21 - Modelo para verificação da punção do Eurocode 2:2004

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_1 \cdot d \quad \text{Equação 10}$$

onde:

$d$  é a altura útil da laje;

$f_c$  é a resistência à compressão do concreto, que segundo o Eurocode deve ser menor que 90 MPa, porém respeitando-se os limites estabelecidos pelos Anexos de cada país membro da comunidade européia;

$\rho$  é a taxa de armadura de flexão tracionada média da laje. Ela deve ser calculada como  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \leq 0,02$ , onde  $\rho_x$  e  $\rho_y$  são as taxas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Devem ser consideradas as barras dentro de uma região afastada  $3 \cdot d$  das faces do pilar.

$\xi$  é o *size effect*, assumido como  $\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0$ , com  $d$  em mm;

$u_1$  é o comprimento do perímetro de controle afastado  $2 \cdot d$  das faces do pilar.

Nos casos de lajes com armaduras de cisalhamento, a norma recomenda, também, a verificação de três possíveis modos de ruptura: o primeiro trata de rupturas por cisalhamento dentro da região das armaduras, considerando a resistência máxima devido à combinação das armaduras de cisalhamento e do concreto ( $V_{R,cs}$  expresso pela Equação 11); o segundo considera a ruptura ocorrendo fora da região das armaduras de cisalhamento ( $V_{R,out}$  conforme a Equação 12); e, por fim, a verificação da resistência da biela comprimida próxima das extremidades do pilar ( $V_{R,max}$  obtido pela Equação 13). A Figura 22 apresenta os detalhes típicos recomendados pela norma quando da utilização de armaduras de cisalhamento, chamando atenção para os detalhes necessários na definição do perímetro de controle externo às armaduras de cisalhamento ( $u_{out}$  e  $u_{out,ef}$ ).

$$V_{R,cs} = 0,75 \cdot V_{R,c} + \left( 1,5 \cdot \frac{d}{s_r} \cdot A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \right) \quad \text{Equação 11}$$

$$V_{R,out} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \quad \text{Equação 12}$$

$$V_{R,max} = 0,3 \cdot f_c' \cdot \left( 1 - \frac{f_c}{250} \right) \cdot u_0 \cdot d \quad \text{Equação 13}$$

onde:

$u_0$  é o perímetro do pilar;

$u_1$  é o comprimento de um perímetro de controle afastado à  $2 \cdot d$  da face do pilar;

$u_{out}$  é o comprimento do perímetro de controle afastado à  $1,5 \cdot d$  da camada mais externa de armaduras de cisalhamento, respeitando-se um limite de  $2 \cdot d$  para a distância máxima entre duas linhas concêntricas de *studs* concêntricas. No caso deste limite não ser atendido, deve ser utilizado o perímetro de controle externo efetivo ( $u_{out,ef}$ ) conforme indicado na Figura 22;

$s_r$  é a distância entre camadas de armaduras de cisalhamento;

$A_{sw}$  é a área das armaduras de cisalhamento por camada;

$f_{yw,ef}$  é a tensão efetiva na armadura de cisalhamento, que deve ser calculado como

$$f_{yw,ef} = 1,15 \cdot (250 + 0,25 \cdot d) \leq f_{ysw}, \text{ dado em MPa e com } d \text{ em mm.}$$

Em sua recente atualização, o *Corrigendum* AC – Eurocode 2 (2010), não se observam grandes mudanças em suas recomendações para o dimensionamento à punção, apresentando modificações, em relação à versão anterior, apenas no ajuste do modelo de bielas e tirantes alterando o ângulo de inclinação da biela de 45° para 26,5°, proposto por BERTAGNOLI e MANCINI (2008). Com os devidos ajustes a resistência ao esmagamento da biela pode ser obtida pela Equação 14. A atualização de 2014 traz uma restrição a  $V_{R,cs}$  como mostrado na Equação 15.

$$V_{Rmax.EC2-10} = 0,4 \cdot f_c \cdot v \cdot u_0 \cdot d \quad \text{Equação 14}$$

$$V_{R,cs} = 0,75 \cdot V_{R,c} + V_s \leq 1,5 \cdot V_{R,c} \quad \text{Equação 15}$$

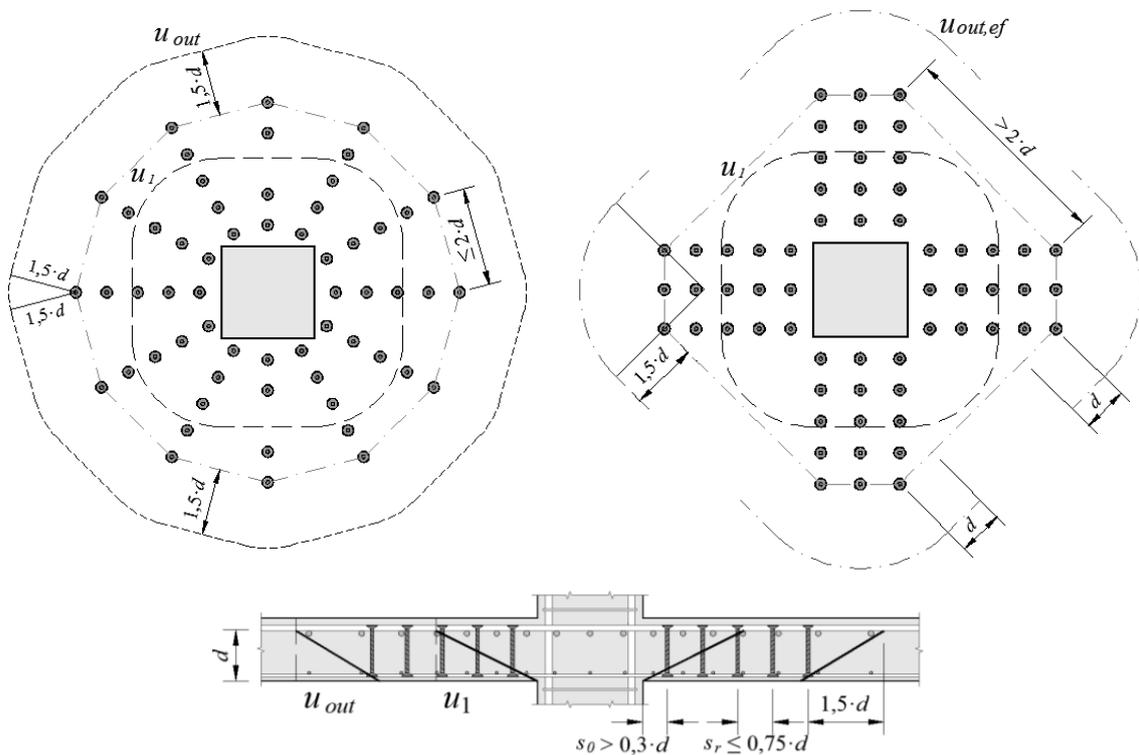


Figura 22– Detalhes típicos para arranjos com *studs* (EC2, 2004)

Nos casos em que ocorra a transferência de momentos na ligação laje-pilar, esta norma recomenda que a verificação da resistência à punção seja feita dividindo-se à resistência de uma laje sem momentos desbalanceados (Equação 11, Equação 12 e Equação 13) por um coeficiente  $\beta$ , calculado conforme a Equação 16. Nesta equação, o efeito do momento desbalanceado nas tensões de cisalhamento é calculado para o perímetro de controle  $u_1$  e então extrapolado para os demais perímetros, no caso de lajes com armaduras de cisalhamento ( $u_0$  e  $u_{out}$ ).

$$\beta = 1 + k \cdot \frac{M_u}{V_u} \cdot \frac{u_1}{W_1} \quad \text{Equação 16}$$

onde:

$k$  é um coeficiente dependente da razão entre o lado maior e o lado menor do pilar ( $c_1/c_2$ ) e seu valor é uma função da parcela de momento desbalanceado transmitida por cisalhamento, flexão e torção, conforme apresentado na Tabela 4.

$M_u$  é o momento desbalanceado atuante na ligação laje pilar;

$V_u$  é a carga vertical ou reação do pilar;

$W_1$  é uma propriedade do perímetro de controle  $u_1$  para uma distribuição de cisalhamento conforme a indicada na Figura 23 e calculado segundo a Equação 17.

$$W_1 = \int_0^u |e| \cdot dl \quad \text{Equação 17}$$

onde:

$dl$  é o comprimento incremental do perímetro de controle

$e$  é a excentricidade do carregamento, calculada como  $M_u/V_u$ .

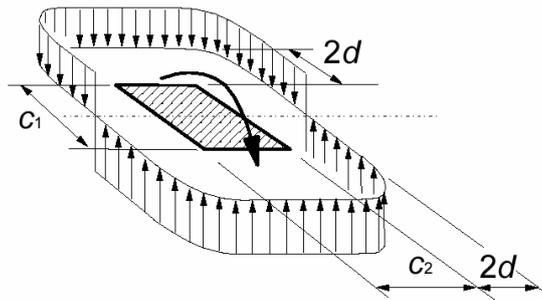


Figura 23 - Distribuição do cisalhamento provocada por um momento desbalanceado em pilares interno (EC2, 2004)

Para pilares retangulares  $W_1$  pode ser calculado segundo a Equação 18.

$$W_1 = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 4 \cdot c_2 \cdot d + 16 \cdot d^2 + 2 \cdot \pi \cdot d \cdot c_1 \quad \text{Equação 18}$$

onde:

$c_1$  é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

$c_2$  é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

## 2.7. RECOMENDAÇÕES DA ABNT NBR6118:2014

A ABNT NBR 6118 (2014), igualmente ao Eurocode 2 (2004), suas recomendações têm como base o texto do CEB-FIP MC 90 (1993). Logo, a verificação da resistência de lajes sem armadura de cisalhamento ( $V_{R,c}$ ) deve ser realizada pela Equação 10, porém sem as limitações para a taxa de armadura de flexão e para o efeito de escala recomendadas no Eurocode 2.

Para lajes armadas à punção, a NBR 6118 verifica três modos de ruptura. Para o cálculo com plano de ruptura dentro da região das armaduras ( $V_{R,cs}$ ) utiliza-se a Equação 11, porém com  $f_{yw,ef}$  não superando 345 MPa para conectores e não superando 287,5 MPa para estribos. Na verificação ao esmagamento da biela de concreto ( $V_{R,max}$ ), o cálculo é feito por analogia ao esmagamento de bielas em vigas de acordo com a Equação 19.

$$V_{R,max.NBR} = 0,45 \cdot f_c \cdot v \cdot u_0 \cdot d \quad \text{Equação 19}$$

onde:

$\nu$  é o fator de redução da eficiência da resistência à compressão do concreto da biela devida a localização em uma zona fissurada devida a tensões de tração lateral. Dado por  $\nu = 0,6 \cdot 1 - f_c/250$  ;

Além disso, a ABNT NBR (2014) comenta que a estimativa de resistência das bielas pode ser aumentada em 20% para lajes com carregamento concêntrico.

Outra diferença importante entre as duas recomendações normativas se refere à geometria e comprimento do perímetro de controle fora da região das armaduras de cisalhamento. Para o perímetro de controle  $u_{out}$ , a norma brasileira recomenda que este seja adotado como afastado  $2 \cdot d$  da última camada de armaduras e que seja circular, no caso de arranjos radiais, e não poligonal como no Eurocode 2:2004. No caso de  $u_{out,ef}$  a geometria é a mesma adotada no Eurocode 2:2004, mas este perímetro também deve estar afastado à  $2 \cdot d$  da última camada de armaduras e não  $1,5 \cdot d$  como na norma anterior. Esses detalhes, bem como os espaçamentos para as armaduras são apresentados na Figura 24.

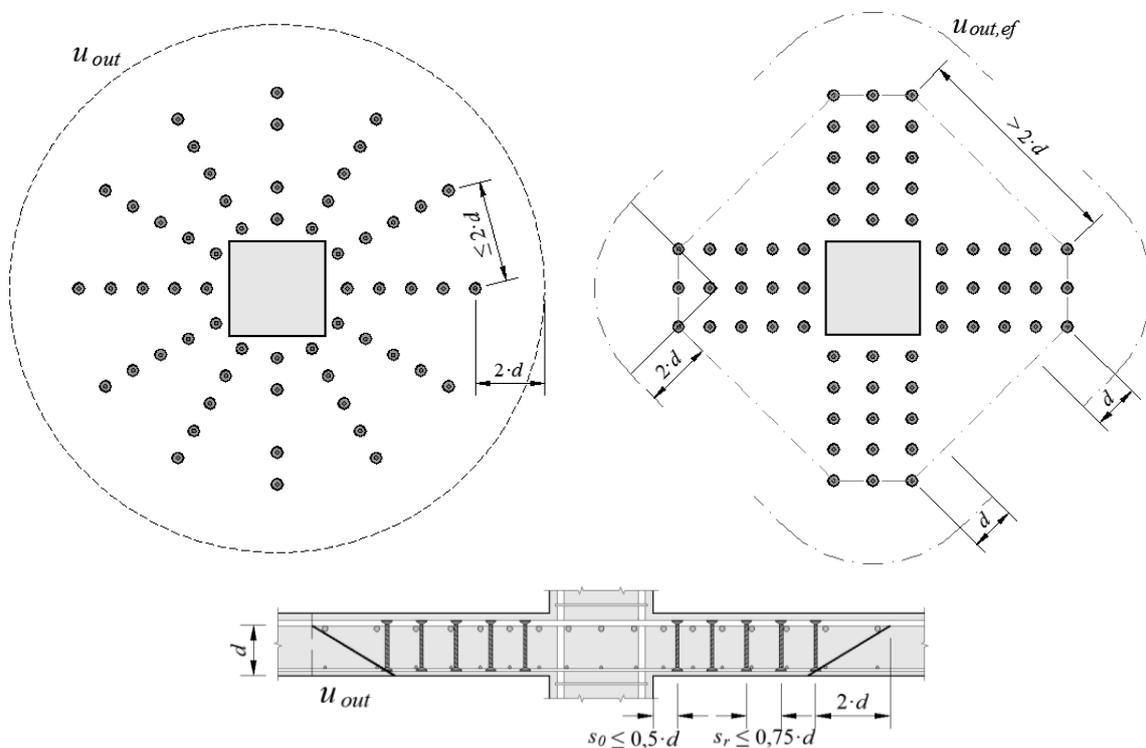


Figura 24– Detalhes típicos para arranjos com *studs* (NBR6118)

### 3. ROTINA COMPUTACIONAL

Com base no que foi proposto nos trabalhos de Ferreira (2010) e Oliveira (2013), esse trabalho propõe uma rotina computacional em VBA (*Visual Basic for Applications*) para checar todas as possíveis superfícies de ruptura dentro da região da armadura de cisalhamento, partindo do pilar e também da base de camada da armadura de cisalhamento, variando o ângulo de  $\theta_{\max}$ , como uma função de da altura de  $S_0$  ou  $S_r$  e da altura do *stud* até o  $\theta_{\min}$  de  $26,6^\circ$ . A rotina foi aplicada a um banco de dados de lajes com carregamento simétrico e excêntrico.

#### 3.1. SMSR PARA LAJES COM CARREGAMENTO SIMÉTRICO

A rotina de programação em VBA (*Visual Basic for Applications*) se dá por uma série de 3 *loops* encadeados. Primeiramente se entra com os dados em uma planilha de Excel que são altura útil da laje ( $d$ ), taxa de armadura de flexão ( $\rho$ ), número de linhas e número de camadas da armadura de cisalhamento, espaçamento do pilar para a 1ª camada de armadura de cisalhamento ( $S_0$ ), espaçamento entre as camadas da armadura de cisalhamento ( $S_r$ ), dimensões do pilar ( $C_1$  e  $C_2$ ), resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ), o tamanho do stud ( $h_{stud}$ ) e o cobrimento inferior ( $c_{inf}$ ). Depois se começa a iteração em  $i_i$ , que significa a posição da superfície de ruptura, sendo  $i_0$ , as possíveis superfícies que se iniciam no pilar,  $i_1$  as possíveis superfícies que se iniciam na base da primeira camada da armadura de cisalhamento, etc. Com esses  $i_i$ , se calcula  $\theta_{\min}$  e  $\theta_{\max}$ , que são os limites inferiores e superiores, respectivamente, do próximo *loop* do  $\theta_i$ , que é a inclinação da superfície de ruptura. Para cada  $\theta_i$ , se calcula um  $a_i$  (projeção horizontal da superfície de ruptura). Assim se torna possível calcular o perímetro  $u_i$ , como ilustra a Figura 25. Com isso, pode-se obter  $V_{R,c}$ , dado pela Equação 20.

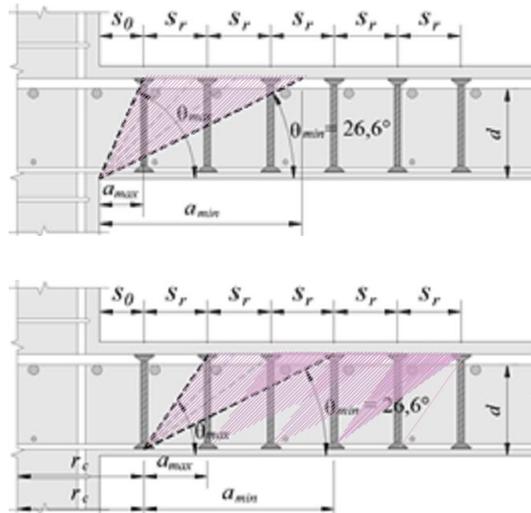


Figura 25 – Superfícies de ruptura a serem checadas - Adaptado de Ferreira (2010)

$$V_{R,c} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_i \cdot d \quad \text{Equação 20}$$

Depois se entra em outro *loop* utilizando o ponteiro  $j_i$  que varia de 1 a 3, que conta a 1ª, 2ª e 3ª camadas de armaduras de cisalhamento. O  $\theta_i$  e o  $j_i$  determinam a posição  $x_i$  onde cada uma das camadas de armadura de cisalhamento foi cortada pela superfície de ruptura. Esse valor de  $x_i$  será o comprimento de embutimento efetivo  $h_{ef}$  da formulação do Método CCD de Fuchs et al. (1995), que será aplicada com o objetivo de encontrar a força em cada camada de armadura, como já mostrado na Equação 3.

$$N_u = 17,33 \cdot \sqrt{f_c} \cdot h_{ef}^{1,5} \quad \text{Equação 3}$$

É válido ressaltar que esse coeficiente 17,33 serve para regiões de concreto não fissurado, que seria o caso da região inferior da laje. Para aplicar essa formulação a regiões de concreto fissurado, basta tomar 70% deste valor do coeficiente (Eligehausen e Balogh -1995) resultando na Equação 21

$$N_u = 12,13 \cdot \sqrt{f_c} \cdot h_{ef}^{1,5} \quad \text{Equação 21}$$

O comprimento de embutimento efetivo para o caso da Equação 21 é o complemento de  $x_i$  com o tamanho total do stud ( $h_{stud} - x_i$ ).

Para se obter a força no conector, tomou-se o menor resultado dentre estes dois e denominou-se  $p_i$ . Assim, a parcela da resistência de aço foi obtida por pela Equação 22:

$$V_{R,s} = (p_1 + p_2 + p_3) \cdot n_{linhas} \quad \text{Equação 22}$$

Ao final, é calculada a resistência ao cisalhamento dessa superfície de ruptura com inclinação  $\theta_i$  na posição  $i_i$  por meio da Equação 23:

$$V_{R,cs} = \eta_c \cdot V_{R,c} \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + V_{R,s} \quad \text{Equação 23}$$

O coeficiente  $\eta_c$  é um fator de redução da parcela do concreto por causa da abertura da fissura. Neste trabalho, este coeficiente foi tomado como 0,75.

No início da rotina é um valor infinito a  $V_{min}$ , de modo que já na primeira iteração, ele pudesse ser comparado a  $V_{R,cs}$  e recebesse seu valor. Assim, o valor obtido de  $V_{R,cs}$  no fim de cada iteração é comparado ao  $V_{min}$ . Quando as iterações terminam, tem-se o menor valor possível de  $V_{R,cs}$ , que é o resultado do método  $V_{SMSR}$ . A Figura 26 mostra a rotina programada em um módulo do VBA. A rotina foi esquematizada no fluxograma da Figura 27.

```

Option Explicit
Dim sr As Double, s0 As Double, ncamadas As Integer, cinf As Double, c1 As Double, c2 As Double
Dim nlinhas As Integer, fc As Double, ro As Double, eta As Double, csi As Double, beta As Double
Dim p(1 To 3) As String, pi As Double, st As Double, dv As Double, dv0 As Double, vmin As Double, tetamax As Double, tetamin As Double, i As Double
Dim teta As Double, ui As Double, ncr As Double, vrc As Double, j As Double, x As Double, vs As Double, vrCs As Double
Dim p1 As Double, p2 As Double, p3 As Double, imin As Double, teta x As Double, d As Double, forca 1 As Double, forca 2 As Double, forca 3 As Double
Function calcular_vmin(sr, s0, ncamadas, cinf, c1, c2, nlinhas, fc, ro, eta, csi, beta, d, st)
pi = Application.WorksheetFunction.pi

    dv = st

    dv0 = dv + cinf

    vmin = 1E+16

    For i = 0 To (ncamadas - 1) Step 1

        tetamax = Atn(dv / sr)

        tetamin = 26.6 * pi / 180

        If i = 0 Then

            tetamax = Atn(dv0 / s0)

        ElseIf i = (ncamadas - 2) Then

            tetamin = Atn(dv / (2 * sr))

        ElseIf i = (ncamadas - 1) Then

            tetamin = Atn(dv / sr)

        End If

    For teta = tetamin To tetamax Step 0.01

        If i = 0 Then

            a = dv0 / Tan(teta)
            ui = 2 * c1 + 2 * c2 + 2 * pi * a
            vrc = 0.18 * csi * ((100 * ro * fc) ^ (1 / 3)) * ui * d * (2 * d / a) * 0.001

            For j = 1 To 3 Step 1

                x = (s0 + (j - 1) * sr) * Tan(teta) - cinf

                If x > 0 And x < st Then

                    p(j) = Application.WorksheetFunction.Min(17.32 * Sqr(fc) * x ^ 1.5 * 0.001, 12.124 * Sqr(fc) * (st - x) ^ 1.5 * 0.001)

                Else

                    p(j) = 0

                End If

            Next j

            p1 = p(1)
            p2 = p(2)
            p3 = p(3)

            vs = (p1 + p2 + p3) * nlinhas

            vrCs = (eta * vrc + vs)

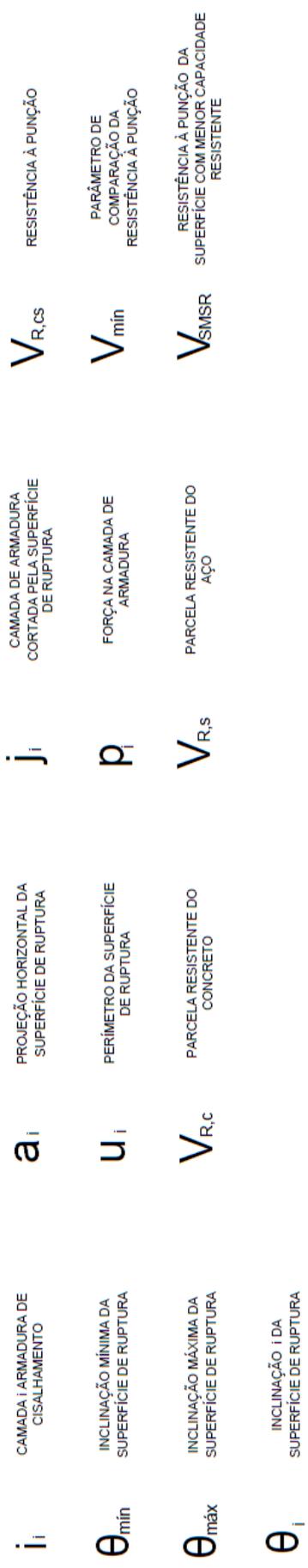
```

```

Else
a = (dv / Tan(teta))
ui = 2 * c1 + 2 * c2 + 2 * pi * (a + s0 + (i - 1) * sr)
vrc = 0.18 * csi * ((100 * ro * fc) ^ (1 / 3)) * ui * d * (2 * d / a) * 0.001
For j = 1 To 3 Step 1
x = j * sr * Tan(teta)
If x > 0 And x < st Then
p(j) = Application.WorksheetFunction.Min(17.32 * Sqr(fc) * x ^ 1.5 * 0.001, 12.124 * Sqr(fc) * (st - x) ^ 1.5 * 0.001)
Else
p(j) = 0
End If
Next j
p1 = p(1)
p2 = p(2)
p3 = p(3)
vs = (p1 + p2 + p3) * nlinhas
vracs = (eta * vrc + vs)
End If
If vracs < vmin Then
vmin = vracs
imin = i
teta_x = teta
End If
Next teta
Next i
calcular_vmin = vmin
End Function

```

Figura 26- Rotina programada em VBA para lajes com carregamento simétrico



42

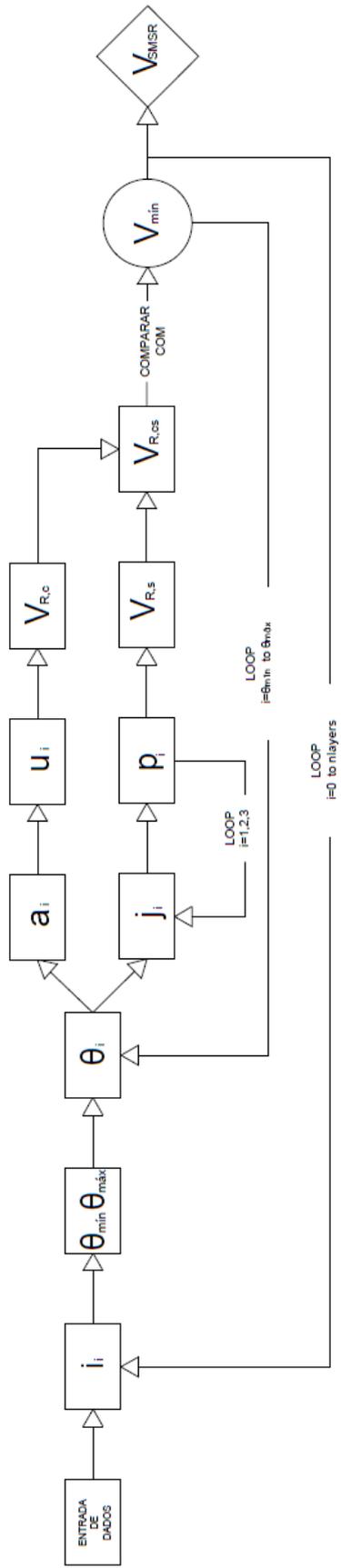


Figura 27 – Fluxograma da rotina de programação em VBA para o SMSR para lajes com carregamento simétrico

### 3.2. SMSR PARA LAJES COM CARREGAMENTO EXCÊNTRICO

A rotina de cálculo para esse tipo de laje é semelhante, a única diferença é o fator  $\beta$  que foi apresentado na Equação 24:

$$\beta = 1 + k \cdot \frac{M_u}{V_u} \cdot \frac{u_i}{W_i} \quad \text{Equação 24}$$

Além dos parâmetros já citados para as lajes com carregamento simétrico ainda é necessário entrar na planilha de Excel com o momento desbalanceado atuante na ligação laje-pilar ( $M_u$ ) e a carga vertical ( $V_u$ ). O processo iterativo é idêntico, exceto que após o cálculo da parcela de resistência do concreto  $V_{R,c}$ , se faz o cálculo do módulo de resistência plástica ( $W_i$ ) no perímetro  $u_i$ . A Equação 18 está relacionada ao perímetro de controle distante  $2 \cdot d$  do pilar, logo não se aplica ao SMSR que encontra perímetros diferentes a cada iteração. Deste modo, a partir da Equação 17,  $W_i$  pode ser determinado para pilares retangulares pela Equação 25:

$$W_i = \frac{c_1^2}{2} + c_1 \cdot c_2 + 2 \cdot c_2 \cdot r + 4 \cdot r^2 + \pi \cdot c_1 \cdot r \quad \text{Equação 25}$$

onde:

$r$  é distância horizontal da superfície de ruptura até o pilar;

$c_1$  é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;

$c_2$  é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força.

Analogamente, é calculada a resistência ao cisalhamento da superfície de ruptura com inclinação  $\theta_i$  na posição  $i_i$  por meio da Equação 26:

$$V_{R,cs} = \frac{1}{\beta} \cdot \left( \eta_c \cdot V_{R,c} \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + V_{R,s} \right) \quad \text{Equação 26}$$

Do mesmo modo que no caso anterior, há a comparação com  $V_{\min}$ , de modo que ao término das iterações, tem-se o menor valor de  $V_{R,cs}$ , que é o resultado do método  $V_{SMSR}$ . A Figura 28 mostra a rotina programada em um módulo do VBA. A rotina foi esquematizada no

fluxograma da Figura 29, onde em vermelho se destaca as partes que diferem do cálculo para lajes sem momento desbalanceado.

```

Option Explicit
Dim sr As Double, s0 As Double, ncamadas As Integer, cinf As Double, c1 As Double, c2 As Double
Dim nlinhas As Integer, fc As Double, ro As Double, eta As Double, csi As Double, beta As Double
Dim p(1 To 3) As String, pi As Double, st As Double, dv As Double, dv0 As Double, vmin As Double, tetamax As Double, tetamin As Double, i As Double,
Dim teta As Double, ui As Double, ncr As Double, vrc As Double, j As Double, x As Double, vs As Double, vrcs As Double
Dim p1 As Double, p2 As Double, p3 As Double, imin As Double, teta x As Double, d As Double, forca 1 As Double, forca 2 As Double, forca 3 As Double
Function calcular_vmin(sr, s0, ncamadas, cinf, c1, c2, nlinhas, fc, ro, eta, csi, d, st, k, Ms, Vsm)
pi = Application.WorksheetFunction.pi

    dv = st

    dv0 = dv + cinf

    vmin = 1E+16

    For i = 0 To (ncamadas - 1) Step 1

        tetamax = Atn(dv / sr)

        tetamin = 26.6 * pi / 180

        If i = 0 Then

            tetamax = Atn(dv0 / s0)

            ElseIf i = (ncamadas - 2) Then

                tetamin = Atn(dv / (2 * sr))

            ElseIf i = (ncamadas - 1) Then

                tetamin = Atn(dv / sr)

            End If

        For teta = tetamin To tetamax Step 0.01

            If i = 0 Then

                a = dv0 / Tan(teta)
                ui = 2 * c1 + 2 * c2 + 2 * pi * a
                vrc = 0.18 * csi * ((100 * ro * fc) ^ (1 / 3)) * ui * d * (2 * d / a) * 0.001
                wp = c1 * c1 / 2 + c1 * c2 + 2 * c2 * a + 4 * a * a + pi * c1 * a
                beta = (1 + k * Ms / Vsm * ui / wp)

                For j = 1 To 3 Step 1

                    x = (s0 + (j - 1) * sr) * Tan(teta) - cinf

                    If x > 0 And x < st Then

                        p(j) = Application.WorksheetFunction.Min(17.32 * Sqr(fc) * x ^ 1.5 * 0.001, 12.124 * Sqr(fc) * (st - x) ^ 1.5 * 0.001)

                    Else

                        p(j) = 0

                    End If

                End If

            End If

        End For

    End For
End Function

```

```

Next j

p1 = p(1)
p2 = p(2)
p3 = p(3)

vs = (p1 + p2 + p3) * nlinhas

vracs = (eta * vrc + vs) / beta

Else

a = (dv / Tan(teta))
ui = 2 * c1 + 2 * c2 + 2 * pi * (a + s0 + (i - 1) * sr)
vrc = 0.18 * csi * ((100 * ro * fc) ^ (1 / 3)) * ui * d * (2 * d / a) * 0.001
wp = c1 * c1 / 2 + c1 * c2 + 2 * c2 * (a + s0 + (i - 1) * sr) + 4 * (a + s0 + (i - 1) * sr) * (a + s0 + (i - 1) * sr) + pi * c1 * (a + s0 + (i - 1) * sr)
beta = (1 + k * Ms / Vsm * ui / wp)
For j = 1 To 3 Step 1

x = j * sr * Tan(teta)

If x > 0 And x < st Then

p(j) = Application.WorksheetFunction.Min(17.32 * Sqr(fc) * x ^ 1.5 * 0.001, 12.124 * Sqr(fc) * (st - x) ^ 1.5 * 0.001)

Else

p(j) = 0

End If

End If

Next j

p1 = p(1)
p2 = p(2)
p3 = p(3)

vs = (p1 + p2 + p3) * nlinhas

vracs = (eta * vrc + vs) / beta

End If

If vracs < vmin Then

vmin = vracs
imin = i
teta_x = teta

End If

Next teta

Next i

calcular_vmin = vmin

End Function

```

Figura 28 - Rotina programada em VBA para lajes com carregamento excêntrico

|                 |  |           |   |           |   |            |  |
|-----------------|--|-----------|---|-----------|---|------------|--|
| $i_i$           | CAMADA I DA ARMADURA DE CISCALHAMENTO      | $a_i$     | PROJEÇÃO HORIZONTAL DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA      | $j_i$     | CAMADA DE ARMADURA CORTADA PELA SUPERFÍCIE DE RUPTURA                           | $V_{R,cs}$ | RESISTÊNCIA À PUNÇÃO   |
| $\theta_{\min}$ | INCLINAÇÃO MÍNIMA DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA | $u_i$     | PERÍMETRO DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA                | $p_i$     | FORÇA NA CAMADA DE ARMADURA   | $V_{\min}$ | PARÂMETRO DE COMPARAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO                    |
| $\theta_{\max}$ | INCLINAÇÃO MÁXIMA DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA | $V_{R,c}$ | PARCELA RESISTENTE DO CONCRETO                    | $V_{R,s}$ | PARCELA RESISTENTE DO AÇO   | $V_{SMSR}$ | RESISTÊNCIA À PUNÇÃO DA SUPERFÍCIE COM MENOR CAPACIDADE RESISTENTE |
| $\theta_i$      | INCLINAÇÃO I DA SUPERFÍCIE DE RUPTURA      | $W_i$     | MÓDULO DE RESISTÊNCIA PLÁSTICA NO PERÍMETRO $u_i$ | $\beta_i$ | PARÂMETRO QUE RELACIONA A TRANSFERÊNCIA DE MOMENTO FLETOR NA LIGAÇÃO LAJE-PILAR |            |  |

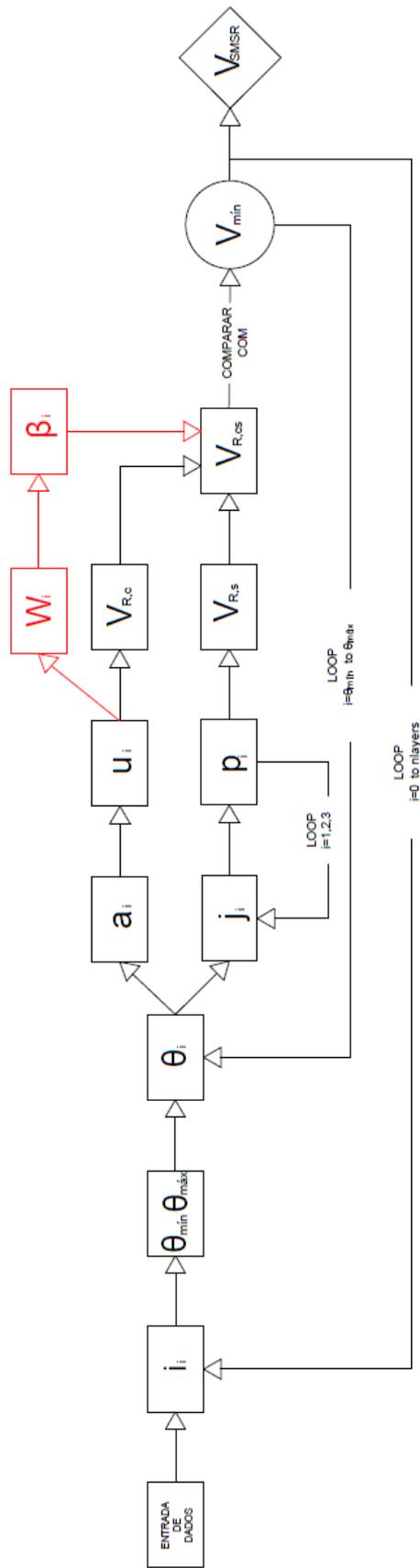


Figura 29 - Fluxograma da rotina de programação em VBA para o SMSR para lajes com carregamento excêntrico

## **4. METOLOGIA DE AVALIAÇÃO DO SMSR**

### **4.1. Metodologia para coleta do banco de dados**

Para avaliar as estimativas do SMSR foi necessário coletar um banco de dados de lajes submetidas à punção com pilar interno, para os casos de carregamento: simétrico e excêntrico.

#### **4.1.1. Apresentação das Lajes Lisas com carregamento simétrico**

Foram coletados resultados de ensaios de 35 lajes lisas de 9 autores diferentes, com as seguintes particularidades: a armadura de cisalhamento ser do tipo Pinos de Duas Cabeças ou Pinos de Uma Cabeça, ter sido submetida a carregamento simétrico e ruptura por punção dentro da região da armadura de cisalhamento. A Tabela 6 apresenta as características destas lajes.

Tabela 6 – Características das lajes submetidas a carregamento simétrico

| AUTOR                        | LAJE  | d (mm) | Cinf (mm) | $\rho$ (%) | $\varnothing_w$ (mm) | hstud (mm) | No. Lin. | No. Cam | $S_0$ (mm) | $S_r$ (mm) | $C_1$ (mm) | $C_2$ (mm) | Seção | $f_c$ (MPa) |
|------------------------------|-------|--------|-----------|------------|----------------------|------------|----------|---------|------------|------------|------------|------------|-------|-------------|
| Oliveira (2013)              | LN02  | 143    | 10        | 1,6        | 8,0                  | 150        | 14       | 6       | 70         | 100        | 400        | 200        | R     | 54          |
|                              | LN04  | 143    | 10        | 1,6        | 6,3                  | 150        | 14       | 4       | 70         | 100        | 400        | 200        | R     | 56          |
| Ferreira (2010)              | LS02  | 143    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 149        | 12       | 4       | 70         | 100        | 300        | 300        | R     | 49          |
|                              | LC01  | 143    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 149        | 10       | 6       | 70         | 100        | 270        | 270        | C     | 48          |
|                              | LC02  | 140    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 144        | 10       | 6       | 70         | 100        | 360        | 360        | C     | 47          |
|                              | LC03  | 142    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 147        | 10       | 6       | 70         | 100        | 450        | 450        | C     | 49          |
|                              | LC04  | 140    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 144        | 12       | 6       | 70         | 100        | 360        | 360        | C     | 48          |
|                              | LC05  | 140    | 10        | 2,0        | 10,0                 | 150        | 10       | 6       | 70         | 100        | 360        | 360        | C     | 50          |
|                              | LC06  | 143    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 149        | 10       | 6       | 70         | 100        | 360        | 360        | C     | 49          |
|                              | LC07  | 144    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 150        | 10       | 7       | 55         | 80         | 360        | 360        | C     | 49          |
| Regan (2009)                 | 1     | 150    | 10        | 1,5        | 10,0                 | 160        | 10       | 4       | 80         | 120        | 300        | 300        | S     | 33          |
|                              | 3     | 150    | 10        | 1,8        | 12,0                 | 160        | 10       | 5       | 60         | 120        | 300        | 300        | S     | 26          |
| Birkle (2004)                | 5     | 160    | 20        | 1,6        | 12,0                 | 160        | 12       | 5       | 80         | 120        | 240        | 240        | C     | 62          |
|                              | S2    | 124    | 20        | 1,5        | 9,5                  | 104        | 8        | 6       | 45         | 90         | 250        | 250        | S     | 29          |
|                              | S3    | 124    | 20        | 1,5        | 9,5                  | 104        | 8        | 6       | 45         | 90         | 250        | 250        | S     | 32          |
|                              | S8    | 190    | 20        | 1,3        | 9,5                  | 170        | 8        | 5       | 50         | 100        | 300        | 300        | S     | 35          |
|                              | S9    | 190    | 20        | 1,3        | 9,5                  | 170        | 8        | 6       | 75         | 150        | 300        | 300        | S     | 35          |
|                              | S11   | 260    | 20        | 1,1        | 12,7                 | 240        | 8        | 5       | 65         | 130        | 350        | 350        | S     | 30          |
| Regan e Samadian (2001)      | S12   | 260    | 20        | 1,1        | 12,7                 | 240        | 8        | 6       | 95         | 195        | 350        | 350        | S     | 34          |
|                              | A2    | 160    | 20        | 1,6        | 10,0                 | 160        | 8        | 4       | 80         | 120        | 200        | 200        | S     | 43          |
| Broms (2007)                 | R2    | 160    | 20        | 1,3        | 12,0                 | 160        | 8        | 4       | 80         | 120        | 200        | 200        | S     | 38          |
|                              | 18a   | 141    | 15        | 1,3        | 12,0                 | 145        | 12       | 9       | 60         | 75         | 300        | 300        | S     | 38          |
| Lips, Ruiz e Muttoni (2012)  | 18b   | 151    | 15        | 1,2        | 12,0                 | 145        | 12       | 6       | 60         | 110        | 300        | 300        | S     | 39          |
|                              | PL10  | 343    | 20        | 1,6        | 22,0                 | 365        | 16       | 5       | 130        | 260        | 440        | 440        | S     | 33          |
|                              | PL11  | 201    | 20        | 1,6        | 10,0                 | 215        | 8        | 7       | 80         | 160        | 260        | 260        | S     | 34          |
| Markouk e Jiang (1997)       | PL12  | 201    | 20        | 1,6        | 10,0                 | 215        | 16       | 7       | 80         | 160        | 260        | 260        | S     | 35          |
|                              | HS 22 | 120    | 15        | 1,1        | 15,0                 | 110        | 12       | 3       | 60         | 90         | 250        | 250        | S     | 60          |
| Mokhtar <i>et al.</i> (1985) | HS 23 | 120    | 15        | 1,1        | 11,3                 | 110        | 12       | 4       | 60         | 90         | 250        | 250        | S     | 60          |
|                              | AB2   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 8       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 38          |
|                              | AB3   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 8       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 23          |
|                              | AB5   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 8       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 40          |
|                              | AB6   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 6       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 29          |
|                              | AB7   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 6       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 35          |
|                              | AB8   | 116    | 6         | 1,4        | 9,5                  | 140        | 12       | 5       | 58         | 87         | 250        | 250        | S     | 30          |

#### 4.1.2. Apresentação das Lajes Lisas com carregamento excêntrico

Foram coletados os dados de 13 lajes lisas de 3 autores diferentes submetidas a momentos desbalanceados. O motivo desse banco de dados ser tão pequeno, além das pesquisas nessa área serem escassas, ainda foram aplicados alguns filtros na seleção para o banco de dados: apenas lajes com armadura de cisalhamento Pinos de Duas Cabeças, que romperam por punção e dentro da região da armadura de cisalhamento. A Tabela 7 apresenta as principais características dessas lajes.

Tabela 7 - Características das lajes submetidas a carregamento excêntrico

| AUTOR              | LAJE | $d$<br>(mm) | $C_{inf}$<br>(mm) | $\rho$<br>(%) | $\phi_w$<br>(mm) | $h_{stud}$<br>(mm) | No.<br>Lin. | No.<br>Cam | $S_0$<br>(mm) | $S_r$<br>(mm) | $C_1$<br>(mm) | $C_2$<br>(mm) | $f_c$<br>(MPa) | $M_s$<br>(kN.m) | $V_s$<br>(kN) |
|--------------------|------|-------------|-------------------|---------------|------------------|--------------------|-------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|-----------------|---------------|
| Oliveira<br>(2013) | LS02 | 144         | 10                | 1,6           | 8,0              | 150                | 10          | 3          | 70            | 100           | 400           | 200           | 54             | 218190          | 763           |
|                    | LS03 | 142         | 10                | 1,6           | 8,0              | 150                | 10          | 6          | 70            | 100           | 400           | 200           | 54             | 234360          | 775           |
|                    | LS04 | 143         | 10                | 1,6           | 6,3              | 150                | 10          | 4          | 70            | 100           | 400           | 200           | 51             | 182700          | 712           |
|                    | LS05 | 142         | 10                | 1,6           | 12,5             | 150                | 10          | 5          | 70            | 100           | 400           | 200           | 51             | 272265          | 926           |
|                    | LS06 | 143         | 10                | 1,6           | 10,0             | 150                | 10          | 6          | 70            | 100           | 400           | 200           | 53             | 251790          | 904           |
|                    | LW02 | 143         | 10                | 1,6           | 8,0              | 150                | 10          | 3          | 70            | 100           | 200           | 400           | 52             | 188790          | 1022          |
|                    | LW03 | 142         | 10                | 1,6           | 8,0              | 150                | 10          | 6          | 70            | 100           | 200           | 400           | 52             | 195300          | 733           |
|                    | LW04 | 142         | 10                | 1,6           | 6,3              | 150                | 10          | 4          | 70            | 100           | 200           | 400           | 52             | 130515          | 617           |
|                    | LW05 | 142         | 10                | 1,6           | 12,5             | 150                | 10          | 5          | 70            | 100           | 200           | 400           | 51             | 240870          | 699           |
| Ferreira<br>(2010) | LS04 | 143         | 10                | 1,5           | 10,0             | 150                | 8           | 4          | 70            | 100           | 300           | 300           | 49             | 190050          | 722           |
|                    | LS08 | 144         | 10                | 1,5           | 12,5             | 150                | 8           | 4          | 70            | 100           | 300           | 300           | 48             | 190890          | 934           |
| Cordovil<br>(1995) | 10   | 104         | 7                 | 0,9           | 6,3              | 110                | 6           | 3          | 53            | 90            | 250           | 150           | 33             | 43800           | 219           |
|                    | 16   | 104         | 7                 | 0,9           | 6,3              | 110                | 6           | 3          | 53            | 90            | 250           | 150           | 32             | 62400           | 156           |

## 4.2. Metodologia de Cálculo

Para avaliar a estimativa de resistência à punção dessas lajes foram utilizados 4 modelos: as recomendações normativas do Eurocode 2 (2014) e da NBR 6118 (2014) e o SMSR simplificado de Ferreira (2010) e o SMSR. Para o SMSR simplificado e o SMSR as estimativas foram feitas fazendo limitação ao *size effect*  $\xi$ , assim como no Eurocode 2 e também sem essa limitação como na NBR 6118. A Tabela 8 apresenta um resumo das formulações utilizadas nesses métodos na análise das lajes submetidas a carregamento

simétrico e a Tabela 9 apresenta as formulações aplicadas para lajes com momentos desbalanceados.

Tabela 8 – Resumo das estimativas de resistência à punção para lajes com carregamento simétrico

| Recomendações   | Equações  |
|---|---|
| Eurocode 2 (2014)   | $V_{R,EC2-04} = \min \begin{cases} V_{Rcs,EC2} = 0,75 \cdot V_{Rc,EC2} + A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \cdot (1,5 \cdot d / s_r) \\ V_{Rout,EC2} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \\ V_{Rmax,EC2-04} = 0,24 \cdot f_c \cdot (1 - f_c / 250) \cdot u_0 \cdot d \end{cases}$ <p>Onde:<br/> <math>f_{yw,ef} = 1,15 \cdot 250 + 0,25 \cdot d \leq f_{yw}</math>; <math>\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2</math>; <math>u_{out}</math> é definido conforme a Figura 21 e <math>\rho \leq 0,02</math></p>                 |
| NBR 6118 (2014)   | $V_{R,NBR} = \min \begin{cases} V_{Rcs,NBR} = 0,75 \cdot V_{Rc,NBR} + A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \cdot (1,5 \cdot d / s_r) \\ V_{Rout,NBR} = 0,182 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \\ V_{Rmax,NBR} = 0,324 \cdot f_c \cdot (1 - f_c / 250) \cdot u_0 \cdot d \end{cases}$ <p>Onde:<br/> <math>f_{yw,ef} = f_{yw} \begin{cases} \leq 345MPa \rightarrow \text{conectores} \\ \leq 287,5MPa \rightarrow \text{estribos} \end{cases}</math> e <math>u_{out}</math> é definido conforme a Figura 24</p> |
| SMSR simplificado   | $V_{RC} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_i \cdot d$ $V_{R,s} = \sum A_{sw,cam} \cdot f_{ys,w}$ $V_{R,cs} = \eta_c \cdot V_{RC} \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + V_{R,s}$   |
| SMSR  | Rotina computacional descrita no Capítulo 3 , seção 3.1   |
| <p>Obs:</p> <p><math>f_c</math> é a resistência a compressão do concreto</p> <p><math>d</math> é a altura útil da laje em mm;</p> <p><math>u_0</math> é o perímetro do pilar;</p> <p><math>A_{sw}</math> é a área de aço por perímetro de armaduras;</p> <p><math>f_{yw}</math> é a tensão de escoamento das armaduras de cisalhamento.</p> |   |

Tabela 9 - Resumo das estimativas de resistência à punção para lajes com carregamento excêntrico

| Recomendações   | Equações   |
|---|--|
| Eurocode 2 (2014)   | $\beta = 1 + k \cdot \frac{M_u}{V_u} \cdot \frac{u_i}{W_1}$ $V_{R,EC2-04} = \min \begin{cases} V_{Rcs,EC2} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,75 \cdot V_{Rc,EC2} + A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \cdot (1,5 \cdot d / s_r) \\ V_{Rout,EC2} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \\ V_{Rmax,EC2-04} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,24 \cdot f_c \cdot (1 - f_c / 250) \cdot u_0 \cdot d \end{cases}$ <p>Onde:<br/> <math>u_i</math> do <math>\beta</math> pode ser <math>u_0</math>, <math>u_1</math> e <math>u_{out}</math><br/> <math>f_{yw,ef} = 1,15 \cdot 250 + 0,25 \cdot d \leq f_{yw}</math>; <math>\xi = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2</math>; <math>u_{out}</math> é definido conforme a Figura 21 e <math>\rho \leq 0,02</math></p> |
| NBR 6118 (2014)   | $V_{R,NBR} = \min \begin{cases} V_{Rcs,NBR} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,75 \cdot V_{Rc,NBR} + A_{sw} \cdot f_{yw,ef} \cdot (1,5 \cdot d / s_r) \\ V_{Rout,NBR} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,182 \cdot (1 + \sqrt{200/d}) \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_{out} \cdot d \\ V_{Rmax,NBR} = \frac{1}{\beta} \cdot 0,324 \cdot f_c \cdot (1 - f_c / 250) \cdot u_0 \cdot d \end{cases}$ <p>Onde:<br/> <math>f_{yw,ef} = f_{yw} \begin{cases} \leq 345MPa \rightarrow \text{conectores} \\ \leq 287,5MPa \rightarrow \text{estribos} \end{cases}</math> e <math>u_{out}</math> é definido conforme a Figura 24</p>  |
| SMSR simplificado   | $V_{RC} = 0,18 \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho \cdot f_c)^{1/3} \cdot u_i \cdot d$ $V_{R,s} = \sum A_{sw,cam} \cdot f_{ys,w}$ $V_{R,cs} = \frac{1}{\beta} \left( \eta_c \cdot V_{RC} \cdot \left( \frac{2 \cdot d}{a_i} \right) + V_{R,s} \right)$   |
| SMSR  | Rotina computacional descrita no Capítulo 3, seção 3.2.  |
| <p>Obs:<br/> <math>f_c</math> é a resistência a compressão do concreto<br/> <math>d</math> é a altura útil da laje em mm;<br/> <math>u_0</math> é o perímetro do pilar;<br/> <math>A_{sw}</math> é a área de aço por perímetro de armaduras;<br/> <math>f_{yw}</math> é a tensão de escoamento das armaduras de cisalhamento.</p> |  |

### 4.3. Metodologia de Análise dos Resultados

Foram realizadas análises comparativas dos resultados da razão da carga de ruptura experimental com a teórica ( $V_u/V_{R,teo}$ ), comparando parâmetros estatísticos como média dos resultados, desvio padrão, coeficiente de variação e a porcentagem de resultados contra a segurança ( $V_u/V_{R,teo} < 1$ ). Para complementar, foram realizadas análises gráficas da distribuição de  $V_u/V_{R,teo}$ , apresentando a tendência da média dos resultados, com seus fatores de correlação ( $R^2$ ), comparando com retas que sugerem o resultado ideal ( $V_u = V_{R,teo}$ ).

Os modelos também foram avaliados por uma adaptação do critério de Pontos por Demérito (*Demerit Points Classifications* – DPC) proposto por Collins (2001). Este critério leva em consideração aspectos de segurança, precisão, dispersão e economia. Ele propõe uma classificação que é feita por meio de uma escala de demérito para valores de  $V_u/V_{R,teo}$  apresentada na Tabela 10. A penalidade das recomendações é calculada a partir da soma dos produtos de  $V_u/V_{R,teo}$  pelo escore correspondente ao intervalo em que ele se encontra. Quanto maior a soma das penalidades, pior é a estimativa do modelo.

Tabela 10– Escala de demérito do critério DPC

| $V_u/V_{R,teo}$  | Classificação            | Penalidade |
|------------------|--------------------------|------------|
| $< 0,50$         | Extremamente Perigoso    | 10         |
| $[0,50 - 0,65[$  | Perigoso                 | 5          |
| $[0,65 - 0,85[$  | Baixa Segurança          | 2          |
| $[0,85 - 1,30 [$ | Segurança Adequada       | 0          |
| $[1,30 - 2,00[$  | Conservador              | 1          |
| $\geq 2,00$      | Extremamente Conservador | 2          |

Adicionalmente as análises padrões para o banco de dados, foram feitas análises para verificar a influência de alguns parâmetros que influenciam na resistência à punção na relação  $V_u/V_{teo}$ . Os parâmetros analisados para o caso de carregamento simétrico foram a razão entre a distância entre as camadas da armadura de cisalhamento e a altura útil ( $S_r/d$ ), e a razão entre a parcela resistente do aço e do concreto ( $V_s/V_{r,c}$ ). Para o caso de carregamento excêntrico

os parâmetros analisados foram o coeficiente de transmissão de momento ( $\beta$ ) e o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre do perímetro crítico ( $W_i$ ).

## **5. AVALIAÇÃO DOS MÉTODOS DE ESTIMATIVA DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO**

### **5.1. Lajes Lisas submetidas a carregamento simétrico**

Os cálculos da estimativa da resistência à punção para as lajes do banco de dados foram feitos para cada um dos modelos e os resultados são apresentados na Tabela 11, que também contém informações estatísticas como a média obtida, o coeficiente de variação, desvio padrão e o percentual de resultados contra a segurança ( $V_u/V_{R,teo} < 1$ ). As Figuras 30, 31 e 32 apresentam de forma gráfica a análise da precisão dos modelos, de modo que na Figura 30 tem-se uma comparação da linha de tendência dos resultados com a situação ideal ( $V_u = V_{R,teo}$ ) e o coeficiente de correlação dos resultados ( $R^2$ ). Na Figura 31 e na Figura 32 é apresentado de forma gráfica o resultado da avaliação dos modelos segundo o critério adaptado de Collins DPC (2001). As Figuras 33 e 34 avaliam a influência de  $S_r/d$  e  $V_s/V_{R,c}$  em  $V_u/V_{R,teo}$ , respectivamente. A Tabela 12 apresenta o comparativo entre a previsão da inclinação do SMSR com restrição do *size effect* e a média das inclinações reais observadas da superfície de ruptura das lajes.

Tabela 11- Comparação da carga última experimental com a capacidade resistente estimada

| Autores  | Lajes | Vu   | SMSR-SIMPL *       |           | SMSR-SIMPL **       |            | SMSR *       |              | SMSR **        |               | EC2          |          | NBR 2014     |          |
|--|-------|------|--------------------|-----------|---------------------|------------|--------------|--------------|----------------|---------------|--------------|----------|--------------|----------|
|  |       |      | Vsmsr - simp* (kN) | Vu / VSS* | Vsmsr - simp** (kN) | Vu / VSS** | Vsmsr *(kN)  | Vu / V SMSR* | V SMSR ** (kN) | Vu / V SMSR** | VEC2 (kN)    | Vu/ VEC2 | VNBR (kN)    | Vu/ VNBR |
| Oliveira (2013)  | LN02  | 1144 | 1051               | 1,09      | 1110                | 1,03       | 1088         | 1,05         | 1184           | 0,97          | 1005         | 1,14     | 1118         | 1,02     |
|  | LN04  | 966  | 939                | 1,03      | 999                 | 0,97       | 1099         | 0,88         | 1196           | 0,81          | 822          | 1,18     | 912          | 1,06     |
| Ferreira (2010)  | LS02  | 1128 | 1079               | 1,05      | 1177                | 0,96       | 1026         | 1,10         | 1116           | 1,01          | 937          | 1,20     | 1088         | 1,04     |
|  | LC01  | 858  | 842                | 1,02      | 919                 | 0,93       | 962          | 0,89         | 1045           | 0,82          | 899          | 0,96     | 1008         | 0,85     |
|  | LC02  | 956  | 985                | 0,97      | 1073                | 0,89       | 1024         | 0,93         | 1079           | 0,89          | 861          | 1,11     | 967          | 0,99     |
|  | LC03  | 1077 | 1115               | 0,97      | 1177                | 0,91       | 1146         | 0,94         | 1207           | 0,89          | 894          | 1,20     | 1003         | 1,07     |
|  | LC04  | 1122 | 992                | 1,13      | 1088                | 1,03       | 1080         | 1,04         | 1180           | 0,95          | 702          | 1,60     | 758          | 1,48     |
|  | LC05  | 1118 | 1085               | 1,03      | 1147                | 0,97       | 1138         | 0,98         | 1200           | 0,93          | 963          | 1,16     | 1081         | 1,03     |
|  | LC06  | 1078 | 1034               | 1,04      | 1101                | 0,98       | 1089         | 0,99         | 1143           | 0,94          | 904          | 1,19     | 1016         | 1,06     |
|  | LC07  | 1110 | 1134               | 0,98      | 1195                | 0,93       | 1174         | 0,95         | 1234           | 0,90          | 915          | 1,21     | 1028         | 1,08     |
| Regan (2009)   | 1     | 881  | 940                | 0,94      | 1013                | 0,87       | 886          | 0,99         | 951            | 0,93          | 937          | 0,94     | 948          | 0,81     |
|  | 3     | 1038 | 1135               | 0,91      | 1223                | 0,85       | 802          | 1,30         | 842            | 1,23          | 1011         | 1,03     | 951          | 1,09     |
|  | 5     | 1268 | 1178               | 1,08      | 1248                | 1,02       | 1170         | 1,08         | 1238           | 1,02          | 847          | 1,50     | 1584         | 0,80     |
| Birkle (2004)  | S2    | 574  | 625                | 0,92      | 680                 | 0,84       | 456          | 1,26         | 506            | 1,14          | 481          | 1,19     | 542          | 1,06     |
|  | S3    | 572  | 637                | 0,90      | 693                 | 0,83       | 470          | 1,22         | 521            | 1,10          | 492          | 1,16     | 549          | 1,04     |
|  | S8    | 1520 | 1252               | 1,21      | 1265                | 1,20       | 1154         | 1,32         | 1165           | 1,30          | 1069         | 1,42     | 1215         | 1,25     |
|  | S9    | 1091 | 1069               | 1,02      | 1079                | 1,01       | 1001         | 1,09         | 1011           | 1,08          | 1025         | 1,06     | 1109         | 0,98     |
|  | S11   | 1620 | 1894               | 0,86      | 1894                | 0,86       | 1784         | 0,91         | 1784           | 0,91          | 1626         | 1,00     | 1856         | 0,87     |
|  | S12   | 1520 | 1681               | 0,90      | 1681                | 0,90       | 1625         | 0,94         | 1625           | 0,94          | 1687         | 0,90     | 1852         | 0,82     |
| Regan e Samadian (2001)                                      | A2    | 950  | 914                | 1,04      | 948                 | 1,00       | 883          | 1,08         | 915            | 1,04          | 921          | 1,03     | 985          | 0,96     |
|  | R2    | 950  | 815                | 1,17      | 863                 | 1,10       | 792          | 1,20         | 821            | 1,16          | 848          | 1,12     | 1020         | 0,93     |
| Broms (2007)   | 18a   | 860  | 1036               | 0,83      | 1135                | 0,76       | 1015         | 0,85         | 1091           | 0,79          | 622          | 1,38     | 781          | 1,10     |
|  | 18b   | 970  | 1167               | 0,83      | 1255                | 0,77       | 896          | 1,08         | 938            | 1,03          | 1031         | 0,94     | 1238         | 0,78     |
| Lips, Ruiz e Muttoni (2012)                                  | PL10  | 5193 | 4.122              | 1,26      | 4122                | 1,26       | 3347         | 1,55         | 3347           | 1,55          | 4910         | 1,06     | 5331         | 0,97     |
|  | PL11  | 1176 | 1.243              | 0,95      | 1243                | 0,95       | 1190         | 0,99         | 1190           | 0,99          | 1136         | 1,03     | 1163         | 1,01     |
|  | PL12  | 1633 | 1.588              | 1,03      | 1588                | 1,03       | 1306         | 1,25         | 1306           | 1,25          | 1496         | 1,09     | 1574         | 1,04     |
| Markouk e Jiang (1997)                                       | HS 22 | 605  | 720                | 0,84      | 824                 | 0,73       | 667          | 0,91         | 753            | 0,80          | 518          | 1,17     | 676          | 0,90     |
|  | HS 23 | 590  | 720                | 0,82      | 824                 | 0,72       | 667          | 0,88         | 753            | 0,78          | 518          | 1,14     | 676          | 0,87     |
| Mokhtar et al. (1985)  | AB2   | 520  | 599                | 0,87      | 655                 | 0,79       | 598          | 0,87         | 690            | 0,75          | 477          | 1,09     | 625          | 0,83     |
|  | AB3   | 545  | 543                | 1,00      | 591                 | 0,92       | 505          | 1,08         | 582            | 0,94          | 403          | 1,35     | 529          | 1,03     |
|  | AB5   | 583  | 605                | 0,96      | 662                 | 0,88       | 608          | 0,96         | 702            | 0,83          | 485          | 1,20     | 636          | 0,92     |
|  | AB6   | 541  | 590                | 0,92      | 683                 | 0,79       | 546          | 0,99         | 629            | 0,86          | 436          | 1,24     | 571          | 0,95     |
|  | AB7   | 572  | 589                | 0,97      | 644                 | 0,89       | 582          | 0,98         | 671            | 0,85          | 595          | 0,96     | 762          | 0,75     |
|  | AB8   | 508  | 597                | 0,85      | 691                 | 0,74       | 552          | 0,92         | 637            | 0,80          | 441          | 1,15     | 578          | 0,88     |
| * $\xi \leq 2$<br>** SEM LIMITAÇÃO<br>SS - SMSR simplificado |       |      | <b>MÉDIA</b>       | 0,98      | <b>MÉDIA</b>        | 0,92       | <b>MÉDIA</b> | 1,04         | <b>MÉDIA</b>   | 0,97          | <b>MÉDIA</b> | 1,15     | <b>MÉDIA</b> | 0,98     |
|  |       |      | <b>D.P.</b>        | 0,11      | <b>D.P.</b>         | 0,12       | <b>D.P.</b>  | 0,16         | <b>D.P.</b>    | 0,17          | <b>D.P.</b>  | 0,16     | <b>D.P.</b>  | 0,14     |
|  |       |      | <b>C.V</b>         | 0,11      | <b>C.V</b>          | 0,13       | <b>C.V</b>   | 0,15         | <b>C.V</b>     | 0,18          | <b>C.V</b>   | 0,14     | <b>C.V</b>   | 0,14     |
|  |       |      | <b>C/SEG</b>       | 53%       | <b>C/SEG</b>        | 72%        | <b>C/SEG</b> | 56%          | <b>C/SEG</b>   | 64%           | <b>C/SEG</b> | 17%      | <b>C/SEG</b> | 53%      |

Tabela 12 - Previsão da posição e inclinação da superfície de ruptura

| Autor                                | Lajes | i | $\theta$<br>estimado | $\theta$ obs |
|--------------------------------------|-------|---|----------------------|--------------|
| Oliveira<br>(2013)                   | LN02  | 1 | 55                   | 31           |
|                                      | LN04  | 1 | 55                   | 26           |
| Ferreira<br>(2010)                   | LS02  | 1 | 54                   | 34           |
|                                      | LC01  | 0 | 65                   | 60           |
|                                      | LC02  | 0 | 36                   | 52           |
|                                      | LC03  | 0 | 36                   | 45           |
|                                      | LC04  | 1 | 53                   | 46           |
|                                      | LC05  | 0 | 37                   | 30           |
|                                      | LC06  | 0 | 37                   | 42           |
|                                      | LC07  | 0 | 43                   | 27           |
|                                      | LC08  | 1 | 54                   | 44           |
| Regan<br>(2009)                      | 1     | 1 | 50                   | -            |
|                                      | 3     | 0 | 39                   | -            |
|                                      | 5     | 0 | 65                   | -            |
| Birkle<br>(2004)                     | S2    | 0 | 38                   | -            |
|                                      | S3    | 0 | 38                   | -            |
|                                      | S8    | 0 | 46                   | -            |
|                                      | S9    | 0 | 36                   | -            |
|                                      | S11   | 0 | 47                   | -            |
|                                      | S12   | 0 | 37                   | -            |
| Regan e<br>Samadian<br>(2001)        | A2    | 0 | 37                   | -            |
|                                      | R2    | 0 | 37                   | -            |
| Broms<br>(2007)                      | 18a   | 0 | 43                   | -            |
|                                      | 18b   | 0 | 39                   | -            |
| Lips,<br>Ruiz e<br>Muttoni<br>(2012) | PL10  | 1 | 54                   | -            |
|                                      | PL11  | 0 | 41                   | -            |
|                                      | PL12  | 1 | 53                   | -            |
| Markouk<br>e Jiang<br>(1997)         | HS 22 | 0 | 36                   | -            |
|                                      | HS 23 | 0 | 36                   | -            |
| Mokhtar<br>et al.<br>(1985)          | AB2   | 1 | 57                   | -            |
|                                      | AB3   | 1 | 56                   | -            |
|                                      | AB5   | 1 | 57                   | -            |
|                                      | AB6   | 1 | 56                   | -            |
|                                      | AB7   | 1 | 57                   | -            |
|                                      | AB8   | 1 | 56                   | -            |

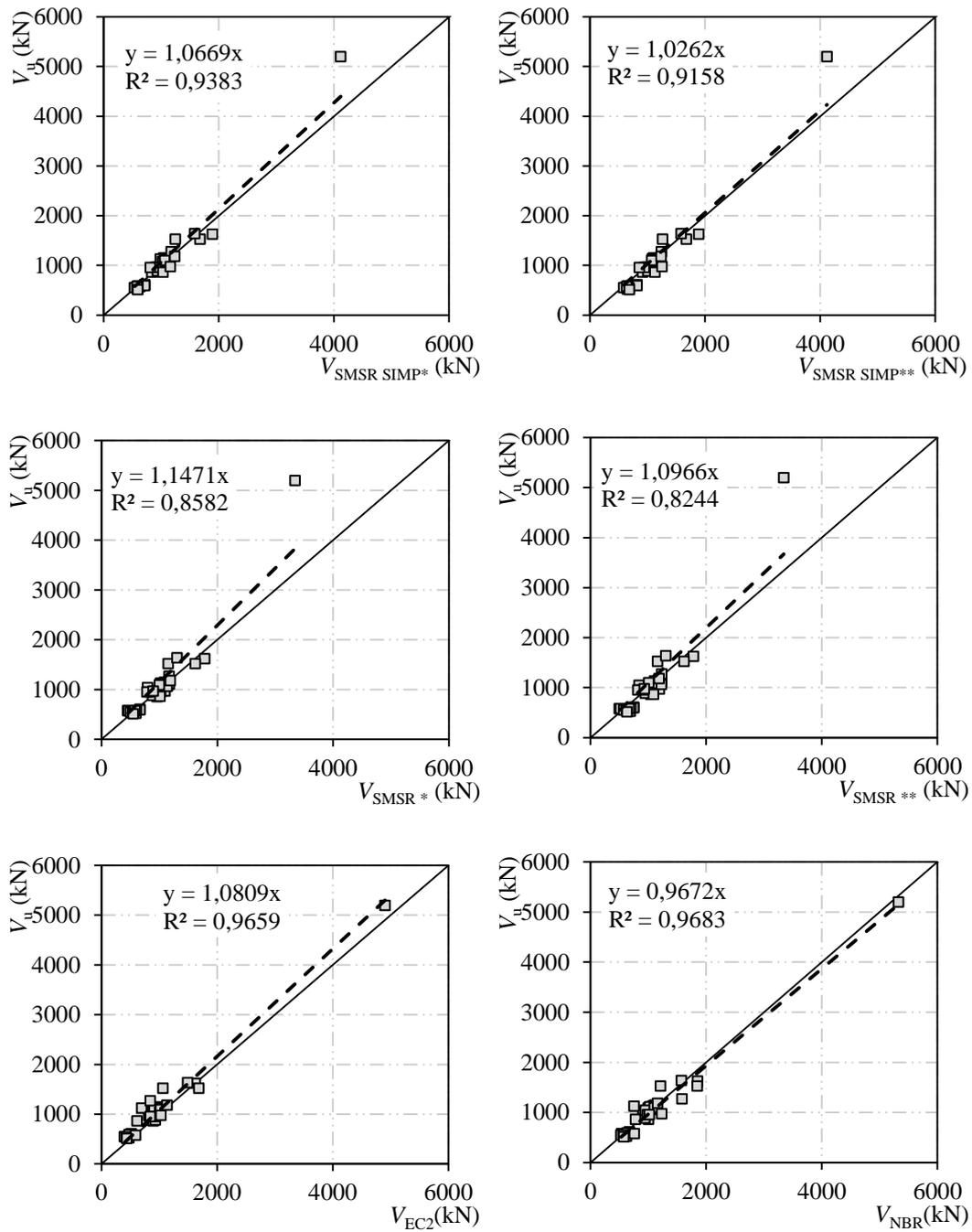


Figura 30 – Análise da precisão dos modelos das lajes submetidas a carregamento simétrico

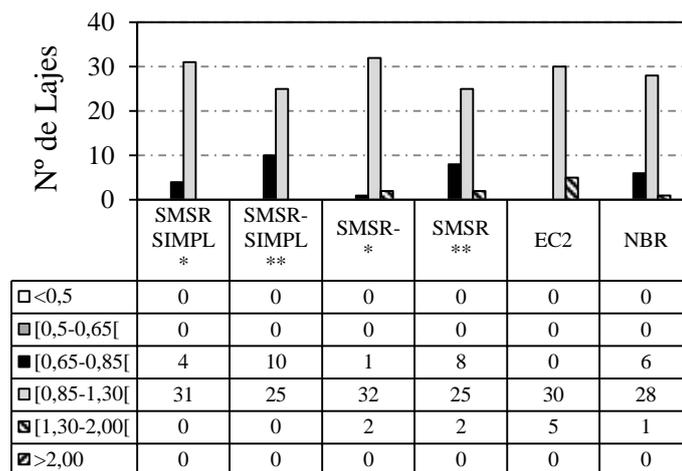


Figura 31– Distribuição das lajes com carregamento simétrico em cada intervalo do DPC

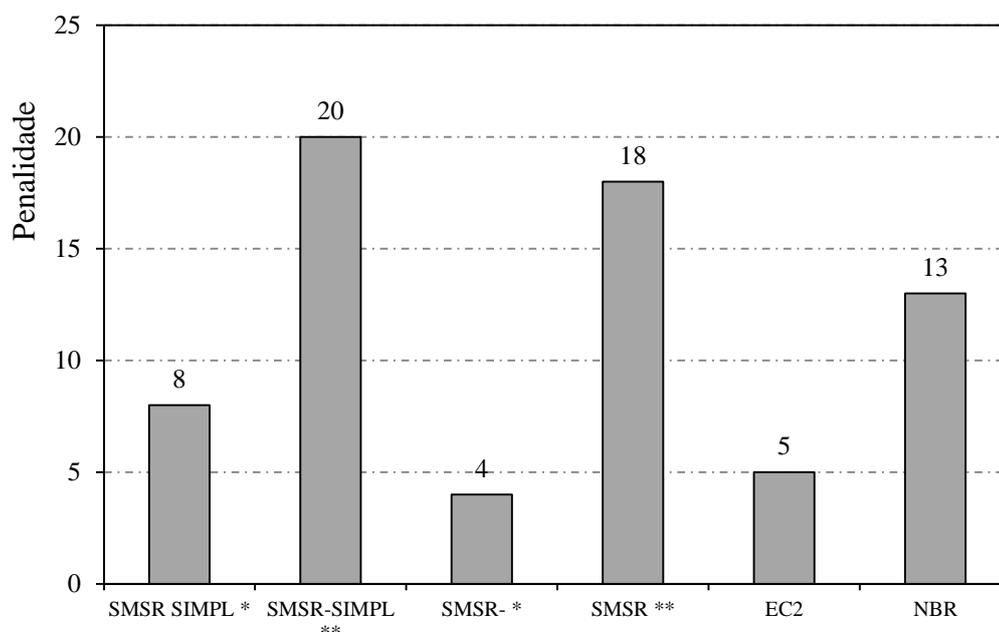


Figura 32 – Penalizações do método DPC para lajes com carregamento simétrico

O SMSR simplificado sem limitação de *size effect* foi o mais penalizado no DPC, apesar de ter apresentado bons resultados de dispersão com coeficiente de variação de 13% e  $R^2$  de 0,9158. Isso se deve devido à média de 0,92, que foi baixa. O SMSR simplificado com limitação de *size effect*, também obteve bons resultados de dispersão com coeficiente de variação de 11% e  $R^2$  de 0,9383 e obteve apenas 8 pontos no DPC.

Quanto à análise de dispersão, o SMSR sem limitação do *size effect* obteve a pior correlação entre os resultados experimentais e as previsões teóricas, com resultados de coeficiente de variação de 18% e  $R^2$  igual a 0,8244. Este também apresentou o segundo maior percentual de lajes contra segurança e a segunda maior penalidade no DPC. O SMSR com limitação do *size effect* apresentou resultados melhores de dispersão com coeficiente de variação de 15% e  $R^2$  igual a 0,8582 e também a menor penalização de todas no DPC, com a maioria de seus resultados considerada com segurança apropriada.

As recomendações do Eurocode 2 (2014), ABNT NBR 6118 (2014) apresentaram resultados bastante semelhantes de dispersão com coeficiente de variação 14% e  $R^2$  de 0,9659 e 0,9683 respectivamente. Porém, a NBR obteve 13 pontos no DPC, enquanto o Eurocode obteve 5 pontos.

Pode-se notar que os modelos que restringiram o *size effect* obtiveram as menores penalidades no DPC com destaque para o SMSR, que o obteve a menor penalidade de todas.

Os resultados normativos apresentaram os menores percentuais de lajes contra segurança e isso se dá porque a previsão do local de ruptura se deu fora da região da armadura de cisalhamento. Isso faz com que o valor da estimativa não fique tão baixo, prejudicando assim os dados estatísticos. Os métodos SMSR e SMSR simplificado checam apenas superfícies dentro da região da armadura de cisalhamento, o que é verossímil, já que as lajes que compõem o banco de dados romperam dentro da região de armadura de cisalhamento.

Comparando o SMSR simplificado com o SMSR, nota-se que apesar do SMSR simplificado apresentar resultados menos dispersos, ele apresenta maiores penalidades no DPC. Chama atenção o fato de o SMSR simplificado prever o modo de ruptura da barra por escoamento, assumindo que todas elas que estão sendo cortadas pela superfície de ruptura estão sob a tensão de escoamento. Já o SMSR prevê o modo de ruptura pela formação do cone de concreto devido à tração direta.

Analisando os resultados da Tabela 12, pode-se notar que as inclinações previstas pelo método e as inclinações observadas não foram muito próximas, considerando uma margem de 10% de erro.

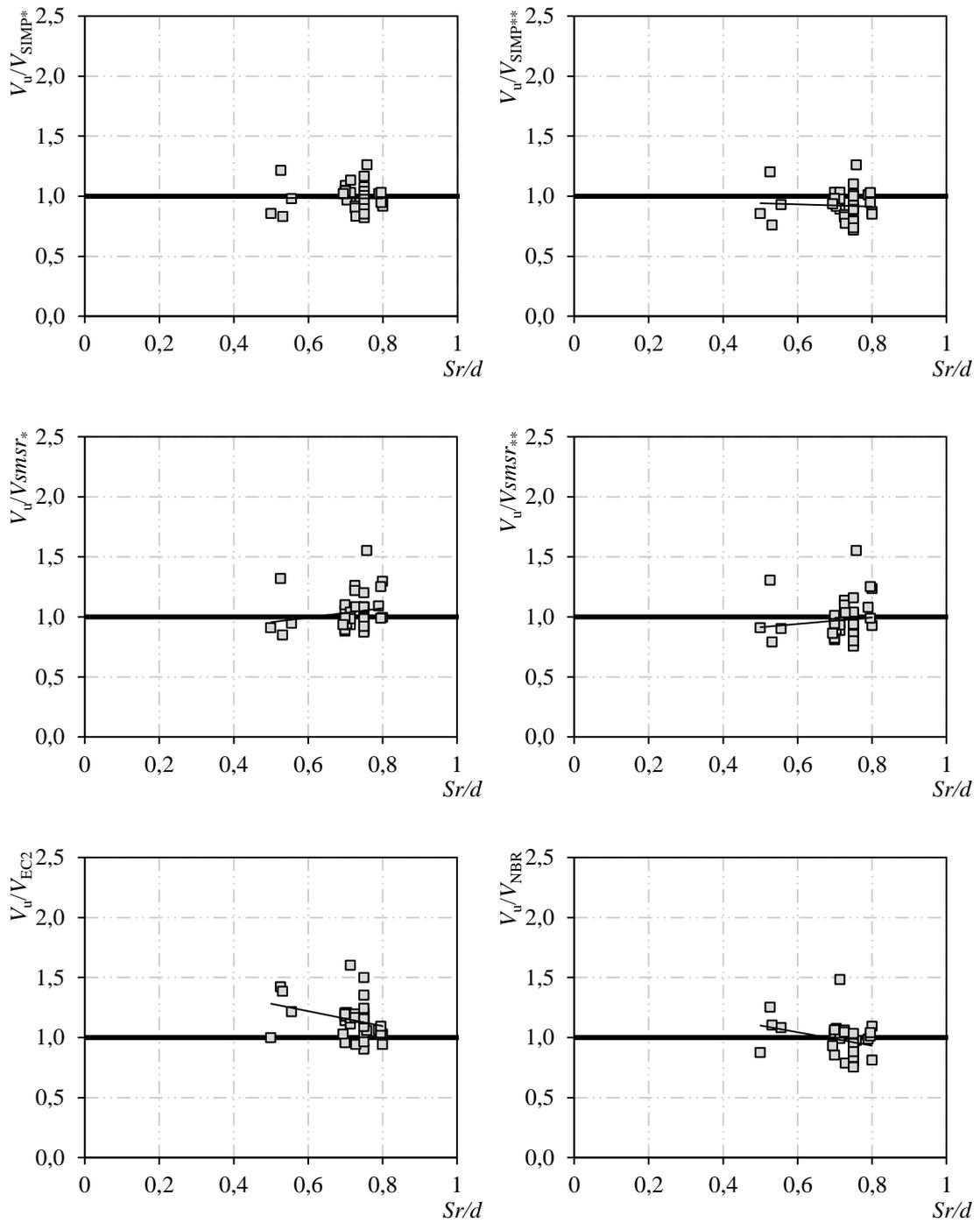


Figura 33 – Influência de  $S_r/d$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$

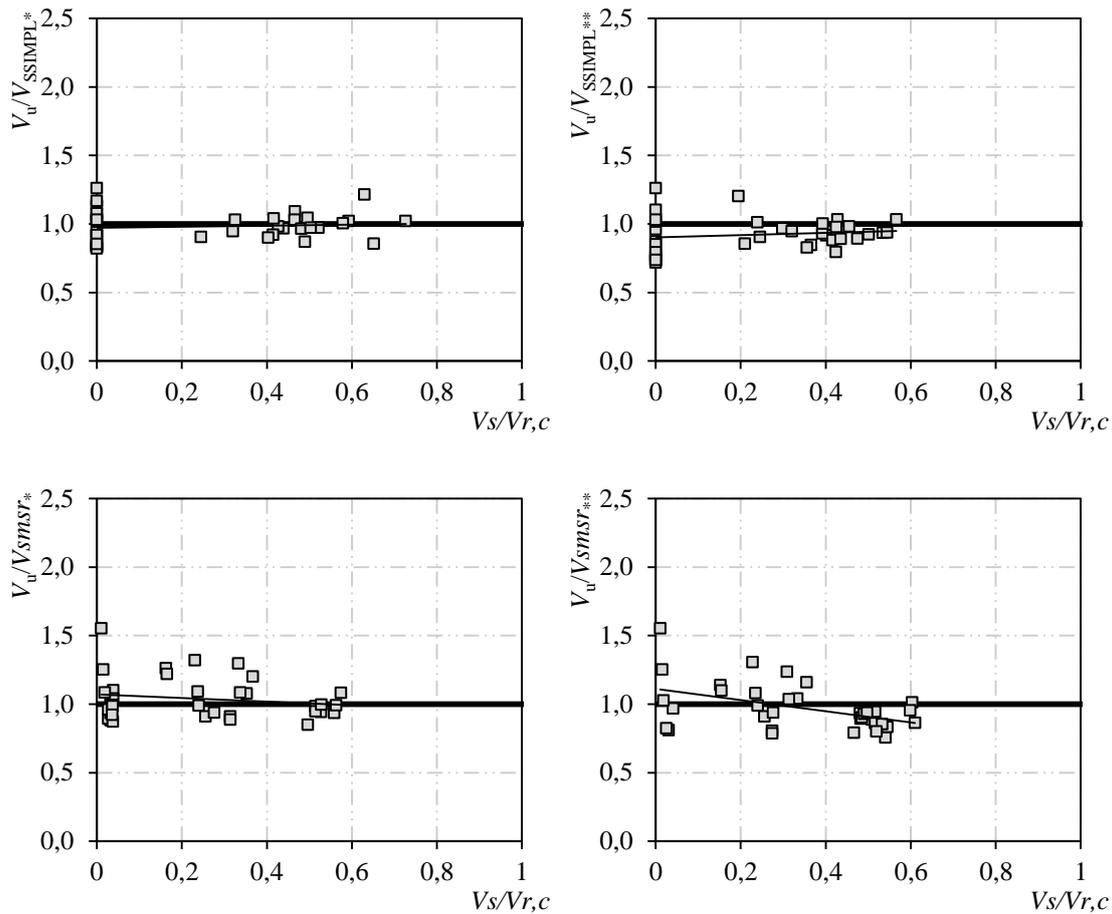


Figura 34 - Influência de  $V_s/V_{R,c}$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$

A partir da análise da Figura 33, nota-se que a influência do espaçamento entre as camadas das armaduras na previsão do SMSR simplificado com e sem limitação do *size effect* foi considerado de forma correta, uma vez que a linha de tendência se encontra bem horizontal e sobre a linha que considera  $V_u = V_{teo}$ . Para o caso da estimativa do SMSR, a linha de tendência apresenta um comportamento levemente crescente, mas também pode se inferir que tal parâmetro foi considerado de forma correta nesses modelos. O Eurocode 2 (2014) apresentam linha de tendência levemente decrescente e deslocada para cima da linha de  $V_u = V_{teo}$ , o que significa uma tendência a tornar os resultados mais conservadores. A Figura 34 compara apenas os métodos SMSR simplificado e SMSR. Observa-se que os modelos estimam de forma satisfatória a relação de  $V_s/V_{R,c}$ , pois a linha de tendência se encontra na posição horizontal, com exceção do SMSR sem limitação do *size effect*, que apresenta uma leve inclinação decrescente, mas que também apresenta comportamento satisfatório.

## 5.2. Lajes Lisas submetidas a carregamento excêntrico

Os resultados dos cálculos das estimativas de resistência à punção para as lajes submetidas a momentos desbalanceados do banco de dados são apresentados na Tabela 13. Informações estatísticas como a média obtida, o coeficiente de variação, desvio padrão e o percentual de resultados contra a segurança ( $V_u/V_{R,teo} < 1$ ) também estão contidas nesta mesma tabela. As Figuras 35, 36 e 37 apresentam de forma gráfica a análise da precisão dos modelos, de modo que na Figura 35 tem-se uma comparação da linha de tendência dos resultados com a situação ideal ( $V_u = V_{R,teo}$ ) e o coeficiente de correlação dos resultados ( $R^2$ ). Na Figura 36 e na Figura 37 é apresentado de forma gráfica o resultado da avaliação dos modelos segundo o critério adaptado de Collins DPC (2001). As Figuras 39 e 40 avaliam a influência de  $S_r/d$  e  $V_s/V_{R,c}$  em  $V_u/V_{R,teo}$ , respectivamente. A Tabela 14 apresenta o comparativo entre a previsão da inclinação do SMSR com limitação do *size effect* e a média das inclinações reais observadas da superfície de ruptura da laje.

Tabela 13 - Comparação da carga última experimental com a capacidade resistente estimada – Carregamento excêntrico

| Autores  | Lajes | Vu   | SMSR-SIMPL *                   |                       | SMSR-SIMPL **                   |                        | SMSR *                  |                          | SMSR **        |                           | EC2          |                       | NBR 2014     |                       |              |      |
|--|-------|------|--------------------------------|-----------------------|---------------------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------|---------------------------|--------------|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|------|
|  |       |      | V <sub>smsr</sub> - simp* (kN) | V <sub>u</sub> / VSS* | V <sub>smsr</sub> - simp** (kN) | V <sub>u</sub> / VSS** | V <sub>smsr</sub> *(kN) | V <sub>u</sub> / V SMSR* | V SMSR ** (kN) | V <sub>u</sub> / V SMSR** | VEC2 (kN)    | V <sub>u</sub> / VEC2 | VNBR (kN)    | V <sub>u</sub> / VNBR |              |      |
| OLIVEIRA (2013)  | LS02  | 763  | 545                            | 1,4                   | 593                             | 1,29                   | 538                     | 1,42                     | 538            | 1,42                      | 585          | 1,30                  | 694          | 1,10                  |              |      |
|  | LS03  | 775  | 520                            | 1,49                  | 569                             | 1,36                   | 514                     | 1,51                     | 515            | 1,50                      | 601          | 1,29                  | 669          | 1,16                  |              |      |
|  | LS04  | 712  | 533                            | 1,34                  | 566                             | 1,26                   | 553                     | 1,29                     | 557            | 1,28                      | 518          | 1,37                  | 575          | 1,24                  |              |      |
|  | LS05  | 926  | 517                            | 1,79                  | 565                             | 1,64                   | 510                     | 1,82                     | 512            | 1,81                      | 694          | 1,33                  | 1136         | 0,82                  |              |      |
|  | LS06  | 904  | 544                            | 1,66                  | 594                             | 1,52                   | 537                     | 1,68                     | 539            | 1,68                      | 726          | 1,25                  | 888          | 1,02                  |              |      |
|  | LW02  | 1022 | 695                            | 1,47                  | 759                             | 1,35                   | 686                     | 1,49                     | 710            | 1,44                      | 681          | 1,50                  | 778          | 1,31                  |              |      |
|  | LW03  | 733  | 586                            | 1,25                  | 641                             | 1,14                   | 580                     | 1,26                     | 597            | 1,23                      | 691          | 1,06                  | 770          | 0,95                  |              |      |
|  | LW04  | 617  | 623                            | 0,99                  | 663                             | 0,93                   | 641                     | 0,96                     | 663            | 0,93                      | 598          | 1,03                  | 665          | 0,93                  |              |      |
|  | LW05  | 699  | 512                            | 1,37                  | 559                             | 1,25                   | 507                     | 1,38                     | 519            | 1,35                      | 770          | 0,91                  | 1216         | 0,57                  |              |      |
| FERREIRA (2010)  | LS04  | 722  | 543                            | 1,33                  | 593                             | 1,22                   | 534                     | 1,35                     | 542            | 1,33                      | 661          | 1,09                  | 836          | 0,86                  |              |      |
|  | LS08  | 934  | 614                            | 1,52                  | 669                             | 1,40                   | 603                     | 1,55                     | 615            | 1,52                      | 717          | 1,30                  | 1099         | 0,85                  |              |      |
| CORDOVIL (1995)  | 10    | 219  | 155                            | 1,41                  | 185                             | 1,19                   | 176                     | 1,25                     | 184            | 1,19                      | 179          | 1,23                  | 219          | 1,00                  |              |      |
|  | 16    | 156  | 101                            | 1,54                  | 121                             | 1,29                   | 114                     | 1,37                     | 118            | 1,32                      | 128          | 1,22                  | 157          | 0,99                  |              |      |
| * $\xi \leq 2$<br>** SEM LIMITAÇÃO<br>SS - SMSR simplificado |       |      | <b>MÉDIA</b>                   | 1,43                  | <b>MÉDIA</b>                    | 1,29                   | <b>MÉDIA</b>            | 1,41                     | <b>MÉDIA</b>   | 1,38                      | <b>MÉDIA</b> | 1,22                  | <b>MÉDIA</b> | 0,98                  |              |      |
|  |       |      | <b>D.P.</b>                    | 0,20                  | <b>D.P.</b>                     | 0,17                   | <b>D.P.</b>             | 0,21                     | <b>D.P.</b>    | 0,22                      | <b>D.P.</b>  | 0,16                  | <b>D.P.</b>  | 0,19                  |              |      |
|  |       |      | <b>C.V</b>                     | 0,14                  | <b>C.V</b>                      | 0,13                   | <b>C.V</b>              | 0,15                     | <b>C.V</b>     | 0,16                      | <b>C.V</b>   | 0,16                  | <b>C.V</b>   | 0,13                  | <b>C.V</b>   | 0,20 |
|  |       |      | <b>C/SEG</b>                   | 8%                    | <b>C/SEG</b>                    | 8%                     | <b>C/SEG</b>            | 8%                       | <b>C/SEG</b>   | 8%                        | <b>C/SEG</b> | 8%                    | <b>C/SEG</b> | 8%                    | <b>C/SEG</b> | 62%  |

Tabela 14 - Previsão da posição e inclinação da superfície de ruptura – Carregamento excêntrico

| Autores         | Lajes | i | $\theta$ | $\theta$ obs |
|-----------------|-------|---|----------|--------------|
| Oliveira (2013) | LS02  | 0 | 65       | 27           |
|                 | LS03  | 0 | 65       | 27           |
|                 | LS04  | 0 | 65       | 42           |
|                 | LS05  | 0 | 65       | 24           |
|                 | LS06  | 0 | 65       | 34           |
|                 | LW02  | 0 | 65       | 63           |
|                 | LW03  | 0 | 65       | 34           |
|                 | LW04  | 0 | 65       | 45           |
|                 | LW05  | 0 | 65       | 52           |
| Ferreira (2010) | LS04  | 0 | 64       | 47           |
|                 | LS08  | 0 | 64       | 51           |
| Cordovil (1995) | 10    | 0 | 64       | -            |
|                 | 16    | 0 | 64       | -            |

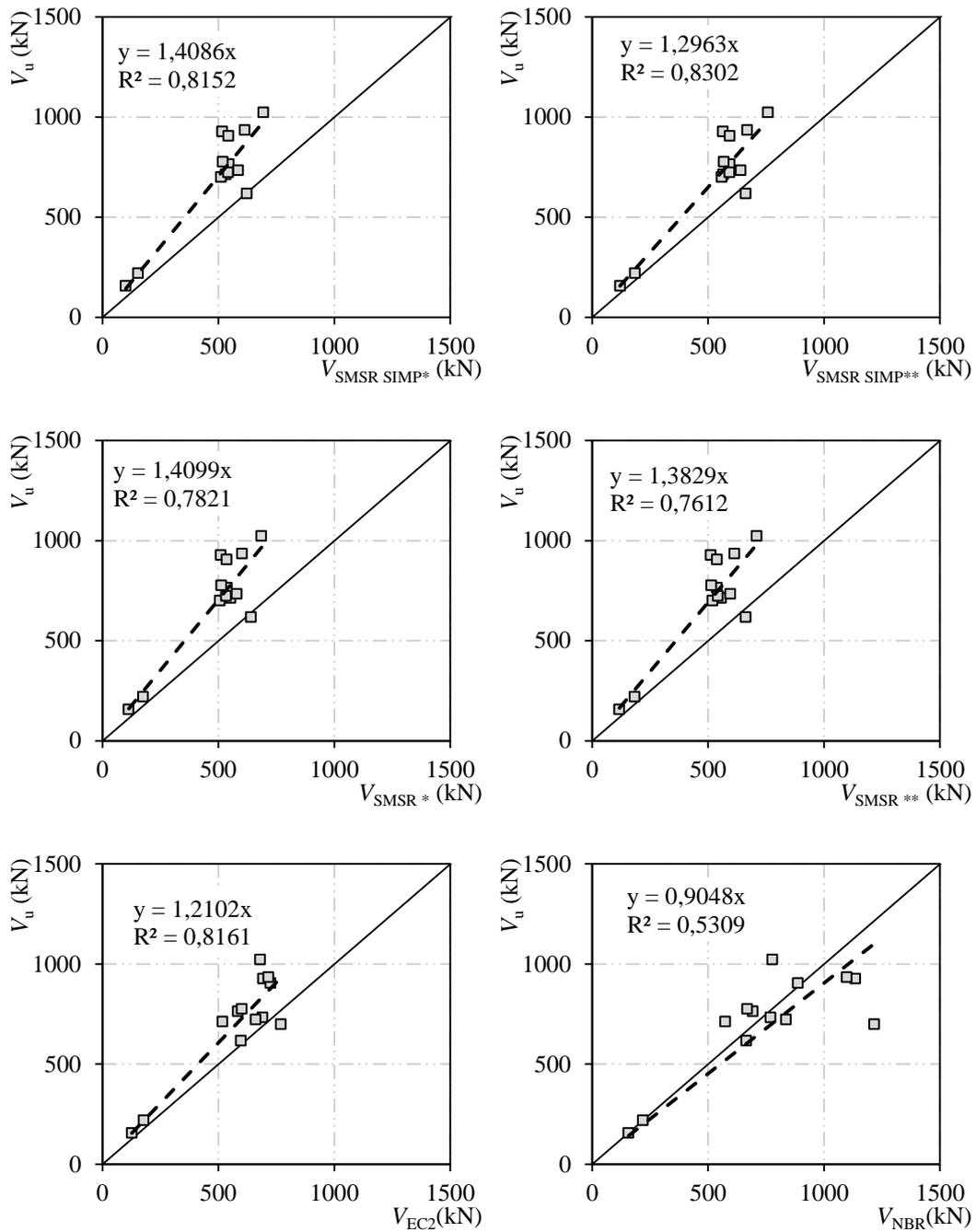


Figura 35 - Análise da precisão dos modelos das lajes submetidas a carregamento excêntrico

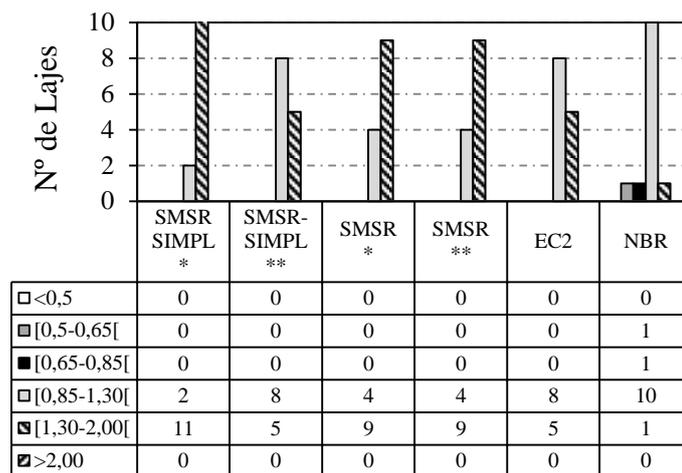


Figura 36 - Distribuição das lajes com carregamento excêntrico em cada intervalo do DPC

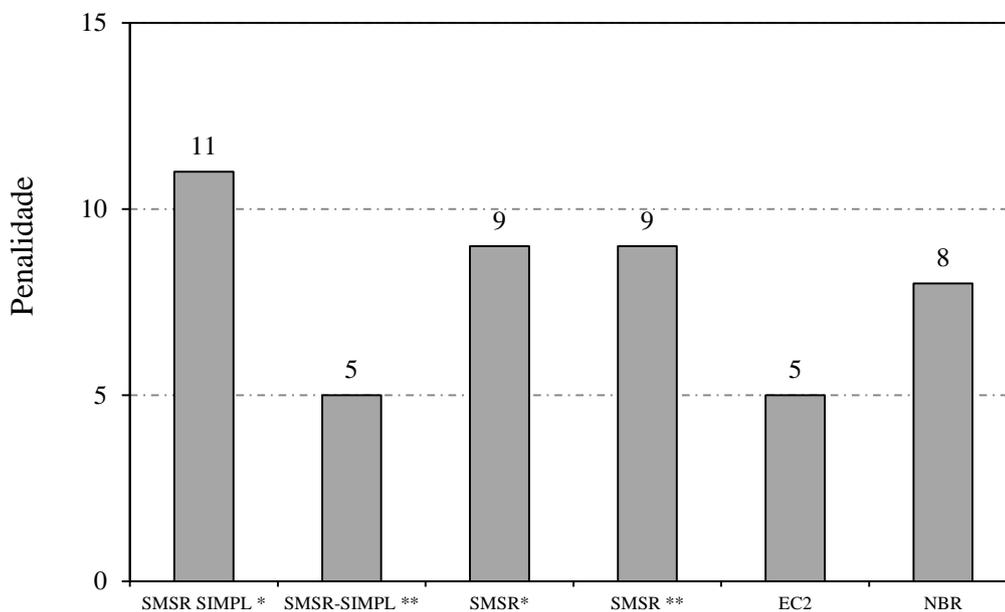


Figura 37 – Penalizações do método DPC para lajes com carregamento excêntrico

Quanto à análise de dispersão, o SMSR simplificado sem limitação do *size effect* apresentou os melhores resultados de dispersão com coeficiente de variação de 13% e  $R^2$  igual a 0,8302 e a maior penalidade no DPC com 11 pontos e a maioria de seus resultados classificados como conservador. O SMSR simplificado com limitação do *size effect* obteve coeficiente de variação de 14% e  $R^2$  igual a 0,8152 e apenas 5 pontos no DPC.

O SMSR com e sem limitação de *size effect* apresentaram dispersões semelhantes, com coeficiente de variação de 15% e 16% e  $R^2$  de 0,7821 e 0,7612, respectivamente e a mesma pontuação de 9 no DPC, com apenas 8% das lajes contra segurança.

O Eurocode 2 apresentou coeficiente de variação de 13% e  $R^2$  de 0,8161 e pontuação de 5 no DPC e a NBR apresentou os piores resultados de dispersão com coeficiente de variação de 20% e  $R^2$  de 0,5309. Sua pontuação no DPC foi de 8 pontos e 62% de seus resultados foram contra a segurança.

Observa-se que os resultados de todos os métodos, com exceção da NBR, foram muito próximos, com  $R^2$  variando de 0,76 a 0,83, coeficiente de variação de 0,13 a 0,16 e apenas 8% das lajes contra segurança. As médias também indicam resultados bem conservadores.

Há um número muito restrito de lajes no banco de dados e muitos parâmetros a se considerar. Mas se pode notar que, exceto pela NBR, os resultados foram bem conservadores com apenas 8% dos resultados contra segurança.

Analisando a Tabela 14, nota-se que a previsão de ruptura pelo SMSR para todas as lajes foi com a inclinação de 65 ou 64°, o que é próximo da inclinação máxima. É válido ressaltar que, no método SMSR simplificado, também foram encontrados valores semelhantes de inclinações das superfícies de ruptura.

Uma possível explicação para tais resultados incoerente é que para lajes com momento desbalanceado, não são todas as linhas de armadura de cisalhamento que serão cortadas pela superfície crítica como apresentado por Oliveira (2013) (ver Figura 38). Como na Equação 26 da capacidade resistente à punção é considerada uma redução de 25% pelo coeficiente  $\eta_c$  na parcela resistente do concreto em todo o perímetro crítico, este pode um dos motivos pelo qual a formulação do SMSR não apresenta bons resultados, uma vez que admite que todas as linhas estão sendo cortadas pela superfície crítica, quando na verdade isso não ocorre.

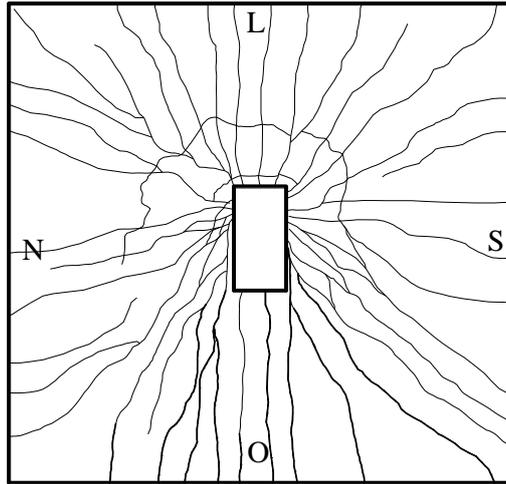


Figura 38 – Mapa de fissuração da Laje LS06 – Oliveira (2013)

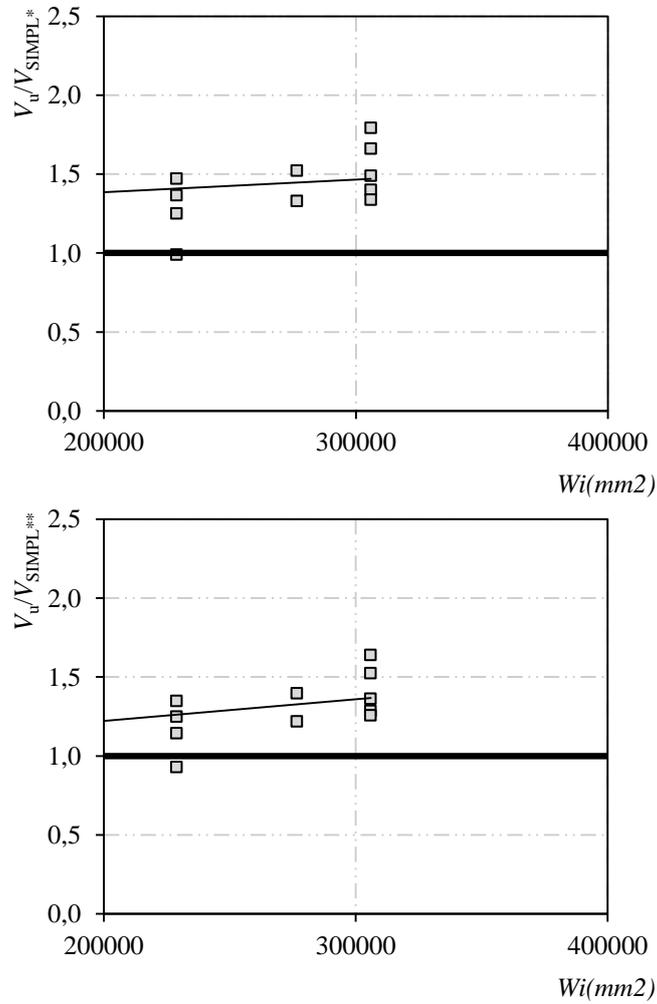
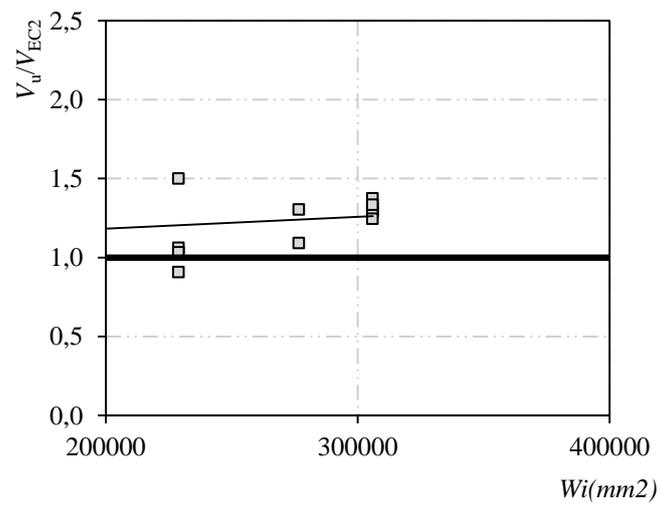
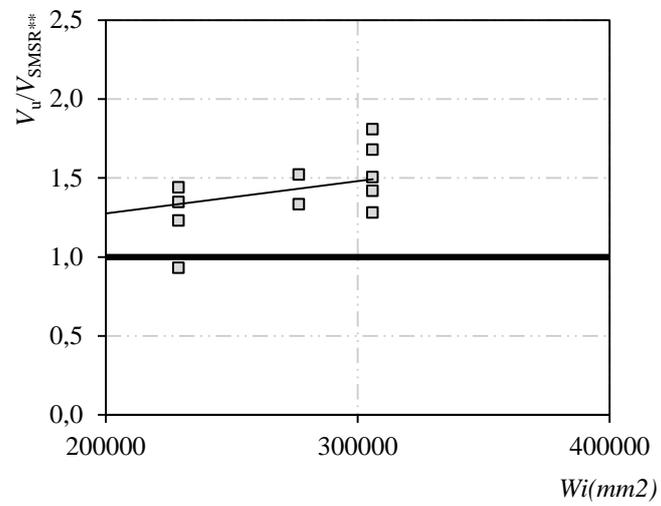
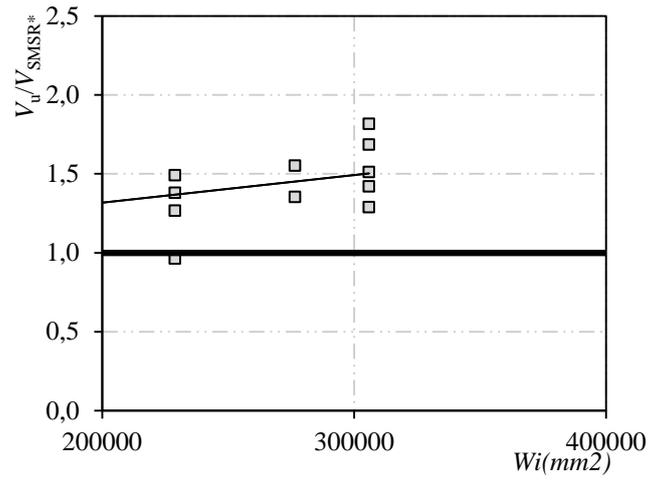


Figura 39 - Influência de  $W_i$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$



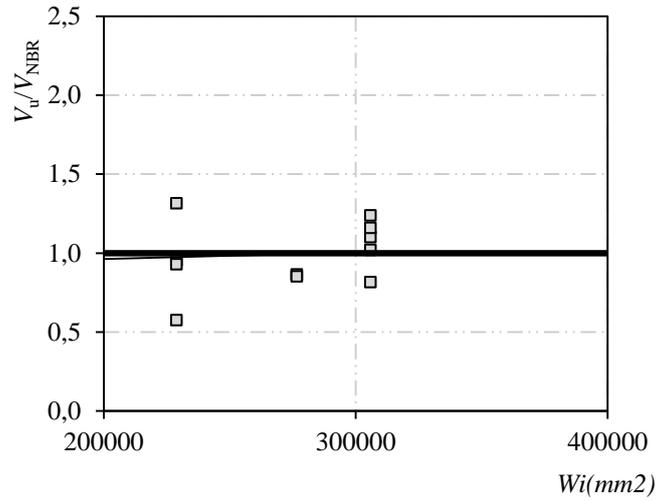


Figura 39- Influência de  $W_i$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$  (continuação)

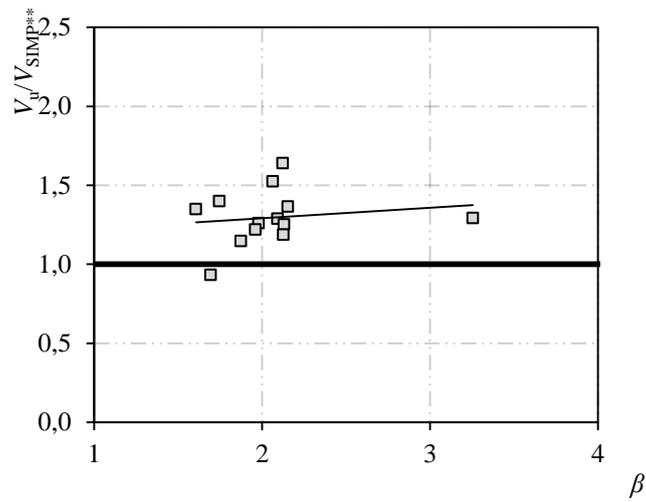
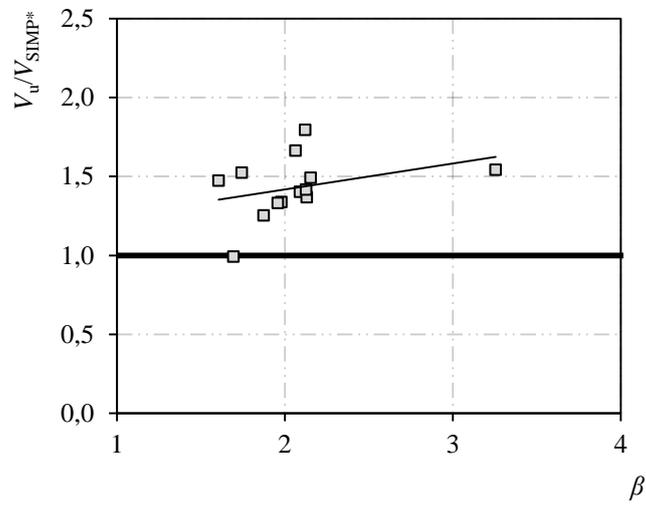


Figura 40 - Influência de  $\beta$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$

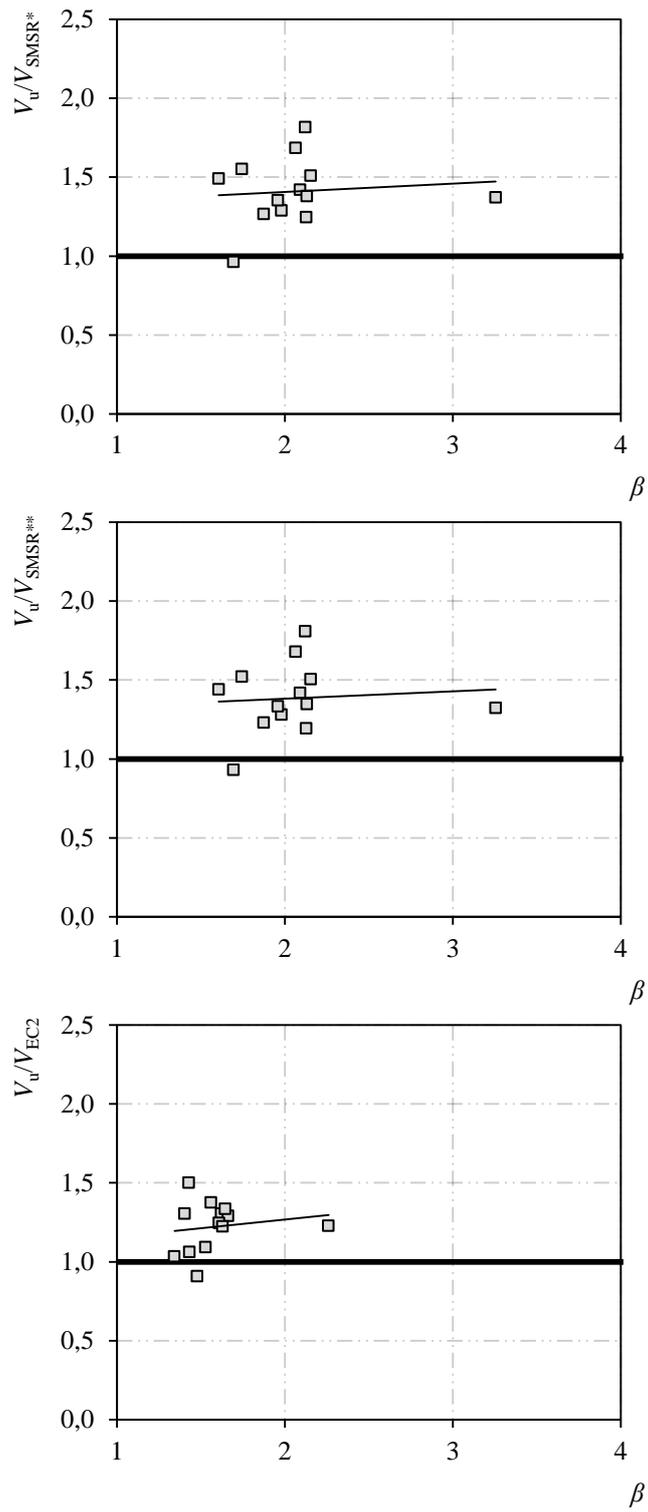


Figura 40 - Influência de  $\beta$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$  (continuação)

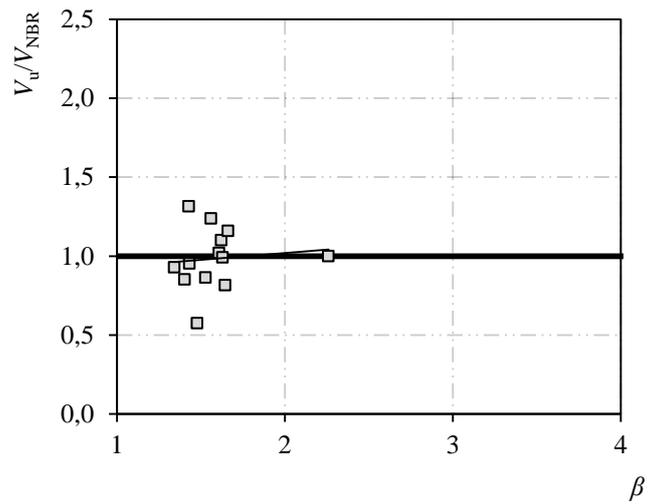


Figura 40 - Influência de  $\beta$  na relação  $V_u/V_{R,teo}$  (continuação)

Analisando as Figuras 39 e 40, observa-se que o comportamento dos parâmetros  $W_i$  e  $\beta$  foi bem estimado foi todos os modelos, apresentando, no entanto uma tendência a subestimar a carga última, tornando os resultados mais conservadores. Isso não foi observado na NBR 6118, que apresentou resultados sobre a linha de  $V_u = V_{teo}$ .

## **6. CONCLUSÃO**

### **6.1. Rotina Computacional**

Considera-se que a linguagem utilizada na rotina foi adequada, pois, por meio do VBA, se criam funções dentro do *Microsoft Excel*, que já é uma ferramenta utilizada por muitos para calcular estimativas de resistência à punção de acordo com diversos modelos ou recomendações normativas. Por meio da criação de uma função programada em VBA fica simples para qualquer leigo em programação realizar suas estimativas por esse método utilizando planilhas simples no *Microsoft Excel*.

### **6.2. Metodologia de Avaliação do SMSR**

Para avaliar o SMSR, foi coletado um banco de dados, para que fossem aplicadas as formulações do SMSR simplificado, do SMSR, da NBR 6118 e do Eurocode 2. As lajes selecionadas tiveram ruptura por punção dentro da região da armadura de cisalhamento e eram armadas com Pinos de Duas Cabeças. Para a situação de lajes com transferência de momento fletor, o banco de dados possuía apenas 13, o que comprometeu a qualidade estatística das análises. Para o caso de carregamento simétrico, o número de lajes foi razoável e foi possível tecer conclusões mais sólidas a respeito dos modelos utilizados.

### **6.3. Avaliação dos métodos de estimativa de resistência à punção**

#### **6.3.1. Lajes com carregamento simétrico**

Com base nas análises realizadas na seção 5.1, notou-se que os modelos teóricos que restringiram o *size effect* obtiveram as menores penalidades no DPC com destaque para o SMSR, que obteve a menor penalidade dentre todas. O DPC é uma classificação estatística que considera critérios de segurança, precisão e economia nos modos de dimensionamento.

Os resultados normativos apresentaram os menores percentuais de lajes contra segurança e isso se deu porque a previsão do local de ruptura se deu fora da região da armadura de cisalhamento. Os métodos SMSR e SMSR simplificado checam apenas superfícies dentro da região da armadura de cisalhamento, o que é verossímil, já que as lajes do banco de dados também romperam dentro da região da armadura de cisalhamento.

Comparando o SMSR simplificado com o SMSR, é possível observar que o SMSR apresentou penalização baixa no critério do DPC, com 90% de seus resultados na faixa de “Segurança Adequada”, para o caso de limitação do *size effect*. Para critérios de projeto, os resultados do SMSR podem ser considerados satisfatórios.

O SMSR prevê o modo de ruptura pela formação do cone de concreto devido à tração direta, o que não é correto. Na superfície de ruptura, o cisalhamento distribuído sobre ela não apresenta apenas a parcela vertical implicando na tração direta no pino, na verdade, esta região da laje está submetida também à combinação dos esforços fletores o que faz com que o modelo de arrancamento de tração direta precise de aprimoramento ou de resultados experimentais de arrancamento de pinos submetidos à tração-flexão.

Para uma análise inicial, sendo a primeira tentativa de automatizar o cálculo do SMSR, pode-se dizer que o método é satisfatório.

### 6.3.2. Lajes com carregamento excêntrico

Todos os métodos apresentaram dispersões e pontuações no DPC semelhantes e resultados bem conservadores, com exceção da NBR, que apresentou resultados bem dispersos e contra segurança. Os gráficos que mostram a influência dos parâmetros  $W_i$  e  $\beta$  mostram que esses parâmetros estão sendo levados em consideração corretamente nas formulações desses modelos.

É válido ressaltar que o número reduzido de lajes nesse banco de dados e o grande número de parâmetros envolvidos na punção com momentos desbalanceados torna inviável uma análise mais completa deste modelo. Isto reforça a necessidade de mais estudos e ensaios para compreender o mecanismo de ruptura das ligações laje-pilar quando estas possuem armadura de cisalhamento e estão submetidas à transferência de momento fletor.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318 – Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-11) and Commentary. Farmington Hills, EUA, 2011.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NBR 6118 (2014). Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento. Rio de Janeiro.

BIRKLE, G., *Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout*. PhD Thesis. Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, Canada, 2004, 152 p.

BROMS, C. E., *Shear Reinforcement for Deflection Ductility of Flat Plates*, ACI Structural Journal, V. 87, No. 6, Nov.-Dec. 1990, pp. 696-705.

BROMS, C. E., *Concrete Flat Slabs and Footings: Design Method for Punching and Detailing for Ductility*. PhD Thesis. Department of Civil and Architectural Engineering, Division of Structural Design and Bridges, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2005, 114 pp.

BROMS, C. E. (2007). *Ductility of Flat Plates: Comparison of Shear Reinforcement Systems*. ACI Structural Journal, Vol. 104, No. 6, Nov-Dez.

COLLINS, M.P. (2001). *Evaluation of shear design procedures for concrete structures*. A Report prepared for the CSA technical committee on reinforced concrete design.

Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 1990. Design Code. Thomas Telford. Londres, Inglaterra, 1993.

CORDOVIL, Fábio Armando Botelho. Lajes de Concreto Armado: punção / Fábio Armando Botelho Cordovil. – Florianópolis : Ed. da UFSC, 1995.

COSTA, H. D. (2016). *Resistência à Tração de Conectores de Aço Embutidas em Elementos de Concreto Armado*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará, Belém, Pará, Brasil, 105p.

ELIGEHAUSEN, R., BALOGH, T. (1995). Behaviour of Fasteners Loaded in Tension in Cracked Reinforced Concrete. ACI Structural Journal. Vol. 92, N° 3 Maio/Julho.

ELIGEHAUSEN, R.; BOUSKA, P.; CERVENKA, V.; PUKL, R. Size effect on the concrete failure load of anchor bolts. *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, Elsevier Applied Science, pp. 517-525. 1992.

EOTA, ETAG N° 001: Guideline for European Technical Approval of Metal Anchors for Use in Concrete, Brussels, 2010.

EUROPEAN STANDARD. EUROCODE 2: *Design of Concrete Structures – Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. European Committee for Standardization. Brussels, 2004.

FERREIRA, M. P. *Punção em Lajes Lisas de Concreto Armado com Armaduras de Cisalhamento e Momentos Desbalanceados*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD – 007 A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2010. 275p.

*fib* Bulletin 58. Fédération Internationale du Béton. Design of Anchorages in Concrete., Lausanne, Switzerland, 2011.

FUCHS, W.; ELIGEHAUSEN, R.; BREEN, J.E. *Concrete capacity design (CCD) Approach for Fastening to Concrete, Author's Closure to Discussion*. *ACI Structural Journal*, Vol. 92, No. 6, S. 794-802, 1995.

GRAF, O., *Versuche über die Widerstandsfähigkeit von allseitig aufliegenden dicken Eisenbetonplatten unter Einzellasten*, *Deutscher Ausschuß für Eisenbeton*, Heft 88, Berlin, 1938, 22p.

GOMES, R. B. e REGAN, P. E., *Punching Resistance of RC Flat Slabs with Shear Reinforcement*. *Journal of Structural Engineering*, 1999, 684-692.

GUANDALINI, S., *Poinçonnement Symétrique des dalles en béton armé*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland, 2006, 257p.

HAWKINS, N.M., FALSEN, H.B., and HINOJOSA, R.C., *Influence of Column Rectangularity on the Behavior of Flat Plate Structures*, ACI Publication, Cracking, Deflection, and Ultimate Load of Concrete Slab Systems, V. SP-30, No. 6, 1971, pp. 127-146.

HAWKINS, N. M., BAO, A., YAMAZAKI, J., *Moment Transfer from Concrete Slabs to Columns*. ACI Structural Journal, V.86, No. 6, Nov.-Dec. 1989, pp. 707-716.

INFASO. New market chances for steel structures by innovative fastening solutions. Atuttgart University. Final report of the RFCS project N° RFS-PR-05062, 2012.

KRÜGER, G., *Résistance au poinçonnement excentré des planchers-dalles*, Doctoral thesis EPFL n° 2064, 174 pages, Lausanne, Suisse, 1999.

LIPS, S., RUIZ, M. F. e MUTTONI, A. (2012). *Experimental Investigation on the Punching Strength and the Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs*. ACI Structural Journal. Vol. 109. N° 6. Pp. 889-899.

MELO, G. S. S. A., *Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs after Local Failure*. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, England, 1990, 214p.

MOKHTAR, A. S., GHALI, A., DILGER, W. (1985). *Stud Shear Reinforcement for Flat Concrete Plates*. ACI Journal, Set-Out. 676-683.

OLIVEIRA, D. R. C., *Análise Experimental de Lajes Cogumelo de Concreto com Pilares Retangulares*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD – 001A/2003, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília (2003)., DF, 214 p.

OLIVEIRA, M. H. *Punção em Lajes Lisas com Armadura de Cisalhamento Submetidas a Carregamento Excêntrico e Apoiadas sobre Pilares Retangulares*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil. Publicação E.TD – 02 A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2013. 223p.

OZBOLT, J.; ELIGEHAUSEN, R.; PERISKIC, G.; MAYER, U. *3D FE analysis of anchor bolts with large embedment depths*. Engineering Fracture Mechanics 74, p.168–178, 2007.

PEREIRA FILHO, M. J. M. *Avaliação dos Métodos Normativos para Previsão da Resistência à Punção de Lajes sem Armadura de Cisalhamento e com Conectores de Aço*. Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, 2016.

- REGAN, P. E. *Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs*. Report 89. Construction Industry Research and Information Association (CIRIA). Londres, Inglaterra, 1981. 89p.
- REGAN, P. E.; BRÆSTRUP, M. W. *Punching Shear in Reinforced Concrete*. Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information. n. 168. 1985. 232p.
- REGAN, P. E., *Shear Reinforcement of Flat Slabs*, International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs - Proceedings, TRITA-BKN, Bulletin 57, 2000, pp. 99-107.
- REGAN, P. E., *Report on tests of reinforced concrete flat slabs with double-headed studs*. Correspondência pessoal com o autor (2009).
- REGAN, P. E., SAMADIAN, F., *Shear Reinforcement against Punching in Reinforced Concrete Flat Slabs*, The Structural Engineer, V. 79, No. 10, May 2001, pp. 24-31.
- RICHART, F. E., Reinforced Concrete Wall and Column Footings. ACI Journal, Proceedings, V. 45, No. 10, Oct. 1948, pp. 97-127.
- TASSINARI, L. *Poinçonnement asymétrique des dalles en béton armé avec armature de poinçonnement*. Thèse EPFL. n. 5030. Laussane, Suíça, 2011. 197p.
- VANDERBILT, M. D. *Shear Strength of Continuous Plates*. Journal of Structural Division, Proceedings, ASCE. v. 98. n. ST5. 1972.