

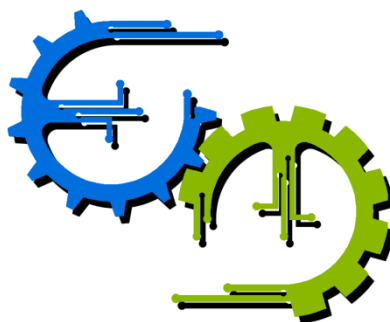


TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**MODELAGEM E SINCRONIZAÇÃO DE
SISTEMAS CAÓTICOS COM ÊNFASE EM
SISTEMAS FINANCEIROS**

Por
Emerson Grzeidak

Brasília, Março de 2013



**ENGENHARIA
MECATRÔNICA**
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Curso de Graduação em Engenharia de Controle e Automação

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

MODELAGEM E SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS COM ÊNFASE EM SISTEMAS FINANCEIROS

POR

Emerson Grzeidak

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro de Controle e Automação.

Banca Examinadora

Prof. José Alfredo Ruiz Vargas,
UnB/ ENE (Orientador)

Prof. Renato Alves Borges,
UnB/ ENE

Prof. Alex da Rosa,
UnB/ ENE

Brasília, Março de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

EMERSON, GRZEIDAK

Modelagem e Sincronização de Sistemas Caóticos:
Com Ênfase em Sistemas Financeiros,

[Distrito Federal] Ano 2013.

xvii, 92 p., 297 mm (FT/UnB, Engenheiro, Controle e Automação, Ano). Trabalho de Graduação – Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia.

1. Sistemas Caóticos
3. Sincronização

2. Métodos de Lyapunov
4. Controle Adaptativo

I. Mecatrônica/FT/UnB

II. Título (série)

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GRZEIDAK, E., (2013). Modelagem e Sincronização de Sistemas Caóticos Com Ênfase em Sistemas Financeiros. Trabalho de Graduação em Engenharia de Controle e Automação, Publicação FT.TG-nº 09, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 92 p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Emerson Grzeidak.

TÍTULO DO TRABALHO DE GRADUAÇÃO: Modelagem e Sincronização de Sistemas Caóticos Com Ênfase em Sistemas Financeiros.

GRAU: Engenheiro

ANO: 2013

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Trabalho de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Trabalho de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

Emerson Grzeidak
SQN 407 Bloco B ap 112 – Asa Norte.
70855-020 Brasília – DF – Brasil.

Dedico este trabalho em memória de meu pai,
Ricardo Grzeidak,
o único homem que admirei.

AGRADECIMENTOS

Acima de tudo agradeço a Deus por todo o conhecimento acrescentado na minha vida e pelas conquistas.

Quero prestar um enorme agradecimento a minha mãe pela sua paciência sempre presente. Sua educação e suporte são essenciais para a minha vida.

Agradeço a Mariângela Gouveia por mostrar para mim ao longo desses anos que os limites somos nós mesmos que criamos.

Também agradeço ao meu professor e orientador José Alfredo Ruiz Vargas pelas valiosas sugestões na elaboração dessa monografia.

Aos meus amigos Kevin Gularte, Lucas Sousa, Mirian e Thiago Guimarães deixo também os meus sinceros agradecimentos. As horas gastas na companhia de vocês durante a minha graduação foram memoráveis.

Emerson Grzeidak.

RESUMO

Este trabalho estuda, com base na teoria de estabilidade de Lyapunov, o projeto de controladores robustos para sistemas hipercaóticos financeiros e caóticos unificados na presença de incerteza nos parâmetros e distúrbios limitados. Inicialmente, de modo a explicitar o problema de sincronização e apresentar os conceitos e ferramentas utilizados, uma breve revisão sobre dinâmica não linear, estabilidade, caos e análise tipo *Lyapunov-like* é apresentada.

Na sequência, são estudados os modelos hipercaóticos e caóticos a serem utilizados. Para tanto, são analisados os trabalhos de Yu et al, 2012 e Lu et al, 2001. Estes trabalhos são fundamentais para os resultados apresentados no presente trabalho de graduação.

A seguir, um esquema de controle adaptativo para sistemas hipercaóticos financeiros que assegura convergência para zero do erro residual de sincronização é estudado. O esquema é baseado em uma análise tipo *Lyapunov-like* e assegura convergência assintótica, mesmo na presença de erros de modelagem e distúrbios limitados. Simulações exaustivas são apresentadas com o objetivo de se avaliar a influência dos diversos parâmetros de projeto no desempenho do algoritmo.

Finalmente, de modo a ressaltar a aplicabilidade da metodologia de projeto empregada, é considerado o controle adaptativo de um sistema caótico unificado. Como esperado, é mostrado que o erro residual de sincronização converge para zero na presença de erro de modelagem, distúrbios e incerteza paramétrica.

Palavras Chave: Sincronização, Sistemas Caóticos, Método de Lyapunov, Controle Adaptativo.

ABSTRACT

The present work studies, based on the Lyapunov Stability Theory, the design of robust controllers for hyperchaotic financial and unified chaotic systems in the presence of uncertainty parameter and bounded disturbances. Initially, in order to explain the problem of synchronization and introduce the concepts and tools used, a brief review of nonlinear dynamics, stability, chaos and a Lyapunov-like analysis type is presented.

In the sequel, the hyperchaotic and chaotic models are studied and then used. For this, we analyze the works of Yu et al, 2012 e Lu et al, 2001. These works are critical to the results presented in this graduate work.

Following, an adaptive control scheme to a hyperchaotic financial system that assures the convergence of the residual synchronization error to zero is studied. The scheme is based upon a Lyapunov-like analysis type and assures asymptotic convergence, even in the presence of modeling errors and bounded disturbances. Exhaustive simulations are showed aiming to evaluate the influence of various design parameters on the performance of the algorithm.

Finally, in order to emphasize the applicability of the design methodology employed, an adaptive control to the unified chaotic system is considered. As expected, is showed that the residual synchronization error converges to zero in the presence of modeling errors, disturbances and parametric uncertainty.

Keywords: Synchronization; Chaotic Systems; Lyapunov methods; Adaptive Control;

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	PRELIMINARES	6
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS	6
2.2	ESPAÇO DE FASE E RETRATO DE FASE	7
2.3	TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	9
2.3.1	CONCEITOS DE ESTABILIDADE	9
2.3.2	TEOREMA DE LYAPUNOV	11
2.3.3	LEMA DE BARBALAT E ANÁLISE TIPO LYAPUNOV	13
2.4	CONCEITUAÇÃO DE CAOS	14
2.5	DEFINIÇÃO DE SINCRONIZAÇÃO	15
3	MODELAGEM DE SISTEMAS CAÓTICOS UNIFICADOS E FINANCEIROS	17
3.1	TEORIA DO CAOS NA ECONOMIA	17
3.2	SISTEMA FINANCEIRO CAÓTICO TRIDIMENSIONAL	18
3.3	SISTEMA FINANCEIRO HIPERCAÓTICO	22
3.4	SISTEMA CAÓTICO UNIFICADO	28
3.4.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	30
4	SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA DE SISTEMA HIPERCAÓTICO FINANCEIRO	32
4.1	INTRODUÇÃO	32
4.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	33
4.3	SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA	36
4.4	SIMULAÇÕES	39
4.5	CONCLUSÃO	51
5	SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA DE SISTEMAS CAÓTICOS UNIFICADOS	52
5.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	52
5.2	SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA	54
5.3	SIMULAÇÕES	57
5.4	CONCLUSÃO	59
6	CONCLUSÕES	60
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	62

LISTA DE FIGURAS

2.1	Trajetória ao longo do espaço de fase.....	8
2.2	Exemplo de retrato de fase.....	9
3.1	Atrator caótico do modelo financeiro	21
3.2	Projeção no plano u-x	23
3.3	Projeção no plano u-y	23
3.4	Projeção no plano u-z	24
3.5	Projeção no plano x-y	24
3.6	Projeção no plano z-x	25
3.7	Projeção no plano z-y	26
3.8	Diagrama das bifurcações do parâmetro c	26
3.9	Retratos de fase no plano x-y para diferentes parâmetros c	26
3.10	Diagrama das bifurcações do parâmetro a	27
3.11	Diagrama das bifurcações do parâmetro b	27
3.12	Diagrama das bifurcações do parâmetro k	28
3.13	Exemplo de divergência nas condições iniciais do estado $x(t)$	28
3.14	Atrator de Lorenz	30
3.15	Atrator de Lü	31
3.16	Atrator de Chen.....	31
4.1	Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$	40
4.2	Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$	41
4.3	Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$	41
4.4	Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$	41
4.5	Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$	42
4.6	Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$	42
4.7	Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$	42
4.8	Erro de sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$	43
4.9	Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\ \hat{\theta}\ $	43
4.10	Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$	44
4.11	Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$	45
4.12	Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$	45
4.13	Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$	45
4.14	Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$	46

4.15	Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$	46
4.16	Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$	46
4.17	Erro de sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$	47
4.18	Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\ \hat{\theta}\ $	47
4.19	Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$	48
4.20	Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$	48
4.21	Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$	49
4.22	Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$	49
4.19	Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$	49
4.20	Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$	50
4.21	Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$	50
4.26	Erro de sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$	50
4.27	Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\ \hat{\theta}\ $	51
5.1	Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$	57
5.2	Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$	58
5.3	Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$	58
5.4	Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$	58
5.5	Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$	59
5.6	Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$	59

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Matemáticos

\forall	"Para qualquer que seja"
$\ \ $	Norma
$\ \ _F$	Norma de Frobenius
\Rightarrow	"Implica que"
\exists	"Existe"
\in	"É um elemento de"
\notin	"Não é um elemento de"
\Re	Conjunto dos números reais
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros
∞	Infinito

Subscritos

s	escravo
m	mestre

Sobrescritos

\cdot	Varição temporal
$\bar{}$	Limitante superior
\sim	Erro entre o valor estimado e o real
$\hat{}$	Valor estimado
$*$	Ponto de equilíbrio
T	Transposta

1 INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas dinâmicos é o estudo de como os processos ou sistemas progredem com o tempo. Portanto, um sistema dinâmico pode ser interpretado como um objeto de qualquer natureza, onde os seus estados evoluem no tempo de acordo com uma lei dinâmica (Murkhejee e Poria, 2012). Em outras palavras, um sistema dinâmico consiste em um conjunto de estados possíveis, juntamente com uma regra que determina o estado presente em função dos estados passados. De um modo geral, um sistema dinâmico apresenta 3 regras básicas:

- Plano de fase: é o conjunto cujos pontos representam os estados possíveis em um determinado ponto do tempo.
- Tempo: pode ser discreto, onde o conjunto de valores é o conjunto de inteiros Z . Pode ser contínuo, onde o conjunto de valores é o conjunto dos reais R .
- Lei de Evolução: é uma regra que permite, dado um estado em um ponto no tempo, determinar o estado do sistema em qualquer outro ponto no tempo. A existência dessa regra implica que o processo é determinístico.

A teoria de sistemas dinâmicos é um tópico interdisciplinar na ciência atual e teve suas origens na física. Os primeiros estudos na área remontam em meados do século XVII quando Newton, embasado nas equações diferenciais, apresentou ao mundo as leis do movimento e da gravitação universal, combinando elas para explicar as leis de Kepler sobre o movimento dos corpos celestes. Newton conseguiu resolver o problema dos dois corpos, que consiste em calcular a trajetória da terra ao redor do sol. Gerações subsequentes de matemáticos tentaram estender o problema envolvendo a lua, dando origem ao problema dos três corpos. Entretanto, esse último desafio mostrou-se ser muito mais complexo, de modo que explicitar fórmulas que descrevem o movimento dos três corpos foi classificado como impossível por décadas. Uma importante contribuição para o problema dos três corpos veio no final do século XIX através do matemático Henri Poincaré que desenvolveu ferramentas geométricas e topológicas que contribuíram para o avanço da teoria de

sistemas dinâmicos. Poincaré foi provavelmente a primeira pessoa a observar o comportamento caótico no movimento dos três corpos, como pode ser lido no seu ensaio *Science and Method*, escrita em 1903

"Uma causa muito pequena que escapa de nossa observação determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, dizemos então que o efeito é devido ao acaso. Se soubéssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, poderíamos prever exatamente a situação do mesmo universo em um momento posterior. Mas, mesmo que fosse o caso de as leis da natureza não serem segredo para nós, poderíamos ainda conhecer as condições iniciais somente "aproximadamente". Se isto nos permitisse prever a situação posterior "com a mesma aproximação", isso seria tudo o que queríamos, e diríamos que o fenômeno foi previsto, isto é, é governado por leis. Mas não é sempre assim: pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais venham a produzir um erro enorme nos acontecimentos posteriores. A previsão se torna impossível e temos um fenômeno fortuito."

Apesar dos indícios dados por Henri Poincaré sobre a existência do caos, sua investigação foi praticamente deixada de lado por quase metade do século XX, enquanto que os demais tópicos da teoria de sistemas dinâmicos ganhavam maior dimensão e importância na ciência moderna. Somente a partir dos estudos de Edward Lorenz na década 1960 que a comunidade científica passou progressivamente a tomar consciência de um novo tipo de comportamento na dinâmica: o comportamento caótico (Lorenz, 1963). Desde então, caos passou a ser um dos ramos mais estudados da teoria de sistemas dinâmicos, com implicações diversas na engenharia, biologia, química e demais áreas do conhecimento humano.

Em essência, a teoria do caos mostra que um conjunto de equações determinísticas mas não lineares, podem levar a trajetórias extremamente complexas ao longo do tempo. Trajetórias caóticas no tempo tem alguns dos seguintes atributos, entre vários:

- A trajetória pode apresentar mudanças qualitativas bruscas no comportamento como aqueles associados por grandes distúrbios aleatórios, dessa forma alguns padrões de teste

para detecção de aleatoriedade não conseguem diferenciar um caminho com padrões caóticos de mudança de um caminho verdadeiramente aleatório.

- A trajetória pode ser extremamente sensível a pequenas mudanças nos valores de seus parâmetros. Uma mudança, por exemplo, na quarta casa decimal de um parâmetro pode alterar qualitativamente a trajetória do sistema no futuro.

- A trajetória pode nunca mais retornar para um ponto que foi atravessado previamente, mas pode desenvolver em uma região limitada um comportamento oscilatório aparentemente desordenado.

Com essas características acima, fica evidente que a previsão de longo prazo das trajetórias de um sistema dinâmico caótico pode se tornar uma tarefa extremamente difícil. Um clássico exemplo disso é a tentativa de prever o efeito das políticas monetárias ou fiscais a longo prazo na economia com precisão, quase sempre elas são carregadas com incertezas. Além disso, muitos outros fenômenos na natureza apresentam um comportamento não linear e por vezes caótico, portanto o estudo dos sistemas caóticos dinâmicos adquire uma importância cada vez maior nas comunidades científicas internacionais.

A propriedade de um sistema caótico responder sensivelmente a pequenas perturbações faz com que essa propriedade possa ser usada pela lei de controle na obtenção de estados desejados, sem alterar significativamente suas propriedades dinâmicas e com gasto pequeno de energia. O dispêndio de energia é pequeno porque pequenas mudanças no parâmetro de controle pode produzir mudanças drásticas no comportamento dinâmico do sistema (Faggini e Parziale, 2012). Os estudos em controle e sincronização do caos foram desenvolvidos como consequência disso. Em ambas as abordagens tem-se o objetivo de intervir em um dado sistema caótico de modo que seu movimento fique confinado em um determinada região do espaço de fase, isso pode ser feito através de condução externa ou por perturbação dos parâmetros (Boccaletti, 2002). No controle do caos, busca-se deslocar as trajetórias do sistema para um região no espaço de fase onde os movimentos são mais regulares ou mais estáveis. Seguindo essa linha de pensamento, sincronização propõe a convergência de um ou mais sistemas caóticos para um comportamento em comum.

Há duas configurações possíveis na sincronização de sistemas caóticos: unidirecional (ou direcional) e bidirecional (também conhecida como mútua ou global). Na ligação unidirecional, um dos sistemas, designado como transporte ou mestre, interfere no outro, designado por resposta ou escravo, sem que este forneça retorno para o primeiro. Ou seja, o sistema mestre evolui livremente e guia a evolução do sistema escravo. Na ligação bidirecional, entende-se que há interação mútua entre os dois sistemas caóticos, entre outras palavras, os sistemas mestre e escravo estão acoplados. Uma abordagem frequentemente utilizada na sincronização é considerar o erro dinâmico, definido como a diferença entre os vetores de estados dos sistemas mestres e escravos, e usar técnicas conhecidas de controle que forcem a convergência do erro para zero. Diversos métodos podem ser utilizados para esse fim, como método de controle por *backstepping*, controle deslizante, controle adaptativo, entre outros (Boccaletti, 2002).

Cabe ressaltar duas vantagens que o método de controle adaptativo na sincronização de sistemas caóticos fornece. A primeira é que a maioria dos modelos de sincronização fornecidos na literatura desconsidera a presença de distúrbios internos ou externos. Como ilustração, as técnicas em Al-Sawada et al. (2010), Yang (2011), Li (2010), Zhao et al. (2011) assumem crucialmente a inexistência de distúrbios. Entretanto, mesmo que esses distúrbios sejam pequenos, sua presença no sistema caótico é suficiente para gerar mudanças drásticas no seu comportamento dinâmico, uma vez que sistemas caóticos possuem grande dependência às condições iniciais. Sincronização adaptativa pode garantir a convergência assintótica do erro de sincronização para zero mesmo na presença de distúrbios desconhecidos cujos limitantes superiores são conhecidas a priori. A segunda vantagem é que boa parte dos modelos apresentados considera que os valores dos parâmetros do sistema caótico sejam conhecidos para garantir uma sincronização, e.g., (Chen et al. (2009), Lu e Tse (2000), Zhao et al. (2011)). Porém, valores diferentes de parâmetros podem gerar trajetórias e dinâmicas diferentes para um dado sistema caótico. A técnica adaptativa permite o ajuste dos parâmetros dos estimadores para que mesmo na presença de parâmetros desconhecidos a sincronização seja estabelecida entre os sistemas.

Nas últimas duas décadas, a sincronização caótica tem sido aplicada em várias áreas como engenharia elétrica (Xiao, 2009; Lu and Tse, 2000), sistemas biológicos (Arecchi et al., 2003), engenharia química (Li et al., 2003) e criptografia (Lu et al, 2002; Sun et al., 2008). Apesar de uma considerável quantia de conhecimento já ter sido estabelecida, continua sendo uma área de pesquisa ativa. Novas áreas de aplicações são descobertas, recentemente na área de finanças e economia Zhao et al. (2011) e Jian et al. (2009) propuseram métodos de sincronização para um sistema caótico financeiro. Entretanto a sincronização proposta não suporta a presença de distúrbios externos ou parâmetros desconhecidos, o que não reflete uma abordagem apropriada, uma vez que sistemas econômicos são influenciados frequentemente por agentes econômicos externos e imprevisíveis. Este trabalho de graduação contribui nos seguintes tópicos.

1. Análise do modelo financeiro caótico e do sistema caótico unificado.
2. Estudo de controladores que asseguram a convergência para zero do erro de sincronização, mesmo na presença de parâmetros e distúrbios incertos.
3. Simulação exhaustiva usando Matlab® Simulink dos esquemas propostos, objetivando avaliar a influência dos diversos parâmetros de projeto no desempenho dos algoritmos.

2 PRELIMINARES

O propósito do capítulo é fornecer alguns conceitos básicos e ferramentas matemáticas necessárias no decorrer do presente trabalho. Uma breve definição geral de sistemas caóticos bem como o conceito de sincronização serão apresentados. Em seguida será tratada a teoria da estabilidade de Lyapunov.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

Os conceitos apresentados a seguir foram retirados do livro do Khalil, (2001). Considere um sistema dinâmico que seja modelado por um número finito de equações diferenciais ordinárias acopladas da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde \dot{x}_i denota a derivada de x_i com respeito a variável temporal t e u_1, u_2, \dots, u_p são as variáveis de entrada. Chama-se as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n de variáveis de estado. Eles representam a memória que o sistema dinâmico tem do seu passado. Pode-se usar a notação vetorial para reescrever na seguinte forma compacta

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}\tag{2.2}$$

e rescrevendo as n equações diferenciais de primeira ordem como uma equação diferencial vetorial de primeira ordem n -dimensional, advém

$$\dot{x} = f(t, x, u)\tag{2.3}$$

Chamamos (2.3) de equação do estado, e referimos x como estado e u como entrada. Quando não há a entrada u presente no sistema, chamamos de equação de estados não-forçada e é escrita na seguinte forma

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.4)$$

Um sistema dinâmico contínuo pode ser classificado como autônomo ou invariante no tempo se a parte direita de (2.4) não depende explicitamente do tempo t , i.e., se $f(t, x) = f(x)$. Por outro lado se $f(t, x)$ depende explicitamente do tempo então o sistema dinâmico é chamado de não-autônomo ou variante no tempo.

Um conceito importante na análise dos sistemas dinâmicos é o ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio x^* é um ponto no espaço de fase onde a taxa de variação é nula, i.e.,

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_{x=x^*} = 0 \quad i.e. \quad f(x^*) = 0 \quad (2.5)$$

Note que os pontos de equilíbrio possuem a propriedade de qualquer estado que comece em x^* , permanecerá em x^* por todo o tempo futuro.

2.2 ESPAÇO DE FASE E RETRATO DE FASE

O conjunto de variáveis de fase de um sistema é um conjunto mínimo de variáveis que descrevem completamente o estado do sistema. Chama-se de espaço de fase o espaço gerado pelas variáveis de fase. Ou seja, o estado de um sistema em qualquer instante do tempo é um ponto no espaço de fase do sistema. Dessa forma, uma mudança no estado de um sistema ao longo do tempo é representado por uma trajetória no espaço de fase. Em outras palavras, a trajetória é um caminho de um objeto no espaço de fase em função do tempo. O Retrato de fase é a coleção de todos os caminhos possíveis do sistema dinâmico (Murkhejee e Poria, 2012).

Como exemplo de definição do plano de fase, considere o sistema a seguir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde f_1 e f_2 são duas funções dadas. O sistema pode ser escrito de forma mais compacta na seguinte notação vetorial

$$\dot{x} = f(x)\tag{2.7}$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Aqui x representa um ponto no espaço de fase, e \dot{x} é o taxa de variação no ponto. Percorrendo ao longo do campo vetorial, um ponto de fase traça uma solução $x(t)$, correspondendo a uma trajetória passando ao longo do espaço de fase, conforme pode ser visualizado na Fig. 2.1. Além disso, o retrato de fase todo é preenchido por trajetórias, uma vez que cada ponto pode desempenhar o papel de uma condição inicial.

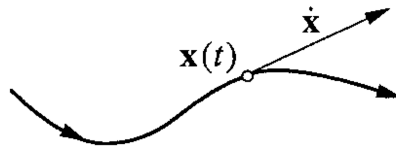


Figura 2.1. Trajetória ao longo do espaço de fase (Strogatz, 2001).

Algumas das características importantes dos retratos de fase são

1. Pontos fixos: São os pontos que satisfazem $f(x^*) = 0$, ou seja, correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema. Na Fig. 2.2 tem-se como exemplo os pontos A, B e C.
2. Órbitas fechadas: correspondem a soluções periódicas, i.e., soluções onde $x(t+T) = x(t)$ para todo t , para algum $T > 0$. Nota-se na Fig. 2.2 a órbita periódica D.
3. O arranjo das trajetórias perto dos pontos fixos ou das órbitas fechadas. Como exemplo, o padrão de fluxo nos pontos A e C são semelhantes.
4. A instabilidade ou estabilidade dos pontos fixos ou a limitação das trajetórias das órbitas. Por exemplo, a órbita periódica D é de trajetória limitada, enquanto que os

pontos A, B e C são instáveis porque as trajetórias nas proximidades desse ponto tendem a se afastar.

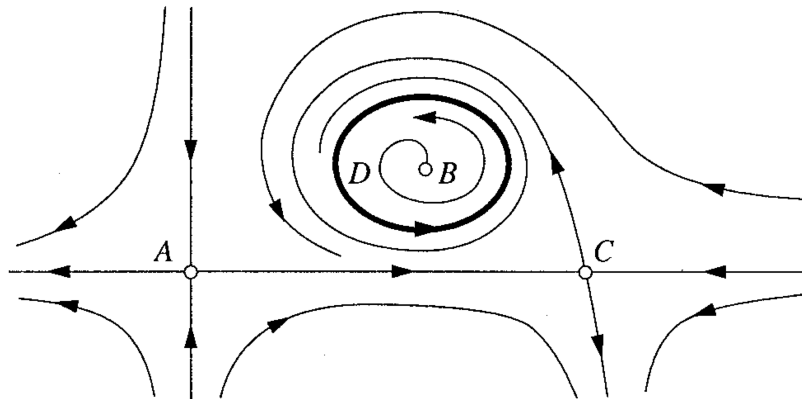


Figura 2.2. Exemplo de retrato de fase (Strogatz, 2001).

2.3 TEORIA DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

Nesta seção será apresentada a análise de Lyapunov para sistemas não-autônomos, ou seja, variantes no tempo. Os conceitos de estabilidade aqui apresentados são similares aos sistemas autônomos, exceto a dependência do comportamento dos sistemas não-autônomos do tempo inicial t_0 , portanto as definições de estabilidade incluem t_0 explicitamente aqui. Levando isso em consideração, um novo conceito, uniformidade, será necessário para caracterizar o comportamento dos sistemas não-autônomos em termos de diferentes valores de t_0 . As definições utilizadas nas seções seguintes foram tomadas do livro de Slotine e Li (1991).

2.3.1 Conceitos de estabilidade

Para sistemas não-autônomos, representados na seguinte forma

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.8}$$

os pontos de equilíbrio x^* são definidos por

$$f(x^*, t) \equiv 0 \tag{2.9}$$

Observe que (2.9) implica que o sistema ficará no ponto de equilíbrio x^* indefinidamente no tempo a partir de t_0 . A seguir definimos alguns conceitos importantes de estabilidade em sistemas não-autônomos. Cabe observar que as definições usam o ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$, para os casos diferentes de $\mathbf{0}$ aplica-se uma mudança de eixos do sistema e utiliza-se os conceitos de estabilidade para análise.

Definição 2.3.1.1: O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é estável em t_0 se para qualquer $R > 0$, existe um escalar positivo $r(R, t_0)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R \quad \forall t \geq t_0$$

caso contrário, o ponto de equilíbrio é instável.

Definição 2.3.1.2: O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é assintoticamente estável no tempo t_0 se

- é estável
- $\exists r(t_0)$ tal que $\|x(t_0)\| < r(t_0) \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow \mathbf{0}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Entre outras palavras, estabilidade assintótica requer que haja uma região atrativa para qualquer tempo inicial t_0 .

Definição 2.3.1.3: O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é exponencialmente estável se existem dois números positivos, α e λ , tais que um $x(t_0)$ suficientemente pequeno

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

Definição 2.3.1.4: O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é globalmente assintoticamente estável se $\forall x(t_0)$

$$x(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Definição 2.3.1.5: O ponto de equilíbrio $\mathbf{0}$ é localmente uniformemente estável se o escalar r na definição 2.3.1.1 pode ser escolhido independentemente de t_0 , i.e., se $r = r(R)$

Definição 2.3.1.6: O ponto de equilíbrio na origem é localmente uniformemente assintoticamente estável se

- é uniformemente estável
- existe uma bola de atração B_{R_0} , cujo raio é independente de t_0 , tal que quaisquer trajetórias do sistema com estados iniciais em B_{R_0} converge para 0 uniformemente em t_0 .

Cabe ressaltar que estabilidade assintótica uniforme implica em estabilidade assintótica, entretanto a recíproca não é verdadeira.

2.3.2 Teorema de Lyapunov

Quando se aplica o método direto de Lyapunov para sistemas não-autônomos, funções escalares com dependência explícita no tempo $V(x,t)$ deverão ser usadas. A seguir definimos algumas propriedades que essas funções escalares deverão ter na análise de Lyapunov para sistemas variantes no tempo.

Definição 2.3.2.1: A função escalar variante no tempo $V(x,t)$ é positiva definida localmente se $V(0,t)=0$ e existe uma função positiva definida invariante no tempo $V_0(x)$ tal que $\forall t \geq t_0$ então $V(x,t) \geq V_0(x)$.

Define-se agora o conceito de funções decrescentes.

Definição 2.3.2.2: Uma função escalar $V(x,t)$ é dita ser decrescente se $V(0,t)=0$, e se existe uma função positiva definida invariante no tempo $V_l(x)$ tal que $\forall t \geq 0$ então $V(x,t) \leq V_l(x)$.

Outro conceito importante no estudo da estabilidade é o conceito da função V de radialmente ilimitada, isto é, uma função que tende para o infinito em todas as direções.

Definição 2.3.2.3: Uma função $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é dita ser radialmente ilimitada (em torno de \bar{x}) se $\lim_{\|x-\bar{x}\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Em outras palavras: para todo $M > 0$, existe $R > 0$ tal que $\|x - \bar{x}\| > R \Rightarrow V(x) > M$.

A seguir é enunciado o teorema de Lyapunov para cada um dos seguintes casos de estabilidade: uniforme, assintótica uniforme e global assintótica uniforme (Slotine e Li, 1991).

Teorema 2.3.2.1: Teorema de Lyapunov para sistemas não autônomos

- **Estabilidade:** Se, em uma bola B_{R_0} ao redor do ponto de equilíbrio 0 , onde existe uma função escalar $V(x,t)$ com derivadas parciais contínuas tal que

1. V é positiva definida
2. \dot{V} é negativa semi-definida

então o ponto de equilíbrio 0 é estável.

- **Estabilidade uniforme e estabilidade assintótica uniforme:** se, além disso

3. V é decrescente

então a origem é uniformemente estável. Se a condição 2 é reforçada de modo que \dot{V} seja negativa definida, então o ponto de equilíbrio é uniforme assintoticamente estável.

- **Estabilidade assintótica uniforme global:** Se a bola B_{R_0} , é substituída para todo o espaço de estado. E se a condição 1, condição 2 reforçada, condição 3 e a seguinte condição

4. $V(x,t)$ é radialmente ilimitada

são todas satisfeitas, então o ponto de equilíbrio global é um ponto de estabilidade assintótica uniforme.

No caso de sistemas incertos pode ser impossível determinar os pontos de equilíbrio do sistema, o que limita a aplicação das definições anteriores. Neste caso, é usada a seguinte

definição que indica uma certa medida de proximidade das soluções com a origem (Khalil, 2001).

Definição 2.3.2.3: As soluções de (2.8) são

1. Uniformemente limitadas se existe uma constante positiva c , independente de $t \geq 0$, e para todo $a \in (0, c)$, existe $\beta = \beta(a) > 0$, independente de t_0 , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq \beta, \forall t \geq t_0$$

2. Uniformemente finalmente limitadas (com limitante b) se existem constantes positivas b e c , independente de $t \geq 0$, e para todo $a \in (0, c)$, existe $T = T(a, b) \geq 0$, independente de t_0 , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$$

2.3.3 Lema de Barbalat e Análise Tipo Lyapunov

De um modo geral, análise de estabilidade assintótica para sistemas não-autônomos é mais complexa que para sistemas autônomos, uma vez que torna-se difícil encontrar funções candidatas de Lyapunov com derivada negativa definida. O lema de Barbalat oferece um conjunto de resultados que podem auxiliar na solução de problemas envolvendo estabilidade assintótica.

Definição 2.3.3.1: Uma função $g(t)$ é dita ser uniformemente contínua em $[0, \infty)$ se

$$\forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0, \forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

Lema 2.3.3.1 (Barbalat) Se uma função diferenciável tem limite finito quando $t \rightarrow \infty$, e se \dot{f} é uniformemente contínua, então $\dot{f}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Usando o Lema 2.3.3.1, podemos adequar para análise de estabilidade no seguinte Lema

Lema 2.3.3.2 ("Lyapunov-Like Lemma") Se uma função escalar $V(x, t)$ satisfaz as seguintes condições

- $V(x, t)$ limitada inferiormente

- $\dot{V}(x,t)$ é negativa semi-definida
- $\dot{V}(x,t)$ é uniformemente contínua no tempo

então $\dot{V}(x,t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

2.4 CONCEITUAÇÃO DE CAOS

Nos anos recentes, sistemas dinâmicos caóticos têm recebido grande atenção da comunidade científica. Embora não haja nenhuma definição universal do termo caos, é do consenso geral que três regras são necessárias para que um sistema apresente comportamento caótico.

Definição 2.3.1: Caos é um comportamento aperiódico de longo prazo em um sistema determinístico que apresenta dependência sensível às condições iniciais (Strogatz, 2001). Ela será usada nesse trabalho, porém antes de formalizarmos a definição de sistemas caóticos, será necessário estabelecer alguns conceitos a seguir.

1. "Comportamento aperiódico de longo prazo" significa a existência de trajetórias que não se acomodam em pontos fixos, órbitas periódicas, ou órbitas quasi-periódicas quando $t \rightarrow \infty$.
2. "Determinístico" significa que o sistema não possui entradas ou parâmetros aleatórios. O comportamento irregular do sistema é devido a sua natureza não linear, ou seja, o sistema é governado por equações determinísticas.
3. "Dependência sensível às condições iniciais" significa que trajetórias próximas separam exponencialmente, i.e, o sistema apresenta um expoente de Lyapunov positivo. Logo, uma perturbação arbitrariamente pequena na trajetória pode levar a comportamentos futuros significativamente diferentes.

Levando em consideração os conceitos apresentados acima, para que um sistema dinâmico contínuo apresente um comportamento caótico, é necessário que ele deva ser não-linear e apresentar no mínimo 3 dimensões. Esse comportamento implica sensibilidade na dinâmica

de pequenas mudanças nas condições iniciais. O expoente de Lyapunov é uma medida que caracteriza a taxa de separação de trajetórias infinitesimalmente próximas ao longo do tempo. Em termos matemáticos, seja $\delta(t)$ a distância no tempo t de duas trajetórias no espaço de fase que iniciaram com uma distância inicial δ_0 no tempo t_0 . Se $\delta(t)$ cresce exponencialmente com a evolução do sistema, então este apresenta dependência sensível às condições iniciais e obedece a seguinte regra

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda(t-t_0)} \quad (2.10)$$

onde λ é o expoente de Lyapunov. Um sistema dinâmico n dimensional apresenta n expoentes de Lyapunov. Pelo menos 1 expoente de Lyapunov deverá ser positivo para que um sistema dinâmico apresente comportamento caótico. E para ser um sistema hipercaótico, ele deverá ter pelo menos 2 expoentes de Lyapunov positivos (Murkhejee e Poria, 2012).

2.5 DEFINIÇÃO DE SINCRONIZAÇÃO

Recentemente, pesquisas na área de sincronização têm envolvido sistemas caóticos (Xiao, 2009; Lu e Tse, 2000) dentre outros. Uma vez que esses sistemas dependem sensivelmente das condições iniciais, advém que se dois sistemas caóticos idênticos começarem com condições iniciais diferentes mas arbitrariamente próximas irão se separar exponencialmente no decorrer do tempo. Como resultado, sistemas caóticos desafiam intrinsecamente a sincronização, porque mesmo que dois sistemas idênticos comecem com condições iniciais ligeiramente diferentes eles irão evoluir no tempo de uma maneira dessincronizada. Esse é um problema de relevância prática, uma vez que a grande maioria das condições iniciais experimentais não são conhecidas perfeitamente.

Uma definição preliminar, indica que a sincronização é um fenômeno em que dois ou mais sistemas caóticos (equivalentes ou não equivalentes) ajustam uma dada propriedade de seu movimento para um comportamento comum (Boccaletti et. al., 2002).

Iremos formular o problema da sincronização para um sistema dinâmico composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Considere um sistema dinâmico caótico expresso por

$$\dot{x}_m = f_m(x_m, d_m(t)) \quad (2.11)$$

onde x_m é o estado do sistema mestre, $d_m(t)$ é um distúrbio desconhecido e f_m é um mapa conhecido. O sistema acima é chamado de sistema mestre. Agora definimos o seguinte sistema escravo

$$\dot{x}_s = f_s(x_s, u, d_s(t)) \quad (2.12)$$

onde x_s é o estado do sistema escravo, u é a entrada do controlador, $d_s(t)$ é um distúrbio desconhecido e f_s é um mapa conhecido. Com base em (2.11) e (2.12), o erro dinâmico de sincronização pode ser escrito como

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x}_s = f_m(x_m, d_m(t)) - f_s(x_s, u, d_s(t)) \quad (2.13)$$

onde

$$e = x_m - x_s \quad (2.14)$$

é definido como erro de sincronização. Os sistemas descritos pelas equações (2.11) e (2.12) serão considerados sincronizados se $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias do sistema escravo convergem para os mesmos valores do sistema mestre. Em outras palavras, os sistemas estão sincronizados.

3 MODELAGEM DE SISTEMAS CAÓTICOS UNIFICADOS E FINANCEIROS

Este capítulo apresenta o problema da modelagem de um sistema caótico financeiro em três dimensões e sua extensão para um sistema hipercaótico. Simulações gráficas serão detalhadas para melhor compreensão do comportamento do sistema. O sistema caótico unificado também é investigado usando os conceitos introduzidos no capítulo anterior. Uma breve introdução sobre a abordagem da teoria do caos na economia e suas implicações será fornecida. A relevância deste capítulo está principalmente em apresentar com maior detalhe os trabalhos em Huang e Li (2003), Yu et al. (2012) e Lu et al. (2001), pois eles serão considerados para implementação de controladores adaptativos nos próximos capítulos.

3.1 TEORIA DO CAOS NA ECONOMIA

Os trabalhos pioneiros de Benhabib e Day (1981), Day (1982) e Grandmont (1985) entre outros no início da década de 1980 foram responsáveis pelo início da conscientização dos economistas acerca da potencial utilidade da teoria do caos e suas ferramentas para análise de fenômenos econômicos. Boa parte dos interesses dos economistas na teoria do caos se deve ao fato de que ela oferece uma nova perspectiva de estratégias no controle dos sistemas econômicos.

Existem duas considerações particularmente interessantes no que tange a aplicações da teoria de controle em sistemas econômicos (Faggini e Parziale, 2012):

A primeira é que o deslocamento de uma dada trajetória para outra no atrator caótico significa selecionar um diferente comportamento no sistema econômico, ou seja, implica em diferentes compromissos nas políticas econômicas. A segunda razão é que, se o sistema econômico a ser controlado apresenta comportamento caótico, o esforço de controle em termos de recursos para atingir um objetivo específico da política econômica pode ser menor em magnitude do que um sistema não caótico. Entre outras palavras, aproveitando a propriedade de sensibilidade das condições iniciais do sistema caótico, as técnicas de

controle podem alcançar maior eficiência, especialmente no gasto mais efetivo de recursos e menor tempo de resposta para alcançar determinados efeitos desejados das políticas econômicas.

Dessa forma, se um sistema econômico apresenta comportamento caótico, recursos limitados não reduzem as possibilidades dos agentes políticos de alcançarem metas econômicas determinadas previamente. Logo, o governo pode mudar alguns parâmetros políticos como por exemplo impostos ou pacotes de estímulos de modo que desloque o sistema econômico de uma posição caótica para um resultado fixo, desse modo estabilizando a economia, mitigando flutuações ou reagindo rapidamente a efeitos de crises.

Portanto, a existência de um caos determinístico em sistemas econômicos pode ser importante tanto do ponto de vista teórico como prático. A primeira é que se o sistema é caótico, modelos matemáticos podem ser construídos para fornecerem uma compreensão mais detalhada acerca do seu comportamento. E prático porque uma vez descoberto o sistema caótico torna-se possível o seu controle de maneira rápida e eficiente quanto ao uso de recursos necessários. Nas próximas seções será estudado, dentre diversos modelos econômicos não lineares propostos na literatura (Baumol e Quandt, 1985; Day, 1982; Grandmont e Malgrange, 1986; Zhao et. al., 2011), um sistema financeiro caótico e suas propriedades dinâmicas.

3.2 SISTEMA FINANCEIRO CAÓTICO TRIDIMENSIONAL

Em Huang e Li (1993) foi reportado um modelo financeiro que relacionou produção, força de trabalho, bolsa de valores e dinheiro em três equações diferenciais descritas na seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= c_1 z + c_2 (y - a)x \\ \dot{y} &= c_3 (R - \alpha y - \beta x^2) \\ \dot{z} &= -c_4 z - c_5 x\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde x representa a taxa de juros, a variável y representa a demanda de investimento e z

a variável do índice ou expoente de preços. Além disso, a representa o montante de poupança, R a taxa de retorno do investimento e $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \alpha$ e β são constantes. Como o objetivo de estudo é o comportamento da mudança das variáveis com o passar do tempo, as variáveis de estado são expressas em termos das derivadas e portanto o sistema é dinâmico. Os demais parâmetros do sistema serão explicitados a seguir juntamente com a análise individual de cada uma das equações que compõem (3.1) (Jun-Hai e Yu-Shu, 2001).

Há um número de forças que devem ser levadas em consideração quando se tenta estimar o movimento atual e futuro das taxas de juros. Eles são fortemente influenciados pela condição econômica do país. Isto é, quando a economia está crescendo, consumidores acumulam trabalho e poupança para emprestar aos bancos. Por outro lado, eles pegam dinheiro emprestado para adquirir bens de consumo. Dessa forma, com o aumento da demanda por fundos, as taxas de juros sobem. O oposto também é verdade, quando a demanda de fundos decai, os juros também decaem. Os fatores que influenciam no comportamento da variável x , chamada de taxa de juros, vem principalmente de dois aspectos: contradições no mercado de investimentos, ou seja, no superávit entre demanda de investimentos representado pela variável y e poupança. O segundo aspecto é ajuste do preço dos bens ou o índice de preços, a variável z . O índice de preços é uma medida que tenta quantificar a inflação de uma economia, taxas de juros são influenciadas por pressões inflacionárias. Isso se deve ao fato de que para compensar a perda do poder de compra causada pela inflação, os efetuidores de empréstimos aumentam a taxa de juros. Quando há deflação, as taxas de juros tendem a cair. O comportamento supracitado pode ser modelado por

$$\dot{x} = c_1 z + c_2 (y - a)x \quad (3.2)$$

Por outro lado, a taxa de variação de y é proporcional com a taxa de investimento e inversamente proporcional à taxa de juros e ao custo de investimento. O que de certa forma,

é intuitivo, pois quanto maior o custo de investimento, menos atrativo torna-se o investimento para o investidor. Seguindo essa linha de raciocínio, quando as taxas de juros são altas, poucos investimentos se tornam rentáveis e quando as taxas de juros se tornam baixas, aumentam-se o número de opções de investimentos rentáveis para o investimento. Assumindo que a taxa de retorno do investimento seja constante para um determinado período de tempo, então teremos

$$\dot{y} = c_3(R - \alpha y - \beta x^2) \quad (3.3)$$

É interessante notar que quando a taxa de retorno é maior que o custo de investimento e a taxa de juros, a variação da demanda de investimento é positiva.

Por último, a variação do índice de preços z pode ser modelada como a diferença entre a quantidade de estoque e a demanda por produtos, além disso é influenciada pela taxa de juros. No modelo financeiro em estudo, a quantidade de estoque e a demanda de produtos será considerada constante para um dado período de tempo e considerado inversamente proporcional ao índice de preços. Conforme explicado anteriormente, inflação e taxas de juros estão ligadas, portanto variação da taxa de inflação pode ser representada pela mudança da taxa de juros real x . Dessa forma a equação diferencial de z é

$$\dot{z} = -c_4 z - c_5 x \quad (3.4)$$

Juntando as equações 3.2, 3.3 e 3.9 temos o modelo financeiro descrito por (3.1). Pode-se notar que há 9 parâmetros independentes que podem ser ajustados. Objetivando a simplificação do modelo, uma vez que o interesse é a relação de combinação entre os parâmetros em estudo e a influência da sua dinâmica no comportamento do sistema, chegamos no seguinte sistema financeiro caótico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y - a)x \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2 \\ \dot{z} &= -x - cz \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde b é a custo por investimento e c a elasticidade da demanda do produto. Os demais parâmetros assumiram o valor unitário. A Figura 3.1 é o atrator caótico do sistema para valores $a=0.9$, $b=0.2$, $c=1.2$. Observa-se na Fig. 3.1 que a combinação inapropriada de valores dos parâmetros no sistema pode induzir o comportamento caótico no sistema econômico modelado. Portanto, pode-se concluir que independente do estágio inflacionário ou da economia estar em recessão, um ajustamento da estrutura será sempre a primeira tarefa da reforma no sistema financeiro. O passo inicial na modelagem é a escolha de parâmetros adequados que possa evitar o comportamento caótico do sistema. Tal tarefa pode ser feita a partir da análise dos diagramas de bifurcação, onde a escolha de parâmetros é feita de maneira que otimize a recuperação rápida e efetiva do sistema econômico em estudo. Na próxima seção, será analisado um modelo financeiro hipercaótico e seus diagramas de bifurcação serão detalhados.

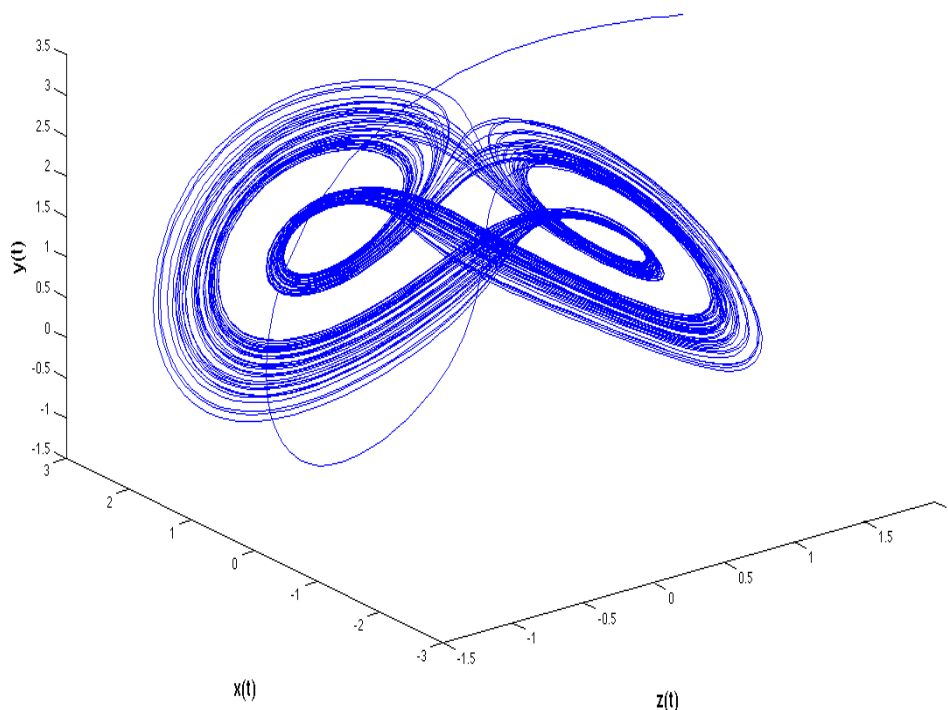


Figura 3.1. Atrator caótico do modelo financeiro.

3.3 SISTEMA FINANCEIRO HIPERCAÓTICO

Este modelo caótico foi proposto por Yu et al, 2012. Basicamente, os autores propuseram a adição da equação dinâmica (3.6), objetivando-se modelar a margem média de lucro w . A margem média de lucro pode ser modelada por dois componentes. O primeiro é inversamente proporcional ao produto entre taxa de juros e a demanda de investimento, o segundo é inversamente proporcional a margem média de lucro. Quando a taxa de juros decai, a margem de lucro para uma dada empresa aumenta. Da mesma forma, aumentos na margem de lucro diminuem a variação da margem média de lucro, o que obedece a lei dos rendimentos decrescentes. Portanto, temos

$$\dot{w} = -dxy - kw \quad (3.6)$$

onde d e k são constantes. Percebe-se que a taxa de juros agora não é afetada mais apenas pela demanda de investimentos e pelo índice de preços, mas também pela margem média de lucro, vide (3.7).

Com a adição de mais uma variável ao sistema caótico, o sistema se torna hipercaótico, possuindo dois expoentes de Lyapunov positivos. O novo sistema tem quatro equações diferenciais autônomas descritas a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z + (y - a)x + w \\ \dot{y} &= 1 - by - x^2 \\ \dot{z} &= -x - cz \\ \dot{w} &= -dxy - kw \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde a, b, c, d, k são os parâmetros do sistema. Considerando as condições iniciais nulas e quando $a = 0.9, b = 0.2, c = 1.5, d = 0.2$ e $k = 0.17$, as Figuras 3.2 a 3.7 mostram as projeções bidimensionais do atrator caótico de 4 dimensões.

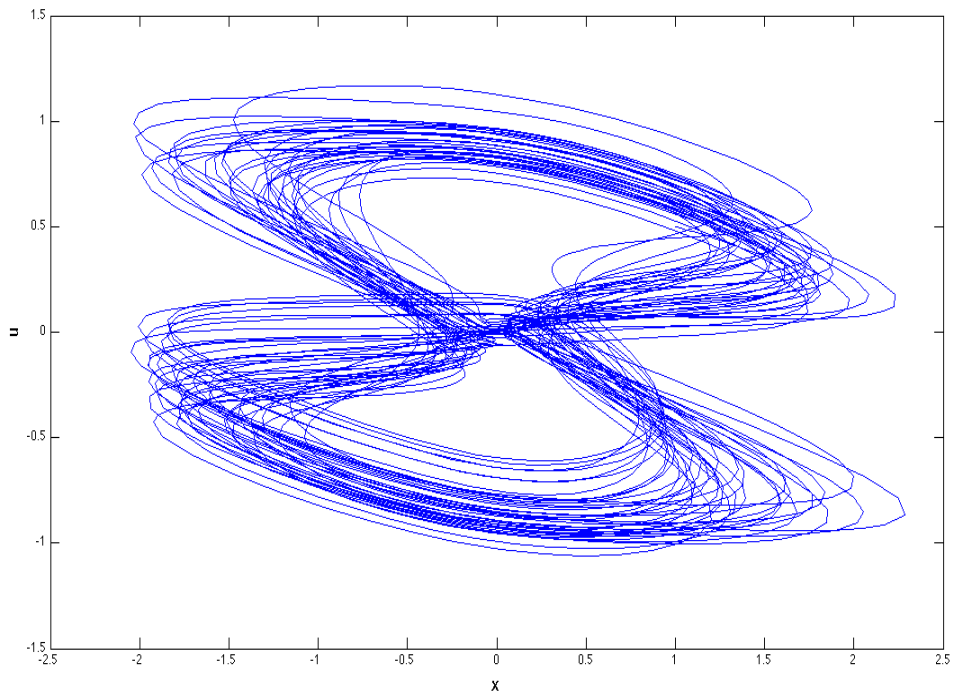


Figura 3.2. Projeção no plano w-x.

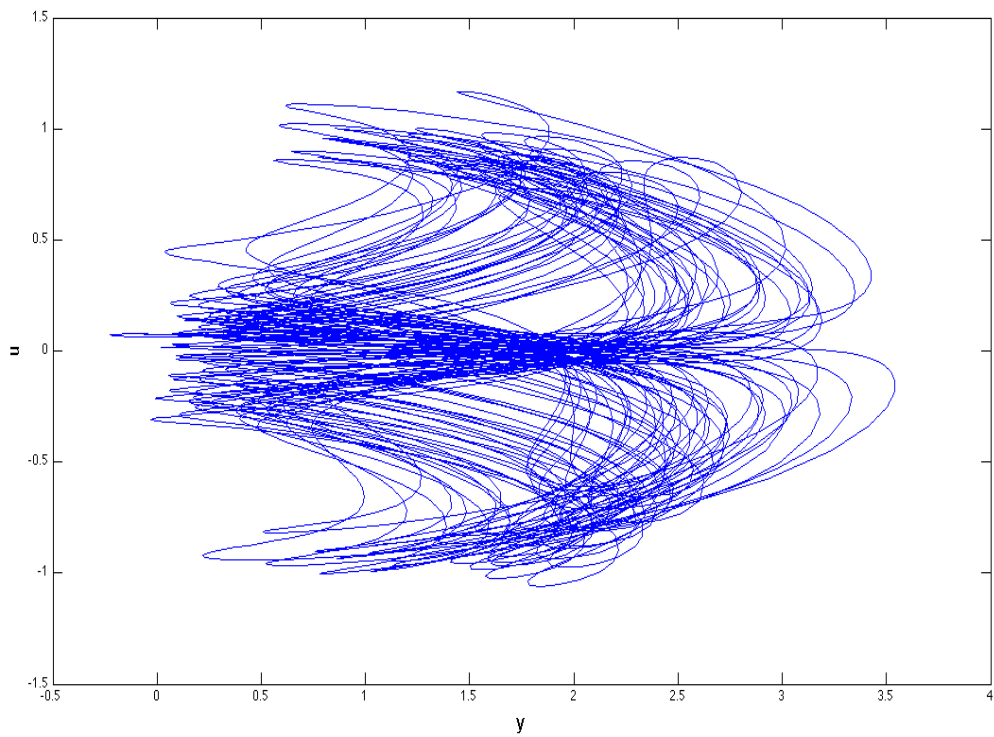


Figura 3.3. Projeção no plano w-y.

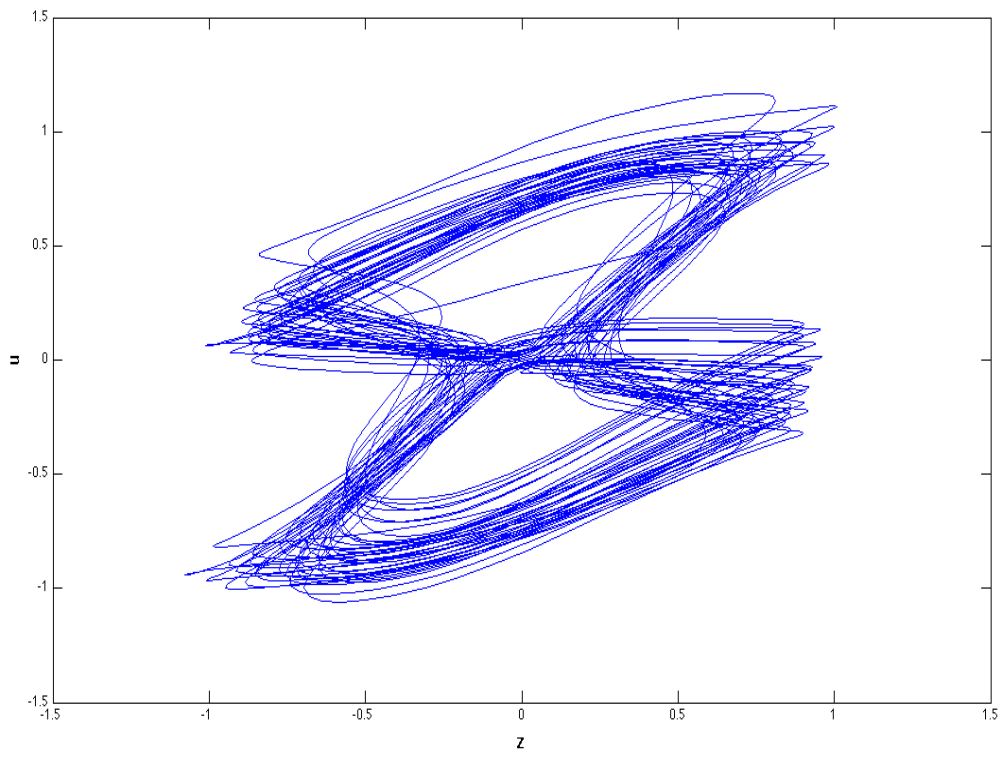


Figura 3.4. Projeção no plano w-z.

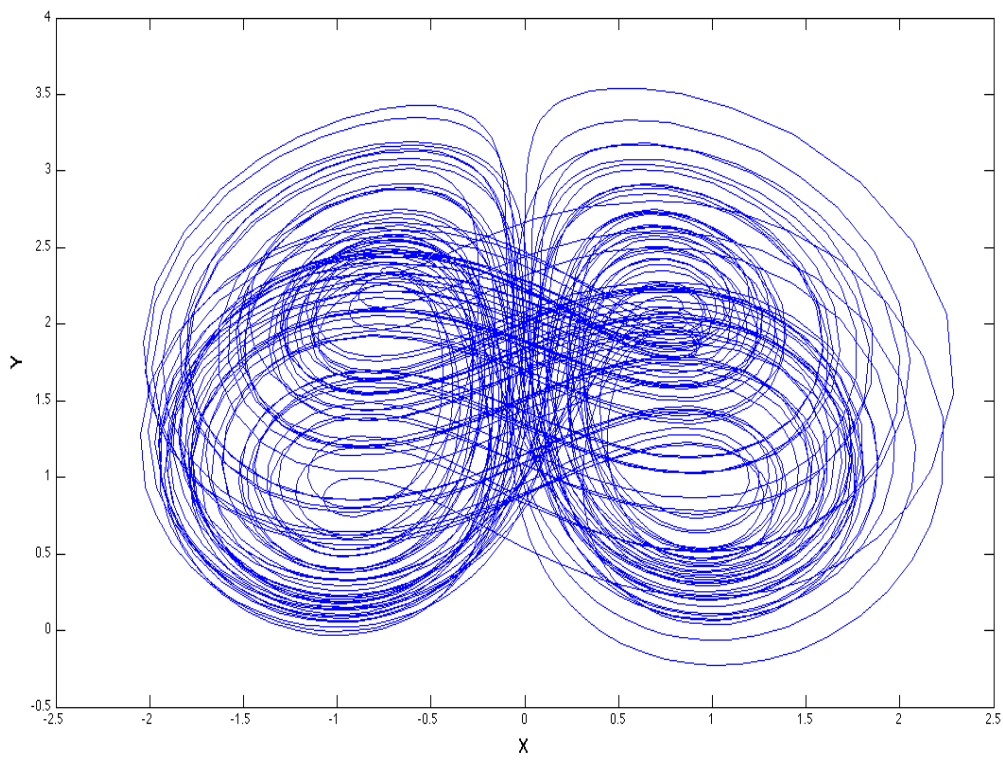


Figura 3.5. Projeção no plano x-y.

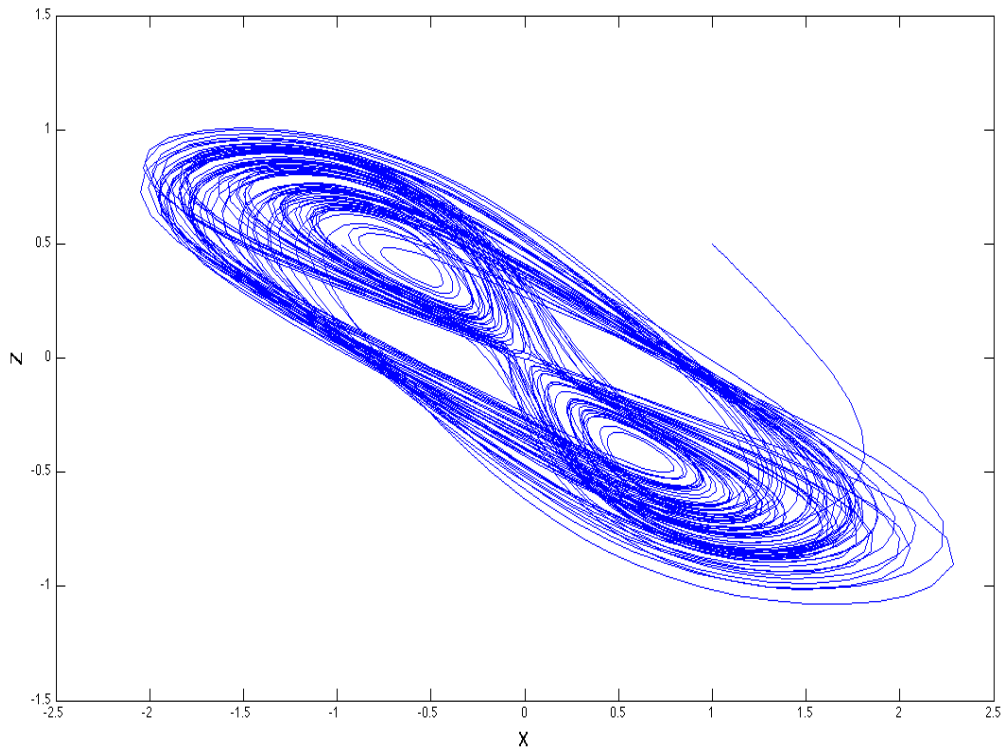


Figura 3.6. Projeção no plano z-x.

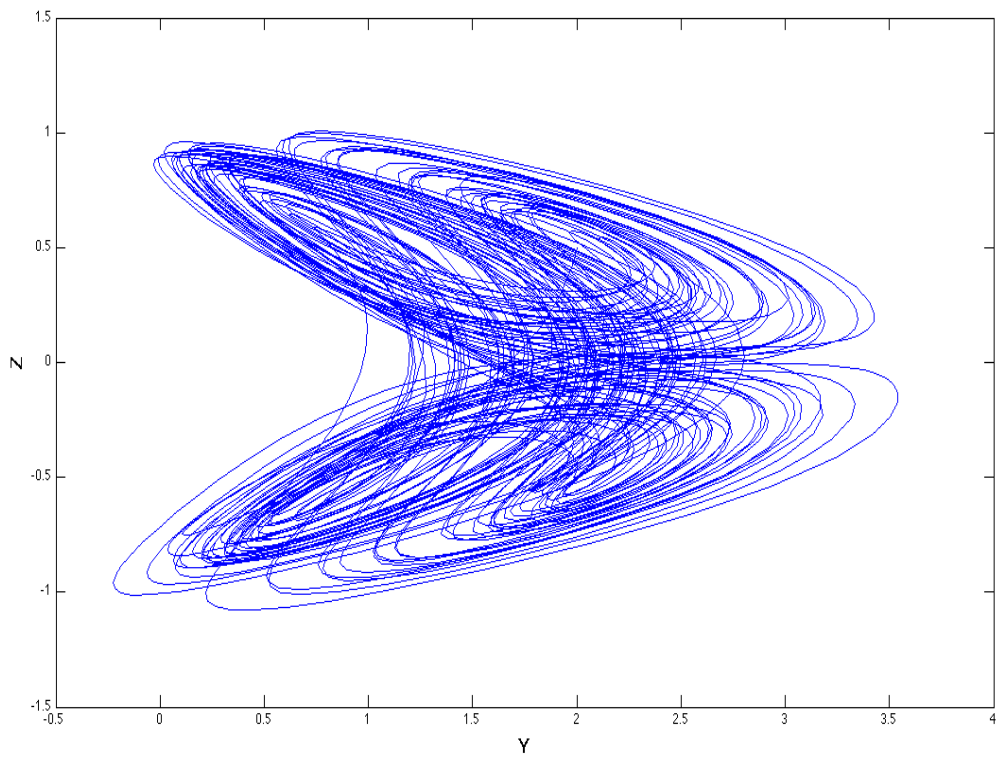


Figura 3.7. Projeção no plano z-y.

Objetivando analisar a influência do parâmetro c no comportamento dinâmico do sistema hipercaótico, consideramos os demais parâmetros fixados e variamos o parâmetro no seguinte intervalo $[0, 2]$. As condições iniciais das quatro variáveis foram consideradas nulas, dessa forma o propósito do diagrama de bifurcação é demonstrar como o sistema hipercaótico modifica com o aumento nos valores do parâmetro c . Figura 3.8 mostra o comportamento dinâmico complexo do sistema.

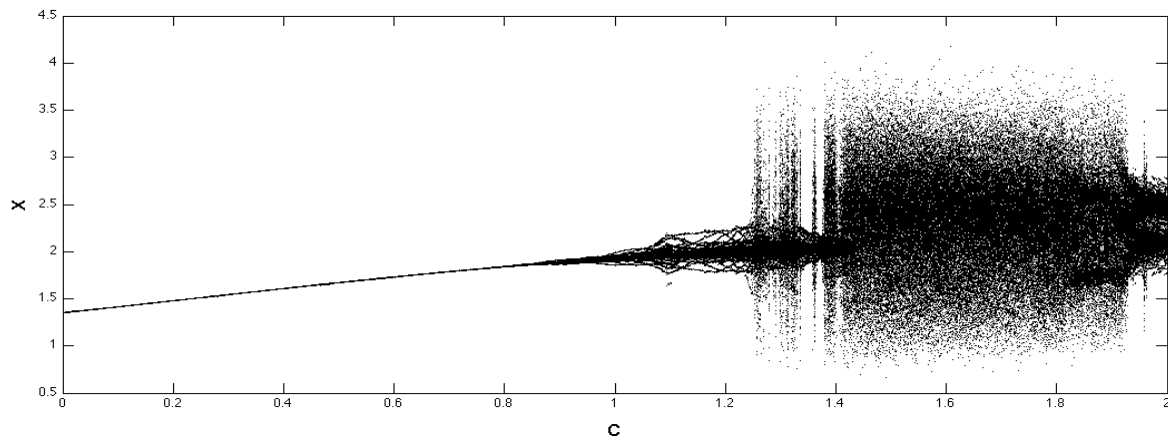


Figura 3.8. Diagrama das bifurcações do parâmetro c .

Percebe-se da Fig. 3.8 que para valores compreendidos entre $1.15 < c < 2$, ocorre o indicativo de comportamento caótico do sistema. Isso é melhor evidenciado pela Fig. 3.9, onde retratos de fase para diferentes valores de c são mostrados. Note a evolução do sistema de um comportamento mais simples para o mais complexo, os valores de cada figura são $c = 0.5$, $c = 1$, $c = 1.5$, $c = 2$ em ordem de complexidade respectivamente.

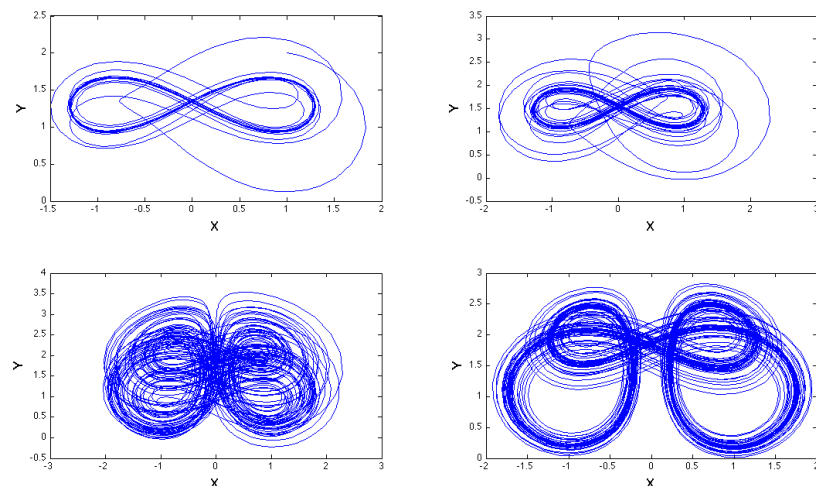


Figura 3.9. Retratos de fase no plano x - y para diferentes valores do parâmetro c .

Figura 3.9 mostra que com a queda da elasticidade da demanda dos produtos c , as flutuações econômicas são cada vez mais agudas e o sistema aproxima-se cada vez do comportamento caótico. Dessa forma se c for mantido em um nível apropriado, então a economia pode se desenvolver rapidamente e de maneira saudável. Os demais diagramas de bifurcações para os parâmetros são mostrados nas Figuras 3.10 a 3.12. A análise da influência dos parâmetros pode ser feita de maneira semelhante com o método empregado para o parâmetro c .

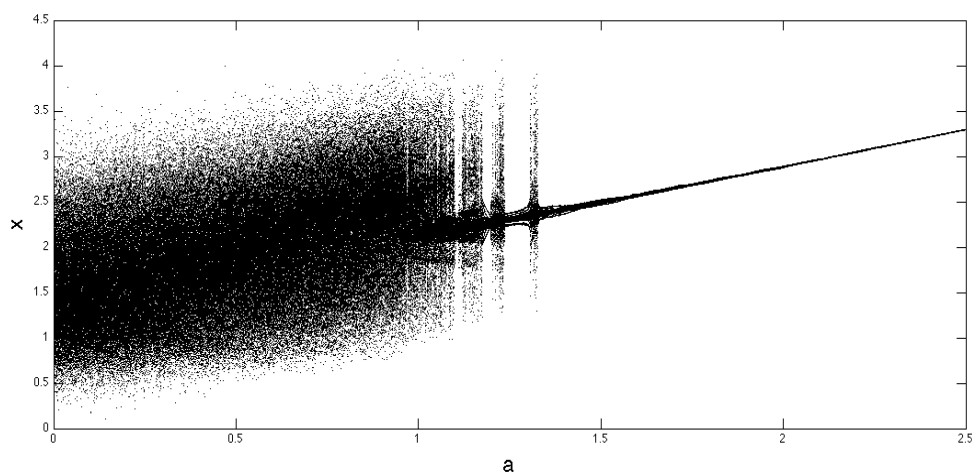


Figura 3.10. Diagrama das bifurcações do parâmetro a .

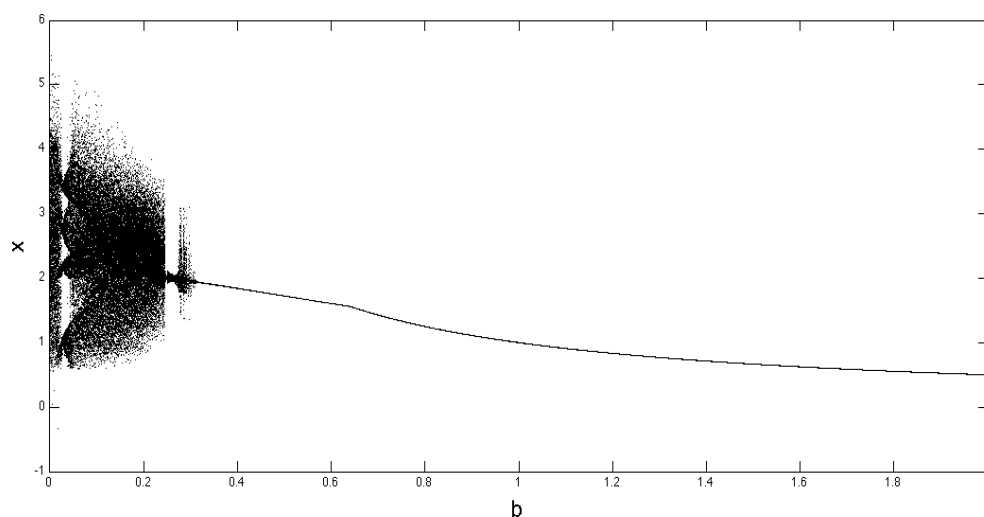


Figura 3.11. Diagrama das bifurcações do parâmetro b .

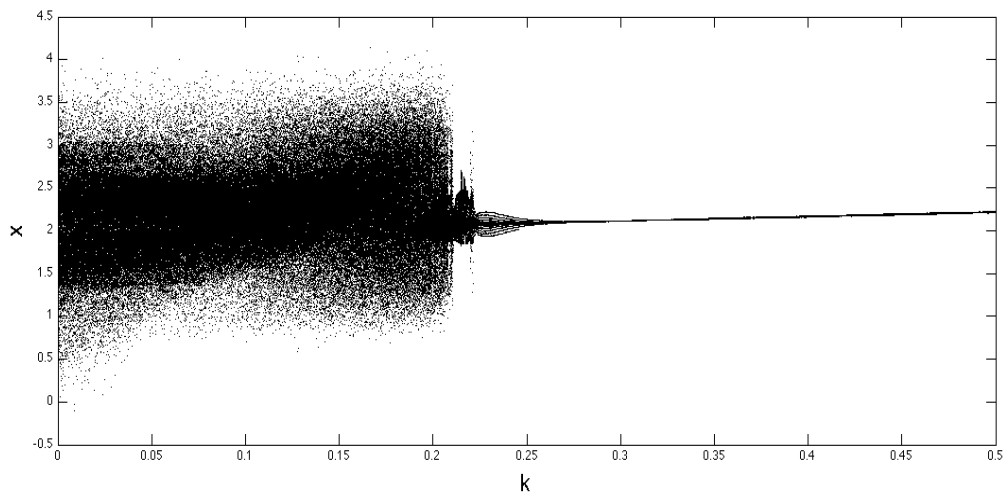


Figura 3.12. Diagrama das bifurcações do parâmetro k .

A Fig. 3.13 ilustra a dependência sensível do sistema caótico às condições iniciais, para o estado $x(t)$ do sistema caótico foi considerado duas trajetórias inicialmente próximas. Observa-se que as trajetórias tornam-se diferentes ao longo do tempo.

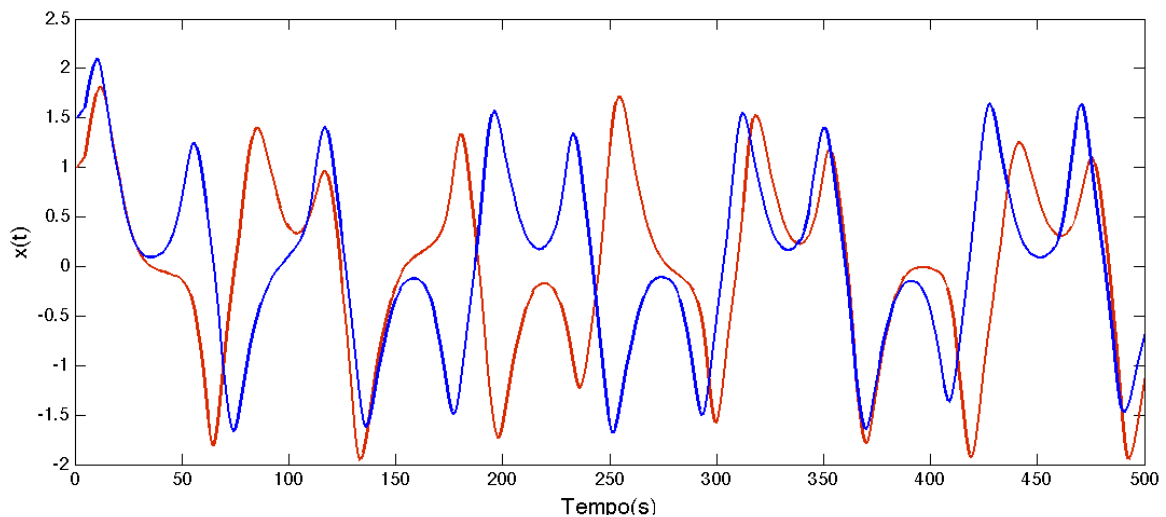


Figura 3.13. Exemplo divergência das condições iniciais para o estado $x(t)$

3.4 SISTEMA CAÓTICO UNIFICADO

No início da década de 1960, através do estudo da modelagem simplificada do fenômeno das convecções atmosféricas por equações diferenciais não lineares simples, Lorenz chegou em um atrator de 3 dimensões com comportamento caótico descrito pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= rx - y - xz \\
\dot{z} &= -bz + xy
\end{aligned} \tag{3.8}$$

com os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ o sistema descrito por (3.8) torna se caótico (Lorenz, 1963).

Na tentativa de buscar um sistema que fosse similar mas que possuísse um atrator não topologicamente equivalente ao sistema Lorenz, Chen (Chen e Ueta, 1999) propôs um novo sistema caótico descrito por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(y - x) \\
\dot{y} &= (c - a)x - xz + cy \\
\dot{z} &= -bz + xy
\end{aligned} \tag{3.9}$$

que torna-se caótico com $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$. Estudos posteriores revelaram que os sistemas descritos por (3.8) e (3.9) apresentam comportamentos dinâmicos similares. Seguindo essa tendência, Lü et. al. (2001) propôs um sistema caótico unificado que possui os sistemas Chen e Lorenz como dois extremos e entre eles uma outra gama de sistemas caóticos. O novo sistema é representado por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (25\alpha + 10)(y - x) \\
\dot{y} &= (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\
\dot{z} &= xy - \frac{\alpha + 8}{3}z
\end{aligned} \tag{3.10}$$

com $\alpha \in [0, 1]$. Onde temos $\alpha = 0$ para Lorenz e $\alpha = 1$ para Chen.

Representando o sistema dado por (3.10) pela forma generalizada canônica de Lorenz

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

onde x , y e z são os estados do sistema. Esta forma canônica descreve uma família de sistemas caóticos que possui os mesmos termos não lineares expressos pelo segundo

termo do lado direito de (3.11), mesma simetria ao longo do eixo z , a mesma estabilidade nos pontos de equilíbrio e formas semelhantes quanto aos atratores caóticos. Ainda em Lü et. al. (2001) o sistema Lorenz satisfaz $a_{12}a_{21} > 0$ quando que o sistema Chen satisfaz $a_{12}a_{21} < 0$. Dessa forma eles são ditos serem sistemas duais entre si. Também foi encontrado entre eles uma transição, chamado de sistema Lü, que atende a $a_{12}a_{21} = 0$.

Algumas propriedades relevantes do sistema são sumarizadas a seguir:

- O sistema representado por (3.10) é caótico para valores $\alpha \in [0,1]$.
- Possui os sistemas Lorenz e Chen como extremos.

Na próxima subseção será fornecida simulações numéricas para melhor compreensão do comportamento dinâmico do sistema caótico unificado.

3.4.1 Simulações numéricas

Na seção anterior foi mencionado que o sistema caótico unificado possui os sistemas Lorenz e Chen como extremos e outros sistemas caóticos entre eles, sendo o sistema Lü como um dos casos especiais. Foram simulados, usando o software Matlab[®] Simulink, os respectivos atratores caóticos que são mostrados nas Figuras 3.14 a 3.16.

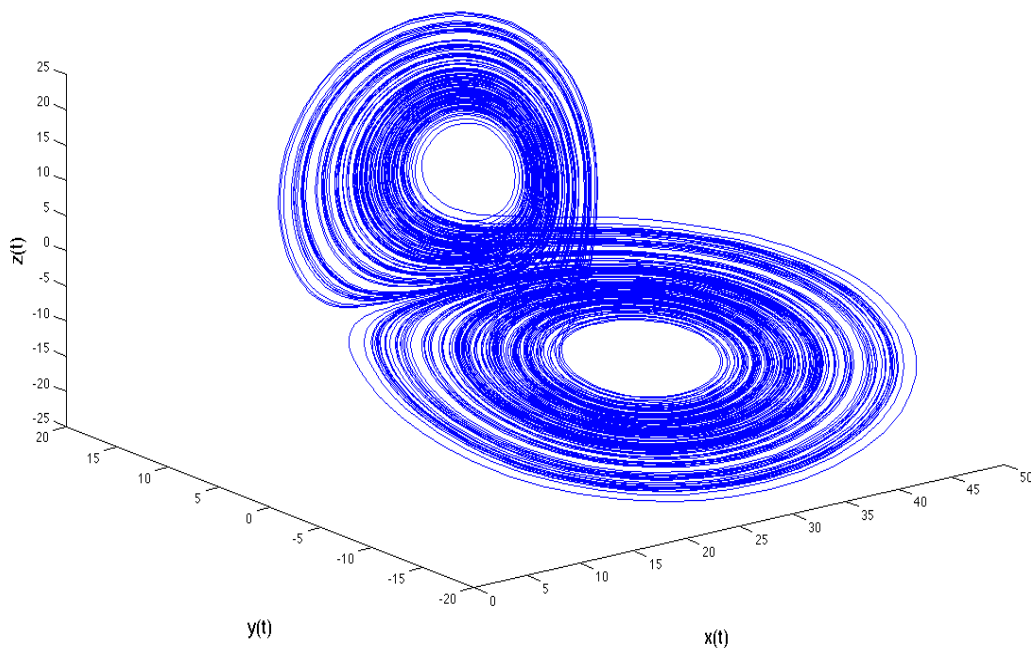


Figura 3.14. Atrator de Lorenz.

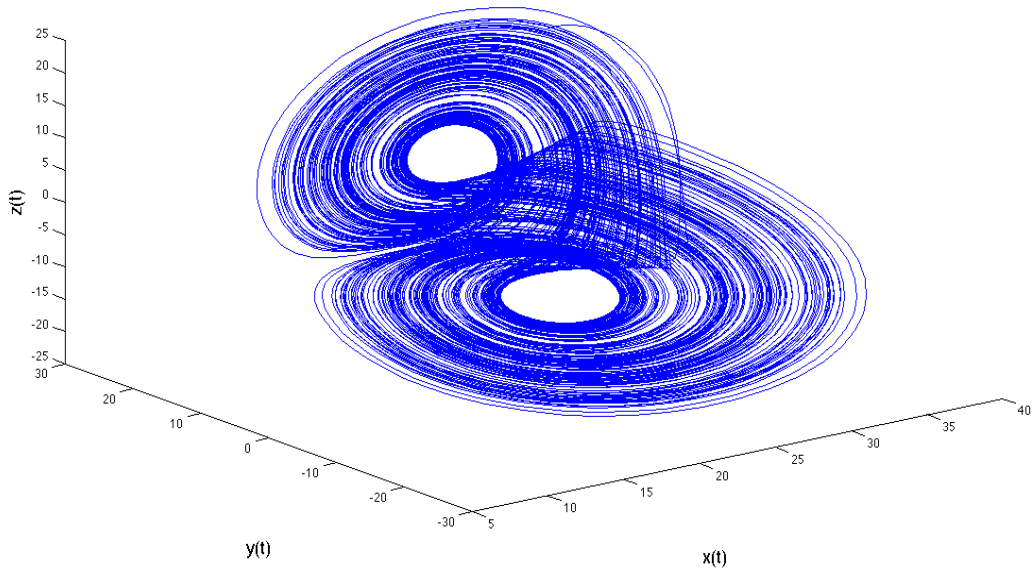


Figura 3.15. Atrator de Lü.

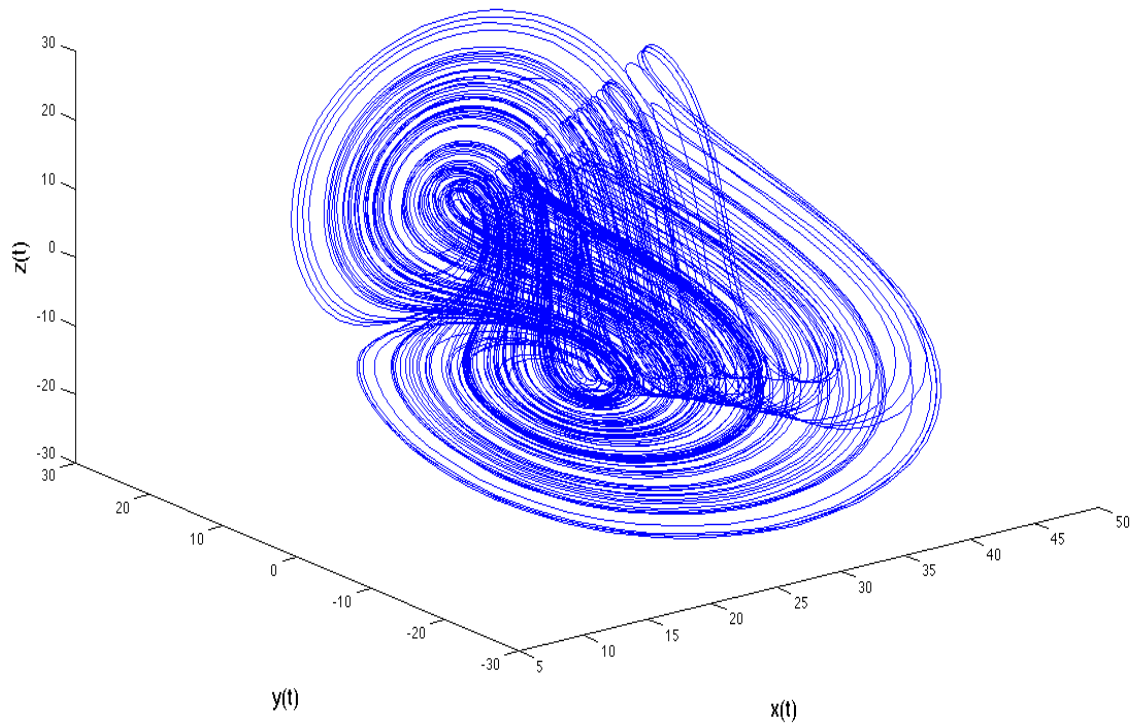


Figura 3.16. Atrator de Chen.

Analisando as Figuras 3.14 a 3.16, percebe-se que variando apenas o parâmetro α do sistema caótico unificado obtém-se respectivamente o sistema Lorenz ($\alpha = 0$), o sistema Lü ($\alpha = 0.5$) e o sistema Chen ($\alpha = 1$). Torna-se evidente que aumentando o parâmetro α , a estrutura topológica dos atratores caóticos tornam-se mais complexas e ricas.

4 SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA DE SISTEMA HIPERCAÓTICO FINANCEIRO

A seguir, um esquema de controle adaptativo para sistemas hipercaóticos financeiros que assegura convergência para zero do erro residual de sincronização é estudado. O esquema é baseado em uma análise tipo *Lyapunov-like* e assegura convergência assintótica, mesmo na presença de erros de modelagem e distúrbios limitados. Simulações exaustivas são apresentadas com o objetivo de se avaliar a influência dos diversos parâmetros de projeto no desempenho do algoritmo.

4.1 INTRODUÇÃO

Desde que o comportamento caótico na economia foi descoberto por Grandmont e Malgrange (1986), uma quantidade substancial de pesquisa procurou ligar o papel do caos com a aleatoriedade inerente dos modelos macroeconômicos. Essa incerteza pode fazer com que previsões financeiras precisas sejam limitadas, comprometendo a efetividade com que as políticas financeiras adotadas pelo governo possam interferir no sistema econômico (Baumol e Quandt, 1985). De fato, a crise dos *subprime* dos EUA em 2007 ilustra o quando podem ser ineficazes as políticas do governo foram para neutralizar o comportamento crítico da economia que resultou em uma crise econômica de escala global. A crise ocorrida pode ter sido resultado da natureza eminentemente caótica desse sistema financeiro (Rui-Hong, 2009). Motivado por esse fundo prático e teórico, a modelagem e sincronização de sistemas financeiros caóticos não-lineares tem sido um tópico ativo de estudo por muitos pesquisadores (Jun-Hai e Yu-Shu, 2001; Zhao et al., 2011; Yu et al., 2012).

Por outro lado, nos anos recentes, a sincronização caótica tem sido aplicada em várias áreas tais como engenharia elétrica (Xiao, 2009; Lu e Tse, 2000), sistemas biológicos (Arecchi et al., 2003), engenharia química (Li et al., 2003) e em comunicações seguras (Lu et al., 2002; Sun et al. 2008).

Vários métodos foram propostos para se alcançar a sincronização. Por exemplo, controle não-linear ativo (Wang et al., 2009a, 2009b; Wang, 2010; Chen et al., 2009; Yassen, 2008),

sincronização adaptativa (Al-Sawada et al, 2010; Yang, 2011; Li, 2010; Ye and Deng, 2012), projeto por integrador *backstepping* (Njah and Sunday, 2009; Peng and Chen, 2008), e controle modos deslizantes (Jang, 2002; Liu et al., 2009; Chen et al., 2007).

Entretanto, na maioria dos trabalhos acima, é assumido que o sistema mestre e escravo sejam perfeitos ou estruturalmente conhecidos, i.e., a presença de distúrbios desconhecidos não é considerada. Como ilustração, as técnicas em Al-Sawada et al. (2010), Yang (2011), Li (2010), Ye e Deng (2012), Zhao et al. (2011) e Mahmoud (2012) atingem erro de sincronização com convergência assintótica para zero assumindo crucialmente a inexistência de distúrbios. Embora a conjectura de ausência de distúrbios seja interessante do ponto de vista teórico, na perspectiva prática é uma hipótese muito restritiva uma vez que a presença de distúrbios, em geral, são inevitáveis. Distúrbios típicos incluem funções dependentes do tempo ou do estado, como por exemplo mudanças inesperadas na dinâmica do sistema devido a falhas, mudanças nas condições de operação, envelhecimento do equipamento e assim por diante.

Por outro lado, é bem conhecido que leis adaptativas concebidas no caso de ausência de distúrbios podem sofrer de *parameter drift*. De fato, a falta de robustez em sistemas adaptativos na presença de dinâmicas não modeladas ou distúrbios limitados foi reportada na literatura no início na década de 80. Várias modificações robustas para contrapor isto foram propostas desde então (Ioannou and Sun, 1995).

Motivado pelos fatos anteriores, neste capítulo é estudado um método de sincronização adaptativa robusta para controlar o sistema hipercaótico financeiro descrito por Yu et al. (2012), quando distúrbios limitados estão presentes. Além disso, é assumido que as condições iniciais e os parâmetros do sistema financeiro são desconhecidos. Baseado em *Lyapunov-like analysis* (Slotine e Li, 1991), o controlador proposto assegura a convergência do erro de sincronização para zero, mesmo na presença das incertezas supramencionadas.

4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o problema de controlar um sistema dinâmico descrito por

$$\dot{x}_s = f_s(x_s) + G_s(x_s)\theta_s + d_s(x_s, t) + u \quad (4.1)$$

onde $x_s \in M \subset \mathfrak{R}^4$ é o estado do sistema escravo, M é um conjunto compacto, $u \in \mathfrak{R}^4$ é a entrada de controle, $f_s(\cdot)$ e $G_s(\cdot)$ são os mapas conhecidos, $d_s(\cdot)$ é um distúrbio desconhecido e θ é um parâmetro desconhecido,

$$G_s(x_s) = \begin{bmatrix} x_{s1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_{s2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_{s1}x_{s2} & -x_{s4} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$f_s(x_s) = \begin{bmatrix} x_{s3} + x_{s4} + x_{s1}x_{s2} \\ 1 - x_{s1}^2 \\ -x_{s1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

e

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ k \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde o modelo descrito pela por (4.1) descreve as variações temporais das quatro variáveis de estado: a taxa de juros x_{s1} , a demanda de investimento x_{s2} , o índice de preços x_{s3} e a média do lucro marginal x_{s4} . Além disso, o parâmetro a denota a poupança, b denota o custo de investimento, c denota a elasticidade da demanda de commodities. Os parâmetros d e k são associados com a média de lucro marginal.

Observação 1: No caso que $d_s(x_s, t) = 0$ e $u = 0$, o sistema (4.1) torna-se o sistema hipercaótico financeiro apresentado por Yu et al., (2012).

Assume-se que o seguinte pode ser estabelecido.

Hipótese 1: Na região $\mathfrak{R}^4 \times [0, \infty)$

$$\|d_s(x, t)\| \leq d_{s0} \quad (4.5)$$

onde d_{s0} é uma constante positiva, tal que $d_{s0} < \bar{d}_s$ e \bar{d}_s é uma constante conhecida.

Hipótese 2: O parâmetro $\|\theta\|$ é limitado superiormente por uma constante positiva conhecida $\bar{\theta}$, tal que $\bar{\theta} > \theta$.

Observação 2: Hipótese 1 é obviamente natural uma vez que o sistema (4.1) evolui em um conjunto compacto.

Observação 3: Note que quando $a = 0.9$, $b = 0.2$, $c = 1.5$, $d = 0.2$, e $k = 0.17$, sistema (4.1) mostra comportamento hipercaótico (Yu et al., 2012).

Objetivando se ter um problema bem colocado, sem perda de generalidade, podemos considerar o sistema mestre como

$$\dot{x}_m = f_m(x_m) + G_m(x_m)\theta \quad (4.6)$$

onde $x_m \in \mathfrak{R}^4$, θ é um vetor de parâmetros conhecidos e

$$G_m(x_m) = \begin{bmatrix} x_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_{m2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{m3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_{m1}x_{m2} & -x_{m4} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$f_m(x_m) = \begin{bmatrix} x_{m3} + x_{m4} + x_{m1}x_{m2} \\ 1 - x_{m1}^2 \\ -x_{m1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Portanto, nosso objetivo é projetar um controlador por realimentação u , tal que o estado x_s do sistema hipercaótico escravo (4.1) siga o estado x_m do sistema mestre (4.6).

Defina o erro de sincronização como $e(t) = x_s - x_m$. Logo, de (4.1) e (4.6), obtém-se a seguinte equação do erro de sincronização

$$\dot{e} = f_s - f_m - (G_s - G_m)(\hat{\theta} - \tilde{\theta}) + d_s + u \quad (4.9)$$

Observação 4: Deve ser notado que na formulação, visando a simplicidade, foi considerado que $f_m(\cdot)$ e $f_s(\cdot)$ possuem estruturas similares. Entretanto, esses mapeamentos não lineares

podem ser não relacionados, por exemplo, para incluir conhecimento a priori dos distúrbios.

4.3 SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA

Nesta seção, considera-se o problema da sincronização adaptativa assintótica na presença de parâmetros desconhecidos e distúrbios limitados. É mostrado, usando-se *Lyapunov-like analysis* que o erro de sincronização converge assintoticamente para zero. A lei de controle é motivada por Vargas e Hemerly, (2008).

Teorema 1: Considere os sistemas caóticos escravo (4.1) e mestre (4.6), que satisfazem as hipóteses 1-2, então a lei de controle

$$u = -A(x_s - x_m) - (f_s - f_m) + (G_s - G_m)\hat{\theta} + u_r \quad (4.10)$$

com

$$u_r = -\frac{\gamma_3 e}{\lambda_{\min}(K) [\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_0 t)]} \quad (4.11)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma_\theta [\gamma_2 \|e\| \hat{\theta} + (G_s - G_m)^T K e] \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} PA + P^T A &= Q, A > 0, P = P^T > 0, \\ Q > 0, K &= P + P^T, \gamma_0 \geq 0, \gamma_1 > 0, \\ \gamma_2 > 0, \gamma_\theta > 0, \gamma_3 &= 2\|K\|_F \bar{d}_0 + \gamma_2 \bar{\theta}^2 \\ \gamma_4 &= \gamma_{\min}(Q), \gamma_5 = \gamma_3(1 + \gamma_1)/2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

sendo $\|K\|_F$ a norma de Frobenius de K .

Então, os sistemas mestres e escravos sincronizam, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Prova: Considere a função candidata de Lyapunov

$$\dot{V} = e^T P e + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \gamma \tilde{\theta}^{-1} \tilde{\theta} \quad (4.14)$$

onde $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Derivando (4.14) em relação ao tempo resulta

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \tilde{\theta}^T \gamma \tilde{\theta}^{-1} \tilde{\theta} \quad (4.15)$$

Por outro lado, usando (4.10), o erro de sincronização em malha fechada pode ser escrito por

$$\dot{e} = -Ae + (G_s - G_m) \tilde{\theta} + d + u_r \quad (4.16)$$

Avaliando (4.15) ao longo das trajetórias de (4.12) e (4.16), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e^T (P + P^T) (f_s - f_m) + e^T (P + P^T) (d + u) \\ & + e^T (P + P^T) (G_s - G_m) (\hat{\theta} - \tilde{\theta}) \\ & + \tilde{\theta}^T \gamma \tilde{\theta}^{-1} \{-\gamma \theta [\gamma_2 \|e\| \hat{\theta} + (G_s - G_m)^T k e]\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Reescrevendo (4.17), resulta

$$\dot{V} = e^T K \left[f_s - f_m + d + u + (G_s - G_m) \hat{\theta} - (G_s - G_m) \tilde{\theta} \right] - \tilde{\theta}^T \gamma_2 \|e\| \hat{\theta} - \tilde{\theta}^T (G_s - G_m)^T K e \quad (4.18)$$

que por sua vez, usando (4.10), implica

$$\dot{V} = -e^T Q e + e^T K u_r + e^T K d - \tilde{\theta}^T \gamma_2 \|e\| \hat{\theta} \quad (4.19)$$

Desde que $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, pode ser estabelecido que

$$\tilde{\theta} \hat{\theta} = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^2 + \frac{1}{2} \hat{\theta}^2 - \frac{1}{2} \theta^2 \quad (4.20)$$

Empregando (4.11) e (4.19), (4.20) implica

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - \frac{\gamma_3 \|e\|^2}{[\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_0 t)]} + \bar{d}_0 \|K\|_F \|e\| + \frac{\gamma_2 \|\theta\|^2 \|e\|}{2} - \frac{\gamma_2 \|\tilde{\theta}\|^2 \|e\|}{2} \quad (4.21)$$

Usando a definição (4,13), (4,21) implica que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_4 \|e\|^2 - \frac{\gamma_3 \|e\|^2 - \frac{\gamma_3}{2} (\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)) \|e\|}{\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)} \\ &\quad - \frac{\gamma_2}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 \|e\| \\ &\leq -\|e\| \left(\gamma_4 \|e\| + \frac{\gamma_2}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 - \gamma_5 \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Portanto, $\dot{V} \leq 0$ enquanto

$$\|e\| \geq \frac{\gamma_5}{\gamma_4} = \alpha_e$$

ou

$$\|\tilde{\theta}\| \geq \left(\frac{2\gamma_5}{\gamma_2} \right)^{1/2} = \alpha_{\tilde{\theta}}$$

Então, desde que α_e e $\alpha_{\tilde{\theta}}$ são constantes, empregando-se os argumentos usuais de Lyapunov (Slotine and Li, 1991), conclui-se que $e(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ são uniformemente limitadas.

Por outro lado, a primeira desigualdade em (4.22) pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\gamma_4 \|e\|^2 - \frac{\gamma_3 \|e\| [\|e\| - \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)] / 2}{\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)} \quad (4.23)$$

Para mostrar que o erro de sincronização converge assintoticamente para zero, defina uma região Ω dentro do espaço do erro por

$$\Omega = \{e \mid \|e\| \leq \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)\} \quad (4.24)$$

Então, no caso em que $\|e\| > \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)$ (ou $e \notin \Omega$), tem-se

$$\dot{V} \leq -\gamma_4 \|e\|^2 \quad (4.25)$$

Logo, os erros são uniformemente limitados. Além disso, uma vez que V é limitada inferiormente e não crescente com tempo, advém

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|e(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{V(0) - V_\infty}{\gamma_4} < \infty \quad (4.26)$$

onde $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty < \infty$. Note que, baseado na (4.16), com os limites de $e, \tilde{\theta}, d$ e u_r, \dot{e} também é limitada. Então, \dot{V} é uniformemente contínua. Por isso, aplicando o Lema de Barbalat (Slotine and Li, 1991), conclui-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ para todo espaço $e \in \Omega^c$.

Uma vez que o erro de sincronização $e(t)$ tenha entrado em Ω , ele ficará para sempre em Ω , devido a (4.24) e (4.25). Consequentemente, nós concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ é garantido antes e depois de $e(t)$ entrar na região Ω .

4.4 SIMULAÇÕES

Nesta seção, ilustra-se a aplicação do método de sincronização proposto. Três diferentes tipos de distúrbios com significados práticos são considerados para simulações. Eles são: distúrbios dependentes do estado, distúrbios dependentes do tempo e distúrbios nas condições iniciais. Cada um dos distúrbios propostos foram contextualizados de modo a simular possíveis situações econômicas que seriam vistas como distúrbios no sistema hipercaótico financeiro em estudo.

Objetivando avaliar a performance do algoritmo de sincronização proposto, o primeiro exemplo considera condições iniciais desfavoráveis. Considerou-se os distúrbios nas condições iniciais do sistema mestre e escravo como $x_m = [1 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]^T$ e $x_s = [-17 \ -15 \ 16.5 \ 14]^T$, respectivamente e $d_s(x_s, t) = 0$. Consequentemente, para obter a sincronização do sistema escravo (4.1) e o sistema mestre (4.6), as leis adaptativas (4.10) a (4.12) foram empregadas. Considerar condições iniciais adversas é importante, tendo em vista que na construção de modelos financeiros baseados em dados empíricos é comum carregar incertezas nos valores das condições iniciais. Por exemplo, os dados utilizados para o cálculo do índice de preços podem estar defasados na hora em que o projetista for utilizar para gerar as condições iniciais do sistema, refletindo em uma possível diferença que

pode ser visualizada como distúrbio.

Aqui é assumido que $d_s(x_s, t) = 0$ e nas simulações numéricas, os parâmetros escolhidos para o sistema hipercaótico financeiro foram $a = 0.9$, $b = 0.2$, $c = 1.5$, $d = 0.2$ e $k = 0.017$. Além disso, os outros parâmetros de projeto escolhidos foram ajustados como $k = 1$, $\hat{\theta}(0) = 0$, $\lambda_0 = 0.01$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0.001$, $\gamma_\theta = 0.05$, e $P = \text{diag}(0.0001, 0.1, 0.05, 0.01)$.

Deve ser notado que $\theta = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ é usado apenas para a geração das trajetórias dos estados de $x_s(t)$. Na implementação da lei de controle (4.10), é assumido que θ é desconhecido. Os desempenhos da sincronização são mostradas pelas Figuras 4.1 a 4.9, onde a escala logarítmica foi usada no eixo do tempo para mostrar o rápido transiente alcançado. Pode se observar que as simulações confirmam os resultados teóricos, isto é, o algoritmo de sincronização é estável para o esquema hipercaótico proposto e o erro de sincronização converge para a vizinhança de zero. Figura 4.9 mostra a norma dos parâmetros estimados. Pode ser visualizado que a norma do vetor de parâmetros converge para um valor constante quando o erro de sincronização é praticamente removido.

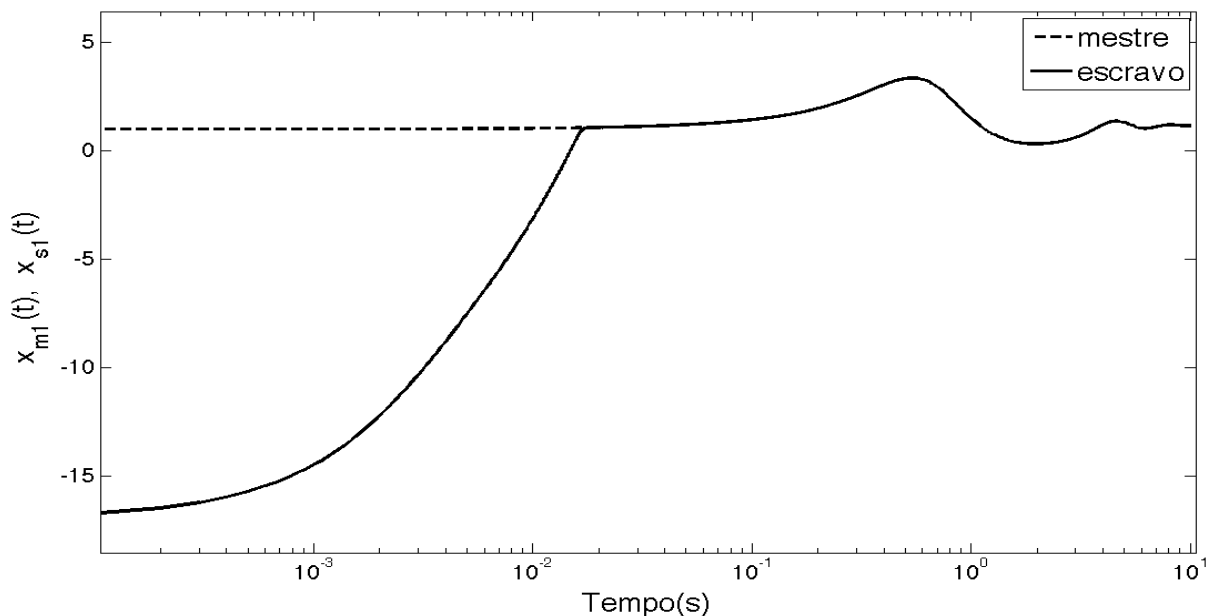


Figura 4.1. Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$.

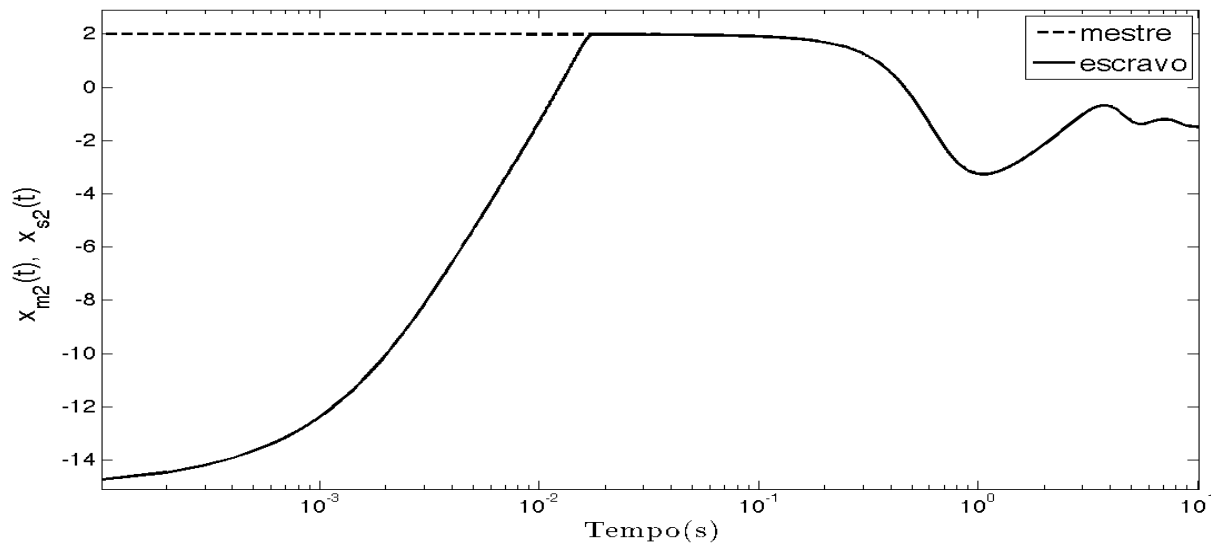


Figura 4.2. Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$.

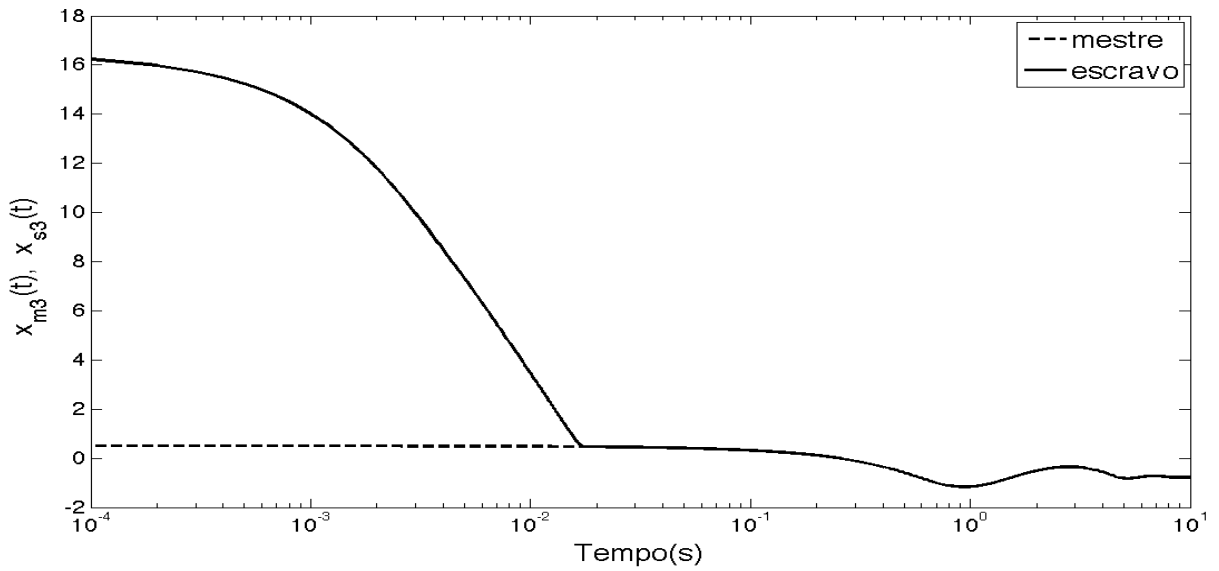


Figura 4.3. Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$.

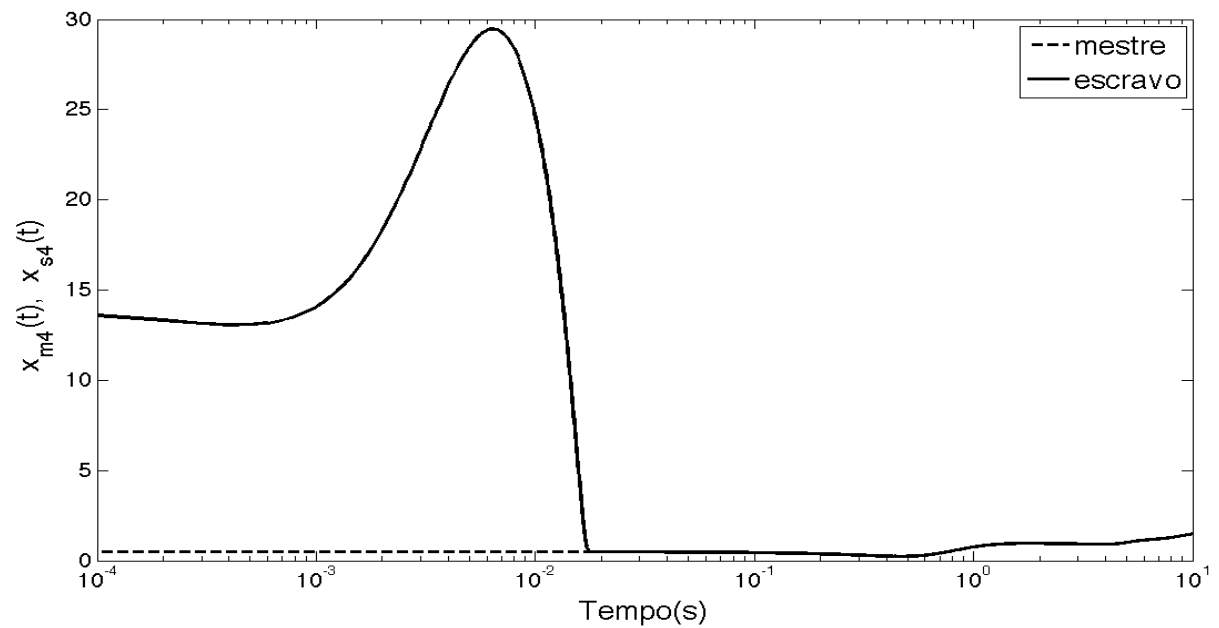


Figura 4.4. Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$.

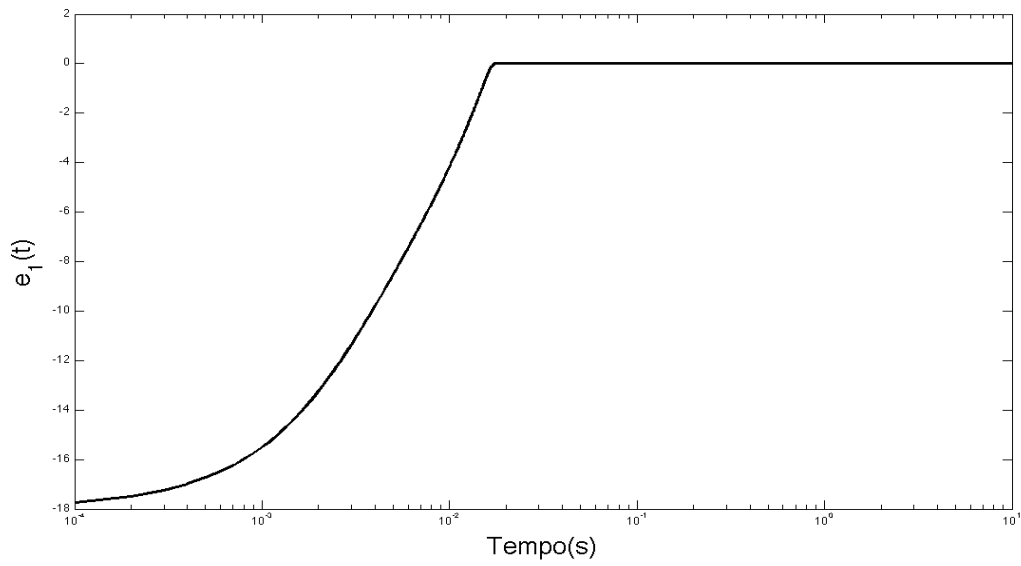


Figura 4.5. Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$.

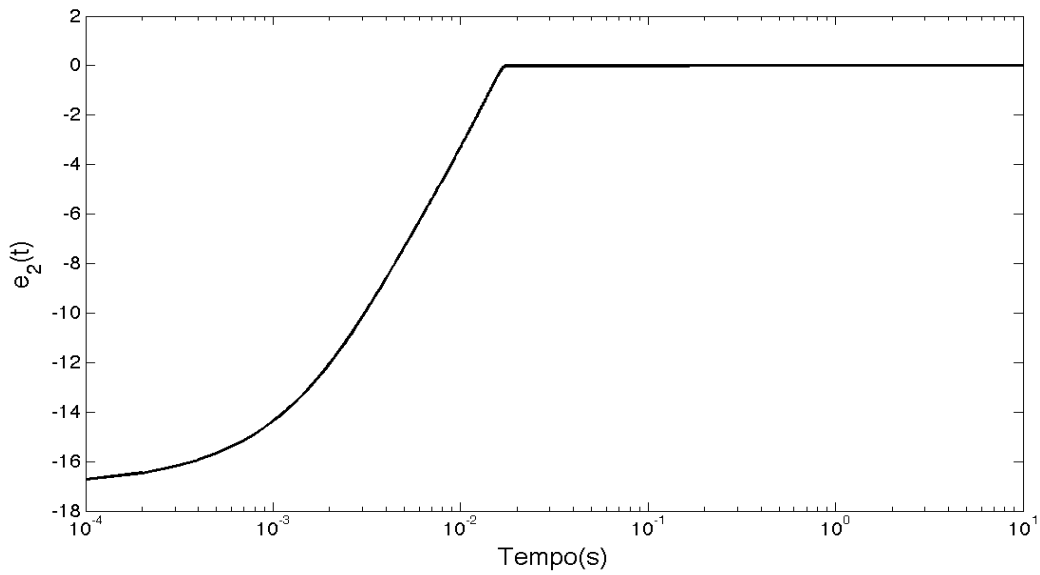


Figura 4.6. Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$.

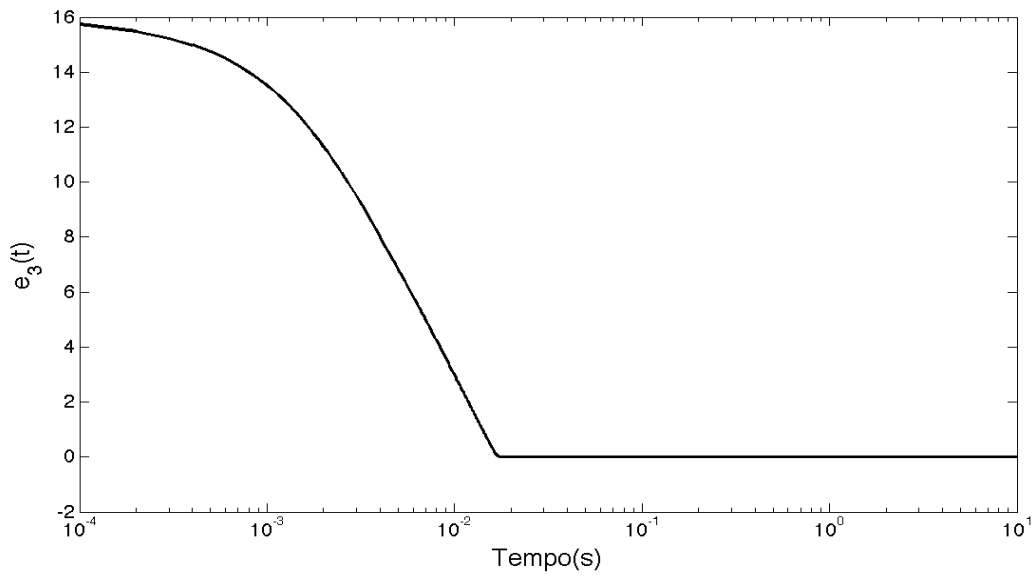


Figura 4.7. Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$.

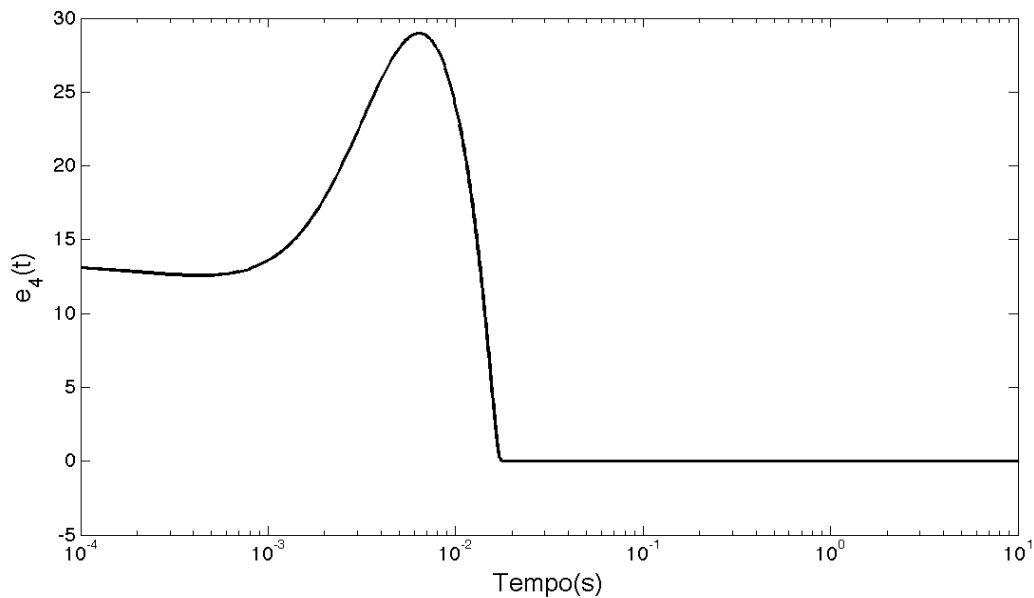


Figura 4.8. Erro de sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$.

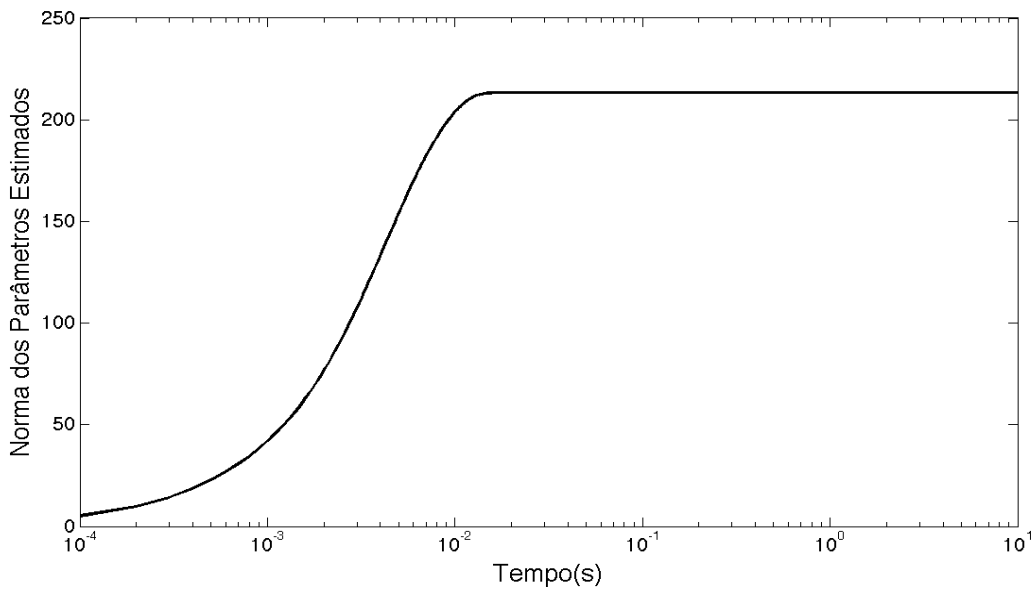


Figura 4.9. Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\|\hat{\theta}\|$.

Trabalhos recentes tais como Wei et al. (2009) indicaram que desastres podem seguir o modelo de uma exponencial amortecida ou o modelo flutuante. De fato, crises econômicas podem exibir um comportamento similar a exponencial amortecida, uma vez que suas consequências na economia tendem a serem agudas no início e atenuarem com o tempo, conforme a economia for recuperando. Este modelo pode ser também combinado com outro tipo de crise que pode ser projetado como flutuações que caracterizam os ciclos de negócios na economia. A teoria dos ciclos de negócio pressupõe que a economia possui oscilações em termos de produtividade ou atividade econômica, tendo períodos de

crescimento concatenados com períodos de declínio ou recessão. Tendo em vista essas considerações, no segundo exemplo é considerado ambos os modelos na presença do seguinte distúrbio dependente do tempo

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos 2t \\ e^{-2t} \sin t \\ (5 \cos t + 2 \sin 4t) \\ 3 \sin t \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Logo, para obter a sincronização entre o sistema escravo (4.1) e o sistema mestre (4.6), as leis adaptativas (4.11) a (4.13) são empregadas. As condições iniciais para os sistemas mestre e escravo são $x_m = [1 \ 2 \ 0.5 \ 0.5]^T$ e $x_s = [-1 \ 6 \ 4 \ -2]^T$, respectivamente, de modo a avaliar a performance do algoritmo de sincronização proposta sob condições iniciais adversas. Os parâmetros de projeto escolhidos são os mesmos no exemplo anterior. Figura 4.10 a 4.18 mostram os resultados das simulações. Pode se concluir das simulações, que mesmo na presença de distúrbios dependentes do tempo, o método proposto é estável e o erro residual converge praticamente para zero em 0.002 segundos.

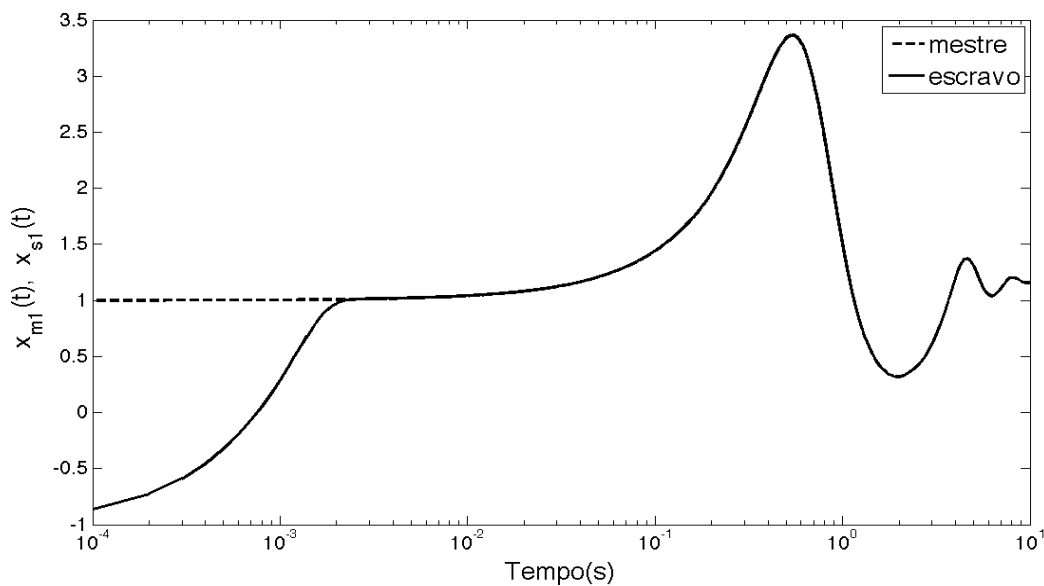


Figura 4.10. Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$.

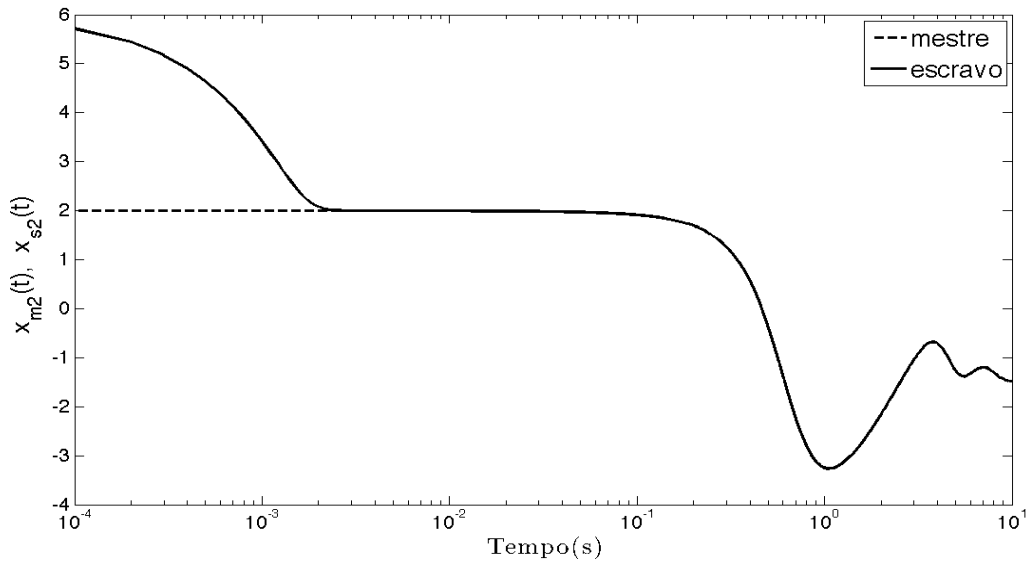


Figura 4.11. Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$.

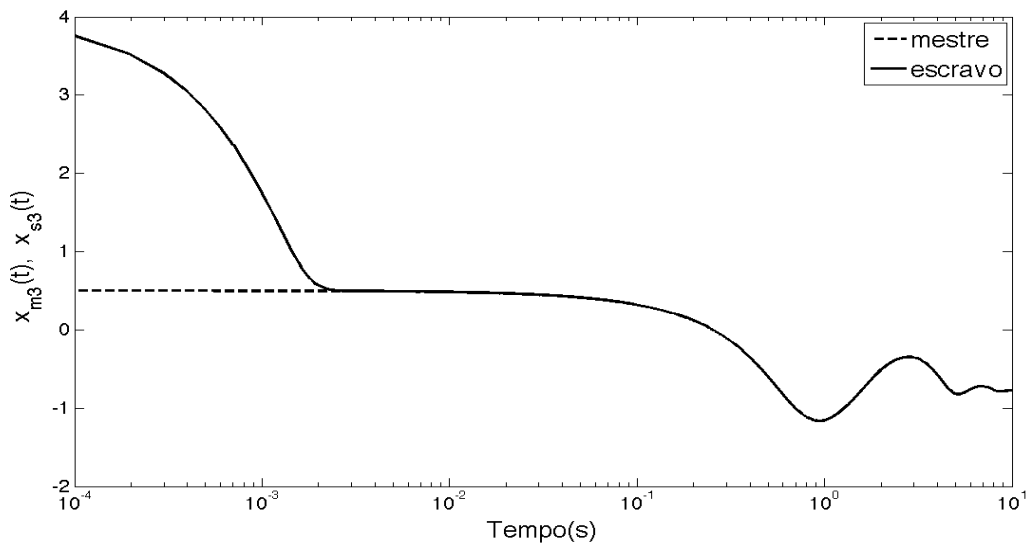


Figura 4.12. Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$.

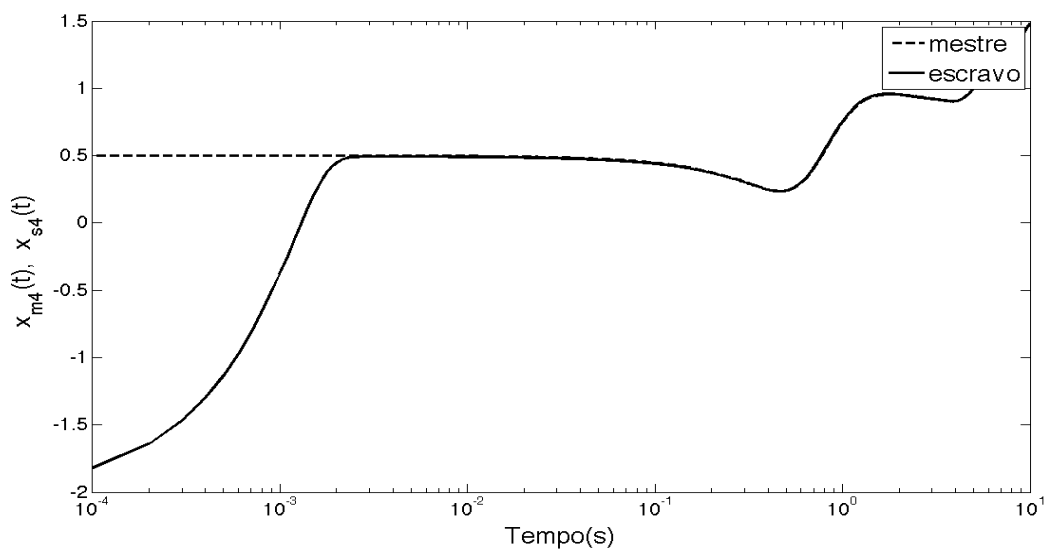


Figura 4.13. Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$.

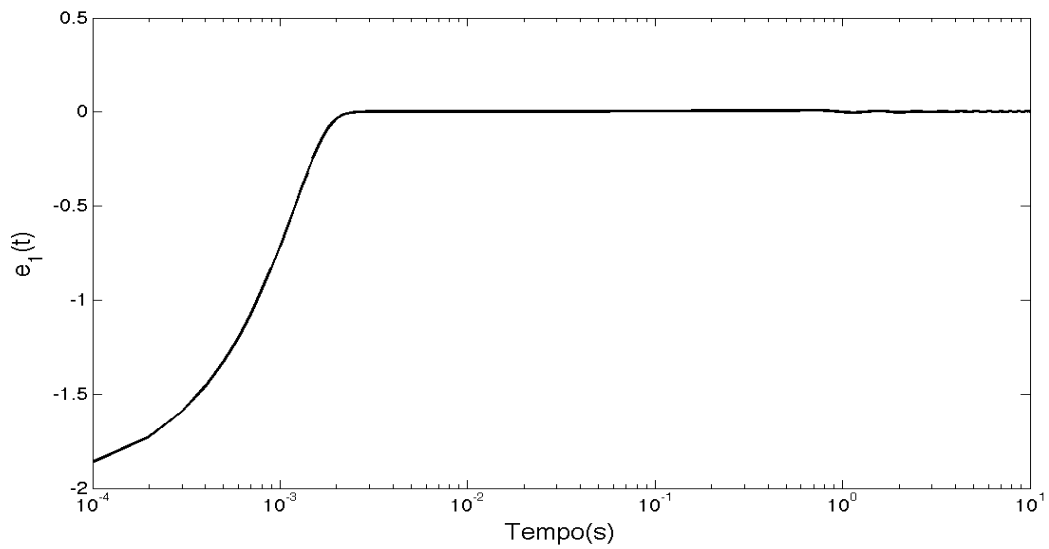


Figura 4.14. Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$.

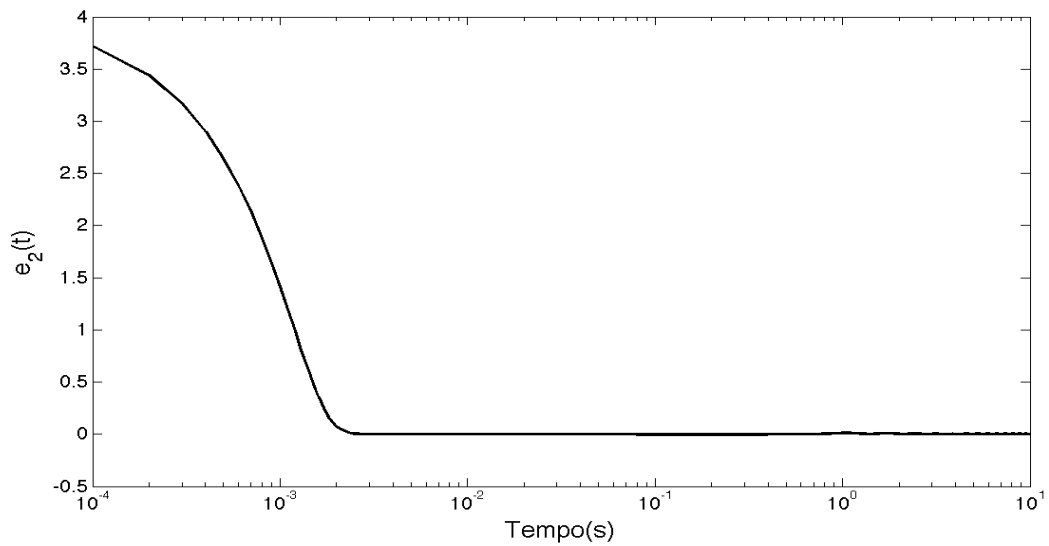


Figura 4.15. Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$.

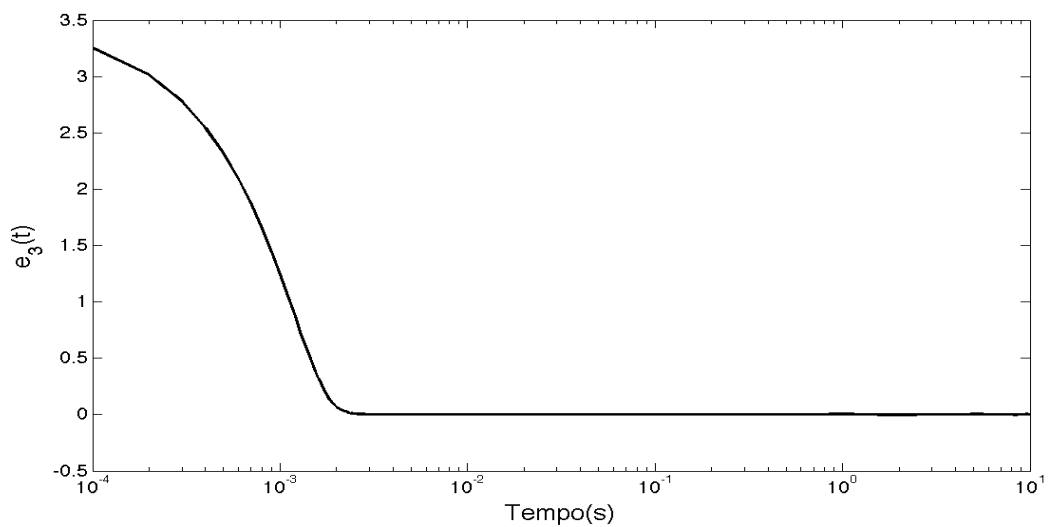


Figura 4.16. Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$.

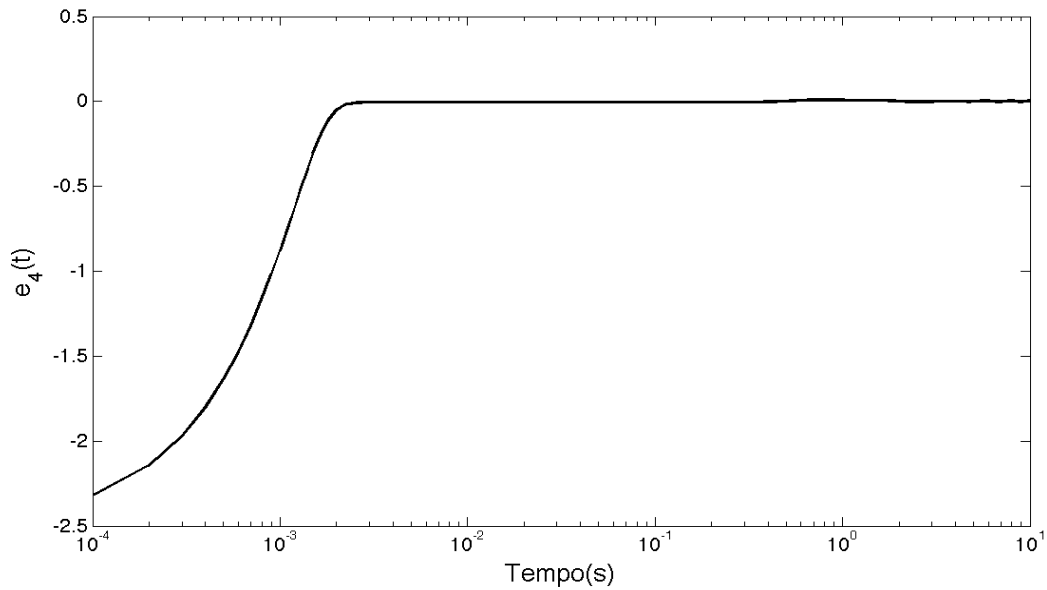


Figura 4.17. Erro de sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$.

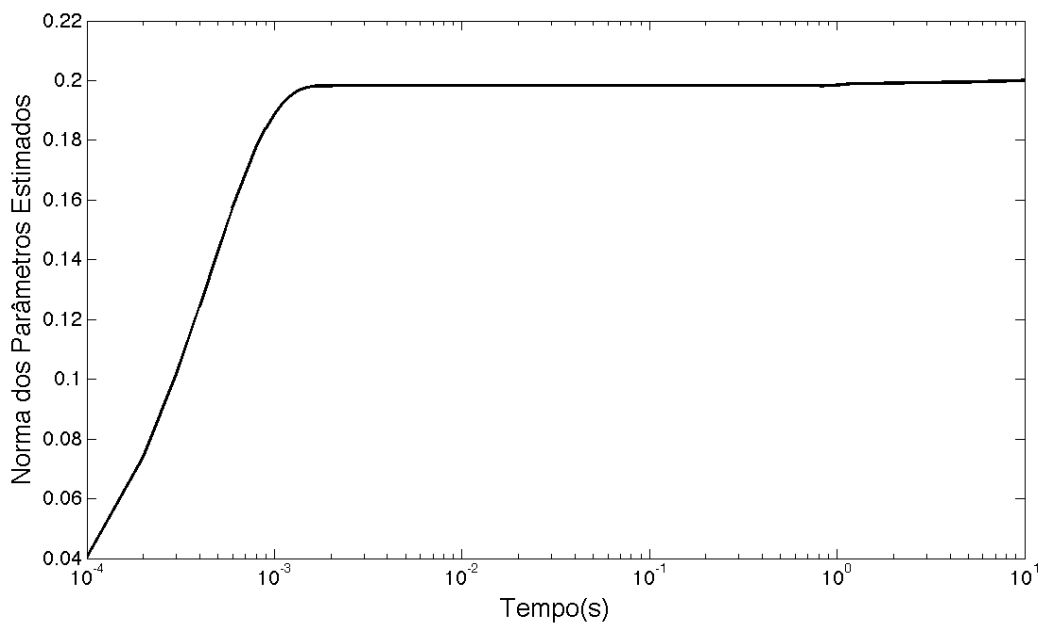


Figura 4.18. Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\|\hat{\theta}\|$.

O último exemplo é o distúrbio dependente do estado dado pela seguinte equação

$$d_s(x_s, t) = \begin{bmatrix} 8 \sin(7t)x_{s2}(t) \\ 7 \cos(9t)x_{s2}(t) \\ (5 \sin(t) + 6 \cos(3t))x_{s2}(t) \\ 10 \sin(3t)x_{s2}(t) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

O distúrbio acima pode ser interpretado como modelo que retrata as flutuações causadas no mercado pelo comportamento especulativo. Por esse motivo, essa flutuação pode ser

dependente do estado expresso pela demanda de investimento. Logo, para obter a sincronização do sistema escravo (4.1) com o sistema mestre (4.6), as leis adaptativas (4.11) a (4.13) foram utilizadas.

Figuras 4.19 a 4.27 mostram os resultados da simulação para o esquema proposto, os valores iniciais e os parâmetros escolhidos são os mesmos utilizados no segundo exemplo. Das figuras 4.19 a 4.22, deve ser notado a rápida sincronização entre os sistemas mestre e escravo. Isto significa que a lei adaptativa proposta é robusta e pode se alcançar rápida sincronização mesmo submetido aos diferentes tipos de distúrbios.

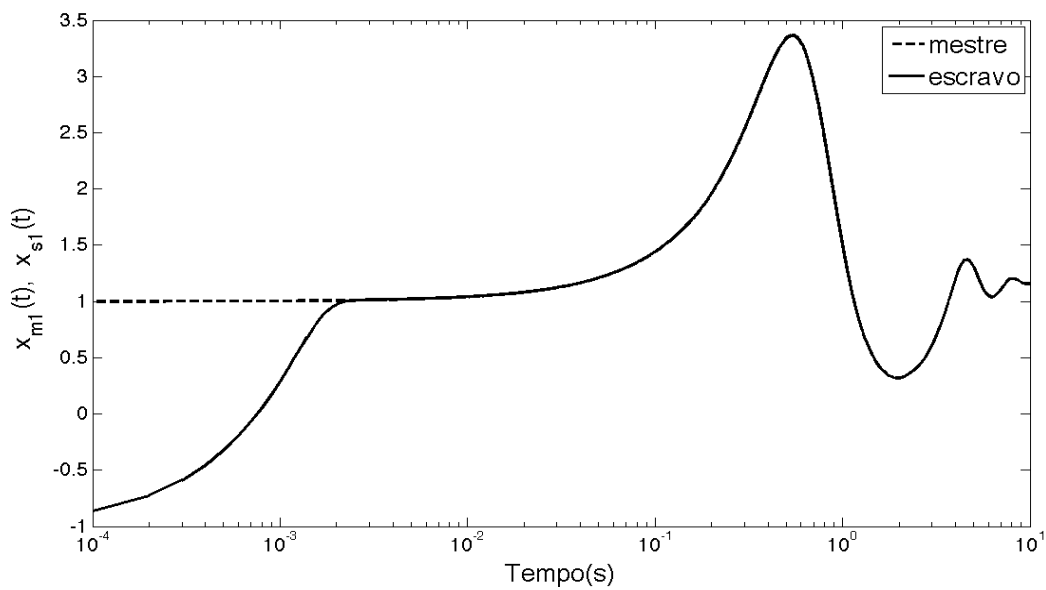


Figura 4.19. Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$.

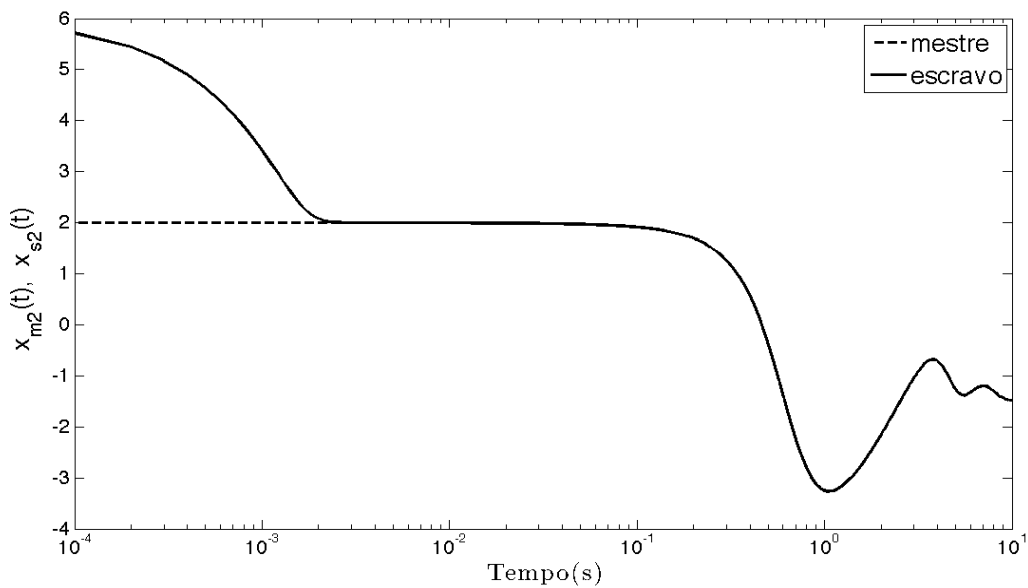


Figura 4.20. Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$.

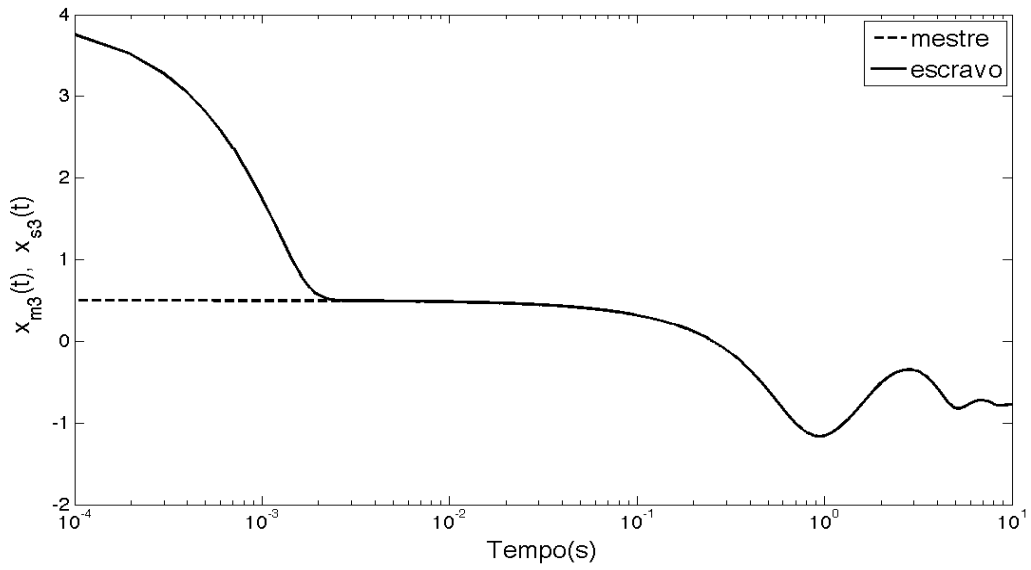


Figura 4.21. Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$.

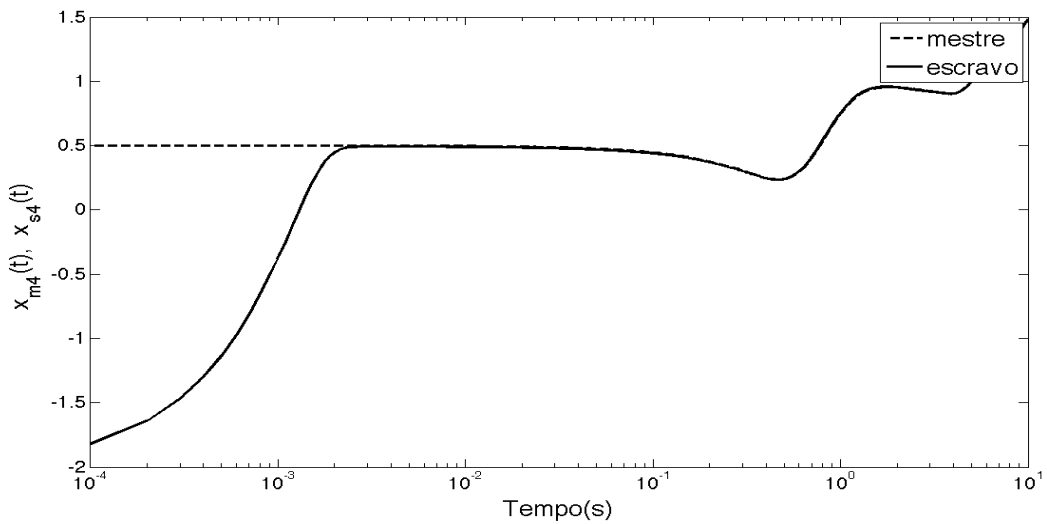


Figura 4.22. Desempenho da sincronização de $x_{s4}(t)$.

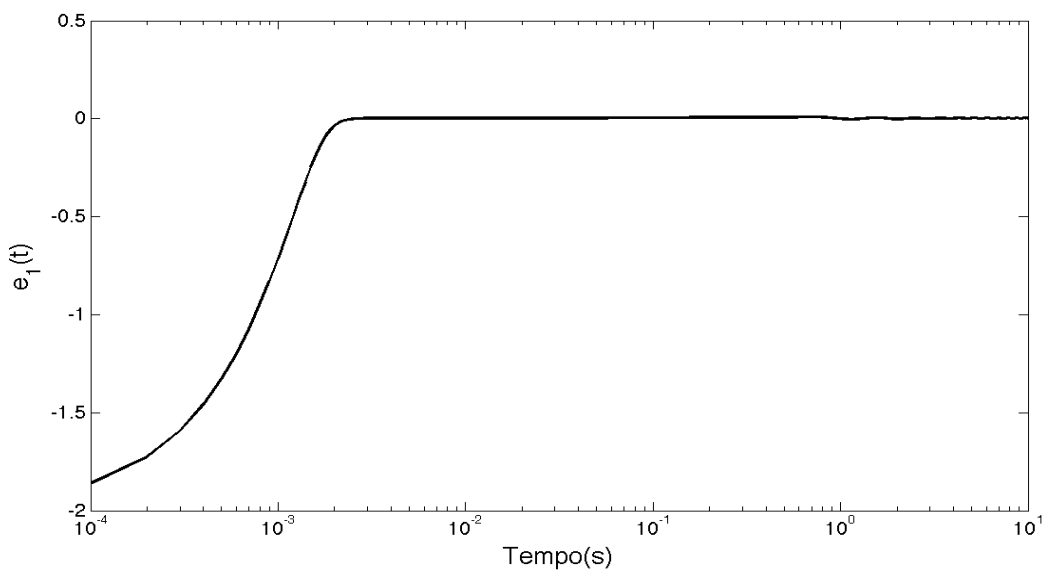


Figura 4.23. Erro de sincronização $(x_{s1}(t) - x_{m1}(t))$.

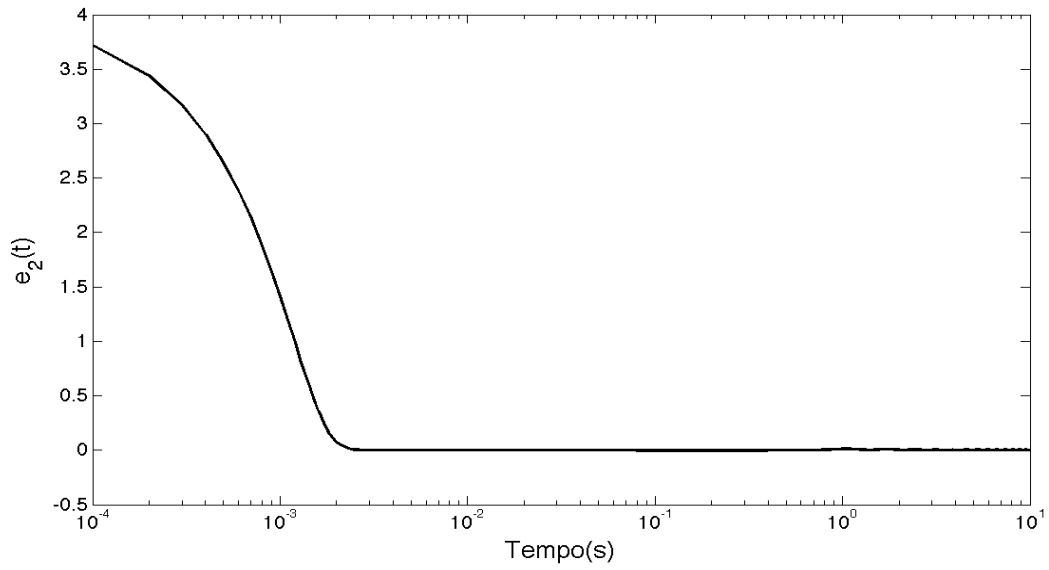


Figura 4.24. Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$.

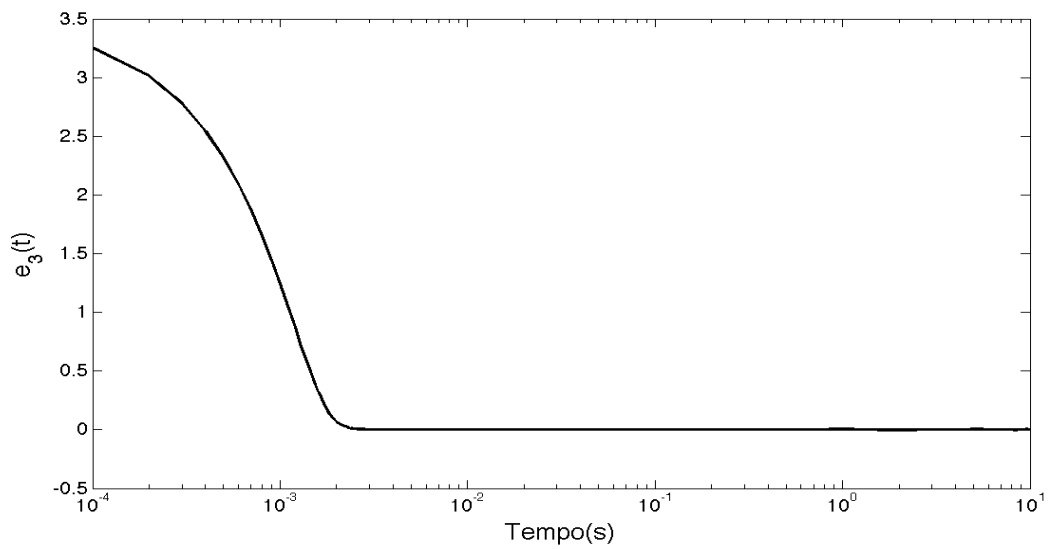


Figura 4.25. Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$.

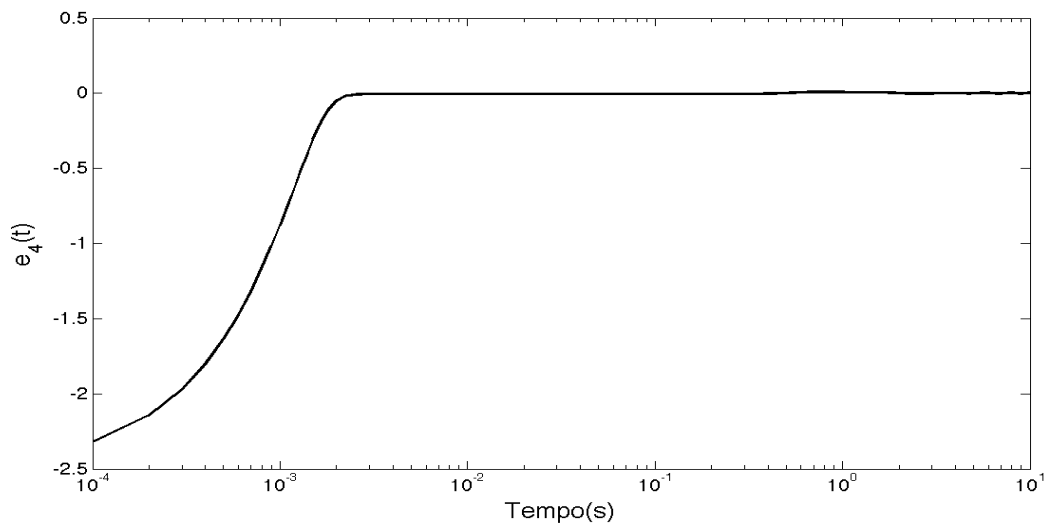


Figura 4.26. Erro de Sincronização $(x_{s4}(t) - x_{m4}(t))$.

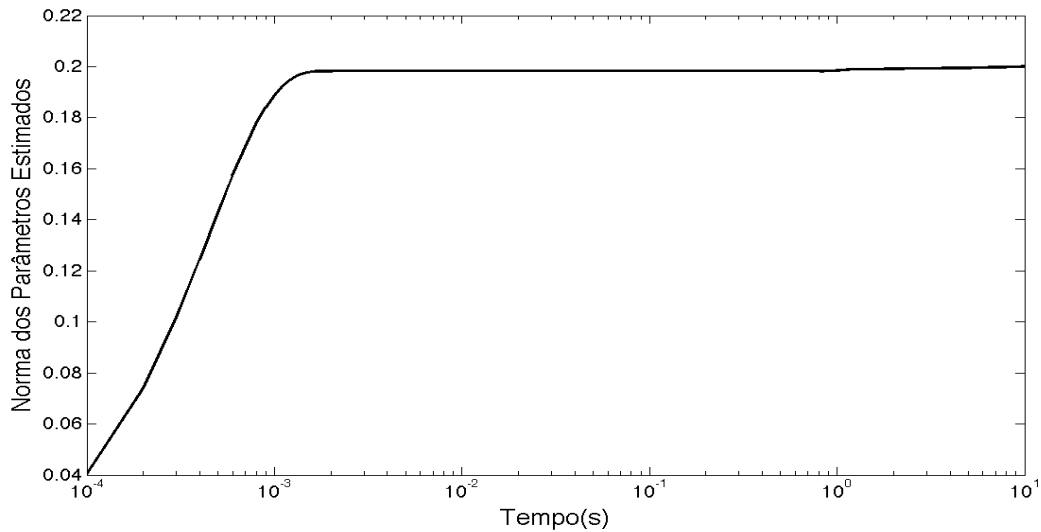


Figura 4.27. Norma de Frobenius dos parâmetros estimados $\|\hat{\theta}\|$.

4.5 CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou um algoritmo de sincronização, baseado em leis adaptativas, para o sistema hipercaótico financeiro que pode ser afetado por incertezas nos parâmetros e distúrbios limitados. Baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov, um sistema de controle adaptativo foi proposto para assegurar a convergência assintótica do erro residual de sincronização para zero, mesmo na presença das incertezas supracitadas. O resultado das simulações mostram a validade e viabilidade do esquema proposto. Os resultados apresentados neste capítulo foram reportados em Vargas e Grzeidak, 2013.

5 SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA DE SISTEMAS CAÓTICOS UNIFICADOS

De modo a ressaltar a aplicabilidade da metodologia de projeto empregada, neste capítulo é considerado o controle adaptativo de um sistema caótico unificado. Como esperado, é mostrado que o erro residual de sincronização converge para zero na presença de erro de modelagem, distúrbios e incerteza paramétrica.

5.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o problema de controlar o sistema caótico unificado descrito pelas seguintes equações diferenciais

$$\dot{x}_s = A(\beta)x_s + f_s(x_s) + d_s(x_s, t) + u \quad (5.1)$$

onde $x_s \in \mathfrak{R}^3$ é o estado do sistema escravo, $u \in \mathfrak{R}^3$ é a entrada do controlador, $f_s(\cdot)$ é uma função de mapeamento conhecida, $d_s(\cdot)$ é um distúrbio desconhecido e β é um parâmetro desconhecido,

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} -25\beta - 10 & 25\beta + 10 & 0 \\ 28 - 35\beta & 29\beta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8 + \beta}{3} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

e

$$f_s(x_s) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{s1}x_{s3} \\ x_{s1}x_{s2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Assume-se que o seguinte possa ser estabelecido.

Hipótese 1: Na região $\mathfrak{R}^3 \times [0, \infty)$

$$\|d_s(x, t)\| \leq d_{s0} \quad (5.4)$$

onde d_{s0} é uma constante positiva, tal que $d_{s0} < \bar{d}_s$, e \bar{d}_s é uma constante conhecida.

Hipótese 2: O parâmetro β é limitado superiormente por uma constante positiva conhecida $\bar{\beta}$, tal que $\bar{\beta} > \beta$.

Observação 1: A hipótese 1 é natural uma vez que sistemas caóticos unificados são limitados por definição.

Observação 2: No caso em que $\beta=0$, $\beta=0.8$, e $\beta=1$, o sistema (5.1) torna-se os sistemas Lorenz, Lü e Chen respectivamente, quando $d=0$ e $u=0$.

A fim de ter um problema bem colocado, sem perda de generalidade, considere-se o sistema mestre como

$$\dot{x}_m = A(\alpha)x_m + f_m(x_m) + d_m(t, x_m) \quad (5.5)$$

onde $x_m \in \mathfrak{R}^3$, α é um parâmetro conhecido e $d_m(\cdot)$ é um distúrbio desconhecido.

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} -25\alpha - 10 & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

e

$$f_m(x_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{m1}x_{m3} \\ x_{m1}x_{m2} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Hipótese 3: Na região $\mathfrak{R}^3 \times [0, \infty)$

$$\|d_m(x, t)\| \leq d_{m0} \quad (5.8)$$

onde d_{m0} é uma constante positiva, tal que $d_{m0} < \bar{d}_{ms}$ e \bar{d}_{ms} uma constante conhecida.

Portanto, nosso objetivo é projetar um controlador realimentado u , tal que os estados de x_s do sistema caótico escravo (5.1) sincronize os estados x_m do sistema mestre (5.5).

Defina o erro de sincronização como $e(t) = x_s - x_m$. Então, de (5.1) e (5.5), obtem-se a equação de erro de sincronização

$$\dot{e} = A(\alpha)e + \beta Bx_s + \alpha Cx_s \alpha + f_s - f_m + d + u \quad (5.9)$$

onde $d = d_s - d_m$, $C = -B$ e

$$B = \begin{bmatrix} -25 & 25 & 0 \\ -35 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Observação 3: Deve ser notado que na nossa formulação, a motivo da simplicidade, foi considerado que $f_m(\cdot) = f_s(\cdot)$. Entretanto, esses mapas não lineares podem ser não relacionados entre si, por exemplo, para incluir conhecimento *a priori* dos distúrbios.

5.2 SINCRONIZAÇÃO ADAPTATIVA

Nesta seção, considera-se o problema da sincronização adaptativa assintótica na presença de parâmetros desconhecidos e distúrbios limitados. É demonstrado, usando-se uma análise tipo *Lyapunov-like*, que o erro de sincronização converge assintoticamente para zero.

Teorema 1: Considere os sistemas escravo (5.1) e mestre (5.5), que satisfazem as hipóteses 1-3, a lei de controle

$$u = -(\hat{\beta}Bx_s + \alpha Cx_s + f_s - f_m + A(\alpha)e + Le + u_r) \quad (5.11)$$

com

$$u_r = \frac{ke}{\lambda_{\min}(K)[\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_o t)]} \quad (5.12)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = -\gamma_{\beta} [\gamma_2 \|e\| \hat{\beta} - e^T K B x_s] \quad (5.13)$$

onde

$$L^T P + PL = -Q, \quad P = P^T > 0, \quad Q > 0 \quad K = P + P^T \quad (5.14)$$

$$\gamma_3 = \lambda_{\min}(Q), \quad \gamma_o \geq 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_{\beta} > 0$$

$k = \|K\|_F \cdot \bar{d}_o + \gamma_2 \bar{\beta}^2 / 2$, e $\|K\|_F$ é a norma de Frobenius de K . Então, o sistemas mestre e escravo sincronizam, i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Prova: Considere a seguinte função candidata de Lyapunov

$$V = e^T P e + y_{\beta}^{-1} \tilde{\beta} \tilde{\beta} / 2 \quad (5.15)$$

onde $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta$.

Derivando a (5.15) em relação ao tempo resulta

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \tilde{\beta} y_{\beta}^{-1} \dot{\tilde{\beta}} \quad (5.16)$$

Por outro lado, usando (5.11), o erro de sincronização em malha fechada pode ser escrito como

$$\dot{e} = -L e - \tilde{\beta} B x_s - u_r + d \quad (5.17)$$

Avaliando (5.16) ao longo das trajetórias de (5.13) e (5.17), nós obtemos

$$\dot{V} = -e^T (L^T P + PL) e - \tilde{\beta} e^T (P + P^T) B x_s - e^T (P + P^T) u_r + e^T (P + P^T) d - \gamma_2 \|e\| \tilde{\beta} \hat{\beta} + e^T K B x_s \tilde{\beta} \quad (5.18)$$

Usando agora (5.14) e (5.18), resulta

$$\dot{V} = -e^T Q e - e^T K u_r - \gamma_2 \|e\| \tilde{\beta} \hat{\beta} + e^T K d \quad (5.19)$$

que, usando (5.14) e a hipótese 1 e 3, implica

$$\dot{V} \leq -\gamma_3 \|e\|^2 - e^T K u_r - \gamma_2 \|e\| \tilde{\beta} \hat{\beta} + \bar{d}_0 \|K\|_F \|e\| \quad (5.20)$$

onde $\bar{d}_0 = \bar{d}_s + \bar{d}_m$.

Desde que $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - \beta$, pode ser estabelecido que

$$\tilde{\beta} \hat{\beta} = \frac{1}{2} \tilde{\beta}^2 + \frac{1}{2} \hat{\beta}^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \quad (5.21)$$

Deste modo empregando a hipótese 2, (5.12) e (5.21), (5.20) implica

$$\dot{V} \leq -\gamma_3 \|e\|^2 + (\bar{d}_0 \|k\|_F + \frac{\bar{\beta}^2}{2}) \|e\| - \frac{k \|e\|^2}{\|e\| + \gamma_1 \exp(-\gamma_0 t)} \quad (5.22)$$

Usando a definição (5.14), (5.22) implica que

$$\dot{V} \leq -\gamma_3 \|e\|^2 + \frac{k \gamma_1 \exp(-\gamma_0 t) \|e\|}{\|e\| + \lambda_1 \exp(-\gamma_0 t)}$$

$$\dot{V} \leq -\gamma_3 \|e\|^2 + k \gamma_1 \exp(-\gamma_0 t) \quad (5.23)$$

Como V é delimitada abaixo e não crescente com o tempo, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|e(\tau)\| d\tau$$

$$\dot{V} \leq \frac{[V_{(0)} - V_{\infty}]}{\gamma_3} + \frac{k \gamma_1}{\gamma_3 \gamma_0} < \infty \quad (5.24)$$

onde $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_{\infty} < \infty$. Note-se que com os limites em $\tilde{\beta}$ e e , $\|e\|^2$ é uniformemente contínuo. Então, de (5.17), segue-se que \dot{e} também é limitada. Portanto, aplicando-se o Lema de Barbalat (Khalil, 2001), conclui-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

5.3 SIMULAÇÕES

Para ilustrar as aplicações do esquema proposto considera-se aqui a presença do seguinte distúrbio:

$$d_s(x_s, t) = \begin{bmatrix} 3\sin(t) \cdot \|x_s\| & 3\sin(2t) & \sin(t) \end{bmatrix}^T \quad (5.25)$$

Portanto, para sincronizar o sistema escravo (5.1) com o sistema mestre (5.5), as leis adaptativas (5.11) a (5.13) são usadas. As condições iniciais para os sistemas escravo e mestre são $x_m = [1.5 \ 2 \ 5]^T$ e $x_s = [4 \ 8 \ 3]^T$, respectivamente, com o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo de sincronização proposto em condições iniciais adversas.

O sistema Chen, i.e. $\alpha = 1$, é considerado para a simulação. Os outros parâmetros de projeto foram escolhidos como $k = 1$, $\hat{\beta}(0) = 0$, $\gamma_0 = 0.001$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 20$, $\gamma_b = 0.05$, e $L = \text{diag}(0.1, 100, 5)$.

Deve ser notado que $\beta = 1$ é somente usado para a geração da trajetória dos estados de $x_s(t)$. Para a implementação da lei de controle (5.11), é assumido que β é desconhecido.

Os desempenhos na sincronização são mostradas nas figuras 5.1 a 5.6, onde a escala logarítmica é usada no eixo correspondente ao tempo para mostrar o rápido transiente. Podemos ver que as simulações confirmam os resultados teóricos, isto é, o algoritmo de sincronização é estável e os erros de sincronização muito pequenos.

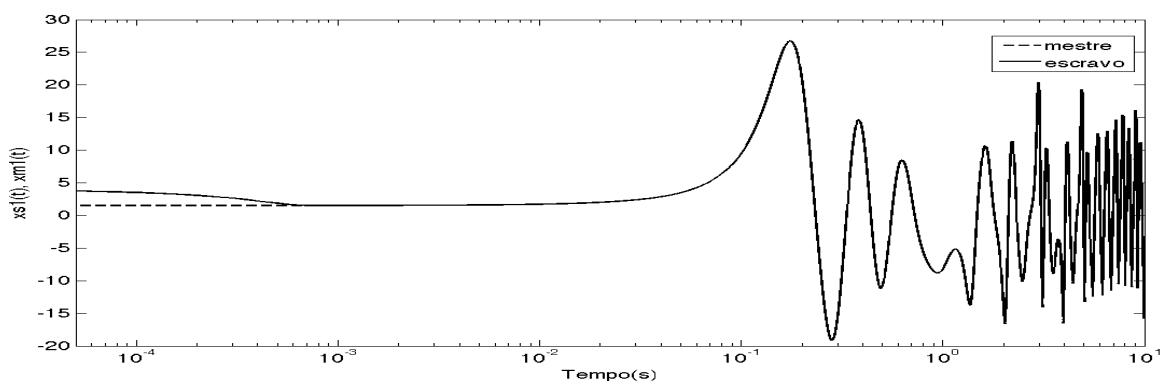


Figura 5.1. Desempenho da sincronização de $x_{s1}(t)$.

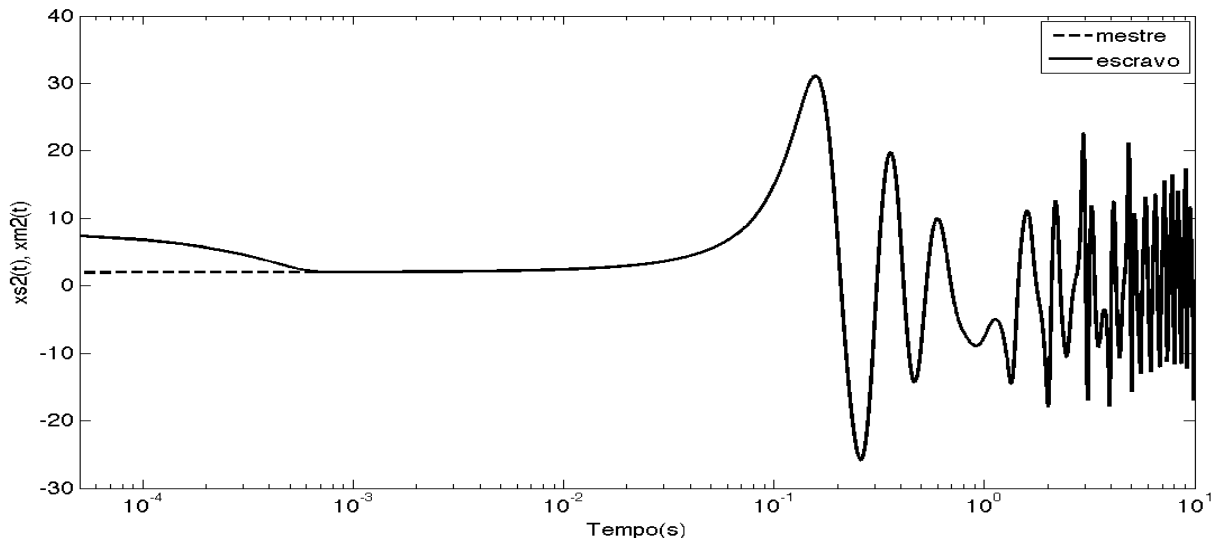


Figura 5.2. Desempenho da sincronização de $x_{s2}(t)$.

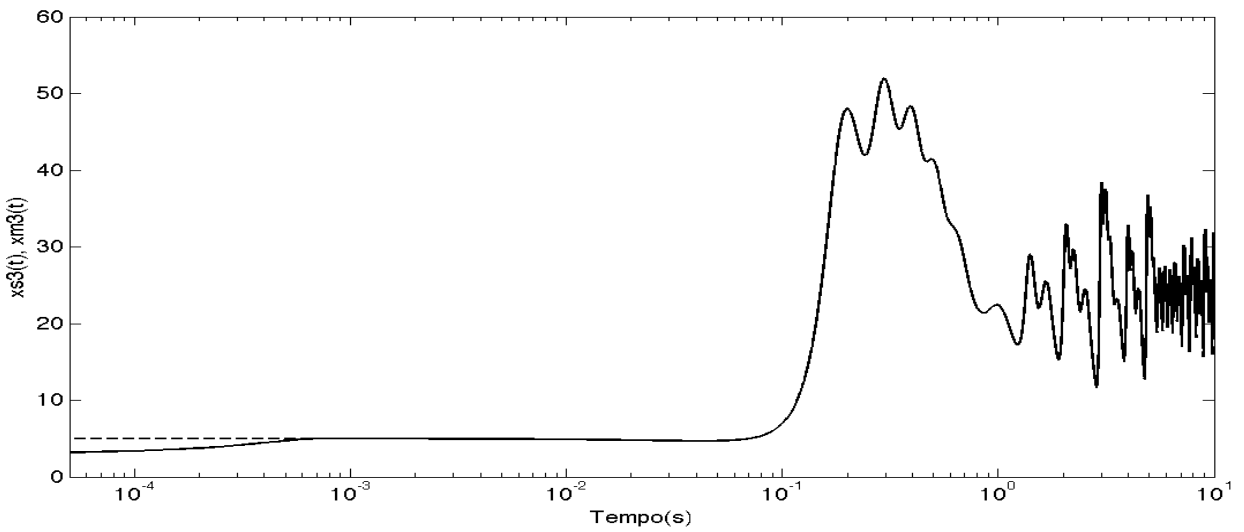


Figura 5.3. Desempenho da sincronização de $x_{s3}(t)$.

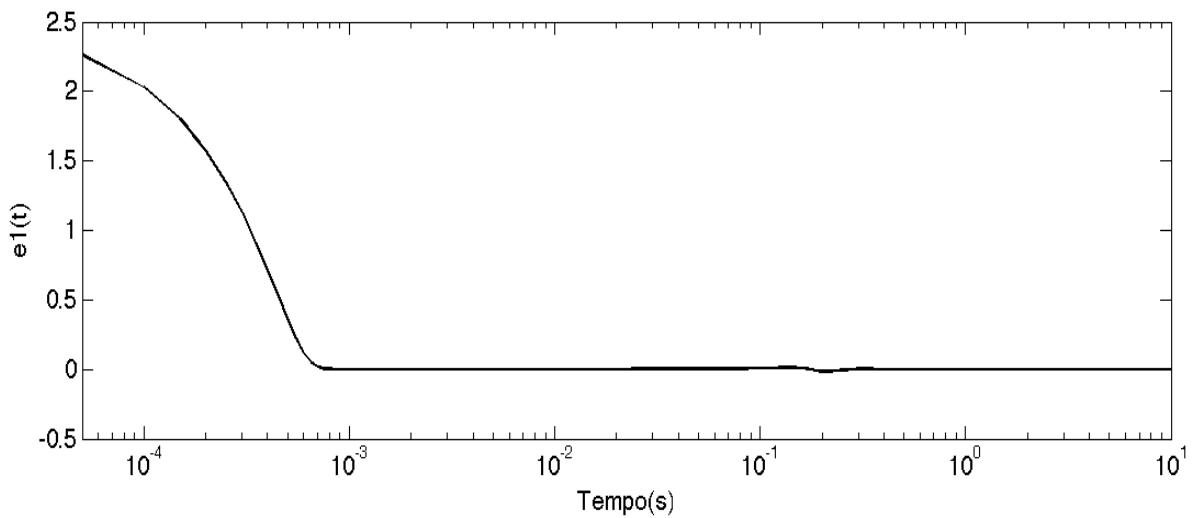


Figura 5.4. Erro de sincronização ($x_{s1}(t) - x_{m1}(t)$).

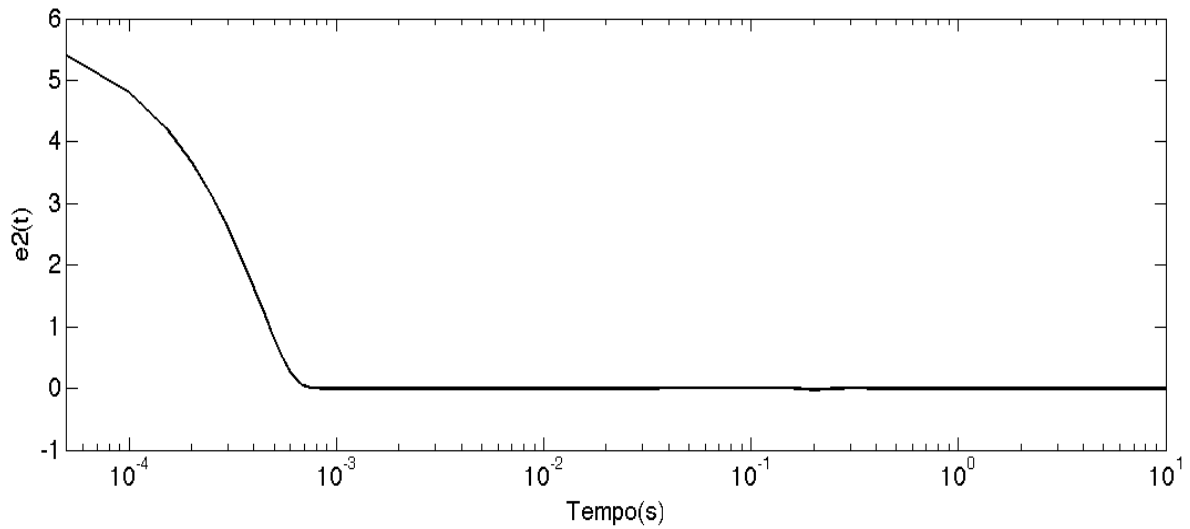


Figura 5.5. Erro de sincronização $(x_{s2}(t) - x_{m2}(t))$.

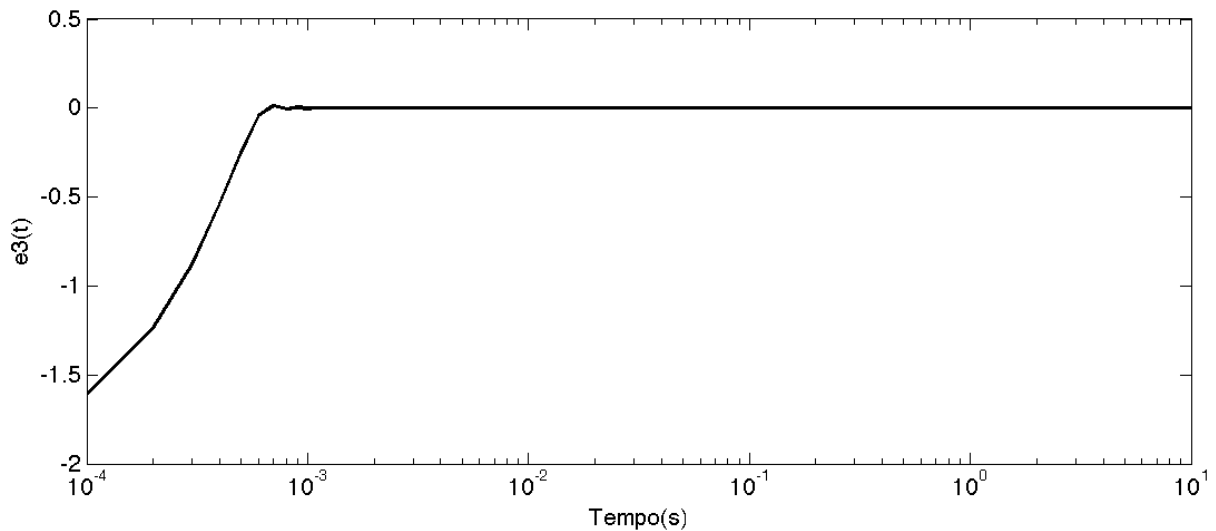


Figura 5.6. Erro de sincronização $(x_{s3}(t) - x_{m3}(t))$.

5.4 CONCLUSÃO

Neste Capítulo foi proposto um algoritmo de sincronização adaptativa para sistemas caóticos unificados que podem ser afetados por incerteza nos parâmetros e distúrbios limitados. O esquema proposto garante a convergência assintótica do erro de sincronização para zero. Os resultados apresentados neste capítulo foram reportados em Vargas, Grzeidak e Gularte, 2012.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, objetivando-se o controle de sistemas caóticos incertos, foram estudados esquemas de sincronização adaptativa. Inicialmente, foram introduzidos alguns conceitos básicos necessários no decorrer do presente trabalho. Na sequência, esses conceitos foram empregados para analisar o comportamento dinâmico do sistema caótico unificado e do sistema hipercaótico financeiro, fornecendo simulações gráficas para melhor compreensão das suas propriedades. A escolha de tais modelos para a investigação se deu em virtude das suas relevâncias encontradas na literatura, tanto para os sistemas caóticos unificados (Lu et. al., 2002; Sun et. al., 2008), quanto para o sistema hipercaótico financeiro (Jun-Hai e Yu-Shu, 2001; Zhao et. al., 2011; Yu et. al., 2012). A seguir, no contexto da teoria de estabilidade de Lyapunov, foram estudados algoritmos adaptativos que sincronizassem os sistemas caóticos investigados sob a presença de distúrbios e parâmetros desconhecidos.

O trabalho apresentou um algoritmo de sincronização adaptativa para sistemas caóticos financeiros que podem ser afetados por incerteza de parâmetros e distúrbios limitados. O esquema estudado garante a convergência assintótica do erro de sincronização para zero. Convém salientar que os resultados obtidos estão sendo considerados para publicação em periódico. A abordagem de considerar incerteza de parâmetros e distúrbios limitados em sistemas financeiros é mais realista, uma vez que influências ou distúrbios aleatórios são inerentes aos sistemas econômicos. Tal contribuição pode ser relevante como uma ferramenta de auxílio e suporte na tomada de decisões para criação de políticas e pacotes de medidas de estímulo para economia.

Finalmente, de modo a ressaltar a aplicabilidade da metodologia de projeto empregada, foi considerado adicionalmente o desenvolvimento de um algoritmo adaptativo para a sincronização de sistemas caóticos unificados. Vale destacar que os resultados apresentados no capítulo de sincronização dos sistemas caóticos unificados foram publicados no Congresso Brasileiro de Automática, realizado em Campina Grande (Vargas et. al., 2012). Simulações exaustivas foram implementadas para se avaliar a influência dos diversos parâmetros de projeto no desempenho dos algoritmos propostos neste trabalho.

Como sugestões para trabalhos futuros na mesma linha de pesquisa, mencionaremos os seguintes:

Sugestão 6.1: Os algoritmos de sincronização adaptativa estudados assumem que todos os estados do sistema mestre estão disponíveis para medida, uma possível contribuição de pesquisa seria modificar os algoritmos adaptativos de maneira que apenas alguns estados sejam necessários para garantir a convergência assintótica do erro de sincronização para zero.

Sugestão 6.2: A lei de controle de ambos os algoritmos adaptativos assume que o valor para o limitante superior dos distúrbios seja conhecido a priori. Uma abordagem mais realista seria aprimorar a lei de controle de modo que lide com distúrbios com limitantes superiores desconhecidos.

Sugestão 6.3: Os controladores desenvolvidos atuam em todos os estados do sistema escravo para garantir a convergência assintótica. Torna-se então interessante desenvolver um controlador que exerça controle apenas em estados chaves do sistema, desse modo o sistema caótico seria apenas sub-atuado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AL-SAWALHA, M.M; NOORANI, M.S.M (2010). Adaptive anti-synchronization of two identical and different hyperchaotic systems with uncertain parameters. **Communications Nonlinear Science & Numerical Simulation**: v.15, n.4, p.1036-1047, 2010.
- ARECCHI, F. T.; MEUCCI, R.; DI GARBO, A.; ALLARIA, E. Homoclinic chaos in a laser: synchronization and its implications in biological systems. **Optics and Lasers in Engineering**: v.39, n.3, p.293-304, 2003.
- BAUMOL, W.J.; QUANDT, R.E. Chaos Model and Their Implications for Forecasting. **Eastern Economic Journal**: v.11, n.1, p.3-15, 1985.
- BENHABIB, D.; DAY, R. Ration choice and erratic behavior. **Review of Economic Studies**: v.48, n.3, p.459-472, 1981.
- BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.L.; ZHOU, C.S. The Synchronization of Chaotic Systems. **Physics Reports**: v.366, n.1, p.1-101, 2002.
- CHEN, C.H.; SHEU, L.J.; CHEN, H.K., CHEN, J.H.; WANG, H.C.; CHAO, Y.C.; LIN, Y.K. A new hyperchaotic system and its synchronization. **Nonlinear Analysis**: v.10, n.4, p.2088– 2096, 2009.
- CHEN, G.; UETA, T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*: v.9, n.7, p.1465-1466, 1999.
- CHEN, C.-L.; YAU, H.-T.; PENG, C.C. Design of extended backstepping sliding mode controller for uncertain chaotic systems. **International Journal of Nonlinear Science & Numerical Simulation**: v.8, n.2, p.137–145, 2007.
- DAY, R.H. Irregular growth cycles. **American Economic Review**: v.72, n.3, p.406-414, 1982.
- DOU, F.; SUN, J.; DUAN, W.; LÜ, K. Controlling hyperchaos in the new hyperchaotic system. **Science Direct**: v.14, n.2, p.552–559, 2009.
- FAGGINI, M. E PARZIALE A. The Failure of Economic theory. Lessons from Chaos Theory. **Modern Economy**: v.3, n.1, p.1-10, 2012.
- GRANDMONT, J.M. On endogenous competitive business cycles. **Econometrica**: v.53, n.5, p.995-1045, 1985.
- GRANDMONT, J.M.; MALGRANGE, P. Nonlinear Economic Dynamics. **Journal of Economic Theory**: v.40, n.1, p.3-12, 1986.
- HUANG, D.-S.; LI, H.Q. **Theory and Method of the Nonlinear Economics Publishing**. Chengdu: House of Suchuan University, 1993.
- IOANNOU, P.A.; SUN, J. **Robust adaptive control**. 1ª Edição. New Jersey: Ed. Prentice-Hall, Inc., 1995. 848 p.
- IU, H.H.; TSE, C.K. A study of synchronization in chaotic autonomous Cuk DC/DC converters. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**: v.47, n.6, p.913-918, 2000.
- JANG, M.-J.; CHEN, C.-L.; CHEN, C.-K. Sliding mode control of hyperchaos in Rössler systems. **Chaos Solitons Fractals**: v.14, n.9, p.1465–1476, 2002.
- JIANG, J.G.; DENG, X.L.; WANG, J.F. Globally Exponentially Attractive Set and Synchronization of a Class of Chaotic Finance System. **Lecture Notes in Computer Science**: v.5551, n.1, p.253-261, 2009.
- JUN-HAI, M.; YU-SHU, C. Study for the Bifurcation Topological Structure and the Global Complicated Character of a kind of Nonlinear Finance System (I). **Applied Mathematics and Mechanics**: v. 22, n.11, p.1119-1128, 2001.
- JUN-HAI, M.; YU-SHU, C. Study for the Bifurcation Topological Structure and the Global Complicated Character of a kind of Nonlinear Finance System (II). **Applied Mathematics and Mechanics**: v. 22, n.22, p.1236-1241, 2001.
- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. 3ª Edição. New Jersey: Ed. Prentice-Hall, Inc, 2001. 750 p.

- LI, X.F.; LEUNG, A.C.S.; LIU, X.J.; HAN, X.P.; CHU, Y.D. Adaptive synchronization of identical chaotic and hyperchaotic systems with uncertain parameters. **Nonlinear Analysis**: v.11, n.4, p.2215–2223, 2010.
- LI, Y.N.; CHEN, L.; CAI, Z.S.; ZHAO, X.Z. Study on chaos synchronization in the Belousov-Zhabotinsky chemical system. **Chaos, Solitons & Fractals**: v.17, n.4, p.699-707, 2003.
- LIU L.; HAN Z.; LI W. Global sliding mode control and application in chaotic systems. **Nonlinear Dynamics**: v.56, n.1-2, p.193-198, 2009.
- LORENZ, E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**: v.20, n.2, p.130-141, 1963.
- LU, J. N.; WU, X. Q.; LÜ, J. H. Synchronization of a unified chaotic system and the application in secure communication. **Physics letters A**: v.305, n.6, p.365- 370, 2002.
- MAHMOUD, E. E. Dynamics and synchronization of new hyperchaotic complex Lorenz system. **Mathematical and Computer Modelling**: v.55, n.7-8, p.1951-1962, 2012.
- MURKHEJEE, N.; PORIA, S. Preliminary Concepts of Dynamical Systems. **International Journal of Applied Mathematical Research**: v.1, n.4, p.751-770, 2012.
- NJAH, A.N.; SUNDAY, O.D. Generalized on the chaos control of 4-D chaotic system using recursive backstepping nonlinear controller. **Chaos Solitons Fractals**: v.41, n.5, p.2371–2376, 2009.
- PENG, C.C.; CHEN, C.L. Robust chaotic control of Lorenz system by backstepping design. **Chaos Solitons Fractals**: v.37, n.2, p.598–608, 2008.
- RUI-HONG, D. On Butterfly Effect - A Financial Creation of Financial Crisis in U.S.A. **Journal of Lanzhou Commercial College**: v.26, n.4, p.156-164, 2009.
- SLOTINE, J.J.E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. 1ª Edição. New Jersey: Ed. Prentice-Hall, Inc, 1991, p. 461.
- STROGATZ, S.H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. 1º Edição. Westview Press, 2001, p.512.
- SUN, Y.; CAO, J.; FENG, G. An adaptive chaotic secure communication scheme with channel noises. **Physic Letters A**: v.372, n.33, p.5442-5447, 2008.
- VARGAS, J.A.R.; GRZEIDAK, E.; GULARTE, K.H.M. Adaptive Synchronization of Unified Chaotic Systems in the Presence of Unknown Parameter and Disturbances. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, XIX, Campina Grande , 2012.
- VARGAS, J.A.R.; GRZEIDAK, E. Synchronization of hyperchaotic Finance Systems in the presence of unknowns, a ser submetido à revista **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, 2013.
- VARGAS, J.A.R.; HEMERLY, E.M. Neural adaptive observer with asymptotic convergence in the presence of time-varying parameters and disturbances (in Portuguese), **SBA Controle & Automação [online]**. 2008, vol.19, n.1, pp. 18-29. ISSN 0103-1759.
- VINCENT, U.E. Synchronization of identical and non- identical 4-D chaotic systems using active control. **Chaos Solitons Fractals**: v.37, n.4, p.1065–1075, 2008.
- WANG, H.; HAN, Z.; XIE; Q.; ZHANG, W. Finite-time chaos control of unified chaotic systems with uncertain parameters. **Nonlinear Dynamics**: v.55, n.4, p.323–328, 2009a.
- WANG, Z.-L. AND SHI, X.-R. Anti-synchronization of Liu system and Lorenz system with known or unknown parameters. **Nonlinear Dynamics**: v.57, n.3, p.425–430, 2009b.
- WANG, Z.-L. Projective synchronization of hyperchaotic Lü system and Liu system. **Nonlinear Dynamics**: v.59, n.3, p.455–462, 2010.
- WEI, J., ZHAO, D. AND LIANG, L. Estimating the growth models of news stories on disasters. **Journal of the American Society for Information Science and Technology**: v. 60, n.9, p. 1741-1755, 2009.
- XIAO, M.; CAO, J. Synchronization of a chaotic electronic circuit system with cubic term via adaptive feedback control. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**: v.14, n.8, p.3379-3388, 2009.
- YAN, Z. Controlling hyperchaos in the new hyperchaotic Chen system. **Applied Mathematics And**

Computation: v.168, n.2, p.1239–1250, 2005.

YANG, C.C. Adaptive synchronization of Lü hyperchaotic system with uncertain parameters based on single-input controller. **Nonlinear Dynamics:** v.63, n.3, p.447-454, 2011.

YASSEN, M.T. Synchronization hyperchaos of hyperchaotic systems. **Chaos Solitons Fractals:** v.37, n.2, p.465–475, 2008.

YE, Z.;DENG, C. Adaptive synchronization to a general non-autonomous chaotic system and its applications. **Nonlinear Analysis: Real World Applications:** v.13, n.2, p.840-849. 2012.

YU, H.; CAI, G.; LI, Y. Dynamic analysis and control of a new hyperchaotic finance system. **Nonlinear Dynamics:** v.67, n.3, p.2171-2182, 2012.

ZHANG, H.; MA X.; LI, M. AND ZOU, J. Controlling and tracking hyperchaotic Rössler system via active backstepping design. **Chaos Solitons Fractals:** v.26, n.2, p.353–361, 2005.

ZHAO, X.; LI, Z.; LI, S. Synchronization of a chaotic finance system. **Applied Mathematics and Computation:** v.217, n.13, p.6031-6039, 2011.

ANEXOS

Anexo 1 – Código fonte para simulação da figura 3.1

Anexo 2 – Código fonte para simulação da figuras 3.2 a 3.7

Anexo 3 – Código fonte para simulação das figuras 3.8 e 3.10 a 3.12

Anexo 4 – Código fonte para simulação da figura 3.9

Anexo 5 – Código fonte para simulação da figura 3.13

Anexo 6 – Código fonte para simulação da figura 3.14

Anexo 7 – Código fonte para simulação da figura 3.15

Anexo 8 – Código fonte para simulação da figura 3.16

Anexo 9 – Código fonte do controlador do sistema hipercaótico financeiro

Anexo 10 – Código fonte para simular os resultados do ANEXO 9 (Figuras 4.1 a 4.27)

Anexo 11 – Código fonte do controlador do sistema caótico unificado

Anexo 12 - Código fonte para simular os resultados do ANEXO 11 (Figuras 5.1 a 5.6)

ANEXO 1: Código fonte para simulação da figura 3.1

```
% Retrato de fase do sistema caotico financeiro 3D.

Finance=inline('[x(3)+(x(2)-0.9)*x(1);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-
1.2*x(3)]','t','x');
options = [];
[t,xa]=ode45(Finance,[0 800],[1,3,2],options);
plot3(xa(:,3),xa(:,1),xa(:,2))

fsize=15;
title('Atrator do Modelo Financeiro','FontSize',fsize)
xlabel('z(t)','FontSize',fsize);
ylabel('x(t)','FontSize',fsize);
zlabel('y(t)','FontSize',fsize);

% fim do programa.
```

```
% Retrato de fase do sistema hipercaotico financeiro.

Finance=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-
1.5*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');
options = [];
[t,xa]=ode45(Finance,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);

figure;
plot(xa(:,1),xa(:,2));
xlabel('X', 'fontsize',14);
ylabel('Y', 'fontsize',14);

figure;
plot(xa(:,2),xa(:,3));
xlabel('Y', 'fontsize',14);
ylabel('Z', 'fontsize',14);

figure;
plot(xa(:,1),xa(:,3));
xlabel('X', 'fontsize',14);
ylabel('Z', 'fontsize',14);

figure;
plot(xa(:,3),xa(:,4));
xlabel('z', 'fontsize',14);
ylabel('u', 'fontsize',14);

figure;
plot(xa(:,2),xa(:,4));
xlabel('y', 'fontsize',14);
ylabel('u', 'fontsize',14);

figure;
plot(xa(:,1),xa(:,4));
xlabel('x', 'fontsize',14);
ylabel('u', 'fontsize',14);

figure;
plot(t,xa(:,1:4));
xlabel('Time', 'fontsize',14);
ylabel('Variables', 'fontsize',14);
legend('X', 'Y', 'Z', 'U');

% fim do programa.
```

```

function chaosfinance;

% modelo financeiro caotico de 4 variaveis
clc;

%% Numero de variaveis e condicoes iniciais:
nbvar=4;
xini=[1,2,0.5,0.5];

%% Time parameters:
trans=100;
tend=500;
tstep=0.01;

%% Intervalo (para o diagrama de bifurcacao como funcao de c):
% O mesmo código pode ser utilizado para a geracao dos demais
% parametros do sistema hipercaotico
c=1.5; % (valor padrao do parametro para o caos)
cmin=0;
cmax=2;
cint=0.001;
crange=[cmin cint cmax];

%% Tarefa:
bifurcation(xini,trans,tend,tstep,crange);

%=====
% Bifurcacao
%=====
function output=bifurcation(x0,trans,tend,tstep,range);
D=[]; % dados (diagrama de bifurcacao)
for c=range(1):range(2):range(3)
    fprintf('c=%g...\n',c);
    [t,x] = run(x0,trans,tend,tstep,c);
    for i=2:length(x(:,2))-1
        if((x(i,2)>x(i-1,2))&&(x(i,2)>x(i+1,2)))
            D=[D; c x(i,2)];
        end
    end
end
figure(3)
plot(D(:,1),D(:,2),'ro','MarkerEdgeColor','c','MarkerFaceColor','c','MarkerSize',1.5)
xlabel('c','fontsize',18);
ylabel('x','fontsize',18);

% =====
% Rodar
% =====
function [t,x]=run(x0,trans,tend,tstep,c)
ttrans = [0:tstep:trans];
tspan = [0:tstep:tend];
option = [];
if trans > 0
    [t x] = ode45(@dxdt,ttrans,x0,option,c);
    x0=x(end,:);
end
[t x] = ode45(@dxdt,tspan,x0,option,c);

```

```

% =====
% dxdt
% =====
function y = dxdt(t,x,c)

%%% parametros
a=0.9;
b=0.2;
%c=1.5; Variavel para simulacao, o mesmo podera ser feito para os demais
d=0.2;
k=0.17;

%%% equacoes
y = [
    x(3)+(x(2)-a)*x(1)+x(4);           % dx/dt
    1-b*x(2)-x(1)*x(1);               % dy/dt
    -x(1)-c*x(3);                     % dz/dt
    -d*x(1)*x(2)-k*x(4);              % du/dt
] ;

% fim do programa.

```


ANEXO 4: Código fonte para simulação da figura 3.9

```
Finance1=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-  
0.5*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');  
options = [];  
%options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);  
[t,xa]=ode45(Finance1,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);  
  
Finance2=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-  
1*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');  
options = [];  
%options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);  
[t,xb]=ode45(Finance2,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);  
  
Finance3=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-  
1.5*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');  
options = [];  
%options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);  
[t,xc]=ode45(Finance3,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);  
  
Finance4=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-  
2*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');  
options = [];  
%options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);  
[t,xd]=ode45(Finance4,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);  
  
subplot(2,2,1);  
plot(xa(:,1),xa(:,2));  
xlabel('X','fontsize',14);  
ylabel('Y','fontsize',14);  
  
subplot(2,2,2);  
plot(xb(:,1),xb(:,2));  
xlabel('X','fontsize',14);  
ylabel('Y','fontsize',14);  
  
subplot(2,2,3);  
plot(xc(:,1),xc(:,2));  
xlabel('X','fontsize',14);  
ylabel('Y','fontsize',14);  
  
subplot(2,2,4);  
plot(xd(:,1),xd(:,2));  
xlabel('X','fontsize',14);  
ylabel('Y','fontsize',14);  
  
% fim do programa.
```

ANEXO 5: Código fonte para simulação da figura 3.13

```
% Desvio do estado x(t) para duas condicoes iniciais proximas.

Finance=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-
1.5*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');
options = [];
[ta,xa]=ode45(Finance,[0 650],[1,2,0.5,0.5],options);

Finance2=inline(' [x(3)+(x(2)-0.9)*x(1)+x(4);1-0.2*x(2)-x(1)*x(1);-x(1)-
1.5*x(3);-0.2*x(1)*x(2)-0.17*x(4)] ', 't', 'x');
options = [];
[tb,xb]=ode45(Finance,[0 650],[1.5,2,0.5,0.5],options);

figure;
plot(xa(:,1));
hold on
plot(xb(:,1));

% fim do programa.
```

```
% Retrato de fase do sistema Lorenz.

Lorenz=inline('[10*(x(2)-x(1));28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);x(1)*x(2)-
(8/3)*x(3)]','t','x');
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Lorenz,[0 200],[15,20,30],options);
plot3(xa(:,3),xa(:,1),xa(:,2))

fsize=15;
title('Atrator de Lorenz','FontSize',fsize)
xlabel('z(t)','FontSize',fsize);
ylabel('y(t)','FontSize',fsize);
zlabel('x(t)','FontSize',fsize);

% fim do programa.
```

```
% Retrato de fase do sistema Lü.

Lu=inline('[36*(x(2)-x(1));20*x(2)-x(1)*x(3);x(1)*x(2)-3*x(3)]','t','x');
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Lu,[0 200],[15,20,30],options);
plot3(xa(:,3),xa(:,1),xa(:,2))

fsize=15;
title('O Atrator de L','FontSize',fsize)
xlabel('x(t)','FontSize',fsize);
ylabel('y(t)','FontSize',fsize);
zlabel('z(t)','FontSize',fsize);

% fim do programa.
```

```
% Retrato de fase do sistema Chen.

Chen=inline('[35*(x(2)-x(1));(28-35)*x(1)-x(1)*x(3)+28*x(2);x(1)*x(2)-3*x(3)]','t','x');
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xa]=ode45(Chen,[0 100],[15,20,30],options);
plot3(xa(:,3),xa(:,1),xa(:,2))

fsize=15;
title('The Chen Attractor','FontSize',fsize)
xlabel('x(t)','FontSize',fsize);
ylabel('y(t)','FontSize',fsize);
zlabel('z(t)','FontSize',fsize);

% fim do programa.
```

```

function [sys,x0,str,ts] = eco(t,x,u,flag)
% Simulacao de sincronizacao do sistema hipercaotico financeiro
    teta = [0.9; 0.2; 1.5; 0.2; 0.17];
    teta_est = [10; 10; 10; 10; 10];
    k_teta = 300;
    y2=0.001;
    yb=0.05;

switch flag,

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Inicializacao %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 0,
    sizes = simsizes;
    sizes.NumContStates = 13;
    sizes.NumDiscStates = 0;
    sizes.NumOutputs = 13;
    sizes.NumInputs = 0;
    sizes.DirFeedthrough = 0;
    sizes.NumSampleTimes = 1;
    sys = simsizes(sizes);
    x0 = [1; 2; 0.5; 0.5; -17; -15; 16.5; 14; 0; 0; 0; 0; 0];
    str=[];
    ts=[0 0];
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Derivadas %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 1,
    sys = [ Fm(t,x,u) + Gm(t,x,u)*teta;
           Fs(t,x,u) + Gs(t,x,u)*teta_est + delta_f(t,x,u) +
           controlador(t,x,u);
           -yb*(y2*norm(erro(t,x,u))*x(9:13)-(Gs(t,x,u)-
           Gm(t,x,u))'*k_teta*erro(t,x,u))];

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Saida %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 3,
    sys = [x(1);x(2);x(3);x(4);x(5);x(6);x(7); x(8); x(5)-x(1);x(6)-
x(2);x(7)-x(3); x(8)-x(4); norm(x(9:13), 'fro')];

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Encerra %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case {2,4,9},
    sys = [];

    otherwise
        error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]); %Fim manipulacao erro
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Fs = Fs(t,x,u)
    Fs = [x(7)+x(8)+x(5)*x(6); 1-x(5)*x(5); -x(5); 0];

```

```

function Fs = Fs(t,x,u)
    Fs = [x(7)+x(8)+x(5)*x(6); 1-x(5)*x(5); -x(5); 0];

function Gs = Gs(t,x,u)
    Gs = [x(5) 0 0 0 0;
          0 -x(6) 0 0 0;
          0 0 -x(7) 0 0;
          0 0 0 -x(5)*x(6) -x(8)];

function Gm = Gm(t,x,u)
    Gm = [x(1) 0 0 0 0;
          0 -x(2) 0 0 0;
          0 0 -x(3) 0 0;
          0 0 0 -x(1)*x(2) -x(4)];

function Fm = Fm(t,x,u)
    Fm = [x(3)+x(4)+x(1)*x(2); 1-x(1)*x(1); -x(1); 0];

function delta_f = delta_f(t,x,u)
    delta_f = [0; 0; 0; 0];
    % Demais disturbios considerados, a escolha do projetista
    %delta_f = [cos(2*t)*exp(-t); sin(t)*exp(-2*t); 2*cos(t)+2*sin(4*t);
               3*sin(t)];
    %delta_f = [8*sin(7*t)*x(2); 7*cos(9*t)*x(2);
               5*sin(t)+6*cos(3*t)*x(2);
               10*sin(3*t)*x(2)];

function controlador = controlador(t,x,u)
    k=1;
    lambda0 = 0.01;
    y1 = 1;
    A = [0.01 0 0 0; 0 0.01 0 0; 0 0 0.01 0; 0 0 0 0.01];
    P = [0.0001 0 0 0; 0 0.1 0 0; 0 0 0.05 0; 0 0 0 0.01];
    KK=P+P';
    lambdaMin = min(eig(KK));
    ur = - k*erro(t,x,u)/(lambdaMin*(norm(erro(t,x,u))+y1*exp(-
        lambda0*t)));
    controlador = -A*(x(5:8)-x(1:4))-(Fs(t,x,u)-Fm(t,x,u))+(Gs(t,x,u)-
        Gm(t,x,u))*x(9:13)+ur;

function erro = erro(t,x,u)
    erro=(x(5:8)-x(1:4));

% fim do programa.

```

```

fsz=22;
set(0,'DefaultAxesColorOrder',[0 0 0]);

%plotando os erros de sincroniza o
figure;
semilogx(tout, yout(:,9), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('e_{x}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,10), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('e_{y}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,11), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('e_{z}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,12), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('e_{w}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,13), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('Norma dos Par,metros Estimados', 'FontSize', fsz);

%plotando as sincroniza es
figure;
semilogx(tout, yout(:,1), '--', tout, yout(:,5), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsz);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsz);
ylabel('x_{m}(t), x_{s}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,2), '--', tout, yout(:,6), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsz);
xlabel('Tempo(s)', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', fsz);
ylabel('y_{m}(t), y_{s}(t)', 'FontSize', fsz);

figure;
semilogx(tout, yout(:,3), '--', tout, yout(:,7), 'LineWidth', 3 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsz);

```

```
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('z_{m}(t), z_{s}(t)', 'FontSize', fsize);

figure;
semilogx(tout, yout(:,4), '--', tout, yout(:,8), 'LineWidth', 3 );
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsize);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('w_{m}(t), w_{s}(t)', 'FontSize', fsize);

% fim do programa.
```

```

function [sys,x0,str,ts] = hossenial(t,x,u,flag)
% Simulacao da sincronizacao do sistema caotico unificado
  alfa = 1;      %parametros do sistema caotico unificado
  beta = 1;
  Aalfa = [ (-25*alfa-10) (25*alfa+10) 0 ; (28-35*alfa) (29*alfa-1) 0 ; 0
            0 -(8+alfa)/3 ];
  Abeta = [ (-25*beta-10) (25*beta+10) 0 ; (28-35*beta) (29*beta-1) 0 ; 0
            0 -(8+beta)/3 ];
  B = [-25 25 0;-35 29 0;0 0 -1/3];
  P = [0.0001 0 0;0 10 0;0 0 5];
  K=P+P';
  y2=20;
  yb=0.05;

switch flag,

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Inicializacao %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 0,
    sizes = simsizes;
    sizes.NumContStates = 7;
    sizes.NumDiscStates = 0;
    sizes.NumOutputs = 10;
    sizes.NumInputs = 0;
    sizes.DirFeedthrough = 0;
    sizes.NumSampleTimes = 1;
    sys = simsizes(sizes);
    x0 = [1.5 2 5 4 8 3 0];
    str=[];
    ts=[0 0];
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Derivadas %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 1,
    sys = [Aalfa*x(1:3)+Fm(t,x,u);
          Abeta*x(4:6)+Fs(t,x,u)+delta_f(t,x,u)+controlador(t,x,u);
          -yb*(y2*x(7)*norm(erro(t,x,u))-erro(t,x,u))*K*B*x(4:6)];

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Saidas %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case 3,
    sys = [x(1);x(2);x(3);x(4);x(5);x(6);x(7);(x(4)-x(1));(x(5)-x(2));(x(6)-
          x(3))];

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    % Encerra %
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
case {2,4,9},
    sys = [];

    otherwise
        error(['unhandled flag = ',num2str(flag)]); %fim manipulacao erros
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Fs = Fs(~,x,~)
    Fs = [0; -x(4)*x(6); x(4)*x(5)];

function Fm = Fm(~,x,~)
    Fm = [0; -x(1)*x(3); x(1)*x(2)];

function delta_f = delta_f(t,x,~)
    delta_f = [3*sin(t)*sqrt(x(4)^2 + x(5)^2 + x(6)^2);3*sin(2*t);sin(t)];

function controlador = controlador(t,x,u)
    k=1;
    alfa = 1; %Escolhendo o sistema ser tipo Chen
    B = [-25 25 0;-35 29 0;0 0 -1/3];
    C = [25 -25 0;35 -29 0;0 0 1/3];
    lambda0 = 0.001;
    Aalfa = [ (-25*alfa-10) (25*alfa+10) 0 ; (28-35*alfa) (29*alfa-1) 0 ; 0
              0 -(8+alfa)/3 ];

    y1 = 1;
    L=[0.1 0 0; 0 100 0; 0 0 5];
    P = [0.0001 0 0;0 10 0;0 0 5];
    K=P+P';
    lambdaMin = min(eig(K));
    ur = - k*erro(t,x,u)/(lambdaMin*[norm(erro(t,x,u))+y1*exp(-
        lambda0*t)]);
    controlador = -(x(7)*B*x(4:6)+alfa*C*x(4:6)+[0; -x(4)*x(6); x(4)*x(5)]-
[0; -x(1)*x(3); x(1)*x(2)]-ur+Aalfa*erro(t,x,u)+L*erro(t,x,u));%

function erro = erro(~,x,~)
    erro=x(4:6)-x(1:3);

% fim do programa.

```

```

fsz=22;
set(0,'DefaultAxesColorOrder',[0 0 0]);

%plotando os erros de sincroniza o
figure;
semilogx(tout, yout(:,8), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('e_{1}(t)', 'FontSize', fsize);

figure;
semilogx(tout, yout(:,9), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('e_{2}(t)', 'FontSize', fsize);

figure;
semilogx(tout, yout(:,10), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('e_{3}(t)', 'FontSize', fsize);

%plotando as sincroniza es
figure;
semilogx(tout, yout(:,1), '--', tout, yout(:,4), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsize);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('x_{m1}(t), x_{s1}(t)', 'FontSize', fsize);

figure;
semilogx(tout, yout(:,2), '--', tout, yout(:,5), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsize);
xlabel('Tempo(s)', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', fsize);
ylabel('x_{m2}(t), x_{s2}(t)', 'FontSize', fsize);

figure;
semilogx(tout, yout(:,3), '--', tout, yout(:,6), 'LineWidth', 2 );
set(0,'DefaultAxesFontSize', 17);
h=legend('mestre', 'escravo');
set(h, 'FontSize', fsize);
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize', fsize);
ylabel('x_{m3}(t), x_{s3}(t)', 'FontSize', fsize);

% fim do programa.

```