

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE FENÔMENOS DE TRANSPORTE DO ESCOAMENTO DE SANGUE NA MICROCIRCULAÇÃO

Por,

Gesse A. Roure Neto

Brasília, 23 de dezembro de 2015

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE DE FENÔMENOS DE TRANSPORTE DO ESCOAMENTO DE SANGUE NA MICROCIRCULAÇÃO

Por,

Gesse A. Roure Neto

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha (Orientador) _____

Prof. Yuri Dumaresq Sobral _____

Prof. Éder Lima de Albuquerque _____

Brasília 23 de dezembro de 2015

Resumo

A camada livre de células sanguíneas escoando adjacente à parede de micro-vasos na micro-circulação é de vital importância no transporte de glóbulos vermelhos saturados de oxigênio para tecidos não saturados. O presente projeto propõe-se a examinar esse escoamento considerando o fluido adjacente à parede como plasma sanguíneo e no núcleo do micro-vaso (plasma) um líquido modelado tanto usando modelos Newtonianos de viscosidade conhecida até não-Newtoniano de viscosidades aparente e efetivas. A viscosidade intrínseca ou efetiva pode ser calculada teoricamente como uma função do diâmetro adimensional do vaso em concordância com observações experimentais. O modelo teórico sugere que em suspensões como o sangue, a viscosidade aparente pode ser reduzida pela distribuição não-uniforme de células. Então, a formação da camada de plasma é explicada em termos do balanço de dois mecanismos de transporte: uma convecção devido a interação parede do vaso-célula e o efeito de difusão hidrodinâmica das partículas. De acordo com o modelo proposto, as células podem ser transportadas respectivamente para dentro e para fora do centro da região do microvaso. Uma emulsão em alta razão de viscosidade é usada para calcular a difusividade e a velocidade de migração de partículas. Soluções assintóticas serão usadas para calcular a espessura da camada de plasma adjacente e a distribuição de fração volumétrica como função do tempo, da distância entre a parede do micro-vaso, da fração volumétrica dos glóbulos vermelhos (hematócrito típico), do número de Péclet, do número de capilaridade e da razão de viscosidade das fases dispersa-contínua. Os resultados indicam que existe um decréscimo da espessura da camada de plasma adjacente com os números de Péclet e de Capilaridade. Em adição, descreve-se um camada limite associada a gradientes de concentração de partículas que se formam nas vizinhanças da parede do micro-vaso. Uma possível aplicação do trabalho proposto seria usar os resultados do mesmo para diagnosticar doenças com base em mudanças na viscosidade intrínseca fora dos padrões fisiológicos devido possíveis anomalias no sangue como anemia falciforme e câncer de medula. Também foi feito um estudo sobre a relação entre o formato da célula e a sua energia de flexão, com a motivação de verificar que formatos bicôncavos minimizam a energia de flexão para geometrias de mesmos volumes, áreas e propriedades mecânicas.

Palavras-chaves: hemácias. migração. difusão hidrodinâmica.

Abstract

There is a cell-depleted layer adjacent to microvessel walls and it is of vital importance in the transport of oxygen-saturated red cells to the unsaturated tissues. Firstly, we examine the core flow solution with the inner fluid being a non-Newtonian fluid facing a small annular gap of Newtonian plasma. An intrinsic viscosity of the blood is predicted theoretically as a function of the dimensionless vessel diameter, in agreement with previous experimental studies. The theoretical model suggests that in suspension flows like blood the apparent viscosity may be much reduced by the nonuniform distribution of cells. Secondly, the mechanism which leads to the depleted layer formation is explained in terms of a balance between two transport mechanisms: the wall drift velocity and the particle hydrodynamic diffusion. According to our model the cells can be transported respectively inwards and outwards of the core region of the microvessel. A high viscosity ratio emulsion is used to calculate the hydrodynamic diffusivity and the wall drift velocity. A similarity solution is used to calculate the thickness of the cell-depleted layer and the cell volume fraction distribution as a function of time, the distance from the microvessel wall, the volume fraction of red cells (typical hematocrit), Peclet number, capillarity number and viscosity ratio of the disperse-continuous phases. The results indicate a decreasing of the cell-depleted layer thickness with Peclet and Capillarity numbers. We also describe a concentration boundary layer in order to explain the observed phenomenon. A possible application of this work could be in illness diagnosis by evaluating of changes in the intrinsic viscosity due to blood abnormalities.

Key-words: red cells, blood, depleted layer, drift velocity, hydrodynamic diffusion

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu professor orientador Francisco Ricardo da Cunha por ter me aceitado como aluno de projeto de graduação, e por ter caminhado comigo neste último ano como professor e orientador. Pelas discussões e debates muito construtivos, por todas as puxadas de orelha que muito me ajudam como pessoa.

Agradeço ao professor Yuri Dumaesq Sobral, que colaborou intensamente em uma das partes do projeto como co-orientador, sempre muito prestativo e atencioso na hora de ajudar com meus algoritmos e códigos, além de todas as conversas e discussões que tivemos. Agradeço também a colaboração do professor Stephen Cowley (DAMTP - Cambridge), que além de ter a paciência de me ensinar métodos de perturbação em uma tarde em um momento que eu não me encontrava muito bem da cabeça, foi um grande colaborador no projeto, responsável pela formulação assintótica do problema de difusão de gotas em regime de pequenos tempos.

Agradeço também meu orientador de iniciação científica e professor Gustavo Coelho Abade. O professor Gustavo Abade foi grande responsável pela minha formação acadêmica, além de despertar o grande interesse que tenho em reologia e mecânica estatística e ter me acompanhado por 1 ano de projeto de iniciação científica, talvez o ano em que mais aprendi coisas novas. Agradeço a sua paciência e dedicação comigo, apesar da minha falta de foco na época, pois sem estas eu nunca teria chegado neste ponto em que estou agora.

Por fim, agradeço à estrutura e aos professores do grupo Vortex, o qual me proporcionou um bom ambiente de estudo e pesquisa nos últimos três anos. Agradeço também aos professores do grupo Roberto Miserda, José Luiz Fontoura e Rafael Gabler pelas disciplinas ministradas por estes.

Este trabalho é dedicado ao meu tio Luiz Ulpiano, que faleceu no mês de setembro deste ano de 2015.

Lista de Figuras

Figura 1 – Balanço de Forças em um tetraedro	13
Figura 2 – Células em formato de paraboloides em tubo com seção circular perturbada harmonicamente	25
Figura 3 – Dimensões do modelo de células enfileiradas	26
Figura 4 – Curva de curvatura constante em uma superfície plana	35
Figura 5 – Modelo unidirecional de membrana (POZRIKIDIS, 2003)	39
Figura 6 – Tensões superficiais, esforços cortantes e momentos fletores em um problema de membrana (POZRIKIDIS, 2003)	41
Figura 7 – Conexão entre nós utilizando a parametrização	48
Figura 8 – Primeiro elemento da malha orientado	49
Figura 9 – Elementos vizinhos orientados com base no primeiro	50
Figura 10 – Elementos de malha triangulares divididos em quadriláteros	51
Figura 11 – Mapeamento para a quadratura de Gauss	52
Figura 12 – Fluxo difusivo através de uma superfície	54
Figura 13 – Difusão x Migração	61
Figura 14 – Quebra de simetria após a interação entre duas gotas (CARVALHO, 2008)	62
Figura 15 – Difusividades Hidrodinâmicas	63
Figura 16 – Migração de gotas e formação da zona de depleção de gotas	64
Figura 17 – Perfil de concentração de gotas para diferentes capilaridades em regime de cisalhamento simples após a região de depleção	68
Figura 18 – Esquema do escoamento do sangue em microvasos na escala contínua. R_C indica o raio de Casson, dentro do qual o fluido se comporta como um corpo rígido, efeito este causado pela agregação de células. R é o raio do vaso e R_δ é o raio que limita a divisão entre o fluido de Casson e o fluido Newtoniano	81
Figura 19 – Efeito de Fahraeus-Lindqvist previsto pelo código	85
Figura 20 – Efeito da rugosidade do vaso sobre a viscosidade efetiva	85
Figura 21 – Cálculo do efeito de Fahraeus-Lindqvist utilizando os métodos analíticos propostos	86

Figura 22 – Resultado experimental para o efeito de Fahraeus-Lindqvist (NICHOLS; O’ROURKE; VLACHOPOULOS, 2011)	87
Figura 23 – Ajuste dos modelos analíticos para encontrar valores mais próximos aos reais	87
Figura 24 – Frequências das curvaturas médias calculadas na esfera	88
Figura 25 –	89
Figura 26 – Modelo de agregação de hemácias pela distância entre células	90
Figura 27 – Viscosidade efetiva em função da concentração no caso de células cilíndricas	91
Figura 28 – Viscosidade efetiva em função da concentração no caso de células em formato de parabolóide	92
Figura 29 – Viscosidade efetiva em função da concentração (BASKURT; MEISELMAN et al., 2003)	92

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais utilizados no estudo do movimento células na microcirculação. Valores correspondentes a eritrócitos fisiologicamente normais.	3
---	---

Lista de símbolos

a	Raio de uma partícula
C	Distribuição estatística de massa por unidade de volume
D_0	Difusividade Browniana ou escala de difusividade
D	Difusividade escalar
\mathbf{D}	Tensor Difusividade e Tensor Taxa de Deformação
\mathbf{F}	Força Browniana
G	Valor absoluto do gradiente de pressão
L	Comprimento do vaso
\mathbf{L}	Ruído Browniano
m	Massa
x,y,z	Coordenadas cartesianas
r	Cordenada polar de raio
R	Raio do vaso ou tubo
R_0	Raio médio do vaso ou tubo
R_C	Raio da seção transversal da célula e Raio de Casson
R_δ	Espessura do escoamento de núcleo
$\hat{\mathbf{n}}$	Vetor normal
\mathbf{u}	Campo de velocidades
u	Componentes em z do campo de velocidades
g_{ij}	Componentes do tensor métrico
Q	Vazão volumétrica

Pe	Número de Peclet
Re	Número de Reynolds
Re_w	Número de Reynolds considerando escoamento de água
ΔY	Desvio da linha de corrente de uma partícula após colisão
K_B	Constante de Boltzmann
S	Stresslet das partículas ou gotas
∇	Operador gradiente
α	Amplitude de rugosidade no vaso
γ	Mobilidade de Einstein específica
$\dot{\gamma}$	Taxa de cisalhamento
Γ	Amplitude do ruído Browniano
Γ_{ij}^k	Símbolos de Christoffel de segunda espécie
δ	Espessura da “depleted layer” ou função delta de Dirac
Δ	Variação
ζ	Mobilidade de Stokes-Einstein
η	Viscosidade dependente da taxa de cisalhamento
θ	Coordenada polar de ângulo
λ	Razão de viscosidades e raio adimensional do núcleo do escoamento
μ	Viscosidade constante
μ_p	Viscosidade do plasma
μ_w	Viscosidade da água
π	Número pi
σ	Tensor de tensões
ρ	Massa específica
ρ_w	Massa específica da água
Σ	Contribuição do tensor de tensões devido à suspensões de partículas rígidas ou gotas

Σ	Somatório
τ_0	Tensão necessária para fazer um fluido escoar (“Yield stress”)
τ_s	Tensão superficial
ϕ	Fração volumétrica de partículas
Ω	Termo adimensional relacionado ao “yield stress”
\mathcal{F}	Fluxo difusivo
$\langle \rangle$	Média de ensemble de uma propriedade

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Revisão Bibliográfica	1
1.3	Análise Dimensional do Problema	3
1.4	Objetivos	4
1.5	Apresentação do Trabalho	5
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	6
2.1	Hipótese do Contínuo	6
2.2	Descrições Lagrangeana e Euleriana	6
2.2.1	Descrição Material ou Lagrangeana	6
2.2.2	Descrição Espacial ou Euleriana	7
2.3	Cinemática de um Meio Contínuo	7
2.3.1	Cinemática de uma partícula material	7
2.3.2	Deformação de um arco material infinitesimal	8
2.4	Teorema da Localização	9
2.5	Teorema Transporte de Reynolds	9
2.5.1	Propriedades de um corpo contínuo \mathcal{B}	9
2.5.2	Deformação de um volume infinitesimal	10
2.5.3	Derivada material do Jacobiano	11
2.5.4	Teorema Transporte de Reynolds	11
2.6	Balanco de Massa	12
2.7	Teorema de Cauchy e a Existência do Tensor de Tensões	13
2.8	Balanco de Momento Linear	14
2.9	Balanco de Momento Angular	15
2.10	Balanco de Energia	16
2.11	Geração de Entropia	19
2.12	Tensor de Tensões e Formalismo Constitutivo	20
2.12.1	Compatibilidade com as equações de momento angular e de geração de entropia	20

2.12.2	Princípio da causalidade	21
2.12.3	Princípio da ação local	21
2.12.4	Invariância de coordenadas	21
2.12.5	“Fadding memory”	21
2.12.6	Princípio da indiferença material	22
2.12.7	Equações de Navier-Stokes	22
2.13	Equação de Stokes	23
3	ESCOAMENTO DE SANGUE EM VASOS CAPILARES UTILIZANDO O MODELO DE CÉLULAS ENFILEIRADAS	25
3.1	Modelo de Células Enfileiradas	25
3.2	Equação Governante e Condições de Contorno	26
3.3	Transformação de Galileu	27
3.4	Solução da Equação	28
3.5	Queda de Pressão	29
3.6	Viscosidade efetiva	29
3.7	Adimensionalização dos Parâmetros e Cálculo da Viscosidade Efetiva	30
4	ESTUDO DE MEMBRANAS	32
4.1	Fundamentos Geométricos	32
4.1.1	Triedro de Frenet	32
4.1.2	Cálculo da Curvatura	33
4.1.3	Tensor Métrico	34
4.1.3.1	Determinante do Tensor Métrico	34
4.1.4	Curvatura de Superfícies	35
4.1.4.1	Curvatura de uma curva em uma superfície	36
4.1.4.2	Curvatura normal de uma superfície	36
4.1.4.3	Curvaturas principais, curvatura média e curvatura Gaussiana	37
4.1.4.4	Formulação em tensores cartesianos	37
4.2	Teoria de Membranas	38
4.3	Membrana Unidirecional	39
4.4	Membranas Bidimensionais	40
4.5	Formatos Cilíndricos	41
4.6	Balço de Forças e Torques na Interface da Membrana	42
4.7	Equação Constitutiva Isotrópica Para o Tensor de Tensões Superficiais	43
4.8	Relação Tensão-Deformação de Superfícies	44
4.8.1	Deformação de Superfície e Momentos Fletores	46
4.8.2	Energia de flexão	47
4.9	Cálculo Numérico da Energia de Flexão em uma Membrana	48
4.9.1	Geração dos Pontos de Malha e das Conexões Entre os Nós	48
4.9.2	Geração e Orientação dos Elementos	49

4.9.3	Cálculo das Curvaturas Pelo Método do Ajuste	49
4.9.4	Integral Numérica da Curvatura ao Quadrado na Superfície	51
	5 DIFUSÃO HIDRODINÂMICA	54
5.1	Difusão e Difusão Hidrodinâmica	54
5.2	Mecanismos de Transporte por Difusão	55
5.2.1	Equação Governante	55
5.2.2	Equação Constitutiva Para o Fluxo Difusivo	56
5.2.3	Difusividade	56
5.3	Movimento Browniano	58
5.3.1	Equação de Langevin	58
5.3.2	Conexão com a Equação da Difusão	59
5.4	Difusão Hidrodinâmica	60
5.4.1	Difusão x Migração	60
5.4.2	Fluxo Difusivo	61
5.4.3	Difusividade Hidrodinâmica	61
5.5	Importância da Difusão Hidrodinâmica no escoamento de Sangue em Microvasos	64
5.6	Modelo Para Migração de Gotas de uma Emulsão em Cisalhamento	64
5.6.1	Equação Governante	65
5.6.2	Adimensionalização da Equação e Definição dos Parâmetros	66
5.6.3	Solução assintótica para grandes tempos em regiões próximas à parede	67
	6 SOLUÇÃO ASSINTÓTICA PARA PEQUENOS TEMPOS	69
6.1	Equação Governante	69
6.2	Primeiro Limite Assintótico	70
6.3	Segundo Limite Assintótico e o Aumento da Concentração de Gotas	72
6.4	Estudo Assintótico da Camada Ultra-Fina e “Matching” Assintótico	72
	7 MODELAGEM CONTÍNUA DO ESCOAMENTO DE SANGUE EM MICROVASOS	77
7.1	Modelo Contínuo	77
7.2	Fluidos Não-Newtonianos	78
7.3	Fluidos Newtonianos Generalizados	78
7.3.1	Fluidos de Ostwald, ou “Power-Law”	78
7.3.2	Modelo de Bingham	79
7.3.3	Fluido de Casson	79
7.4	Modelagem do Escoamento do Sangue Como Fluido de Casson	80
7.4.1	Modelagem do Problema	80
7.4.2	Equação Governante e Condições de Contorno	81
7.4.3	Solução do Problema	82
7.4.4	Adimensionalização da Equação da Vazão	83

7.4.5	Viscosidade do Sangue	84
7.4.6	Método Numérico Para o Cálculo da Viscosidade Efetiva	84
7.5	Efeito de Fahraeus-Lindqvist	84
7.6	Efeito da Rugosidade da Parede na Viscosidade Efetiva	85
	8 RESULTADOS	86
8.1	Efeito de Fahraeus-Lindqvist	86
8.2	Cálculo da Curvatura	88
8.3	Integral para a Energia de Flexão	88
8.3.1	Esfera	89
8.3.2	Elipsoide	89
8.3.3	Hemácia	89
8.4	Estudo do Efeito da Agregação de Hemácias Utilizando o Modelo de Células Enfileiradas	90
8.5	Solução Assintótica do Problema da Camada de Depleção de Gotas	93
	9 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	94
9.1	Trabalhos Futuros	95
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICES	99
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES EM COORDE- NADAS CILÍNDRICAS	100
A.1	Coordenadas Cilíndricas	100
A.2	Adendo Matemático: Formalismo Covariante e Contravariante	100
A.2.1	Tensor métrico	100
A.2.1.1	Componentes covariantes e contravariantes	101
A.2.2	Derivada Covariante	102
A.2.3	Símbolos de Christoffel	103
A.3	Equação Governante em coordenadas Cilíndricas	103
A.3.1	Vetores de Base	103
A.3.2	Tensor Métrico e Símbolos de Christoffel para Coordenadas Cilíndricas	104
A.3.3	Ligeira mudança de notação	104
A.3.4	Equação de Navier-Stokes	105
A.3.5	Termo Advectivo	105
A.3.6	Laplaciano de um Vetor	106
A.3.7	Equação de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas	107

APÊNDICE B – CÁLCULO DO TENSOR DE TENSÕES EFETIVO EM SUSPENSÕES E EMULSÕES	109
---	------------

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

O estudo da mecânica do sangue na microcirculação é importante para entender como a mudança de fatores fisiológicos causados por doenças e outras anormalidades que podem afetar as propriedades reológicas do sangue. Atualmente, muitos trabalhos são feitos no ramo de hemodinâmica com objetivo de relacionar alterações no movimento do sangue com certas doenças. Além disso, o estudo do sangue é uma área interdisciplinar, que envolve mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos, métodos numéricos, mecânica estatística, química, biomedicina e outros ramos.

1.2 Revisão Bibliográfica

O sangue pode ser definido como uma suspensão de células em plasma Newtoniano, e exibe comportamento não Newtoniano e uma reologia que pode ser afetada por vários fatores, assim como outras variedades de suspensões. Algumas doenças alteram diretamente as propriedades reológicas do sangue, como a diabetes, anemia falciforme, malária e alguns tipos de câncer. Deste modo, o sangue constitui um interessante objeto de estudo, à medida que permite relacionar mudanças no comportamento de escoamento do sangue à determinadas patologias. O estudo da microcirculação, que consiste nos vasos com diâmetros inferiores a 0,3 mm, é de extrema importância, pois 80 % da queda de pressão entre a aorta e a veia cava ocorre nesta (SUNG et al., 1982), onde os efeitos não-contínuos, associados ao tamanho finito das células, tornam-se de grande importância no escoamento do sangue.

O plasma sanguíneo é um fluido newtoniano amarelado cuja maior parte é composta por água. Por este motivo, este líquido possui densidade $\rho \ 10^3 \text{Kg}/\text{m}^3$ e viscosidade $\mu \ 10^{-3} \text{Ns}/\text{m}$ aproximadamente iguais às da água, podendo variar suas propriedades no caso de algumas doenças (KLINGEL et al., 2000).

As principais células que compõem o sangue são denominadas “sanguíneas” e são classificadas em três tipos: eritrócitos, leucócitos e plaquetas. Os eritrócitos, também conhecidos como glóbulos vermelhos, são os responsáveis pelo transporte de oxigênio pelo

corpo. Estes se apresentam em maior escala que as demais células sanguíneas, correspondendo a cerca de 40 % a 45 % do volume total do sangue de um ser humano saudável. Os leucócitos, ou glóbulos brancos, têm como função combater infecções no organismo. As plaquetas contribuem na coagulação do sangue e na vedação de regiões rompidas nos vasos. A soma de leucócitos e as plaquetas corresponde à menos de 1 % do volume total do sangue; desta forma, pode-se ver que os eritrócitos são as células mais relevantes na determinação da reologia do sangue (SKALAK; OZKAYA; SKALAK, 1989). A fração volumétrica do sangue ocupada pelos eritrócitos é denominada hematócrito.

Os glóbulos vermelhos, em um estado de não deformação, ou seja, na ausência de um escoamento, exibem formato de disco bicôncavo com diâmetro entre $7 \mu m$ e $8 \mu m$, espessura de aproximadamente $2,5 \mu m$ na borda e $1 \mu m$ no centro e volume de, aproximadamente $90 \mu m^3$. Este tipo de célula é formada por uma membrana fina e flexível contendo o citoplasma: uma solução aquosa de hemoglobina, que se comporta como um fluido não-newtoniano de viscosidade maior que a do plasma $\mu_B = 10^{-2} N s/m$. Este fluido citoplasmático é incompressível; ou seja, um elemento material diferencial da membrana mantém a área da superfície original. A membrana de um eritrócito é formada por uma dupla camada de lipídeos e uma rede de proteínas (citoesqueleto), tal formação confere à membrana propriedades viscosas e elásticas. O caráter viscoso da membrana é caracterizado por uma viscosidade de membrana μ_m , e sua elasticidade caracterizada pelo módulo de dilatação $E_D = 0.5 N/m$, módulo elástico de cisalhamento $E_S = 6 \times 10^{-6} N/m$ e momento fletor $M_B = 2 \times 10^{-19} Nm$.

Existem 5 tipos diferentes de vasos sanguíneos no sistema circulatório humano: artérias, arteríolas, veias, vênulas e capilares. Veias e artérias possuem os maiores diâmetros, sendo relacionadas à macrocirculação, enquanto arteríolas, vênulas e capilares são relacionados à microcirculação, onde vênulas e arteríolas possuem diâmetro aproximado de $100 \mu m$, e o diâmetro dos capilares equivale à escala dos eritrócitos, podendo ser menores que os mesmos. Devido à diferença entre as escalas dentro da microcirculação, é adequado considerar duas abordagens distintas: uma abordagem para o estudo de capilares, estudando os glóbulos vermelhos como corpos isolados em movimento no fluido newtoniano; e uma abordagem contínua para o estudo de vênulas e arteríolas, onde a mistura de plasma e eritrócitos é considerada como um fluido não newtoniano contínuo equivalente. Além disso, é relevante considerar os efeitos não-lineares decorrentes da dimensão finita das células no sangue, como a camada de plasma sem eritrócitos próxima às paredes dos vasos, formada devido ao mecanismo de difusão hidrodinâmica (CUNHA; HINCH, 1996) e ao fenômeno de migração das células (SMART; JR, 1991), que gera variações na viscosidade efetiva do fluido.

1.3 Análise Dimensional do Problema

Para o estudo do sangue como um fluido equivalente, é necessário garantir a hipótese de que as partículas são livres de inércia. Para tal, é necessário identificar os parâmetros físicos do problema para mostrar que o número de Reynolds das partículas é baixo. Os parâmetros usados são: o gradiente de pressão fisiológico é aproximadamente $\Delta p = 60$ mmHg por $l = 1$ cm, o plasma possui aproximadamente as mesmas massa específica e viscosidade da água ($\rho \approx 1000$ Kg/m³ e $\mu_p \approx 0.001$ Pa s). Pela lei de Poiseuille, é possível estimar a taxa de cisalhamento local em um vaso de raio $R = 100$ μ m, tal que $\dot{\gamma} = R\Delta p/(8\mu_p l) \approx 10^4$ s⁻¹. Na escala da partícula, considerando o comprimento característico das hemácias $a = 5$ μ m, tem-se que o número de Reynolds pode ser calculado por $Re = \rho\dot{\gamma}a^2/\mu_p \approx 0.1$. Este resultado mostra que as forças viscosas dominam o escoamento na escala das partículas, fazendo que a força de inércia nestas seja desprezível.

Para o estudo apropriado do escoamento de sangue, é necessário entender os parâmetros físicos que governam a dinâmica do problema no contexto do sangue. A tabela abaixo mostra os parâmetros adimensionais relacionados com o movimento das células em microvasos:

Parâmetro Adimensional	Significado Físico	Valor
Razão de Viscosidade de Membrana $\lambda_m = \frac{\mu_m}{\mu}$	Importância Relativa da Viscosidade de Membrana	≈ 300
Razão de Viscosidade do Citoplasma $\lambda_c = \frac{\mu_c}{\mu}$	Importância relativa do Escoamento do Citoplasma	≈ 10
Parâmetro de Capilaridade Elástica $Ca_S = \frac{\mu\dot{\gamma}a}{E_S}$	Razão entre tensões viscosas e elásticas	≈ 0.5
Parâmetro de Flexão $C_B = \frac{\mu\dot{\gamma}a^3}{M_B}$	Razão entre tensões viscosas e de flexão	≈ 100
Parâmetro de Dilatação $C_D = \frac{\mu\dot{\gamma}a}{E_D}$	Razão entre tensões viscosas e dilatação	$\approx 10^{-5}$

Tabela 1 – Parâmetros adimensionais utilizados no estudo do movimento células na microcirculação. Valores correspondentes a eritrócitos fisiologicamente normais.

Várias conclusões importantes podem ser retiradas dos parâmetros adimensionais mostrados na tabela acima. Como o valor de C_D é muito baixo, isto indica que as tensões viscosas são muito pequenas para dilatar o a membrana de uma hemácia; ou seja, a superfície de uma célula de glóbulo vermelho é praticamente constante, como esperado. O fato da viscosidade do citoplasma ser muito inferior à da membrana indica que a viscosidade de membrana domina a do citoplasma. Portanto, a circulação interna do citoplasma dentro da membrana é mascarada pela viscosidade de membrana e tem pouco

efeito no movimento da célula. Esta propriedade também é uma motivação para o estudo de células como gotas de alta razão de viscosidade, como é feito neste trabalho.

O parâmetro de flexão é alto, o que sugere que os esforços de flexão não devem ter muita importância. Porém, a estimativa de um parâmetro de flexão deveria ser feita a partir do raio de curvatura da célula, e não apenas do seu raio. Isto ocorre pois em uma hemácia, os raios de curvatura podem ser muito maiores que o raio característico da célula, fazendo que uma estimativa de parâmetro de flexão baseada apenas no raio característico não represente corretamente a importância dos esforços de flexão. Para corrigir este problema, redefine-se o parâmetro de flexão, fazendo $C_B = \mu_p \dot{\gamma} / M_B \kappa^3$. Para uma hemácia deformada, este parâmetro é $O(1)$, indicando que os esforços de flexão são importantes. Em resumo, esta análise dimensional mostra que eritrócitos possuem área constante e são sensíveis a três principais parâmetros: a viscosidade de membrana, o parâmetro de capilaridade elástica e o parâmetro de flexão.

1.4 Objetivos

Este projeto tem como objetivo principal o estudo do escoamento do sangue na microcirculação em diferentes escalas. Alguns pontos importantes que o projeto deseja cobrir são:

- Verificar que modelo do sangue como fluido newtoniano generalizado é consistente na captura da redução da viscosidade intrínseca aparente bem como a concordância com resultados experimentais padrões ao menos do ponto de vista qualitativo.
- Comprovar, a partir dos modelos explorados que a presença de uma camada de plasma livre de células adjacente a parede do vaso contribui para a redução do arrasto em vasos da ordem micrométrica, diminuindo o intenso esforço necessário do coração no bombeamento do sangue em redes de arteríolas presentes na microcirculação.
- Verificar que micro-vasos com paredes irregulares proporcionam uma diminuição do fluxo sanguíneo, potencializando a formação de trombos.
- Obter expressões para a predição teórica da viscosidade aparente intrínseca considerando os diferentes formatos de célula.
- Mostrar o efeito de Fahraeus-Lindqvist inverso. Este é caracterizado pelo aumento da viscosidade aparente intrínseca do sangue à medida que o diâmetro do tubo diminui até atingir um mínimo (escala na qual o diâmetro do vaso e da célula são da mesma ordem de magnitude).
- Verificar como a redução do espaçamento entre as células (i.e. simular com primeira aproximação efeito da agregação de células) afeta a viscosidade intrínseca do sangue.

Esse resultado seria relevante, tendo em vista que algumas anormalidades fisiológicas do sangue induzem a formação de agregados de hemácias, podendo produzir inclusive um efeito tampão do movimento do sangue na microcirculação.

- Verificar a importância da região de depleção de células no escoamento em vasos capilares, e sua importância acima do formato das células na alteração da resistência do escoamento.
- Entender a questão de mínima energia envolvida na flexão de células bicôncavas por meio dos ovais de Cassini.
- Modelagem e interpretação dos potenciais mecanismos responsáveis pela formação da camada adjacente de células como a convecção associada com migração transversal e longitudinal induzida por cisalhamento e a auto-difusão devido à interação das células.

1.5 Apresentação do Trabalho

O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica sobre a qual o trabalho é baseado. O terceiro capítulo apresenta o modelo de células enfileiradas e os procedimentos para encontrar a viscosidade efetiva neste regime considerado. O quarto capítulo apresenta uma introdução ao estudo de membranas e introduz o problema da energia de flexão estudado neste trabalho. O quinto capítulo fala sobre mecanismos de difusão e os difere do fenômeno de difusão hidrodinâmica, que é um mecanismo fundamental para explicar a formação da camada de plasma newtoniano livre de glóbulos vermelhos próxima à parede dos vasos. Neste capítulo é apresentada uma solução assintótica para um problema de dispersão e migração de gotas com alta razão de viscosidade em cisalhamento simples, analisando a formação da camada livre de gotas. No sexto capítulo desenvolve-se a solução assintótica em regime de pequenos tempos para o problema introduzido no capítulo 5. No capítulo 7 é apresentada uma modelagem do escoamento de sangue nas maiores escalas da microcirculação, onde o mesmo possui comportamento de um fluido não-newtoniano equivalente. Nesta seção são discutidos modelos de fluidos não newtonianos que poderiam ser utilizados para modelar o sangue e é feita uma modelagem do problema utilizando fluidos imiscíveis, com um núcleo de Casson e a camada de plasma newtoniano próxima à parede. O capítulo 9 apresenta os resultados e discussões advindas dos capítulos anteriores.

2 Fundamentos Teóricos

2.1 Hipótese do Contínuo

A hipótese do contínuo no contexto físico consiste na possibilidade de descrever propriedades físicas como funções contínuas dos pontos do espaço. Dada a natureza molecular da matéria, tal hipótese parece a princípio um pouco forçada para ser definida rigorosamente; porém, a validade desta ideia depende apenas da escala do problema e de como se define um contínuo. Para isto considera-se a hipótese do ponto material, a qual sugere que cada ponto do domínio contínuo é grande o suficiente para conter a quantidade de moléculas necessária para se obter uma média confiável de certa propriedade e pequeno o suficiente para ser considerado um ponto do espaço, ou a vizinhança ε de um ponto, rigorosamente falando. Esta hipótese nos permite definir propriedades locais como massa específica, que pode ser definida como:

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \sum_k m_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) dV \quad (2.1)$$

Em que δV^* é o volume do ponto material, definido anteriormente. Esta hipótese simples de definir uma propriedade local de um ponto como uma propriedade média em uma certa vizinhança deste ponto é a ideia principal por trás das teorias clássicas de fluidos e sólidos, pois através das leis físicas são definidas equações de evolução para estas propriedades locais.

2.2 Descrições Lagrangeana e Euleriana

2.2.1 Descrição Material ou Lagrangeana

A descrição Lagrangeana da mecânica é a descrição mais conhecida, sendo bastante utilizada no contexto de mecânica de partículas e da cinemática de corpos. Nesta primeira, a posição de uma partícula é dada em função do tempo, na forma $\mathbf{x}_i(t)$, onde o índice $i \in N$ é um rótulo da partícula que está em movimento.

No caso do movimento de um corpo contínuo \mathcal{B} , todas as partículas de um estado de referência B_0 estão em movimento. No caso, o movimento é definido como consecutivos mapas do tipo $\Phi_t : B_0 \rightarrow B_t \quad \forall t > 0$. Sabendo que \mathbf{X} representa a posição dos pontos no estado de referência e \mathbf{x} representa a posição dos pontos em um tempo t , temos que a descrição Lagrangeana do movimento de um corpo contínuo a partir de um estado de configuração B_0 é dada por $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Nota-se que neste contexto, as posições do estado de referência substituem o índice i no papel de rótulo das partículas. Isto se dá pois não é possível rotular cada ponto de um subdomínio contínuo por um número natural, devido à diferença de cardinalidade.

Este tipo de descrição é útil para se estudar a cinemática e dinâmica de um corpo, tendo em vista que é neste contexto que são enunciadas as leis fenomenológicas governantes do problema.

2.2.2 Descrição Espacial ou Euleriana

A descrição do tipo Euleriana consiste na definição de propriedades físicas como campos. Isto é, uma função do espaço e do tempo na forma $G(\mathbf{x}, t)$. Este tipo de descrição é muito importante na física, pois esta intimamente relacionada à forma com a qual se define e mede propriedades. Em um corpo qualquer, por exemplo, cada ponto deste corpo possui uma temperatura, uma velocidade, uma massa específica, uma densidade de carga elétrica, etc. Quando estas propriedades são medidas, o são em um certo momento (t) e em certo ponto do espaço (\mathbf{x}). Logo, estas geralmente são as propriedades de maior interesse.

2.3 Cinemática de um Meio Contínuo

2.3.1 Cinemática de uma partícula material

Considerando um corpo contínuo \mathcal{B} com configuração inicial B_0 , para cada instante de tempo existe um mapa do tipo $\Phi : B_0 \rightarrow B_t \quad \forall t > 0$, a posição desta partícula material então é descrita por $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Considerando que \mathbf{X} é o rótulo de cada partícula, a velocidade de uma partícula inicialmente na posição \mathbf{X} é dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}}, \quad (2.2)$$

em que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \equiv \frac{D}{Dt} \quad (2.3)$$

denota o operador *derivada material*. Esta derivada, por ser de natureza Lagrangeana, é de extrema importância para se estudar o movimento de um corpo ou a variação de uma propriedade de um corpo (massa, carga, momento). Caso aplicada em um campo Euleriano $G(\mathbf{x}, t)$, a derivada material assume a seguinte forma:

$$\frac{DG}{Dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla G \quad (2.4)$$

na qual ∇ denota o operador gradiente nas coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{u} a velocidade do ponto de vista Euleriano ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$) também conhecido como campo de velocidades. Este campo é de extrema relevância para a descrição do movimento de fluidos, sendo o principal objeto da descrição do movimento destes.

A transformação inversa $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ tem sua existência garantida pelo fato de não haver “breakdown” de partículas; ou seja, não existe um mapa partindo de um estado de referência B_0 de volume V_0 que leve em uma configuração B_t de volume V_t nulo. Desta afirmação decorre que o jacobiano do mapa é não-nulo, o que garante a existência da transformação inversa.

2.3.2 Deformação de um arco material infinitesimal

Considera-se uma transformação $\Phi : B_0 \rightarrow B_t$. Tomando um arco material infinitesimal no estado deformado $d\mathbf{x}$, pode-se relacionar o mesmo com o estado de referência da seguinte forma:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

, na qual as componentes do tensor \mathbf{F} são dadas por:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.6)$$

O tensor \mathbf{F} é denominado gradiente da transformação Lagrangeano e relaciona o estado deformado com o estado de referência. O determinante desse tensor $J = \det(\mathbf{F})$ é o Jacobiano da transformação de volumes, que como discutido anteriormente, é tal que $J \neq 0$. Desta propriedade e da continuidade do Jacobiano no tempo, pode-se mostrar que $J > 0$, o que garante a não-existência de volumes negativos, mantendo a consistência física da teoria.

2.4 Teorema da Localização

O Teorema da Localização é enunciado da seguinte forma: Considere uma função contínua $G : \Omega \rightarrow R$ na forma $G(\mathbf{x})$ com $\mathbf{x} \in \Omega$, onde Ω é uma variedade em R^n . Se $\int_B G(\mathbf{x})dV = 0 \forall B \subset \Omega$ para B e Ω de mesma dimensão, tem-se que $G(\mathbf{x}) = 0$ em todos os pontos do domínio. Uma demonstração informal do teorema segue a seguir.

Tem-se que pelo fato da função ser contínua em todo o domínio, pode-se separar a integral da seguinte maneira:

$$\int_B G(\mathbf{x})dV = \int_{B^+} G(\mathbf{x})dV + \int_{B^-} G(\mathbf{x})dV \quad (2.7)$$

, na qual $B^+ = \{\mathbf{x} \in B; G(\mathbf{x}) \geq 0\}$ e $B^- = \{\mathbf{x} \in B; G(\mathbf{x}) \leq 0\}$. A continuidade da função tem um papel fundamental no sentido de garantir a não-existência singularidades da função G , o que garante a integrabilidade nestes domínios. A demonstração do teorema agora se reduz a provar o mesmo para um domínio onde todos os valores da função $G(\mathbf{x})$ assumem apenas sinal positivo (para domínios apenas com sinal negativo a prova é a mesma). Pelo fato de que $B^+ \subset \Omega$, tem-se que:

$$I^+ = \int_{B^+} G(\mathbf{x})dV = 0 \quad (2.8)$$

Porém, como $G(\mathbf{x})$ é positivo em B^+ , tem-se que $I^+ = 0 \iff G(\mathbf{x}) = 0$, o que conclui a demonstração.

2.5 Teorema Transporte de Reynolds

O Teorema Transporte de Reynolds é uma ferramenta utilizada para se derivar uma propriedade dada por uma integral. O mesmo é considerado uma generalização do teorema de Leibniz de derivação por cima do sinal de integral para 3 dimensões. O mesmo tem papel fundamental na descrição matemática de fenômenos físicos, na formulação das equações governantes.

2.5.1 Propriedades de um corpo contínuo \mathcal{B}

Considerando um corpo contínuo \mathcal{B} em movimento tal que este está em uma configuração B_t , para um campo $G(\mathbf{x}, t)$, define-se uma propriedade do corpo \mathcal{B} como sendo:

$$\mathcal{G}(t) = \int_{V(t)} G(\mathbf{x}, t)dV \quad (2.9)$$

Percebe-se que esta propriedade do corpo depende apenas do tempo, sem relação com o tipo de descrição do movimento. Porém, pelo fato desta propriedade “acompanhar” o corpo em seu movimento, a mesma pode ser vista como sendo relacionada à uma descrição Lagrangeana. Esta afirmação pode não ficar muito clara pelo fato de $G(\mathbf{x}, t)$ ser um campo Euleriano; porém, como o campo é integrado ao longo do espaço, esta dependência espacial desaparece. Inclusive, é possível fazer uma mudança de variáveis para o estado de referência, na forma:

$$\mathcal{G} = \int_{V_0} G(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) \frac{dV}{dV_0} dV_0 \quad (2.10)$$

onde o domínio de integração é o estado de referência B_0 e dV/dV_0 é a razão entre os volumes dos estados deformado e de referência, conhecida como Jacobiano da transformação. Abaixo segue uma demonstração de que esta razão é identicamente igual ao determinante do tensor \mathbf{F} , como comentado anteriormente.

2.5.2 Deformação de um volume infinitesimal

Dada a transformação de um conjunto de vetores infinitesimais no estado de referência tal que:

$$d\mathbf{X}_i \rightarrow \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}_i, \quad (2.11)$$

onde estes vetores $d\mathbf{X}_i$ são tais que:

$$d\mathbf{X}_i = dX_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{sem soma}), \quad (2.12)$$

pode-se definir um volume infinitesimal no estado de referência de forma que:

$$dV_0 = d\mathbf{X}_1 \wedge d\mathbf{X}_2 \wedge d\mathbf{X}_3 = dX_1 dX_2 dX_3. \quad (2.13)$$

De forma semelhante, pode-se calcular o volume do estado deformado, de forma a obter:

$$dV = (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1) \wedge (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2) \wedge (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \quad dX_1 dX_2 dX_3 \quad (2.14)$$

O que resulta na seguinte relação:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{F}) = J \quad (2.15)$$

2.5.3 Derivada material do Jacobiano

Para a demonstração do Teorema Transporte de Reynolds, é necessário o cálculo da derivada material do Jacobiano, definido por:

$$J = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k}. \quad (2.16)$$

Pelo fato da derivada material (Lagrangeana) comuta com a derivada parcial nas coordenadas Lagrangeanas, a derivada do Jacobiano resulta em:

$$\frac{DJ}{Dt} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial u_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial u_3}{\partial X_k}. \quad (2.17)$$

Pela regra da cadeia, tem-se que:

$$\frac{\partial u_k}{\partial X_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_i}, \quad (2.18)$$

e utilizando a seguinte relação:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_l}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} = \delta_{il} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \quad (2.19)$$

, obtêm-se que:

$$\frac{DJ}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{u}) J \quad (2.20)$$

2.5.4 Teorema Transporte de Reynolds

Considerando a seguinte propriedade de um corpo contínuo \mathcal{B} :

$$\mathcal{G} = \int_{V(t)} G(\mathbf{x}, t) dV, \quad (2.21)$$

tem-se que a derivada material desta propriedade é dada por:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} G(\mathbf{x}, t) dV. \quad (2.22)$$

Utilizando uma mudança de variáveis para o sistema de coordenadas de referência, obtêm-se:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_0} G(\mathbf{x}, t) J dV_0. \quad (2.23)$$

Com esta mudança, pode-se comutar a integral com a derivada, resultando no seguinte:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \int_{V_0} \left[\frac{DG}{Dt} J + G \frac{DJ}{Dt} \right] dV_0. \quad (2.24)$$

Utilizando o resultado da derivada do Jacobiano, obtém-se que:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \int_{V_0} \left[\frac{DG}{Dt} + G (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] J dV_0, \quad (2.25)$$

que pode ser re-escrito utilizando o conceito de derivada material e o Teorema da Divergência:

$$\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \nabla \cdot (G \mathbf{u}) \right] dV. \quad (2.26)$$

Este resultado é conhecido como Teorema Transporte de Reynolds, e é extensamente utilizado na mecânica dos meios contínuos no momento de se modelar os problemas matematicamente afim de se encontrar uma equação governante.

2.6 Balanço de Massa

Para um volume material em movimento a hipótese do contínuo garante que não há criação e nem destruição de massa; esta é, portanto, conservada. A conservação da massa pode ser expressa de forma simples matematicamente pela expressão:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0. \quad (2.27)$$

Utilizando-se da definição de massa específica, tem-se que:

$$m = \int_{V(t)} \rho dV. \quad (2.28)$$

Logo, pelo Teorema Transporte de Reynolds e pelo teorema da localização, encontra-se a equação da continuidade, dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.29)$$

No caso de um meio incompressível, sólido ou fluido, tem-se que a equação da continuidade assume a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.30)$$

2.7 Teorema de Cauchy e a Existência do Tensor de Tensões

Sabe-se que a tração é uma propriedade definida em uma superfície. Por este motivo, torna-se impossível definir um campo de trações em um meio contínuo, pois a tração seria uma função do tipo

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}), \quad (2.31)$$

pois seria necessário além de definir o ponto em que a tração se encontra, definir em qual superfície do volume material ela se encontra.

Utilizando a segunda lei de Newton combinada com o Teorema Transporte de Reynolds, tem-se que para um volume material δV nas vizinhanças de um ponto:

$$\int_{\delta V} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{\delta V} \rho \mathbf{g} dV + \int_{\delta S} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (2.32)$$

Tem-se por uma análise de escala que os termos integrados no volume são muito inferiores aos termos integrados na superfície, pois o volume é infinitamente pequeno, o que resulta na equação:

$$\int_{\delta S} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad (2.33)$$

Aplicando a equação acima em um cilindro e tendendo o comprimento do mesmo para zero, tem-se que:

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, -\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) \quad (2.34)$$

Para calcular o vetor de tração em uma certa direção normal neste ponto, pode-se fazer o balanço acima na seguinte superfície

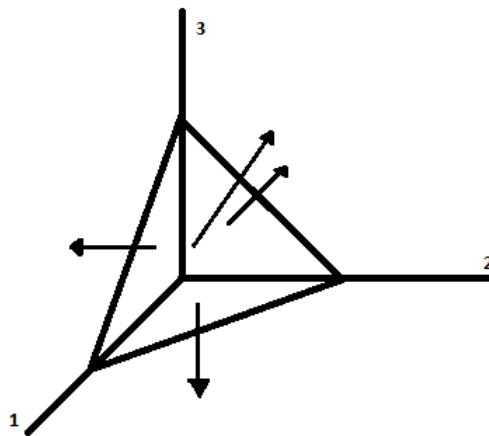


Figura 1 – Balanço de Forças em um tetraedro

Resultando:

$$\boldsymbol{\tau}_1 \delta S_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \delta S_2 + \boldsymbol{\tau}_3 \delta S_3 = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}) \delta S. \quad (2.35)$$

Sabendo que:

$$\delta S_i = n_i \delta S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \delta S, \quad (2.36)$$

tem-se finalmente que:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{n}}), \quad (2.37)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_k \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}) \quad (2.38)$$

é denominado tensor de tensões de Cauchy, e é um importante termo da mecânica dos meios contínuos

2.8 Balanço de Momento Linear

Pela segunda lei de Newton, tem-se para um volume material que:

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \sum \mathbf{F} \quad (2.39)$$

Em que \mathbf{P} é o momento linear deste volume material, dado por:

$$\mathbf{P} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} \, dV \quad (2.40)$$

As forças atuantes neste corpo são divididas em duas categorias: forças de campo, as quais são decorrentes da atuação de um campo qualquer, como o gravitacional, magnético ou elétrico, e forças de superfície, as quais estão relacionadas com a interação entre o corpo e suas vizinhanças.

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_C. \quad (2.41)$$

No caso de fluidos não-magnéticos, a força de campo atuante de consideração é apenas a força gravitacional. Logo, tem-se que:

$$\mathbf{F}_C = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} \, dV. \quad (2.42)$$

A força de superfície, por outro lado, é uma integral na superfície do corpo da tração produzida pelas vizinhanças no mesmo. Porém, como visto anteriormente, pela existência do tensor de tensões de Cauchy, pode-se escrever tal integral da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_S = \int_{S(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (2.43)$$

Para derivar o momento linear, utiliza-se a combinação do Teorema Transporte de Reynolds com a equação da continuidade, obtendo:

$$\frac{D\mathbf{P}}{Dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV, \quad (2.44)$$

o que resulta na seguinte equação diferencial:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.45)$$

Esta equação diferencial parcial é conhecida como equação de Cauchy, e governa o movimento de meios contínuos sólidos e fluidos. Percebe-se porém, que não se sabe quem é o termo $\boldsymbol{\sigma}$. Este tensor de tensões não pode ser deduzido de forma absoluta; logo, para o fechamento deste problema é necessária uma equação constitutiva para o tensor de tensões.

2.9 Balanço de Momento Angular

Enunciando a segunda lei de Newton para o balanço de momento angular, tem-se que:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \sum \mathbf{T}, \quad (2.46)$$

em que \mathbf{M} é o momento angular resultante e \mathbf{T} são os torques aplicados no volume material. O momento angular resultante é dado por:

$$\mathbf{M} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{u} dV, \quad (2.47)$$

e sua derivada é tal que:

$$\frac{D\mathbf{M}}{Dt} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{x} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad (2.48)$$

O somatório de torques pode ser dividido em torques causados por forças de campo, torques internos (causados diretamente por campos externos, como o campo magnético) e o torque de superfície, causado pelas forças de superfície. A relação fica na forma:

$$\sum \mathbf{T} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{g} dV + \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dS + \int_{V(t)} \mathbf{t} dV. \quad (2.49)$$

Utilizando o teorema da divergência, tem-se que:

$$\int_{S(t)} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dS = \int_{V(t)} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V(t)} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (2.50)$$

Utilizando a equação de Cauchy, combinando as equações e utilizando o teorema da localização, tem-se que o balanço de momento angular toma a forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{t} \quad (2.51)$$

Para fluidos sem torque interno (todos os fluidos conhecidos exceto os magnéticos), tem-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (2.52)$$

e logo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.53)$$

O que garante a simetria do tensor de tensões para fluidos não-magnéticos. Nota-se que a equação do balanço de momento angular, portanto, tem uma importância grande no que se diz respeito à determinar um modelo para o tensor de tensões, apesar de pouca importância no que se diz respeito ao movimento do material.

2.10 Balanço de Energia

Pelo balanço de energia, resultado da primeira lei da termodinâmica, em um volume material tem-se que:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{W}, \quad (2.54)$$

em que

$$E = \int_V \rho e dV \quad (2.55)$$

é a energia total do corpo. Esta é resultado da soma das energias interna, cinética e potencial. A energia específica (e), portanto, pode ser escrita como:

$$e = \varepsilon + \frac{u^2}{2} + \chi \quad (2.56)$$

em que χ é a energia potencial gravitacional por unidade de massa, dada por:

$$\chi = gz. \quad (2.57)$$

Derivando a energia total, tem-se pelo teorema transporte de Reynolds e pela equação da continuidade que:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV = \int_V \rho \frac{De}{Dt} dV. \quad (2.58)$$

Portanto:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \rho \left(\frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi \right) dV \quad (2.59)$$

Pela equação do movimento de Cauchy:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\rho \nabla \chi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.60)$$

Multiplicando os dois lados da equação por \mathbf{u}

$$\rho \left(\frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{u} \nabla \chi \right) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} \quad (2.61)$$

encontra-se a seguinte expressão para a derivada da energia total:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left(\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (2.62)$$

A taxa de calor que entra no corpo através da superfície é dada por:

$$\dot{Q} = - \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.63)$$

Utilizando o teorema da divergência, tem-se:

$$\dot{Q} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad (2.64)$$

Já a taxa trabalho por tempo realizado no corpo pelas vizinhanças é dada por:

$$\dot{W} = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} dS \quad (2.65)$$

Utilizando o teorema da divergência, pode-se obter a seguinte expressão:

$$\dot{W} = \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u}] dV \quad (2.66)$$

Substituindo estas quantidades na lei de balanço, utilizando-se do Teorema da Localização, tem-se que a equação da energia é dada por:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \quad (2.67)$$

Esta equação, porém, pouca utilidade tem nesta forma, como não se tem interesse de computar a energia interna do corpo, e sim a temperatura deste. Pela termodinâmica, pode-se escrever:

$$d\varepsilon = c_v dT + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)_T dv \quad (2.68)$$

Para expandir o termo $\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}$, pode-se utilizar a seguinte relação termodinâmica, obtida utilizando o conceito de energia livre de Helmholtz e as relações de Maxwell da termodinâmica:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)_T = -p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \quad (2.69)$$

Logo, tem-se:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt} - p \frac{Dv}{Dt} + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \frac{Dv}{Dt} \quad (2.70)$$

Pela equação da continuidade:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.71)$$

Finalmente, a equação da energia toma a seguinte forma:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - \nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi, \quad (2.72)$$

na qual

$$\Phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} \quad (2.73)$$

é o termo de dissipação de energia do fluido devido ao escoamento. Para processos barotrópicos ou a pressão constante, tem-se a forma mais conhecida da equação do calor, dada por:

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (2.74)$$

2.11 Geração de Entropia

Pela termodinâmica, tem-se que a seguinte relação para a entropia:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T} \left(\frac{D\varepsilon}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \right) \quad (2.75)$$

Utilizando a equação da continuidade, pode-se reescrever o termo da derivada de volume da seguinte forma:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}, \quad (2.76)$$

ou ainda:

$$\frac{Dv}{Dt} = v \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.77)$$

Tem-se ainda pela equação da energia que:

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u} \quad (2.78)$$

Pode-se expandir os tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau}_{IS} + \boldsymbol{\tau}_S^0 + \boldsymbol{\tau}_{AS}, \quad (2.79)$$

na qual $\boldsymbol{\tau}_{IS}$ é a parte isotrópica do tenso $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_S^0$ é a parte simétrica de traço nulo deste e por final $\boldsymbol{\tau}_{AS}$ é a parte anti-simétrica dele. Substituindo na equação, encontra-se:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T} + \boldsymbol{\tau}_{IS} \nabla \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_S^0 : \left(\mathbf{D} - \frac{Tr(\mathbf{D})}{3} \mathbf{1} \right) + \boldsymbol{\tau}_{AS} : \mathbf{W} \quad (2.80)$$

Pela desigualdade de Clausius-Planck, tem-se que:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (2.81)$$

Aplicando a desigualdade de Clausius-Planck em um corpo contínuo, tem-se que:

$$\frac{DS}{Dt} \geq - \int_S \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.82)$$

A integral do lado direito da equação representa o fluxo de entropia. Pela segunda lei da termodinâmica, a geração de entropia de um sistema deve sempre maior ou igual a zero, como indicado na equação abaixo:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0, \quad (2.83)$$

o que resulta em:

$$-\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \tau_{IS} \nabla \cdot \mathbf{u} + \tau_S^0 : \left(\mathbf{D} - \frac{Tr(\mathbf{D})}{3} \mathbf{1} \right) + \tau_{AS} : \mathbf{W} \geq 0 \quad (2.84)$$

Assim como a equação do balanço de momento angular, a inequação da geração de entropia não tem muito valor cinemático. Porém, a importância desta equação é altíssima, tendo em vista que além determinar a positividade das constantes materiais, é possível identificar os “fluxos” termodinâmicos e as “forças” que geram estes fluxos, sendo assim possível ter uma ideia da forma das dependências funcionais das equações constitutivas para estes fluxos.

2.12 Tensor de Tensões e Formalismo Constitutivo

Em todas as equações de balanço desenvolvidas ao longo das seções anteriores, exceto na equação da continuidade, não existe informação sobre alguns termos. Estes termos não podem ser derivados por nenhuma forma clássica, e por isto torna-se necessária a existência de um modelo constitutivo para estes.

Como estes modelos podem ser propostos, pode-se ter a ideia errada de que qualquer modelo pode ser válido. Esta ideia, porém, está de fato errada. Qualquer modelo constitutivo para certa propriedade em um meio contínuo deve seguir alguns princípios básicos.

2.12.1 Compatibilidade com as equações de momento angular e de geração de entropia

A primeira propriedade que a equação constitutiva deve possuir é a de estar de acordo com as equações de balanço propostas. Uma equação constitutiva que viola a segunda lei da termodinâmica ou o balanço de momento angular não faz sentido no ponto de vista físico.

A equação do momento angular é responsável por dar informações a respeito da simetria ou não-simetria do tensor de tensões, enquanto a equação de geração de entropia, vinda da desigualdade de Clausius, dá informações sobre o sinal das constantes positivas presentes na equação. Por exemplo, o fato da constante positiva k da lei de Fourier do calor $\mathbf{q} = -k\nabla T$ aparecer com um sinal negativo na frente tem a ver com o fato de que um sinal positivo violaria a segunda lei da termodinâmica.

2.12.2 Princípio da causalidade

Tem-se que, no caso geral, $\boldsymbol{\sigma}$ depende da história do movimento. Por exemplo em uma suspensão, o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ depende de uma configuração \mathcal{C}_t , que depende de uma configuração de referência \mathcal{C}_0

2.12.3 Princípio da ação local

O princípio da ação local postula que em um meio contínuo somente as partículas nas vizinhanças deverão ser envolvidas na determinação da tensão de um ponto. Este princípio é consistente com a ideia de forças de curto alcance entre partículas ou moléculas no material.

2.12.4 Invariância de coordenadas

Uma equação constitutiva deve sempre ser válida independente do sistema de coordenadas adotados para escrever os vetores posição, velocidade ou o tensor de tensões. A forma funcional $\mathcal{F}\{\nabla\mathbf{u}\}$ para a tensão deve ser sempre independente de uma descrição de coordenadas.

2.12.5 “Fading memory”

Este princípio requer que a estrutura instantânea do campo de tensões esteja mais correlacionada com efeitos mais recentes no passado. À medida em que o tempo passa, a configuração de atual e a de referência vão se descorrelacionando. Este efeito é claramente visto no modelo de Maxwell, onde a tensão depende de uma integral de uma função de relaxação de tensões, que seria exatamente uma medida de correlação de tensões.

2.12.6 Princípio da indiferença material

O princípio da indiferença material postula basicamente que uma equação constitutiva deve ser invariante a uma transformação da forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (2.85)$$

Isto significa que a equação constitutiva deve ser a mesma para um observador estático e para um observador em movimento em relação ao meio contínuo. Isto faz sentido, porque apesar de efeitos não-inerciais observados por observadores em movimento, o material continuará sendo o mesmo material.

2.12.7 Equações de Navier-Stokes

Nos experimentos de Newton, ele percebeu que existia uma relação linear entre a tensão de cisalhamento de um fluido e seu gradiente de velocidade, representada da seguinte forma:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (2.86)$$

na qual o termo μ é a viscosidade do fluido. Esta relação linear foi generalizada da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.87)$$

Esta é a chamada equação constitutiva para um fluido stokesiano. No caso de um escoamento incompressível, a equação constitutiva toma a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D} \quad (2.88)$$

Fluidos que obedecem esta equação constitutiva são chamados fluidos newtonianos incompressíveis. Aplicando a equação constitutiva para o tensor de tensões na equação do movimento de Cauchy, tem-se a seguinte equação:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (2.89)$$

com

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.90)$$

Estas equações combinadas são chamadas equações de Navier-Stokes, responsáveis pela descrição do movimento de um fluido newtoniano incompressível. No caso de não

existir uma condição de contorno de pressão, pode-se escrever a equação em termos de uma pressão modificada, que engloba os efeitos gravitacionais, tal que:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.91)$$

2.13 Equação de Stokes

Considerando um fluido em escoamento, pode-se fazer uma análise de escala da seguinte forma, tomando a escala de velocidade como sendo:

$$\mathbf{u} \sim U \quad (2.92)$$

e a escala de dimensões espaciais como sendo:

$$x \sim y \sim z \sim L, \quad (2.93)$$

tem-se que a escala de tempo pode ser dada por:

$$t \sim \frac{L}{U} \quad (2.94)$$

Sendo desta forma possível definir variáveis adimensionais de ordem 1, tais que:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L} \quad (2.96)$$

$$t' = \frac{t}{\frac{L}{U}} \quad (2.97)$$

Apenas com as escalas definidas, não é possível determinar uma escala para a pressão. Porém, pode-se definir uma pressão adimensional da seguinte forma:

$$p' = \frac{p}{\rho U^2}, \quad (2.98)$$

levando em consideração de que nada se sabe sobre a ordem desta pressão adimensional. Substituindo as variáveis adimensionais na equação, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{u}', \quad (2.99)$$

em que

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (2.100)$$

é o chamado número de Reynolds, que relaciona escalas de forças inerciais com as de forças viscosas da seguinte forma:

$$Re = \frac{F_{inercia}}{F_{viscosa}} \quad (2.101)$$

Como os termos do lado esquerdo da equação são de ordem 1, tem-se que os dois termos do lado direito devem se balancear, tal que:

$$\nabla' p' \sim \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{u}' \quad (2.102)$$

Ignorando os termos de ordem pequena, tem-se a seguinte equação:

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (2.103)$$

que é chamada Equação de Stokes. Esta é responsável por governar a hidrodinâmica para baixos números de Reynolds. Ao contrário da equação do movimento de Navier-Stokes, a equação de Stokes é linear e portanto pode-se provar a existência e unicidade de suas soluções. Mais ainda, é possível encontrar soluções analíticas para alguns problemas.

3 Escoamento de Sangue em Vasos Capilares Utilizando o Modelo de Células Enfileiradas

O objetivo deste capítulo é uma discussão básica sobre uma primeira forma de modelagem do escoamento do sangue em vasos cujos diâmetros possuem mesma escala dos próprios glóbulos vermelhos. Para isto, é utilizado um modelo de células enfileiradas como corpos rígidos axi-simétricos em movimento dentro de um fluido em regime de lubrificação, com escoamento unidirecional. É abordado principalmente o procedimento para se calcular a viscosidade efetiva deste modelo.

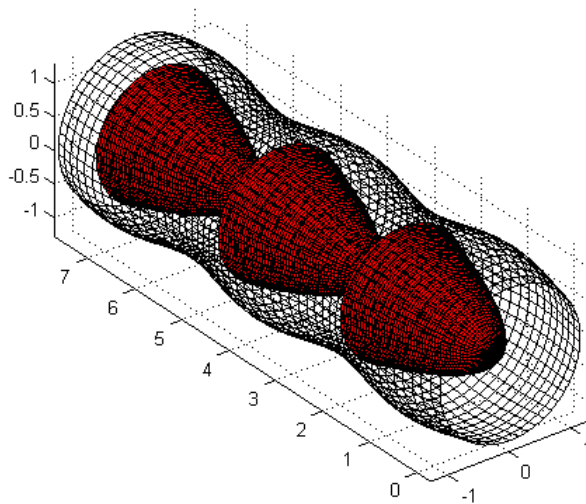


Figura 2 – Células em formato de paraboloides em tubo com seção circular perturbada harmonicamente

3.1 Modelo de Células Enfileiradas

Em vasos capilares, a dimensão dos glóbulos vermelhos é da mesma ordem do diâmetro do vaso, muitas vezes menor do que o mesmo. Isto causa um efeito de deformação

nos glóbulos ao serem transportados dentro do vaso pelo fluido. Neste caso, não é interessante a utilização de um modelo não-newtoniano para o sangue, pois o escoamento ocorre na mesma escala dos glóbulos.

O modelo utilizado neste capítulo é uma aproximação inicial destes glóbulos como corpos rígidos axi-simétricos se movendo com velocidade U_C em plasma newtoniano, considerando escoamento unidirecional entre as células e a parede do vaso. A aproximação de corpo rígido deve-se ao fato de estudos mostrarem que em pequenas escalas de vaso, os glóbulos vermelhos se movimentam com geometrias mais uniformes, já a aproximação de lubrificação deve-se à análise de escala feita para o problema. Além desta aproximação também são feitas aproximações para a geometria das células e para a rugosidade do vaso. A figura 3.1 ilustra o modelo que foi utilizado para células no caso do formato de paraboloides:

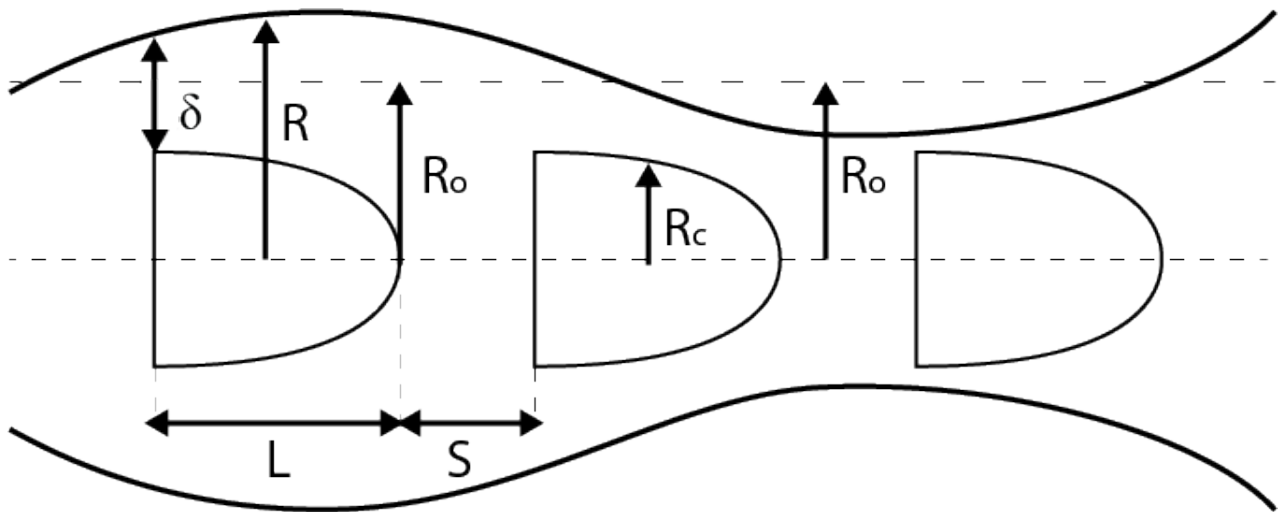


Figura 3 – Dimensões do modelo de células enfileiradas

A importância deste modelo é ajudar a prever alguns efeitos na viscosidade efetiva do fluido proveniente de parâmetros como agregação dos glóbulos e rugosidade do vaso. Alguns resultados neste sentido foram obtidos em estudos anteriores do grupo; porém, nesta etapa, estes resultados não foram reproduzidos. Todavia, o procedimento necessário para chegar a esses resultados é descrito.

3.2 Equação Governante e Condições de Contorno

A equação governante do problema é a de Navier-Stokes desprezando os efeitos de inércia, também conhecida como Equação de Stokes, considerando as condições de

contorno de não-deslizamento e impenetrabilidade nas paredes e é dada por:

$$\begin{cases} -\nabla p + \mu_p \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(r = R(z)) = 0 \\ \mathbf{u}(r = R_C(0)) = U_C \end{cases}, \quad (3.1)$$

em que $R(z)$ e $R_C(z)$ são respectivamente o raio do vaso e o raio do protótipo de célula, que em geral podem variar ao longo do comprimento do vaso.

3.3 Transformação de Galileu

Considerando a célula como uma parede e integrando apenas a região da vazão, é impossível obter o resultado coerente para a vazão, pois este resultado iria contra a equação da continuidade. Para resolver este problema, faz-se uma transformação de Galileu do tipo:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}_c \quad (3.2)$$

, que modifica as condições de contorno da equação, resultando:

$$\begin{cases} -\nabla p + \mu_p \nabla^2 \mathbf{u}' = 0 \\ \mathbf{u}'(r = R(z)) = -\mathbf{U}_c \\ \mathbf{u}'(r = R_C(0)) = 0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

Com a célula parada, é possível fazer o cálculo da vazão integrando apenas a região de fluido, obtendo:

$$Q = \int_{R_c}^R u' 2\pi r dr + \int_0^R U_c 2\pi r dr \quad (3.4)$$

Substituindo u' na equação, tem-se:

$$Q = \int_{R_c}^R 2u\pi r dr + \int_0^{R_c} U_c 2\pi r dr \quad (3.5)$$

, o que resulta em:

$$Q = 2\pi \int_{R_c}^R u r dr + U_c \pi R_c^2 \quad (3.6)$$

Este resultado mostra que a contribuição da célula na vazão, independente de qualquer escoamento interno na mesma, é a contribuição de uma translação de corpo rígido. Este resultado é importante para evitar qualquer tipo de confusão no cálculo da vazão deste escoamento.

3.4 Solução da Equação

Considerando a hipótese de lubrificação para o fluido escoando entre a célula e a parede, pode-se obter a solução para o campo de velocidades $\mathbf{u} = u \hat{e}_z$ por meio de uma integração simples, resultando

$$u = -\frac{Gr^2}{4\mu_p} + C_1 \log(r) + C_2, \quad (3.7)$$

em que $G = -\frac{dp}{dz}$. Utilizando as condições de contorno, pode-se obter os valores para as constantes C_1 e C_2 tais que:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{G}{4\mu_p \log(R/R_C)} (R^2 - R_C^2) - \frac{U_c}{\log(R/R_C)} \\ C_2 = \frac{G}{4\mu_p \log(R/R_C)} (R_C^2 \log(R) - R^2 \log(R_C)) + \frac{U_c}{\log(R/R_C)} \log(R) \end{cases}. \quad (3.8)$$

Para o cálculo da vazão, utilizando o resultado discutido na seção anterior, resulta na seguinte expressão:

$$Q = \pi \int_{R_C}^R r^2 \dot{\gamma} dr \quad (3.9)$$

, que é obtida pela integração por partes da própria definição de vazão. Esta relação é superior à integração direta da velocidade devido à vantagem de facilidade nos cálculos analíticos. A vazão para o modelo é dada por:

$$Q = \frac{\pi G}{8\mu_p} \left[R^4 - R_C^4 - \frac{(R^2 - R_C^2)^2}{\log(R/R_C)} \right] + \pi U_C \left(\frac{R^2 - R_C^2}{2 \log(R/R_C)} \right), \quad (3.10)$$

que também pode ser escrita na forma:

$$Q = \frac{\pi G}{8\mu_p} F(z) + \pi U_C F_U(z), \quad (3.11)$$

na qual

$$F(z) = R^4 - R_C^4 - \frac{(R^2 - R_C^2)^2}{\log(R/R_C)} \quad (3.12)$$

e

$$F_U(z) = \frac{R^2 - R_C^2}{2 \log(R/R_C)} \quad (3.13)$$

são os termos isolados na equação (3.10)

3.5 Queda de Pressão

Isolando o termo do gradiente de pressão, tem-se que:

$$G_L = \frac{8\mu_p}{\pi} \left(\frac{Q - \pi U_C F_U(z)}{F(z)} \right) \quad (3.14)$$

Este gradiente de pressão é válido apenas na região entre a célula e a parede, nas regiões entre duas células, o mesmo é dado pela lei de Poiseuille:

$$G_S = \frac{8\mu_p Q}{\pi R^4} \quad (3.15)$$

A queda de pressão em um período (célula + espaço) é dada por:

$$\Delta p = \Delta p_L + \Delta p_S, \quad (3.16)$$

onde:

$$\begin{cases} \Delta p_L = \int_0^L G_L dz \\ \Delta p_S = \int_L^{L+S} G_S dz \end{cases} \quad (3.17)$$

O termo Δp_L representa a contribuição na queda de pressão da região onde encontra-se o eritrócito, já o termo Δp_S representa a contribuição da região entre dois glóbulos, sendo S a distância entre as duas hemácias.

3.6 Viscosidade efetiva

A Lei de Poiseuille ([POISEUILLE, 1844](#)) é uma expressão simples, e por isso é largamente utilizada para se trabalhar com escoamentos em tubos. Porém, existem muitos fatores (além da possibilidade de não poder se aplicar a hipótese de lubrificação no mesmo) que podem impedir esta lei de ser utilizada. Para contornar este problema, o termo de viscosidade da mesma é modificada para uma viscosidade efetiva. Esta viscosidade efetiva pode ser medida facilmente em laboratório, considerando o fluido que escoar dentro do tubo como um fluido newtoniano equivalente. Sabendo os termos de vazão, comprimento, diâmetro e diferença de pressão, pode-se calcular a viscosidade efetiva utilizando a Lei de Poiseuille.

No caso deste modelo, a lei de Poiseuille seria dada por:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R_0^4}{8\mu_{eff} L}, \quad (3.18)$$

logo, pode-se definir a viscosidade efetiva da seguinte forma:

$$\mu_{eff} = \frac{\pi \Delta p R_0^4}{8QL}. \quad (3.19)$$

Para o cálculo da perda de carga no caso, é necessário resolver uma integral difícil de ser integrada analiticamente; por isso, talvez, um método numérico seja mais apropriado. Em trabalhos antigos do grupo também se tentou uma solução assintótica, expandindo em séries o termo logarítmico, esta não foi reproduzida neste trabalho.

3.7 Adimensionalização dos Parâmetros e Cálculo da Viscosidade Efetiva

Para o cálculo da viscosidade efetiva computacionalmente, faz-se uma análise de escala nos parâmetros do problema, encontrando escalas para direção radial, direção axial, gradiente de pressão e velocidade, dadas respectivamente por:

$$r \sim R_0 \quad (3.20)$$

$$z \sim L \quad (3.21)$$

$$G \sim \frac{8Q\mu_w}{\pi R_0^4} \quad (3.22)$$

$$u \sim \frac{Q}{\pi R_0^4} \quad (3.23)$$

Utilizando estas escalas, é possível obter variáveis adimensionais, possibilitando a adimensionalização da equação da vazão, na qual pode-se isolar o termo de gradiente de pressão adimensional ao longo da célula, resultando em:

$$\tilde{G}_L = \tilde{\mu}_p \left(\frac{1 - \tilde{F}_U(\tilde{z})}{\tilde{F}(\tilde{z})} \right) \quad (3.24)$$

Nesta relação, tem-se que as funções \tilde{F} e \tilde{F}_U são dadas, respectivamente, por:

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = \tilde{R}^4 - \tilde{R}_C^4 - \frac{(\tilde{R}^2 - \tilde{R}_C^2)^2}{\log(\tilde{R}/\tilde{R}_C)} \quad (3.25)$$

e

$$\tilde{F}_U(\tilde{z}) = \frac{\tilde{R}^2 - \tilde{R}_C^2}{2 \log(\tilde{R}/\tilde{R}_C)} \quad (3.26)$$

O gradiente de pressão adimensional ao longo do espaço entre as células é dado por:

$$\tilde{G}_S = \frac{\tilde{\mu}_p}{\tilde{R}^4} \quad (3.27)$$

Com estes novos parâmetros, o cálculo da viscosidade efetiva se transforma no seguinte:

$$\tilde{\mu}_{eff} = \frac{1}{1 + \tilde{S}} \left[\int_0^1 \tilde{G}_L(\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_1^{1+\tilde{s}} \tilde{G}_S(\tilde{z}) d\tilde{z} \right] \quad (3.28)$$

4 Estudo de Membranas

4.1 Fundamentos Geométricos

4.1.1 Triedro de Frenet

No estudo da geometria de curvas, o primeiro conceito relevante é o de vetor tangente à curva. Considerando uma curva C , definida por uma parametrização qualquer de $R \rightarrow R^3$, o vetor tangente é definido por uma normalização do vetor $d\mathbf{x}$, já que este, por sua vez, é tangente por definição à curva. Sabendo que $|d\mathbf{x}| = ds$, tem-se que o vetor tangente unitário é dado por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{t} \quad (4.1)$$

Nota-se que a derivada acima é independente da parametrização da curva. Isto é motivação para definir as propriedades de curva utilizando como parâmetro o comprimento de arco. É importante notar que como a norma de um vetor unitário é constante, sua derivada e ele são ortogonais (esta relação pode ser facilmente verificada derivando a equação $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$). Sabendo que o vetor tangente e sua derivada são ortogonais, define-se o vetor normal unitário à curva da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{p} \quad (4.2)$$

em que $\kappa(t)$ é denominada curvatura. Este termo está associado ao inverso do raio local de uma curva, no caso de um círculo de raio constante R , tem-se que $\kappa = 1/R$.

Nota-se que \mathbf{t} e \mathbf{p} geram um espaço bidimensional. Para se ter uma base completa de R^3 é necessário um outro vetor linearmente independente. Com esta motivação define-se o vetor bi-normal, dado por:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{p} \quad (4.3)$$

Este conjunto de três vetores é chamado na literatura de triedro de Frenet, e é de grande importância no estudo de curvas. Sabendo que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ e $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$, tem-se,

derivando as duas relações, que:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{p} \quad (4.4)$$

em que τ é denominada torção da curva. Como tem-se duas relações entre vetores e suas derivadas, o fato de serem três vetores de base motiva a encontrar uma equação para a derivada de \mathbf{p} , onde encontra-se:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \quad (4.5)$$

Estas três equações podem ser arranjadas na forma de um sistema linear, onde o arranjo toma a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} dt/ds \\ d\mathbf{p}/ds \\ d\mathbf{b}/ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Estas são chamadas fórmulas de Frenet-Serret, e descrevem as propriedades de uma curva contínua e diferenciável no espaço R^3

4.1.2 Cálculo da Curvatura

Apesar de conveniente para as definições geométricas, a parametrização por comprimento de arco é raramente aplicável, exceto em casos simples como circunferências. Logo, para calcular os termos de curvatura ou torção na prática é necessário considerar uma parametrização qualquer. A relação entre as derivadas no caso é dada da seguinte forma:

$$\frac{dG}{ds} = \frac{1}{v} \frac{dG}{dt} \quad (4.7)$$

na qual $v = ds/dt$ é a velocidade escalar da curva. Como a curvatura é dada pelo módulo da segunda derivada da posição com relação ao comprimento de arco, é importante calculá-la em termos da parametrização da curva. Assim, temos:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \quad (4.8)$$

Desenvolvendo as derivadas, encontra-se a seguinte relação:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})}{v^3} \quad (4.9)$$

Por último, utilizando a relação vetorial para produtos vetoriais triplos e tirando o módulo, encontra-se finalmente que:

$$\kappa = \frac{|\ddot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}|}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{\frac{3}{2}}} \quad (4.10)$$

Esta é a expressão mais geral para o cálculo de curvatura de uma curva C qualquer em R^3 . Geralmente em aplicações, esta equação pode tomar formas mais simples.

4.1.3 Tensor Métrico

Considerando um mapa contínuo $T : R^m \rightarrow R^n$ com $m \leq n$, tem-se que a imagem S do mapa é uma variedade de Riemann. O que significa que em uma vizinhança de um ponto qualquer desta variedade, pode-se construir um espaço vetorial de dimensão m , cujos vetores de base são definidos por:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}, \quad (4.11)$$

em que q_i são coordenadas do espaço R^m . Define-se então o tensor métrico como sendo o tensor de componentes

$$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \quad (4.12)$$

Este tensor é de extrema importância, pois o mesmo caracteriza propriedades geométricas da variedade, como comprimento, área, volume, etc. Por exemplo, pela definição do tensor métrico, sabendo que $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$, tem-se que o quadrado do comprimento infinitesimal de uma curva na variedade S é dado por:

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad (4.13)$$

4.1.3.1 Determinante do Tensor Métrico

Considerando um mapa $T : R^3 \rightarrow R^3$ como exemplo, temos que o determinante do tensor métrico é dado por:

$$g = \det(g_{ij}) = \varepsilon^{ijk} g_{1i} g_{2j} g_{3k} \quad (4.14)$$

Em que ε^{ijk} é o permutador de Levi-Civita. Pela definição de tensor métrico, expandindo a equação acima, tem-se que:

$$g = \frac{\partial x^p}{\partial q^1} \frac{\partial x^q}{\partial q^2} \frac{\partial x^r}{\partial q^3} \left(\varepsilon^{ijk} \frac{\partial x^p}{\partial q^i} \frac{\partial x^q}{\partial q^j} \frac{\partial x^r}{\partial q^k} \right) \quad (4.15)$$

Porém, pela definição do Jacobiano da transformação, e por teoria dos determinantes, mostra-se que:

$$\varepsilon^{ijk} \frac{\partial x^p}{\partial q^i} \frac{\partial x^q}{\partial q^j} \frac{\partial x^r}{\partial q^k} = V \varepsilon^{pqr} \quad (4.16)$$

Onde V é o jacobiano da transformação de volumes. Logo, encontra-se:

$$g = V \varepsilon^{pqr} \frac{\partial x^p}{\partial q^1} \frac{\partial x^q}{\partial q^2} \frac{\partial x^r}{\partial q^3} = V^2 \quad (4.17)$$

$$V = \sqrt{g} \quad (4.18)$$

Esta demonstração pode ser feita com mais generalidade para qualquer tipo de variedade, mostrando que a raiz quadrada do tensor métrico está associada com o jacobiano de transformação da propriedade dimensional da variedade (área, volume, comprimento, etc).

4.1.4 Curvatura de Superfícies

A ideia de estender o conceito de curvatura de uma curva para uma superfície, que é uma variedade de dimensão superior, é relativamente simples, mas possui detalhes interessantes que devem ser vistos com cuidado. Da mesma forma que quando se estende o conceito de vetor tangente para uma superfície perde-se o fato do espaço tangente em um ponto de uma curva ter como base um único vetor, pois é possível construir uma base de dois vetores tangentes para o espaço vetorial tangente a um ponto de uma superfície. A curvatura, por sua vez, que era um escalar quando avaliada em uma curva, agora será uma quantidade tensorial.

Para o cálculo da curvatura em um ponto de uma superfície S , a primeira ideia provavelmente seria calcular a curvatura de uma curva $C \subset S$. Porém, pode-se perceber pelo exemplo da figura abaixo que pode existir uma curva com curvatura não nula em uma superfície plana (que pelo conceito de curvatura possui curvatura zero).

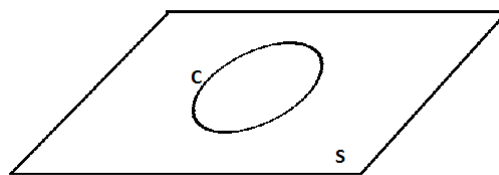


Figura 4 – Curva de curvatura constante em uma superfície plana

Porém, no conceito de curvatura de uma curva, o vetor curvatura (derivada segunda da parametrização da curva pelo comprimento do raio) possuía direção normal à

curva. O mesmo não acontece em uma superfície, sendo que a curvatura de uma curva não coincide necessariamente com a da superfície. Para resolver este problema, estudam-se separadamente as duas projeções deste vetor curvatura: uma delas, normal à superfície, está relacionada com a curvatura da superfície; a outra, tangente à superfície, está relacionada com a curvatura da curva. Estas curvaturas são calculadas a seguir.

4.1.4.1 Curvatura de uma curva em uma superfície

Dada uma curva em uma superfície, pode-se calcular sua curvatura pela seguinte expressão:

$$\kappa \mathbf{p} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} \quad (4.19)$$

Expandindo em termos da parametrização, tem-se:

$$\kappa \mathbf{p} = \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha} \frac{d^2 q^\alpha}{ds^2}, \quad (4.20)$$

em que $\boldsymbol{\kappa}$ é o vetor curvatura, que por ser ortogonal ao tangente da curva, pode ser escrito na forma:

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_n \hat{\mathbf{n}} + \kappa_g \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}} \quad (4.21)$$

Na equação acima, o termo κ_g é chamado curvatura geodésica e o termo κ_n é chamado curvatura normal, que é o objeto de maior interesse neste caso.

4.1.4.2 Curvatura normal de uma superfície

Da equação (4.21), tem-se que a curvatura normal de uma superfície é dada pela expressão:

$$\kappa_n = \frac{b_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}{g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta}, \quad (4.22)$$

em que:

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.23)$$

O termo $b_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$ é chamado de segunda forma fundamental.

4.1.4.3 Curvaturas principais, curvatura média e curvatura Gaussiana

Pela definição de curvatura normal, tem-se que:

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) dq^\alpha dq^\beta = 0. \quad (4.24)$$

Na situação em que isto vale para quaisquer parametrizações, pode-se dizer que:

$$\det(b_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) = 0, \quad (4.25)$$

ou ainda:

$$\det(b_\alpha^\beta - \kappa_n \delta_\alpha^\beta) = 0, \quad (4.26)$$

onde os κ_n serão solução de um problema de autovalor. Estes valores de κ_n são chamados curvaturas principais, e pode-se mostrar que estes são os valores máximos de curvatura em um ponto (KREYSZIG, 1959).

Como os autovalores do tensor b_α^β , chamados κ_1 e κ_2 , são independentes da parametrização, tem-se que seu traço e determinante (os invariantes principais) também o são. E com estes valores, pode-se definir as propriedades:

$$\kappa_m = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad (4.27)$$

que é a chamada curvatura média da superfície, e

$$\kappa = \det(b_\alpha^\beta) = \kappa_1 \kappa_2, \quad (4.28)$$

que é chamada de curvatura gaussiana. Esta última possui propriedades muito interessantes, mas que não serão discutidas neste texto, sendo a curvatura média a propriedade de maior interesse no caso do problema de superfícies.

4.1.4.4 Formulação em tensores cartesianos

Define um tensor \mathbf{B} , de modo que as componentes deste são dadas por:

$$B_{\alpha\beta} = -b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.29)$$

Utilizando a regra do produto, encontra-se a relação:

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial q^\beta}. \quad (4.30)$$

Para a melhor compreensão desta relação, percebe-se que um vetor $d\mathbf{x}$ em uma superfície deve ser tangente a mesma. O mesmo é dado pela seguinte expressão:

$$d\mathbf{x} = dq^1 \hat{\mathbf{v}}_1 + dq^2 \hat{\mathbf{v}}_2, \quad (4.31)$$

em que $\hat{\mathbf{v}}_1$ e $\hat{\mathbf{v}}_2$ são vetores tangentes à superfície. Pode-se considerar uma parametrização tal que estes vetores sejam ortogonais e de norma unitária na região de análise, sem perda de generalidade, pois os tensores não dependem da base nas quais são representados. Pelo fato de $\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{n}}$ formarem uma base ortonormal, pode-se definir o operador projeção, dado por:

$$\mathbf{1}^S = \hat{\mathbf{v}}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2 \hat{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \quad (4.32)$$

Este operador tem como objetivo projetar qualquer vetor ou tensor na superfície, inclusive o operador nabla, que tem sua projeção dada por:

$$\nabla^S = \mathbf{1}^S \cdot \nabla = \hat{\mathbf{v}}_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \hat{\mathbf{v}}_2 \frac{\partial}{\partial q^2}. \quad (4.33)$$

Com esta definição, tem-se que:

$$\nabla^S \mathbf{x} = \mathbf{1}^S \quad (4.34)$$

E como consequência direta:

$$\mathbf{B} = \nabla^S \hat{\mathbf{n}}, \quad (4.35)$$

em que a curvatura média é dada por:

$$\kappa_m = \frac{1}{2} Tr(\mathbf{B}) \quad (4.36)$$

4.2 Teoria de Membranas

Existem três principais formas de se formular a dinâmica de membranas. A primeira consiste em considerar a membrana como uma folha material tridimensional com espessura muito pequena, onde as equações governantes e condições de contorno são consideradas limites assintóticos com limite de espessura nulo. A segunda forma faz considerações específicas a respeito da deformação das fibras materiais orientadas em direção normal à superfície média. Na terceira forma, a terceira dimensão é completamente abandonada, e a membrana é considerada como uma superfície bidimensional em um espaço tridimensional, onde ocorre um salto de propriedades locais. Esta terceira forma é o foco

principal deste texto, pois possui diversas vantagens sobre as duas primeiras. Nestas, existem algumas inconsistências encontradas, que são contornadas pelo terceiro tipo de modelagem.

4.3 Membrana Unidirecional

Uma formulação unidirecional de membrana é o exemplo mais simples de membrana a ser considerado. Pela sua simplicidade, fica fácil a generalização para a teoria geral de membranas. Neste modelo, considera-se uma interface entre dois fluidos com escoamento unidirecional, mostrado na figura abaixo

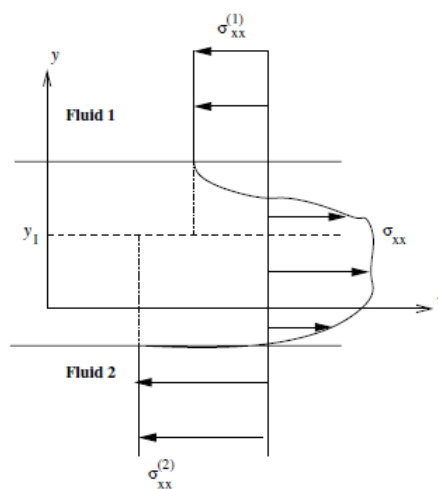


Figura 5 – Modelo unidirecional de membrana (POZRIKIDIS, 2003)

Na figura 4.3, tem-se que σ_{xx} representa a tensão normal na direção x na interface limpa entre dois fluidos. A ideia da formulação de membrana é substituir a variação de tensão na interface por um salto de tensões, assim como a “parede” entre os dois fluidos por uma superfície, que no caso bidimensional da figura, seria apenas uma linha reta, cuja posição vertical é dada por y_I . Para esta substituição, utiliza-se a equivalência nas integrais de tensões e momentos ao longo do eixo vertical. A integral das tensões é dada por:

$$\int_a^b \sigma_{xx} dy \equiv \int_a^b \sigma_{xx}^{id} dy + \gamma, \quad (4.37)$$

em que σ^{id} representa as tensões ideais, que nada mais são do que uma continuação das tensões antes e depois da membrana. Ou seja, o problema onde ocorre uma variação contínua brusca entre duas tensões diferentes é substituído por outro, onde esta variação é instantânea e descontínua. o termo γ é chamado de tensão superficial, e pode ser escrito

da seguinte forma:

$$\gamma \equiv \int_a^{y_I} (\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^{(2)}) dy + \int_{y_I}^b (\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^{(1)}) dy. \quad (4.38)$$

Para o problema ficar completo, falta determinar a posição y_I . Para isto, utiliza-se o conceito de torque equivalente, que é expresso por:

$$\int_a^b \sigma_{xx} y dy \equiv \int_a^b \sigma_{xx}^{id} y dy + \gamma y_I, \quad (4.39)$$

que pode ser re-arranjado de forma a se obter:

$$\gamma y_I \equiv \int_a^{y_I} (\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^{(2)}) y dy + \int_{y_I}^b (\sigma_{xx} - \sigma_{xx}^{(1)}) y dy. \quad (4.40)$$

Este simples modelo unidimensional pode ser utilizado para compreender melhor a natureza da teoria de membranas. Na prática, as tensões superficiais são complexas e anisotrópicas. Isto deve-se à natureza de interfaces contaminadas, polimerizadas ou de outros tipos

4.4 Membranas Bidimensionais

De modo similar à formulação anterior, a dimensão da interface é reduzida de uma das direções (no caso, a direção normal). De forma semelhante, é possível se trabalhar com os conceitos de tensão superficial e momentos fletores.

Utilizando uma formulação cartesiana para uma membrana bi-dimensional plana orientada na direção y , tem-se que a tensão superficial é dada por:

$$\tau \equiv \int_a^b \sigma dy. \quad (4.41)$$

Em que σ são todas as componentes do tensor de tensões que não estão relacionadas com a direção y (eg. σ_{xx} , σ_{xz}). Portanto, existem 4 componentes de tensão superficial, formando um tensor de tensões superficiais. De forma semelhante, os momentos fletores são definidos como:

$$m \equiv \int_a^b \sigma(y - y_c) dy, \quad (4.42)$$

onde y_c satisfaz a seguinte relação

$$\int_a^b (y - y_c) dy = 0 \quad (4.43)$$

que resulta:

$$y_c = \frac{a + b}{2} \quad (4.44)$$

Abaixo, mostra-se a interpretação visual destes termos na figura 4.4

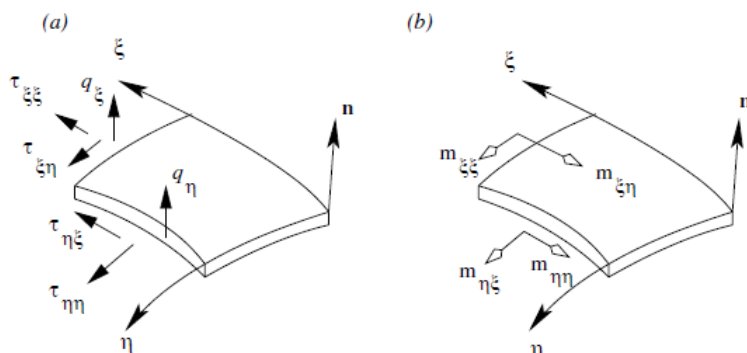


Figura 6 – Tensões superficiais, esforços cortantes e momentos fletores em um problema de membrana (POZRIKIDIS, 2003)

4.5 Formatos Cilíndricos

Considerando um problema simples de uma casca plana que se deforma em um formato cilíndrico, é possível mostrar a dependência do momento fletor com respeito à curvatura da membrana. Este problema é escolhido para este exemplo devido à sua simplicidade, pois a curvatura deste tipo de membrana tem seu valor constante.

Considerando para o problema um elástico reto de comprimento L e altura h se deformando em um arco circular, de comprimento $L' = r\theta$, onde $r = R + y - y_c$ é o raio da linha material deformada, e R é o raio da linha de centro em estado de deformação, cujo comprimento é $L'_c = R\theta$. O “stretch” deste material é dado por:

$$\eta \equiv \frac{L'}{L} = \frac{L'_c L'}{L L'_c} = \eta_c \left(1 + \frac{y - y_c}{R}\right), \quad (4.45)$$

onde $\eta_c = L'_c/L$ é o stretch da linha de centro. Assumindo como equação constitutiva para a tensão a lei de Hooke, dada por:

$$\sigma = \frac{E}{1 - \nu^2}(\eta - 1), \quad (4.46)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson. Encontra-se que o momento fletor é dado por:

$$m = \int_a^b (y - y_c) \sigma \, dy = \frac{E\eta_c}{R(1 - \nu^2)} \int_a^b (y - y_c)^2 \, dy. \quad (4.47)$$

Integrando a equação, tem-se que:

$$m = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \eta_c h^3 \kappa_c. \quad (4.48)$$

A equação acima mostra que existe uma relação entre o momento fletor e a curvatura da superfície. Esta relação é de grande valor físico, pois relaciona flexão com curvatura. Para uma transformação de pura flexão, tem-se que $\eta_c = 1$, e a relação para o momento fletor transforma-se em:

$$m = E_B \kappa_c \quad (4.49)$$

na qual:

$$E_B = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.50)$$

Outra propriedade interessante de cálculo neste caso é a energia de flexão da membrana. Esta é a energia de distorção devido ao efeito de flexão, e é dada por:

$$dH = \frac{1}{2} m d\theta \quad (4.51)$$

Substituindo m na equação e sabendo que $d\theta = \kappa_c ds$, tem-se:

$$dH = \frac{1}{2} E_B \kappa_c^2 ds \quad (4.52)$$

e logo:

$$H = \int_s \frac{1}{2} E_B \kappa_c^2 ds \quad (4.53)$$

4.6 Balanço de Forças e Torques na Interface da Membrana

O balanço de forças e torques feito na interface da membrana é importante para se determinar o efeito de salto de tensão entre os dois fluidos que dividem esta interface. Estes balanços podem ser feitos utilizando-se tensores cartesianos ou de forma mais geral, utilizando coordenadas generalizadas.

Fazendo o balanço de Forças na superfície, tem-se que:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) dS + \int_{\partial S} \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}\mathbf{n}) dl = 0. \quad (4.54)$$

Desta forma, o salto de tensões é dado por

$$\Delta \mathbf{f} \equiv \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(2)}) = -\nabla^S \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}\mathbf{n}) \quad (4.55)$$

Da mesma maneira, pode-se fazer um balanço de momento angular na equação com respeito a um ponto qualquer \mathbf{x}_c , este balanço assume a seguinte forma:

$$\int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \Delta \mathbf{f} dS + \int_C (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times [\mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}\mathbf{n})] dl + \int_C \mathbf{n} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{m}) dl = 0 \quad (4.56)$$

Utilizando o teorema da divergência e assumindo que a área da superfície de balanço é infinitesimal, pode-se obter duas equações. Sendo a primeira uma expressão para a tensão transversal de cisalhamento:

$$\mathbf{q} = \nabla^S \cdot \mathbf{m} \quad (4.57)$$

e a segunda, assim como no balanço de momento angular de meios contínuos, uma equação sobre a simetria do tensor de tensões superficiais:

$$\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{B} \quad (4.58)$$

4.7 Equação Constitutiva Isotrópica Para o Tensor de Tensões Superficiais

Para o fechamento das equações do movimento, é necessária a determinação do tensor de tensões superficiais. Como não é possível se demonstrar tal tensor, é necessária uma equação constitutiva para o problema.

Assim como na equação constitutiva do tensor de tensões de fluidos Newtonianos, é possível determinar um modelo isotrópico para o tensor de tensões superficiais. Um modelo isotrópico, neste caso, seria um modelo em que não haveria uma direção preferencial para a tensão superficial, sendo na prática o modelo mais simples possível. Neste caso o tensor de tensões superficiais é dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \sigma \mathbf{1}^S, \quad (4.59)$$

em que o termo σ é denominado tensão superficial. Percebe-se que este modelo constitutivo não possui momento fletor e tampouco esforços cortantes. A intenção agora é calcular o salto de tensões gerado por este modelo. Da equação anterior, tem-se que:

$$\nabla^S \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla^S \cdot (\sigma \mathbf{1}^S) \quad (4.60)$$

Utilizando-se a regra do produto, encontra-se:

$$\nabla^S \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla^S \sigma - \sigma \nabla^S \cdot (\mathbf{n}\mathbf{n}) \quad (4.61)$$

Derivando mais uma vez utilizando a regra do produto, pode-se mostrar que:

$$\nabla^S \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla^S \sigma - \sigma \mathbf{n} (\nabla^S \cdot \mathbf{n}) \quad (4.62)$$

Logo, da seção anterior, tem-se um salto de tensões da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{f} = -\nabla^S \sigma + 2\kappa_m \sigma \mathbf{n} \quad (4.63)$$

4.8 Relação Tensão-Deformação de Superfícies

Para o fechamento das equações do movimento, é necessária a determinação do tensor de tensões superficiais. Como não é possível se demonstrar tal tensor, é necessária uma equação constitutiva para o problema.

O tensor gradiente de deformação, na descrição Lagrangeana, é dado por:

$$F_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right), \quad (4.64)$$

onde x_i são as coordenadas espaciais e X_i são as coordenadas materiais. Para o contexto de membranas, é ideal representar este tensor em sua forma projetada na superfície, dada por:

$$\mathbf{F}^S \equiv (\mathbf{1} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{n}_0\mathbf{n}_0). \quad (4.65)$$

Pode-se também introduzir o tensor de “stretch” de Cauchy-Green à esquerda \mathbf{V} , dado por:

$$\mathbf{V}^2 \equiv \mathbf{F}^S \cdot (\mathbf{F}^S)^T. \quad (4.66)$$

Utilizando os autovetores normalizados do tensor \mathbf{V} como base, podemos escrever o tensor de tensões superficiais como:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_1^P \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \tau_2^P \hat{\mathbf{e}}_2 \hat{\mathbf{e}}_2. \quad (4.67)$$

Para a análise de tensões, o ideal é expressar o tensor de tensões de Cauchy em termos dos tensores de Piola-Kirchhoff, na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (4.68)$$

em que \mathbf{T} e \mathbf{S} são, respectivamente, o primeiro e o segundo tensores de Piola-Kirchhoff. O interesse nestes tensores surge do fato de se poder calcular as forças atuantes em determinada superfície utilizando o estado não-deformado do meio contínuo, o que seria interessante em termos computacionais.

A relação entre tensão e deformação é escrita derivando a função “energia de strain” W_V da seguinte forma:

$$T_{ij} = \frac{\partial W_V}{\partial F_{ij}} \quad (4.69)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial W_V}{\partial E_{ij}} \quad (4.70)$$

Onde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (4.71)$$

é o tensor de Green-Lagrange, ou tensor de deformação material.

Para a formulação de membranas, definem-se fatores semelhantes, porém, projetados na superfície, dados por:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{J_S} \mathbf{F}^S \cdot \mathbf{T}^S = \frac{1}{J_S} \mathbf{F}^S \cdot \mathbf{S}^S \cdot (\mathbf{F}^S)^T \quad (4.72)$$

$$T_{ij}^S = \frac{\partial W_S}{\partial F_{ij}^S} \quad (4.73)$$

$$S_{ij}^S = \frac{\partial W_S}{\partial E_{ij}^S} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{E}^S = \frac{1}{2} ((\mathbf{F}^S)^T \cdot \mathbf{F}^S - \mathbf{1} + \mathbf{n}_0 \mathbf{n}_0) \quad (4.75)$$

Em que W_S é a função “energia de strain superficial” ou energia livre de Helmholtz da membrana, dada por:

$$W_S = \frac{E_S}{3} [(\Lambda_1^S)^2 + \Lambda_2^S - \Lambda_1^S], \quad (4.76)$$

onde $\Lambda_1^S = \ln(J_S)$ e $\Lambda_2^S = \frac{1}{2} Tr(\mathbf{V}^2) - 1$ são invariantes do “strain tensor”

4.8.1 Deformação de Superfície e Momentos Fletores

Da mesma forma que os tensores de tensão superficial deixam o problema indefinido, existe necessidade de uma equação constitutiva para os momentos fletores para o fechamento do problema.

O artigo faz uma discussão sobre a relação entre momentos fletores e invariantes do “strain”, mais uma vez utilizando derivadas da função “energia de strain superficial”. Os “strain invariants” são dados por:

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \quad (4.77)$$

$$\epsilon_{\eta\eta} = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} \quad (4.78)$$

$$\epsilon_{\xi\eta} = \epsilon_{\eta\xi} = \frac{1}{2h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} \right) \quad (4.79)$$

Onde os h 's são a norma dos vetores tangentes não-unitários, \mathbf{v} é o deslocamento de um ponto da membrana e ξ e η são as coordenadas de membrana.

No caso de deformações infinitesimais, pode-se definir a função energia de strain em termos de ϵ_{ij} e das curvaturas κ_{ij} , da seguinte forma:

$$W_S = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)(\epsilon_{\xi\xi}^2 + 2\epsilon_{\xi\eta}^2 + \epsilon_{\eta\eta}^2) + \nu(\epsilon_{\xi\xi} + \epsilon_{\eta\eta}) \right] + \frac{1}{2} E_B \left[(1-\nu)(\kappa_{\xi\xi}^2 + 2\kappa_{\xi\eta}^2 + \kappa_{\eta\eta}^2) + \nu(\kappa_{\xi\xi} + \kappa_{\eta\eta}) \right], \quad (4.80)$$

onde $E_B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é o módulo de flexão de membrana.

Assim, as tensões superficiais e os momentos fletores podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\tau_{ij} = \frac{W_S}{\epsilon_{ij}} \quad (4.81)$$

$$m_{ij} = \frac{W_S}{\kappa_{ij}} \quad (4.82)$$

Estas relações se aplicam para deslocamentos infinitesimais, o que não é muito bom na prática quando se está trabalhando com o movimento de membranas. Uma outra forma de equação constitutiva é proposta para pequenas deformações de flexão, mas não necessariamente deformações planares, esta equação é dada por:

$$\mathbf{m} = E_B (\mathbf{B} - \kappa_m^0 \mathbf{1}^S). \quad (4.83)$$

Na equação acima, κ_m^0 é a curvatura média no estado de referência. Uma forma mais geral desta também pode ser usada, dada por:

$$\mathbf{m} = E_B(\kappa_m - \kappa_m^0)\mathbf{1}^S \quad (4.84)$$

Esta equação é utilizada para pequenas deformações da condição de repouso ou equilíbrio.

4.8.2 Energia de flexão

A expressão derivada acima para energia de flexão foi para o caso específico de flexão em apenas um eixo. Uma expressão para a energia de flexão geral em superfícies foi introduzida por Caham (CANHAM, 1970) e generalizada por Helfrich (HELFRICH, 1973), resultando na seguinte expressão:

$$H = \frac{E_B}{2} \int_S (2\kappa_m - c_0)^2 dS + E_G \int_S k_G dS \quad (4.85)$$

A segunda integral, de acordo com o teorema Egrégio de Gauss, apenas depende da topologia da superfície. Porém, a integral do quadrado da curvatura média no estado de referência tem bastante influência na energia de flexão. A pergunta a ser levantada é: seria o formato bicôncavo das hemácias um formato favorável a minimizar a energia de flexão da célula? O problema de mínima energia de flexão poderia ser posto da seguinte forma:

Dado o funcional

$$H = \int_S \kappa_m^2 dS \quad (4.86)$$

Qual a superfície satisfaz o seguinte problema:

$$\delta H = 0 \quad (4.87)$$

Restrito à uma condição de área constante tal que:

$$\int_S dS = S_0 \quad (4.88)$$

e volume constante:

$$\int_V dV = V_0 \quad (4.89)$$

Este problema obviamente não é simples de ser resolvido, e pode não haver uma solução única para o mesmo. Porém, é possível verificar a energia de flexão para diferentes superfícies e compará-las.

4.9 Cálculo Numérico da Energia de Flexão em uma Membrana

Para o cálculo da energia de flexão da superfície de uma membrana, pode ser utilizado um método de malha discreta de elementos triangulares na superfície. A ideia durante o projeto foi utilizar este método para comparar esta integral em alguns tipos diferentes de formatos. Os passos para a realização deste procedimento são descritos nas seguintes subseções.

4.9.1 Geração dos Pontos de Malha e das Conexões Entre os Nós

Foi feito um algoritmo para a geração de pontos de malha seguindo o seguinte procedimento:

- Determinação dos pontos da malha
- Determinação das conexões entre os pontos a partir da parametrização
- Eliminação de pontos repetidos, mantendo suas conexões

Para a determinação dos pontos da malha, foi utilizado a malha natural da parametrização da função. Isto é, considerando cada matriz $X_{ij}^{(k)} = x_k(u_i, v_j)$, definiu-se conexões entre nós de forma a formar triângulos, como ilustrado na figura abaixo:

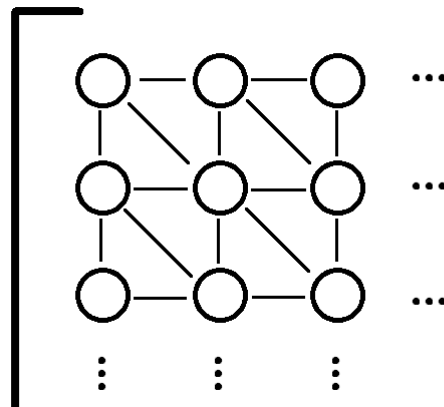


Figura 7 – Conexão entre nós utilizando a parametrização

A matriz de conexões foi definida da seguinte forma:

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Caso exista uma conexão entre } i \text{ e } j \\ 0 & \text{Caso não exista uma conexão entre } i \text{ e } j \end{cases} \quad (4.90)$$

Após esta etapa, foi verificada a existência de pontos iguais na malha, e foi feita uma reconexão de forma a eliminar estes pontos repetidos, evitando problemas de uma

malha aberta. O código gera como resultado um arquivo com os pontos e a matriz de conexão.

4.9.2 Geração e Orientação dos Elementos

Foi feita também uma rotina responsável por ler a matriz de conexões e dela extrair um arquivo com os elementos de malha triangulares orientados de forma a obter vetores normais em uma mesma orientação coerente.

Após identificados os triângulos da matriz de conexões, é verificada a existência de triângulos que não estão na malha, este procedimento é feito verificando se existem vértices com mais de dois triângulos, identificando os triângulos que não pertencem à malha e os eliminando.

Já com todos os elementos da malha definidos, é necessário orientá-los de uma forma que o cálculo dos vetores normais resultem vetores normais apontados apenas para a direção externa ou apenas para a direção interna da malha. Esta orientação foi feita da seguinte forma: Considerando o primeiro triângulo da malha orientado

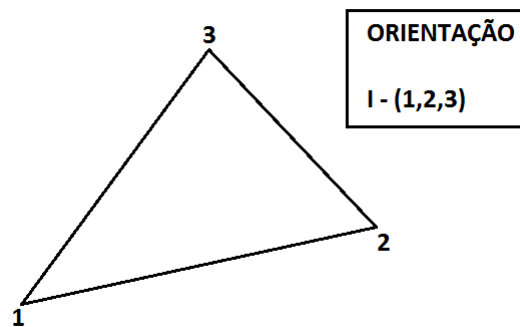


Figura 8 – Primeiro elemento da malha orientado

Orienta-se os triângulos das malhas vizinhas de forma que os segmentos de interseção tenham um sentido oposto no par de malhas.

Marcando os elementos orientados, a re-orientação dos mesmos elementos é impedida e qualquer problema relacionado é evitado. Esta rotina exporta o arquivo de elementos, extremamente necessário para o cálculo das curvaturas.

4.9.3 Cálculo das Curvaturas Pelo Método do Ajuste

Para o cálculo das curvaturas nos nós da malha foi utilizado o método do ajuste. Este método consiste em utilizar um ajuste de um parabolóide por mínimos quadrados em um conjunto de pontos e calcular analiticamente a curvatura do parabolóide.

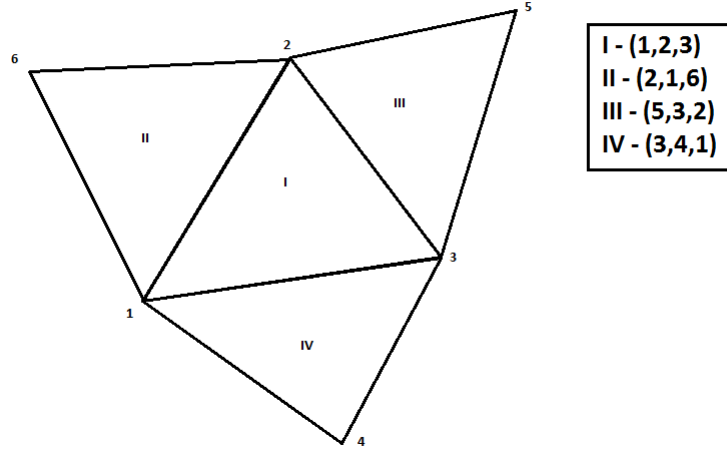


Figura 9 – Elementos vizinhos orientados com base no primeiro

A primeira parte do procedimento consiste em calcular os vetores normais nos nós de malha. Para isto, considerou-se que o vetor normal em um ponto da malha é uma “média” dos vetores normais das faces vizinhas a este ponto.

Após isto, para cada ponto se toma o conjunto composto por este e seus vizinhos. Estes pontos são transladados de forma ao ponto de referência ficar na origem.

Após isto, é feita uma rotação, de forma que o vetor normal no ponto se alinhe com a direção z do espaço. Para isto, utilizou-se a transformação de rotação definida pelo seguinte tensor:

$$\mathbf{Q} = \cos(\theta)\mathbf{1} + \sin(\theta)\boldsymbol{\omega}_{\times} + (1 - \cos(\theta))\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}, \quad (4.91)$$

em que

$$[\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

é a matriz identidade,

$$[\boldsymbol{\omega}_{\times}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

é a matriz que representa o pseudotensor definido pelo vetor $\boldsymbol{\omega}$, e

$$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} \omega_1\omega_1 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3 \\ \omega_2\omega_1 & \omega_2\omega_2 & \omega_2\omega_3 \\ \omega_3\omega_1 & \omega_3\omega_2 & \omega_3\omega_3 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

é a matriz que representa o diádico de $\boldsymbol{\omega}$ com ele mesmo. No caso do problema em questão, tem-se que:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.95)$$

e

$$\cos(\theta) = \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.96)$$

Após este passo, é feito um ajuste de mínimos quadrados para ajustar a superfície de um parabolóide da forma

$$z = -Ax^2 - Bxy - Cy^2 \quad (4.97)$$

aos pontos em questão. Tem-se que a curvatura média deste parabolóide no ponto $(x, y) = (0, 0)$ é calculada analiticamente utilizando os procedimentos descritos no início do capítulo, resultando:

$$\kappa_m = A + C \quad (4.98)$$

Desta forma é possível determinar a curvatura média em todos os pontos da malha.

4.9.4 Integral Numérica da Curvatura ao Quadrado na Superfície

A curvatura ao quadrado foi integrada ao longo da superfície utilizando um processo de quadratura de Gauss. Como este processo não pode ser utilizado em domínios triangulares, foi feita uma subdivisão dos elementos de malha na seguinte forma:

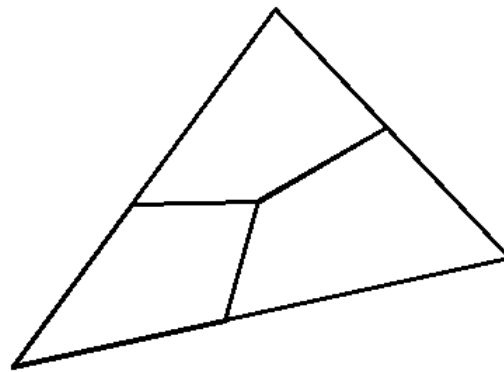


Figura 10 – Elementos de malha triangulares divididos em quadriláteros

Após esta subdivisão, foi feito um mapeamento levando cada um dos quadriláteros no domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$, como na figura abaixo:

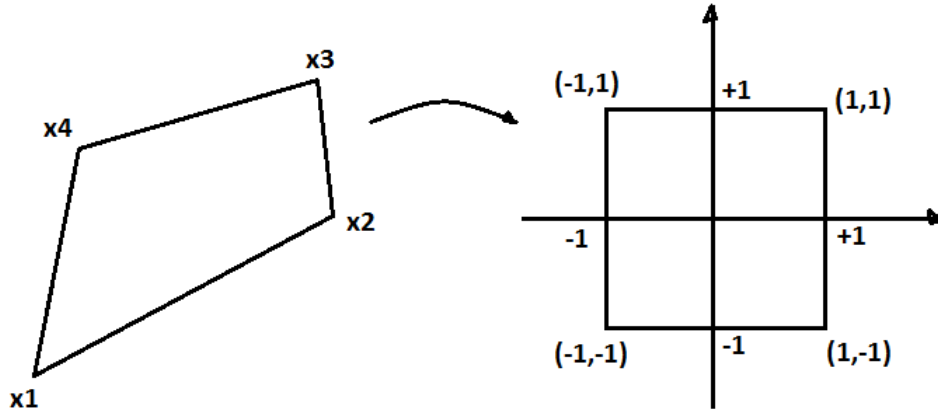


Figura 11 – Mapeamento para a quadratura de Gauss

Este mapeamento foi feito utilizando funções de forma, tal que:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^4 \phi_n(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^{(n)} \quad (4.99)$$

As funções de forma são tais que:

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ \phi_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \end{cases} \quad (4.100)$$

É possível notar que existem pontos dos quadriláteros onde a curvatura não foi calculada, pois estes não são nós da malha. Para estes foi utilizada uma interpolação linear de plano. As integrais de propriedades de superfícies podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\int_S f(\mathbf{x}) dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^4 \phi_n(\xi_1, \xi_2) f(\mathbf{x}^{(n)}) \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.101)$$

em que g é a raiz quadrada do determinante do tensor métrico, dado por:

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_j}, \quad (4.102)$$

que pode ser facilmente obtido numericamente utilizando as derivadas parciais das funções de forma. Utilizando-se este método é possível calcular a integral de qualquer propriedade na malha da superfície. Os procedimentos realizados neste trabalho podem ser aproveita-

dos também para o estudo do movimento de células e/ou gotas, utilizando a formulação de integral de contorno apresentada na literatura (KIM; KARRILA, 2013).

5 Difusão Hidrodinâmica

Neste capítulo são apresentados fundamentos de difusão, contendo exemplos e demonstrações clássicos para o caso isotrópico. É apresentado também o fenômeno chamado difusão ou dispersão hidrodinâmica e são explicadas as diferenças entre o mesmo e os fenômenos clássicos de difusão. O objetivo deste capítulo é definir este fenômeno físico e explicitar sua importância para a formação da camada livre de glóbulos vermelhos no escoamento de sangue, cujo efeito no escoamento será explorado posteriormente neste trabalho.

5.1 Difusão e Difusão Hidrodinâmica

A difusão é um fenômeno macroscópico advindo de uma interpretação estatística de fenômenos que acontecem em escalas menores. É um dos focos de estudo da mecânica estatística e termodinâmica do não-equilíbrio e está relacionada diretamente com a segunda lei da termodinâmica. Fenômenos difusivos podem ter origens diferentes, como flutuações térmicas, de velocidade e outras.

Na visão macroscópica da difusão existe um conceito importante chamado fluxo difusivo. Este representa o transporte de uma propriedade através de uma superfície devido ao efeito de difusão. Esta propriedade é definida por uma equação constitutiva; ou seja, não é algo deduzido. Porém, existem alguns mecanismos que permitem definir boas equações constitutivas para este termo, como uma relação linear força-fluxo, muito utilizada na termodinâmica do não-equilíbrio. Alguns exemplos deste tipo de relação são: Lei de Fourier, Lei de Fick e Equação Constitutiva para Fluidos Newtonianos.

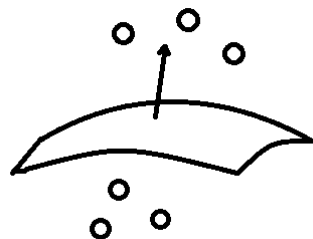


Figura 12 – Fluxo difusivo através de uma superfície

Ao contrário de fenômenos de difusão, como condução de temperatura e difusão de massa, que têm suas origens em escala molecular, a difusão hidrodinâmica se origina nas interações entre as partículas ou gotas, e as irreversibilidades destas, causadas pela quebra de algum tipo de simetria, seja o formato não-esférico das partículas, rugosidade (CUNHA; HINCH, 1996), deformações de gotas (LOEWENBERG; HINCH, 1997), três partículas (WANG; MAURI; ACRIVOS, 1996), interação magnética (CUNHA; GONTIJO; SOBRAL, 2013), efeitos de dissipação de energia, entre outros. Devido ao caráter aleatório da contínua interação entre partículas em um fluido escoando, o deslocamento nas linhas de corrente causado pela quebra de simetria das partículas causa um movimento randômico, mesmo que a partícula não esteja sujeita à efeitos Brownianos (DRAZER et al., 2002). O estudo acerca deste fenômeno é muito mais recente que os outros citados, e o fenômeno em si é de certa forma diferente, no sentido da sua origem não-molecular (alguns pesquisadores, inclusive, não concordam com a utilização da palavra difusão para defini-lo, já que não é um fenômeno em escala molecular e pelo fato deste ser induzido por um escoamento); entretanto, como o efeito macroscópico gerado por essas interações hidrodinâmicas é semelhante aos outros em sua descrição matemática, o termo difusão também é utilizado.

5.2 Mecanismos de Transporte por Difusão

5.2.1 Equação Governante

A equação governante para fenômenos difusivos simples é encontrada fazendo o balanço de uma quantidade em um volume de controle com o fluxo de entrada desta através da fronteira deste volume. A representação deste balanço é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi dV = \int_S \mathcal{F} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS \quad (5.1)$$

e como o balanço é feito em um volume de controle, tem-se que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{F}. \quad (5.2)$$

A equação acima é uma forma geral da equação da difusão. Para a mesma poder ser resolvida, é necessário definir quem é o termo \mathcal{F} , chamado fluxo difusivo. Para isto, deve se fazer uso de um modelo constitutivo.

5.2.2 Equação Constitutiva Para o Fluxo Difusivo

Para casos simples, uma equação constitutiva para o fluxo difusivo pode ser dada por:

$$\mathcal{F} = -\mathbf{D} \cdot \nabla \phi. \quad (5.3)$$

A interpretação desta equação é simplesmente uma relação linear entre “força” e “fluxo”, muito utilizada em termodinâmica, onde o termo $\nabla \phi$ seria a “força” responsável para a ocorrência do processo de difusão. Isto fica claro quando se pensa na difusão como decorrência de um não-equilíbrio no sistema, pois a existência de um gradiente de certa quantidade é responsável por gerar o fenômeno que vai restaurar a mesma para um estado de equilíbrio, este mecanismo é chamado “down-gradient diffusion”, outro fenômeno de difusão está relacionado ao “random walk” da partícula, e é denominado “self diffusion”, em casos como o movimento browniano, por exemplo, os dois efeitos coincidem. Utilizando o modelo constitutivo (5.3) na equação (5.2), obtêm-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{D}) \cdot \nabla \phi + \mathbf{D} : \nabla \nabla \phi. \quad (5.4)$$

Para o caso de um meio isotrópico e no qual a difusividade é independente do espaço, encontra-se:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi. \quad (5.5)$$

Esta é a equação clássica de difusão (FIGUEIREDO, 2000). A mesma aparece em problemas de condução de calor, difusão de concentrações e outros. A equação diferencial parcial (EDP) é classificada como uma equação parabólica, na qual o termo laplaciano possui papel dissipativo.

5.2.3 Difusividade

O tensor difusividade \mathbf{D} está diretamente relacionado ao comportamento de pequenas escalas, mais precisamente à mobilidade das partículas ou moléculas. Este tensor está associado à função correlação temporal de velocidades e pode ser dado por:

$$\mathbf{D} = \int_0^\infty \langle \mathbf{u}(0) \mathbf{u}(t) \rangle dt. \quad (5.6)$$

Uma demonstração da relação acima para casos isotrópicos é dada por (ZWANZIG, 2001) considerando o problema de difusão de concentração unidimensional na forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (5.7)$$

Considerando que uma partícula se encontra na posição $x = 0$ no instante inicial, com representação dada por $C(x, 0) = \delta(0)$, após este instante sua concentração irá se espalhar com uma distribuição gaussiana (para verificar este fato, basta resolver a equação utilizando uma transformada de Fourier). Por simetria, o deslocamento médio será igual a zero. Porém, o deslocamento quadrado médio é dado por:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 C(x, t) dx, \quad (5.8)$$

calculando a derivada parcial no tempo, tem-se que:

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial}{\partial t} C(x, t) dx, \quad (5.9)$$

na qual, utilizando a própria equação da difusão, pode-se substituir o termo da derivada temporal de $C(x, t)$ da seguinte forma:

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial t} = D \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) dx. \quad (5.10)$$

Integrando por partes e utilizando o fato de que $C(x, t)$ e sua primeira derivada espacial são nulos no infinito, obtêm-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \langle x^2 \rangle}{\partial t} = 2D. \quad (5.11)$$

Considerando D constante ao longo do tempo e integrando a equação, obtêm-se a famosa fórmula de Einstein para difusão unidimensional: $\langle x^2 \rangle = 2Dt$.

Para a segunda parte da demonstração, uma representação mecânica da posição quadrada média é feita em termos da velocidade; para isto, basta fazer

$$x(t) = \int_0^t u(t') dt' \quad (5.12)$$

e

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle u(t') u(t'') \rangle dt' dt''. \quad (5.13)$$

Para derivar a equação (5.13), utiliza-se a regra de Leibniz para derivação por cima do sinal de integral, que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle = 2 \int_0^t \langle u(t) u(t') \rangle dt'. \quad (5.14)$$

Como a função de correlação de velocidades é uma média no equilíbrio e não pode depender do tempo de origem, apenas da diferença de tempos $s = t - t'$, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x^2 \rangle = 2 \int_0^t \langle u(s)u(0) \rangle ds. \quad (5.15)$$

A função de correlação de velocidades geralmente decai para zero em um curto período de tempo, considerando que a equação da difusão deve ser válida para todos os períodos de tempo, muito maiores do que a escala de tempo necessária para o decaimento da função correlação de velocidades, toma-se o limite de integração tendendo ao infinito na equação (5.15). Comparando com a equação (5.11), tem-se a relação:

$$D = \int_0^\infty \langle u(t)u(0) \rangle dt, \quad (5.16)$$

que demonstra a equação (5.6), como no caso de isotropia, a difusão é independente da direção. Esta relação entre a difusividade e a correlação de velocidades é importante pois indica uma relação de um fenômeno microscópico de movimento e um fenômeno macroscópico de difusão.

5.3 Movimento Browniano

Esta seção dedica-se a mostrar o estudo de difusão no caso de uma partícula sujeita a um movimento browniano. Este estudo é relevante pois estuda um exemplo simples de difusão isotrópica e não-convectiva

5.3.1 Equação de Langevin

A equação do movimento de uma partícula de massa m e raio a sujeita à forças oriundas de flutuações térmicas em um fluido com viscosidade μ em escoamento com baixo número de Reynolds é dada por:

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\zeta \mathbf{u} + \mathbf{F}(t), \quad (5.17)$$

em que $\zeta = 6\pi\mu a$ (KIM; KARRILA, 2013) é o chamado termo de mobilidade da partícula e vem da solução do escoamento de Stokes. O termo $\mathbf{F}(t)$ é chamado termo de ruído, e ocorre devido às forças estocásticas provenientes do bombardeamento de moléculas na partícula. Dividindo a equação inteira pela massa, encontra-se:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\gamma \mathbf{u} + \mathbf{L}(t), \quad (5.18)$$

onde fica claro que $\gamma = \zeta/m$ e $\mathbf{L} = \mathbf{F}/m$. A equação de Langevin é uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem e pode ser resolvida facilmente utilizando o método do fator integrante, que dá o seguinte resultado:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \mathbf{L}(t') dt'. \quad (5.19)$$

Sobre o termo $\mathbf{L}(t)$ são feitas as seguintes considerações:

- $\mathbf{L}(t)$ é independente da velocidade;
- $\mathbf{L}(t)$ varia extremamente rápido se. comparado à velocidade

Esta segunda implica na existência de intervalos de tempo Δt em que $\mathbf{u}(t)$ tem variações muito pequenas, enquanto $\mathbf{L}(t)$ passa por varias flutuações. Ou seja, enquanto $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ possuem uma variação quase desprezível, não existe correlação entre $\mathbf{L}(t)$ e $\mathbf{L}(t + \Delta t)$, o que permite escrever as seguintes propriedades estatísticas:

$$\langle \mathbf{L}(t) \rangle = 0, \quad (5.20)$$

$$\langle \mathbf{L}(t') \mathbf{L}(t'') \rangle = \Gamma \delta(t' - t'') \mathbf{1}. \quad (5.21)$$

Pode-se calcular o termo Γ utilizando apenas a consideração de que as velocidades das partículas no fluido obedecem no equilíbrio uma distribuição de Maxwell-Boltzmann. Calculando a média do produto interno das velocidades pela solução da equação de Langevin e pela distribuição de probabilidade, tem-se que:

$$\Gamma = \frac{2K_B T \gamma}{m}. \quad (5.22)$$

5.3.2 Conexão com a Equação da Difusão

Para ocorrer o fenômeno de difusão por movimento browniano, é necessário que a escala de tempo de relaxação do movimento partícula Browniana seja muito menor do que a escala de tempo em que se observa o movimento da partícula. Considerando que a escala de tempo browniana é dada por $\tau_B = \gamma^{-1}$, pode-se escrever a equação de Langevin na forma chamada sobre-amortecida, sendo esta dada por:

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\gamma} \mathbf{L}(t). \quad (5.23)$$

Calculando a correlação de velocidades, tem-se que:

$$\langle \mathbf{u}(t') \cdot \mathbf{u}(t'') \rangle = \frac{3\Gamma}{\gamma^2} \delta(t' - t''). \quad (5.24)$$

Aplicando a equação (5.24) em (5.6), encontra-se que:

$$D = \frac{\Gamma}{2\gamma^2} = \frac{K_B T}{\zeta}, \quad (5.25)$$

que relaciona o coeficiente de difusão com a mobilidade das partículas em movimento browniano.

5.4 Difusão Hidrodinâmica

Estudos iniciais sobre o fenômeno de difusão hidrodinâmica tiveram início no final da década de 70 (ECKSTEIN; BAILEY; SHAPIRO, 1977). Já na década de 90, este estudo começou a se tornar mais popular, pois se perceberam aplicações interessantes para teorias de difusão hidrodinâmica de partículas rígidas em suspensões (CUNHA; HINCH, 1996) e de gotas em emulsões (LOEWENBERG; HINCH, 1997). Estudos feitos nesta década (WANG; MAURI; ACRIVOS, 1998) apresentaram expressões para a auto-difusividade induzida por cisalhamento. A teoria de Cunha & Hinch foi aplicada para estudar a auto-difusão de gotas deformáveis, utilizando-se o método de integral de contorno. O efeito de difusão hidrodinâmica combinado com o efeito de migração de partículas (CHAN; LEAL, 1979) formam uma camada de depleção de partículas próxima à parede, que é de grande importância na reologia do sangue.

5.4.1 Difusão x Migração

No caso de suspensões em escoamento, existem dois efeitos que influenciam na concentração de partículas ao longo do espaço: o efeito de difusão hidrodinâmica e o de migração. O primeiro está relacionado à tendência de dispersão das partículas no fluido, graças às irreversibilidades de movimento após as interações entre as partículas, enquanto o segundo está relacionado com a tendência das partículas de se afastarem da parede, devido à interação entre ambas. No caso de um escoamento em vasos, estes efeitos poderiam ser interpretados, respectivamente, como um efeito que faz as partículas ocuparem todo o vaso e um outro que faz as mesmas se distanciarem das paredes do vaso, como ilustrado na figura abaixo:

Quando uma suspensão adentra um tubo, ela possui uma concentração uniforme de partículas. Ao longo do tubo, o efeito de migração força as partículas a se afastarem da parede, enquanto o efeito difusivo tenta espalhá-las. Esta “competição” entre estes dois processos gera o desenvolvimento de uma depleção de partículas nas regiões próximas à parede, até um ponto de equilíbrio no qual esta região possui uma espessura constante.

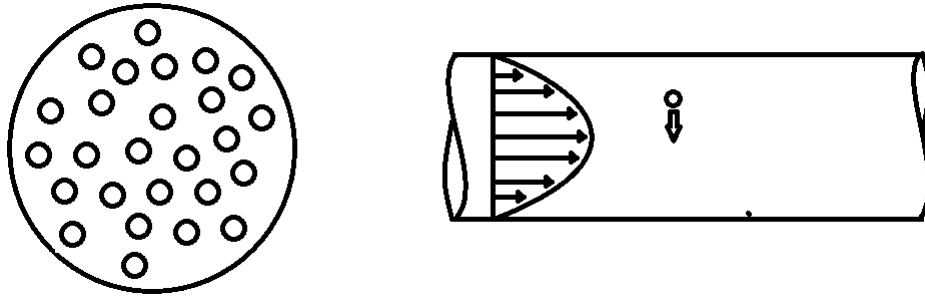


Figura 13 – Difusão x Migração

5.4.2 Fluxo Difusivo

Na equação governante para o estudo da difusão hidrodinâmica, o fluxo difusivo não contém apenas o termo de difusão, mas também o termo de migração. Este fluxo é dado por:

$$\mathcal{F} = \phi \mathbf{u} - \mathbf{D} \cdot \nabla \phi, \quad (5.26)$$

em que \mathbf{u} é a velocidade de “drift” da partícula, que está associada ao efeito de migração e \mathbf{D} é o tensor difusividade hidrodinâmica. Isto confere à equação de difusão a forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) + \nabla \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla \phi). \quad (5.27)$$

Como \mathbf{u} não é apenas a velocidade do escoamento, mas também contém o termo da velocidade de migração das partículas, não se pode assumir $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

5.4.3 Difusividade Hidrodinâmica

Assim como no caso do movimento browniano, a difusividade hidrodinâmica está relacionada com a mobilidade das partículas. Porém, esta não é definida da mesma forma do movimento browniano, e sim a partir do conceito de mobilidade utilizado em microhidrodinâmica (KIM; KARRILA, 2013). Outros parâmetros que influenciam a difusividade hidrodinâmica são a concentração de partículas, a taxa de cisalhamento, a geometria das partículas, a rugosidade, a capilaridade e a razão de viscosidades (no caso de gotas). Uma forma geral para o tensor difusividade é dada por:

$$\mathbf{D} = D_0 \mathbf{1} + \mathbf{D}_H \quad (5.28)$$

Onde D_0 é a contribuição browniana, calculada na seção anterior, e \mathbf{D}_H é a contribuição hidrodinâmica, que depende de todos os fatores citados anteriormente. Em pro-

blemas de escoamento de sangue, a difusividade browniana tem contribuição quase nula, pois o número de Peclet é muito alto.

A auto-difusão hidrodinâmica é originada pelo “random walk” nas linhas de corrente, que é causado pela quebra de simetria durante as colisões, como mostra a figura abaixo:

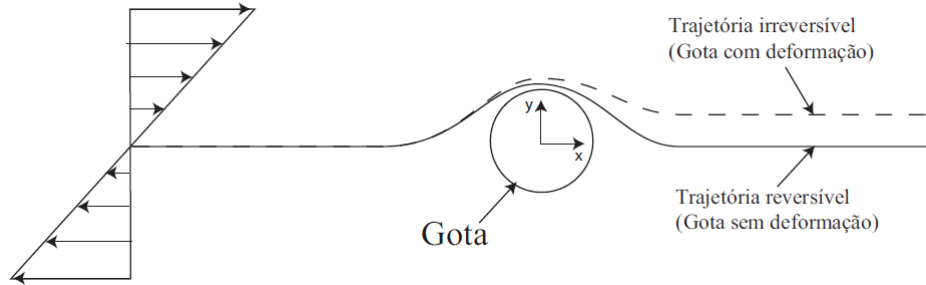


Figura 14 – Quebra de simetria após a interação entre duas gotas (CARVALHO, 2008)

A a auto-difusividade devido a deslocamentos randômicos com passos de mesma distância realizados por uma partícula é dada por $D = \frac{1}{2} \frac{N}{t} l$, onde $\frac{N}{t}$ é o número de passos por tempo e l é o tamanho do passo dos deslocamentos. No caso da auto-difusividade hidrodinâmica na direção y induzida por um cisalhamento simples, tem-se de forma similar, por Cunha & Hinch (CUNHA; HINCH, 1996), que a taxa de colisões por tempo é de $n \dot{\gamma} y^{-\infty} dy^{-\infty} dz^{-\infty}$, resultando em:

$$D^s = \frac{1}{2} n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta Y)^2 \dot{\gamma} |y^{-\infty}| dy^{-\infty} dz^{-\infty}, \quad (5.29)$$

em que n é o número de partículas por unidade de volume, ΔY é o deslocamento com relação à linha de corrente e $y^{-\infty}$ e $z^{-\infty}$ são as posições y e z iniciais da partícula antes da colisão. Para este resultado, foi considerada uma suspensão diluída, na qual não há correlações de longo alcance entre as partículas. Nota-se que esta integral nada mais é do que uma extensão do resultado da difusão originada pelos deslocamentos randômicos, em que o termo $\frac{N}{t} l$ se converte em uma ponderação na média, onde as regiões de maior velocidade tem tendência a um maior número de colisões. Pode-se também adimensionalizar os termos da integral pela escala de comprimento do raio da partícula, resultando em:

$$D^s = \frac{3\dot{\gamma} a^2}{8\pi} \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta \tilde{Y})^2 |\tilde{y}^{-\infty}| d\tilde{y}^{-\infty} d\tilde{z}^{-\infty} \quad (5.30)$$

Como os passos de deslocamento das partículas dependem dos fatores de quebra de simetria; como no caso de gotas em emulsões pode ser medido pela razão de viscosidade λ . Tem-se, neste caso, que:

$$D^s = \dot{\gamma} a^2 \phi F(\lambda) \quad (5.31)$$

, em que $F(\lambda)$ pode ser determinado experimentalmente ou numericamente. Esta forma de se escrever o coeficiente de auto-difusão mostra uma característica muito peculiar no comportamento deste processo de difusão: a difusão hidrodinâmica é um fenômeno não-linear.

Outra diferença entre a difusão hidrodinâmica e o fenômeno clássico de difusão está no fato de que em fenômenos clássicos, a auto-difusão (difusão causada por deslocamentos randômicos), é a mesma difusão causada por gradientes de concentração. No caso da difusão hidrodinâmica os dois são fenômenos distintos. A difusividade devido a pequenos gradientes de concentração é dada (já na forma adimensional) por:

$$D^{DG} = \frac{3\dot{\gamma}a^2}{4\pi} \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta\tilde{Y}| (\tilde{y}^{-\infty})^2 d\tilde{y}^{-\infty} d\tilde{z}^{-\infty} \quad (5.32)$$

Foi mostrado no trabalho de Cunha & Hinch (CUNHA; HINCH, 1996), que a difusividade hidrodinâmica total é dada por:

$$D_H = 2D^s + F \quad (5.33)$$

Este resultado pode ser observado fisicamente com a ajuda da figura abaixo:

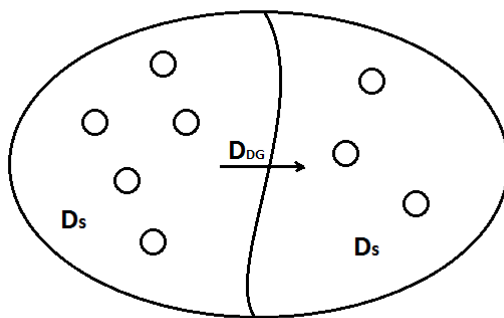


Figura 15 – Difusividades Hidrodinâmicas

Quando se tem duas regiões com pequenas diferenças de concentração, existe o fenômeno de difusão devido aos deslocamentos randômicos em cada uma das duas regiões, combinados com o fenômeno de difusão devido ao pequeno gradiente de concentração. Foi também mostrado no trabalho de Cunha & Hinch que a difusividade devido a pequenos gradientes de concentração pode ser até 7 vezes maior do que a auto-difusividade.

5.5 Importância da Difusão Hidrodinâmica no Escoamento de Sangue em Microvasos

A importância da difusão hidrodinâmica no escoamento do sangue em microvasos está relacionada à formação da camada livre de células próxima às paredes do vaso. Isto acontece devido à combinação do efeito de difusão hidrodinâmica com a migração das células para longe da parede. Enquanto a difusão tenta distribuir as partículas ao longo da seção transversal, a migração faz com que as partículas se afastem da parede ao longo do escoamento, formando uma região onde não há glóbulos vermelhos. Em situações em que esta região é muito menor que o comprimento do vaso, este fenômeno não tem tanta importância, mas à medida em que se diminui o diâmetro do vaso, percebe-se um efeito de diminuição da viscosidade efetiva do escoamento de sangue no vaso, este efeito é conhecido como efeito de Fahraeus-Lindqvist ([FÅHRÆUS; LINDQVIST, 1931](#)). Porém, esta camada não se forma instantaneamente. Como o fluido que entra no vaso sanguíneo é uma suspensão, é razoável que este fluido no início do escoamento no vaso esteja com uma distribuição mais uniforme de eritrócitos; ou seja, a camada livre de células é desenvolvida ao longo do comprimento do vaso até um limite no qual os dois mecanismos, difusão e migração, estão equilibrados. Estudos do desenvolvimento de camadas livres de partícula são um tema ainda discutido recentemente no meio acadêmico. ([GRANDCHAMP et al., 2013](#))

5.6 Modelo Para Migração de Gotas de uma Emulsão em Cisalhamento

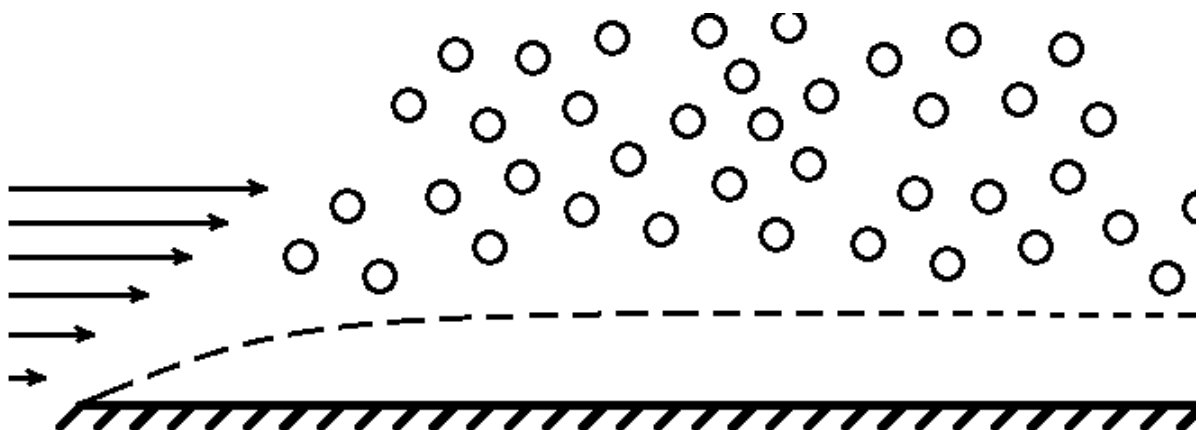


Figura 16 – Migração de gotas e formação da zona de depleção de gotas

Esta seção apresenta o problema de migração de gotas de baixa fração volumétrica e alta razão de viscosidade. É considerado regime de baixo número de Reynolds em que gotas se encontram próximas à parede e em movimento devido à velocidade do escoamento.

Nesta situação de altas razões de viscosidade, as gotas apresentam pequenas deformações devido ao seu baixo módulo de elasticidade. Estas pequenas deformações são devidas à inexistência de movimento no interior da gota, fazendo com que a escala de tempo de rotação seja muito menor que a escala de tempo de deformação. Assim, a gota possui movimento de rotação predominante ao de deformação. Tal pode ser explicado pelo seguinte: quando a gota se encontra no quadrante extensional de cisalhamento rapidamente se posiciona no quadrante de compressão apresentando assim pequenas deformações. A pequena deformação é suficiente para produzir tanto um fluxo difusivo transversal induzido pelo escoamento na direção da parede devido a interação gota-gota bem como um deslocamento transversal médio na direção do centro do escoamento devido a interação gota-parede.

5.6.1 Equação Governante

A equação governante do problema é a do transporte envolvendo difusão hidrodinâmica e migração, discutida na seção anterior, para solução monodispersa de gotas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial(u_x \phi)}{\partial x} - \frac{\partial(u_y \phi)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (5.34)$$

Nesta equação, as velocidades u_x e u_y são as velocidades de migração das gotas. No caso de cisalhamento simples, u_x é a velocidade do escoamento, dada por $\dot{\gamma}y$ e u_y é a velocidade de “drift” das partículas. Esta velocidade é consequência da interação hidrodinâmica entre a partícula e a parede. Como a gota sofre uma deformação devido ao cisalhamento, esta pode ser vista como um dipolo hidrodinâmico, que gera uma perturbação nos campos de velocidade (stokeslet) e na tensão do escoamento (stresslet). Como a gota exerce uma força na parede, pela terceira lei de Newton, a parede exerce uma força em sentido oposto na gota, fazendo com que esta se afaste a uma velocidade u_y , este resultado foi calculado (SMART; JR, 1991), tal que:

$$u_y = -\frac{9}{64\pi\mu y^2} \langle S_{yy} \rangle \quad (5.35)$$

em que $\langle -S_{yy} \rangle$. é a média volumétrica da componente normal da tensão na superfície da gota por unidade de volume, considerando a deformação de cada gota isolada na emulsão diluída. O tensor de tensões sobre a gota representa o dipolo hidrodinâmico induzido pelo contorno sólido sobre a superfície da partícula em regime de baixo número de Reynolds (KIM; KARRILA, 2013):

$$\mathbf{S} = -2\mu \frac{4}{3} \pi a^3 \boldsymbol{\Sigma} \quad (5.36)$$

O trabalho de (SCHOWALTER; CHAFFEY; BRENNER, 1968) apresenta o tensor de tensões $\boldsymbol{\Sigma}$ calculado por uma teoria de segunda ordem, $O(\dot{\gamma}^2)$ para uma emulsão

infinitamente diluída sujeita a um cisalhamento simples, válida para qualquer razão de viscosidade λ . A obtenção deste tensor de tensões seguiu a ideia de que o tensor de tensões total é o somatório da contribuição de cada gota para o tensor de tensões. A expressão resultante é:

$$\Sigma_{yy} = -\frac{3}{140} \frac{\mu a \dot{\gamma}^2}{\tau_s} H(\lambda) \quad (5.37)$$

Em que (CHAN; LEAL, 1979):

$$H(\lambda) = \frac{(19\lambda + 16)(9\lambda^2 + 17\lambda + 9)}{(\lambda + 1)^3} \quad (5.38)$$

Para o limite de altas razões de viscosidade ($\lambda \gg 1$), tem-se que (5.38) se reduz a:

$$H(\lambda) = \frac{171\lambda + 467}{\lambda + 3} \quad (5.39)$$

5.6.2 Adimensionalização da Equação e Definição dos Parâmetros

As escalas principais do problema são a tensão superficial na gota τ_s , a viscosidade do fluido base μ e a fração volumétrica no infinito ϕ_∞ , que se situa em uma região na qual $\partial\phi/\partial y$ é nula. As grandezas adimensionais são definidas da seguinte forma:

$$\tilde{u} = \frac{u}{\tau_s/\mu}, \quad (5.40)$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{a}, \quad (5.41)$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\phi_\infty}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{a\mu/\tau_s}. \quad (5.43)$$

Com estas adimensionalizações, obtêm-se a seguinte equação adimensional:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial(\tilde{u}_x \tilde{\phi})}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial(\tilde{u}_y \tilde{\phi})}{\partial \tilde{y}} + \frac{V(\lambda)\phi_\infty}{Pe} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right), \quad (5.44)$$

na qual o termo $V(\lambda)$ é baseado no trabalho de (CUNHA; HINCH, 1996), e no caso específico é dado por:

$$V(\lambda) = \lambda^{-0.2915} (1.347 + \frac{2}{3} \log(\lambda))^{-0.7012}. \quad (5.45)$$

O parâmetro

$$Pe = \frac{\tau_s a / \mu}{D_0} \quad (5.46)$$

é chamado número de Peclet, e representa fisicamente a razão entre a escala de tempo difusivo (a^2/D_0) e a escala de tempo convectiva (no caso, a escala de tempo de deformação da gota ($a\mu/\tau_s$)). D_0 indica nesta situação a escala da difusão, dada por $D_0 = \gamma a^2$.

Adimensionalizando as equações para as velocidades, obtêm-se a equação adimensional governante do problema:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{t}} = -Ca \tilde{y} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} - \frac{9Ca^2}{1120} H(\lambda) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\tilde{\phi}}{\tilde{y}^2} \right) + \frac{V(\lambda)\phi_\infty}{Pe} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right), \quad (5.47)$$

na qual

$$Ca = \dot{\gamma} \mu a / \tau_s \quad (5.48)$$

é o número de capilaridade. As condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{cases} \phi(y, t) = 0 & \text{para } 0 \leq y \leq \delta \\ \phi(y, t) = \phi_\infty & \text{quando } y \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.49)$$

5.6.3 Solução assintótica para grandes tempos em regiões próximas à parede

Nas regiões próximas a parede, tem-se que $O(\tilde{y}) \ll 1$. Neste caso, por uma análise de escalas, é simples perceber que $\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\tilde{\phi}}{\tilde{y}^2} \right) \gg y \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}}$, o que motiva a eliminação do termo de convecção da equação. Para grandes tempos, quando os mecanismos de migração e difusão escalam, tem-se um regime permanente. Neste regime é possível obter uma equação simplificada, de tal forma que:

$$0 = -\frac{9Ca^2}{1120} H(\lambda) \frac{d}{d\tilde{y}} \left(\frac{\tilde{\phi}}{\tilde{y}^2} \right) + \frac{V(\lambda)\phi_\infty}{Pe} \frac{d}{d\tilde{y}} \left(\tilde{\phi} \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{y}} \right). \quad (5.50)$$

Com este modelo simples nesse limite assintótico, pretende-se mostrar que com a solução analítica obtida já é possível prever gradientes de concentração adjacentes na região de parede, ou seja, identificar uma camada limite de concentração além de avaliar uma primeira expressão explícita que mostra a dependência da espessura δ em função dos parâmetros físicos identificados no problema em questão.

Esta equação pode ser integrada sem dificuldades, integrando e utilizando as condições de contorno, obtêm-se a seguinte solução:

$$\tilde{\phi}(\tilde{y}) = \frac{9}{1120} \frac{Ca^2 Pe H(\lambda)}{\phi_\infty V(\lambda)} \left(-\frac{1}{\tilde{y}} + \frac{1}{\tilde{\delta}} \right). \quad (5.51)$$

Pode-se estimar a camada livre de gotas utilizando a condição de contorno no infinito, obtendo então:

$$\tilde{\delta} = \frac{9}{1120} \frac{Ca^2 Pe H(\lambda)}{\phi_\infty V(\lambda)}. \quad (5.52)$$

Abaixo segue a representação gráfica desta solução assintótica do desenvolvimento da “depleted layer” para alguns valores de capilaridade:

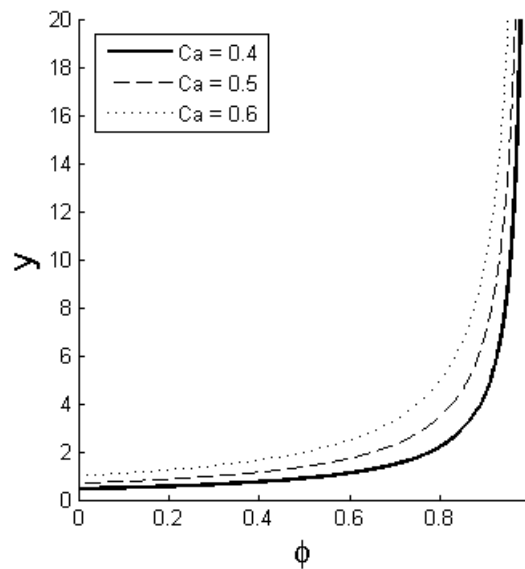


Figura 17 – Perfil de concentração de gotas para diferentes capilaridades em regime de cisalhamento simples após a região de depleção

6 Solução Assintótica Para Pequenos Tempos

Neste Capítulo, procura-se uma solução para pequenos tempos do problema de difusão hidrodinâmica e migração apresentado no capítulo passado. O tratamento é assintótico, utilizando-se método das perturbações, análises em diferentes escalas e encontrando soluções assintóticas nestas escalas.

6.1 Equação Governante

O problema é governado pela seguinte equação governante:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \alpha y \frac{\partial \phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi}{y^2} \right) = \gamma \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (6.1)$$

Cujas constantes que acompanham os termos da equação são definidas no capítulo de Difusão Hidrodinâmica, no qual este problema foi posto. Nesta parte do trabalho, na qual a intenção é encontrar uma solução para o problema, todas as variáveis presentes na equação são adimensionais.

O primeiro passo adotado para a solução deste problema foi livrar-se de todas as variáveis, com uma simples transformação da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \rightarrow \phi_{\infty} \phi \\ x \rightarrow \nu x \\ y \rightarrow \omega y \\ t \rightarrow \mu t \end{array} \right. \quad (6.2)$$

Nota-se que apesar de todas as variáveis do problema já serem adimensionais, a escolha correta dos valores destes “scalings” possibilita a remoção completa dos parâmetros

do sistema, resultando um problema da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} + y \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi}{y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ \phi(0, x, y) = 1 \\ \phi(t, x, y \rightarrow \infty) = 1 \\ \phi(t, x, y) > 0 \\ \phi(t, x, y < \delta) = 0 \\ \phi(t, 0, y) = 1 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Na região próxima a parede, tem-se que:

$$O(y) \ll O\left(\frac{1}{y^2}\right) \quad (6.4)$$

O que leva à seguinte simplificação do problema:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\phi}{y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

Com as mesmas condições de contorno anteriores, exceto para $\phi(t, 0, y)$. A equação é uma equação diferencial parcial não-linear e portanto é extremamente complicada de ser resolvida analiticamente. Para a abordagem deste problema foram feitas duas soluções assintóticas para regimes de pequenos e grandes t 's. Na região de pequenos tempos, o problema tem um comportamento rico em informações sobre a transição do estado inicial.

6.2 Primeiro Limite Assintótico

Para pequenos tempos, introduz-se a seguinte perturbação:

$$\phi(t, y) = \phi_0(y) + \phi_1(y)t + \phi_2(y)t^2 + \dots, \quad (6.6)$$

na qual, pelas condições de contorno, tem-se que:

$$\phi_0(y) = 1. \quad (6.7)$$

Substituindo ϕ na equação governante e considerando apenas os termos de primeira ordem, tem-se a seguinte equação para o termo ϕ_1 :

$$\phi_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y^2} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Esta equação pode ser facilmente integrada resultando em:

$$\phi_1 = \frac{2}{y^3} \quad (6.9)$$

O que faz a solução para ϕ assumir a seguinte forma.

$$\phi(t, y) = 1 + \frac{2t}{y^3} + \dots \quad (6.10)$$

Nota-se que para pequenos tempos e $y \sim O(1)$, tem-se que apenas o termo de primeira ordem é importante, e $\phi(t, y) = 1$. Os termos de ordem superior fazem diferença quando:

$$y \sim t^{1/3} \quad (6.11)$$

Para trabalhar com termos de ordem 1 nesta região, faz-se o seguinte “scaling”:

$$\phi(t, y) = f(t, \eta), \quad (6.12)$$

em que:

$$\eta = yt^{-1/3} \quad (6.13)$$

Feita esta transformação, é necessário modificar as equações governantes para se adequarem à nova variável η . Para isto, utiliza-se a regra da cadeia, a qual resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (6.15)$$

Pode-se desta forma chegar em uma equação para f da seguinte forma:

$$t \frac{\partial f}{\partial t} - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{f}{\eta^2} \right) = t^{1/3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (6.16)$$

6.3 Segundo Limite Assintótico e o Aumento da Concentração de Gotas

Como o objetivo é calcular a solução assintótica para pequenos tempos, introduz-se a seguinte perturbação para $f(t, \eta)$:

$$f(t, \eta) = f_0(\eta) + f_1(\eta)t^{1/3} + \dots \quad (6.17)$$

A perturbação é feita desta forma com o objetivo de conseguir encontrar equações para todas as ordens do problema. Caso a expansão fosse feita apenas com potências de t , os termos de ordem não inteira, como $t^{1/3}$, seriam todos nulos, o que não estaria correto. Na ordem principal, encontra-se a seguinte equação:

$$-\frac{1}{3}\eta f_0'(\eta) + \frac{f_0'(\eta)}{\eta^2} - \frac{2f_0(\eta)}{\eta^3} = 0 \quad (6.18)$$

Esta equação pode ser facilmente integrada da seguinte forma:

$$f_0'(\eta) \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1}{3}\eta \right) = \frac{2f_0(\eta)}{\eta^3} \quad (6.19)$$

$$\int_{f(\infty)}^{f(\eta)} \frac{df_0}{f_0} = \int_{\infty}^{\eta} \frac{6}{3\eta - \eta^4} d\eta \quad (6.20)$$

Percebe-se que a função a ser integrada possui um polo no ponto:

$$\eta = \sqrt[3]{3} \quad (6.21)$$

no qual a concentração cresce infinitamente. Este resultado indica que existe um problema nesta região, por isto, será feito um “scaling” para o estudo da mesma. A solução da equação para f_0 é dada por:

$$f_0 = \left(\frac{\eta^3}{\eta^3 - 3} \right)^{2/3} \quad (6.22)$$

6.4 Estudo Assintótico da Camada Ultra-Fina e “Matching” Assintótico

O próximo problema é estudar a região na qual ocorre o polo da última solução. Para isto é introduzida uma nova variável ζ , tal que:

$$\eta = \sqrt[3]{3} + \zeta, \quad (6.23)$$

com $|\zeta| \ll 1$. Esta variável possibilita uma análise assintótica na região da descontinuidade, e é responsável pelo “matching” assintótico.

A ideia agora é fazer uma análise da equação governante nesta região. Para isto, é necessário encontrar as escalas das variáveis na região. Desta forma, tem-se que:

$$y = (\sqrt[3]{3} + \zeta)t^{1/3}. \quad (6.24)$$

Utilizando-se a solução assintótica para f_0 , tem-se que o mesmo é aproximadamente:

$$f_0 \approx \frac{1}{\zeta^{2/3}} \quad (6.25)$$

para $|\zeta| \ll 1$. Desta forma, pode-se determinar uma escalar para os todos os termos da equação governante. Para tal, é necessário definir algumas escalas. A escala para ϕ é dada a partir de f_0 por:

$$\phi \sim \frac{1}{\zeta^{2/3}} \quad (6.26)$$

Como $\zeta \ll \sqrt[3]{3}$, tem-se que a escala de y é dada por:

$$y \sim t^{1/3} \quad (6.27)$$

Porém, para a avaliação das derivadas parciais em y , as quais consideram t constante, tem-se que a escala destas derivadas deve incluir o termo ζ , tal que:

$$\delta y \sim \zeta t^{1/3} \quad (6.28)$$

Desta forma, tem-se a seguinte escala para o termo transiente da equação:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \sim \frac{1}{t\zeta^{2/3}} \quad (6.29)$$

Para os dois termos advindos da migração, tem-se que:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \sim \frac{1}{t\zeta^{5/3}} \quad (6.30)$$

$$-\frac{2\phi}{y^3} \sim \frac{1}{t\zeta^{2/3}} \quad (6.31)$$

Percebe-se que estes dois termos tem ordem diferente, tal que $O(\frac{1}{t\zeta^{5/3}}) \neq O(\frac{1}{t\zeta^{2/3}})$. Para o termo de difusão não-linear, tem-se a seguinte ordem:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \sim \frac{1}{\zeta^{10/3} t^{2/3}} \quad (6.32)$$

Para $\phi = O(1)$, tem-se que o termo de difusão balança com a ordem maior do termo de migração, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \sim -\frac{2\phi}{y^3} \quad (6.33)$$

$$\zeta \sim t^{1/8} \quad (6.34)$$

Este resultado é importante, pois informa o “scaling” necessário para se fazer o “matching” da zona de transição. Introduce-se então, uma nova variável ξ tal que:

$$\xi = \zeta t^{-1/8}, \quad (6.35)$$

tal que:

$$y = \sqrt[3]{3} t^{1/3} + \xi t^{11/24} \quad (6.36)$$

e

$$\xi = y t^{-11/24} - \sqrt[3]{3} t^{-1/8} \quad (6.37)$$

Pela ordem de ϕ nestas regiões, introduz-se também uma nova função g , tal que:

$$\phi(t, x) = \frac{g(t, \xi)}{t^{1/12}} \quad (6.38)$$

A próxima etapa da solução consiste em substituir ϕ na equação governante do programa, encontrando uma equação para o “matching” do problema. Para o termo de derivada temporal, tem-se que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{t^{1/12}} \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] - \frac{1}{12} \frac{1}{t^{13/12}} g \quad (6.39)$$

em que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\xi}}{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)_t} \quad (6.40)$$

resultando em

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{3} t^{-9/8} - \frac{11}{24} \frac{\xi}{t}. \quad (6.41)$$

Para o termo difusivo, tem-se que:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{1}{t^{13/12}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial g}{\partial \xi} \right). \quad (6.42)$$

Para o primeiro termo do drift:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3} t^{1/3} + \xi t^{11/24} \right)^2} \frac{1}{t^{13/24}} \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad (6.43)$$

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{t^{29/24} 3^{2/3}} \left(1 + \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} \right)^{-2} \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad (6.44)$$

expandindo em séries de Taylor:

$$\frac{1}{y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{t^{29/24} 3^{2/3}} \left(1 - 2 \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) \frac{\partial g}{\partial \xi} \quad (6.45)$$

Para o segundo termo de drift, tem-se de forma semelhante que:

$$-2 \frac{\phi}{y^3} = -\frac{2}{3 t^{13/12}} \left(1 + \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} \right)^{-3} g \quad (6.46)$$

Expandindo em séries de Taylor:

$$-2 \frac{\phi}{y^3} = -\frac{2}{3 t^{13/12}} \left(1 - 3 \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) g \quad (6.47)$$

Reescrevendo a equação governante com os termos substituídos e multiplicando-a por $t^{13/12}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left[t \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{3} t^{-1/8} - \frac{11}{24} \xi \right) \right] - \frac{1}{12} g + \\ + \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \left(t^{-1/8} - 2 \frac{\xi}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) \frac{\partial g}{\partial \xi} - \\ - \frac{2}{3} \left(1 - 3 \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) g = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Nota-se, por este resultado, que os termos de ordem $t^{-1/8}$ se anulam, resultando em:

$$\begin{aligned} \left[t \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{11}{24} \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} \right] - \frac{1}{12} g + \frac{\sqrt[3]{3}}{3} \left(-2 \frac{\xi}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) \frac{\partial g}{\partial \xi} - \\ - \frac{2}{3} \left(1 - 3 \frac{\xi t^{1/8}}{\sqrt[3]{3}} + \dots \right) g = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(g \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Como estamos em regimes de pequenos tempos, temos a seguinte expansão assintótica para g :

$$g(t, \xi) = g_0(\xi) + g_1(\xi)t^{1/8} + \dots \quad (6.50)$$

Para ordem t^0 , têm-se os termos:

$$-\frac{11}{24}\xi g_0' - \frac{1}{12}g_0 - \frac{2}{3}\xi g_0' - \frac{2}{3}g_0 = (g_0 g_0')', \quad (6.51)$$

que originam a seguinte equação:

$$-\frac{3}{4}g_0 - \frac{9}{8}\xi g_0' = (g_0 g_0')' \quad (6.52)$$

Tem-se que no infinito:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} g_0(\xi) = \frac{\lambda}{\xi^{2/3}} \quad (6.53)$$

Pode-se conferir que este limite mantém a equação balanceada no infinito, onde x_i seria muito grande e tornaria as derivadas infinitas. Porém, a dependência de um termo desconhecido λ nas condições de contorno não é desejável. Para isto, faz-se uma transformação da seguinte forma:

$$\xi = Az \quad (6.54)$$

$$g_0 = Bh \quad (6.55)$$

com

$$A = \left(\frac{8\lambda}{3}\right)^{3/8} \quad (6.56)$$

e

$$B = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/4} \quad (6.57)$$

Esta transformação converte o problema de g para h , fazendo o mesmo assumir a seguinte forma:

$$\begin{cases} -2h - 3zh' = (hh')' \\ \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) = \frac{1}{z^{2/3}} \end{cases} \quad (6.58)$$

Esta é a equação para o “matching” do problema assintótico para pequenos tempos. Como esta metodologia de formulação assintótica foi obtida já no final do projeto, não houve como resolvê-la dentro do prazo.

7 Modelagem Contínua do Escoamento de Sangue em Microvasos

Este capítulo tem como função propor um modelo contínuo para o escoamento do sangue nas maiores escalas da microcirculação. O modelo leva em conta o comportamento não-newtoniano do sangue como suspensão, utilizando o modelo de Casson para a modelagem do escoamento no núcleo. A camada de plasma newtoniano livre de glóbulos vermelhos cuja origem foi discutida no capítulo anterior também aparece na modelagem. Um método numérico é proposto para o cálculo da viscosidade efetiva, devido à não-linearidade da equação para a vazão. No final do capítulo é mostrada uma tentativa de obter o efeito de Fahraeus-Lindqvist utilizando este código.

7.1 Modelo Contínuo

Em escalas maiores na microcirculação, como no caso de vênulas e arteríolas (especificar um tamanho), pode-se tratar a suspensão sanguínea como um fluido equivalente. Dado os efeitos do escoamento nas células sanguíneas, este fluido equivalente exibe comportamento não-newtoniano. Portanto, deve-se procurar um modelo constitutivo de fluido não-newtoniano apropriado para representar esta suspensão.

Para uma modelagem aproximada do problema, considera-se o escoamento do sangue no vaso como um regime de lubrificação no qual o sangue é considerado um fluido não-newtoniano. A camada livre de células formada pelos efeitos de migração e difusão hidrodinâmica é representada no modelo por um escoamento de plasma newtoniano na região perto das paredes. Esta abordagem é interessante para estudar efeitos que alteram a viscosidade efetiva deste sangue neste regime de circulação, como por exemplo: agregação de células (caracterizada pelo termo de “yield stress”, que é definido como a tensão limite necessária para o fluido escoar), variações da viscosidade do plasma, efeitos devido à camada livre de células e inércia do problema.

7.2 Fluidos Não-Newtonianos

Em um fluido newtoniano, o tensor de tensões do fluido é definido pela seguinte equação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (7.1)$$

na qual o termo \mathbf{D} é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidades. São denominados fluidos newtonianos os fluidos que obedecem esta equação constitutiva, pois a mesma é uma generalização da lei de newton da viscosidade, sendo válida para vários fluidos conhecidos.

Porém, nem todos os fluidos obedecem a esta lei e estes são chamados não-newtonianos. Exemplos claros de fluidos não-newtonianos incluem suspensões, emulsões e coloides. Para estes, a equação (7.1) não se aplica; logo, torna-se necessária a busca por um novo modelo constitutivo. Para isto, pode-se utilizar modelos ad-hoc ou até mesmo o auxílio de ferramentas analíticas, como a microhidrodinâmica e a mecânica estatística, além dos conceitos básicos de mecânica dos meios contínuos e formalismo constitutivo. Modelos constitutivos para fluidos não-newtonianos podem variar de modelos puramente viscosos lineares e não-lineares, até modelos viscoelásticos ou viscoplásticos, dependendo das propriedades do fluido em questão.

7.3 Fluidos Newtonianos Generalizados

Fluidos newtonianos generalizados é a denominação dada a fluidos não-newtonianos cujas equações constitutivas são escritas na seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}, \quad (7.2)$$

na qual o termo $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}$ é chamado taxa de cisalhamento, sendo uma medida muito utilizada em laboratório que representa a taxa em que uma deformação cisalhante é aplicada em um material. Como esta taxa é sempre positiva, e é um invariante do tensor \mathbf{D} , a relação faz sentido, de forma que é possível criar uma relação que mantenha o termo $\eta(\dot{\gamma})$ sempre positivo.

7.3.1 Fluidos de Ostwald, ou “Power-Law”

Este modelo é um dos mais comumente utilizados em engenharia pela indústria, devido à sua simplicidade e facilidade de implementação para obter soluções de escoamento.

mentos de fluidos pseudo-plásticos. Neste modelo, tem-se que:

$$\eta(\dot{\gamma}) = c\dot{\gamma}^{n-1} \quad (7.3)$$

Logo, o tensor de tensões tem a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + 2c(\sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}})^{n-1} \mathbf{D} \quad (7.4)$$

Pode-se perceber claramente uma não-linearidade na equação constitutiva do tensor de tensões, o que mostra que o fluido é claramente não-newtoniano. Para valores de n menores que 1, o fluido é denominado pseudo-plástico e apresenta um efeito do tipo “shear thinning”, no qual existe uma diminuição da viscosidade para um aumento da taxa de cisalhamento. Este efeito é muito comum, por exemplo, em soluções poliméricas. Pode-se perceber também que para o caso $n = 1$, recupera-se o modelo newtoniano, com viscosidade constante.

7.3.2 Modelo de Bingham

O modelo de fluido de Bingham é um dos mais simples a utilizar o conceito de “yield stress”. Este efeito está relacionado ao fato do fluido não escoar quando submetido a tensões cisalhantes abaixo de um certo valor τ_0 . Isto confere um comportamento de sólido para o fluido em baixas tensões. O modelo de Bingham considera este efeito para baixas tensões, para tensões maiores que τ_0 , o fluido se comporta como um fluido newtoniano. O termo $\eta(\dot{\gamma})$ é dado por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \infty & \text{Para } |\tau| \leq \tau_0 \\ \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \mu_\infty & \text{Para } |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Este tipo de fluido é utilizado para descrever o comportamento de pomadas, pastas dentárias, tintas e outros. No exemplo da pasta de dente, pode-se observar que a mesma possui um comportamento de sólido no núcleo, mas nas regiões de maiores tensões, perto da parede, ocorre escoamento.

7.3.3 Fluido de Casson

O modelo de Casson também descreve um fluido que escoar apenas para tensões cisalhantes maiores que τ_0 . A diferença principal com o fluido de Bingham decorre do fato de que este além de modelar o “yield stress”, também contém uma contribuição power

law em médias taxas de cisalhamento que produz um efeito do tipo “shear thinning”. A equação para o termo η é dada por:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \infty & \text{Para } |\tau| \leq \tau_0 \\ \mu_\infty + \tau_0 \dot{\gamma}^{-1} + k \dot{\gamma}^{n-1} & \text{Para } |\tau| > \tau_0 \end{cases} \quad (7.6)$$

Esta equação descreve uma forma mais generalizada do fluido de Casson, na qual o termo k e n são constantes do modelo que podem ser calibradas. No caso do modelo de Casson tradicional, esta constante é tal que $k = 2\sqrt{\mu_\infty \tau_0}$ e $n = 1/2$. Pode-se perceber que para altas taxas de cisalhamento, o fluido exibe comportamento newtoniano.

Este modelo é muito utilizado para a modelagem do sangue, pois neste caso existe um efeito de “yield stress” relacionado à aglomeração de glóbulos vermelhos, um efeito do tipo shear thinning para médias taxas de cisalhamento e um comportamento de viscosidade constante para altas taxas de cisalhamento. Este último se deve ao fato de que em altas taxas de cisalhamento, o tempo do escoamento é muito menor do que o tempo de resposta da célula, sendo assim, ela não mais se deforma. Alguns autores chamam esta viscosidade de newtoniana; porém, neste regime, existe diferença de tensões normais, que é um comportamento não-newtoniano. O fato do modelo de Casson conseguir modelar estes três efeitos faz com que seja largamente utilizado para a modelagem de sangue.

7.4 Modelagem do Escoamento do Sangue Como Fluido de Casson

7.4.1 Modelagem do Problema

Para a modelagem do sangue, utiliza-se o modelo de fluido de Casson, pois o mesmo representa o efeito devido à agregação de glóbulos vermelhos (devido ao “yield stress”), uma contribuição “power law” com efeito “shear thinning” em médias taxas de cisalhamento e o comportamento newtoniano em altas taxas de cisalhamento.

No escoamento do sangue na microcirculação ocorre a formação da camada livre glóbulos vermelhos, também chamada de “cell-depleted layer”, devido aos efeitos de migração e difusão hidrodinâmica. A “depleted layer” é modelada como uma camada de plasma newtoniano próxima às paredes do vaso.

Os parâmetros principais do problema são a viscosidade do plasma μ_p , a viscosidade do sangue com taxa de cisalhamento infinita μ_∞ , utilizada no modelo de Casson, o raio da seção transversal $R(z)$, o raio médio da seção transversal R_0 , o raio do núcleo do escoamento, onde encontra-se a suspensão, o termo de “yield stress” τ_0 e o raio de Casson R_C , definido como raio antes do qual o fluido se comporta como um corpo rígido, devido à agregação de células

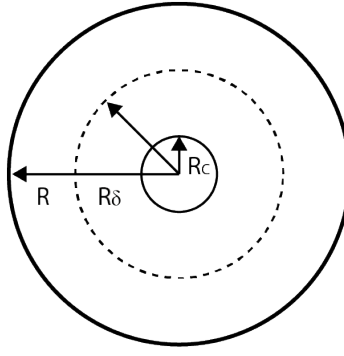


Figura 18 – Esquema do escoamento do sangue em microvasos na escala contínua. R_C indica o raio de Casson, dentro do qual o fluido se comporta como um corpo rígido, efeito este causado pela agregação de células. R é o raio do vaso e R_δ é o raio que limita a divisão entre o fluido de Casson e o fluido Newtoniano

7.4.2 Equação Governante e Condições de Contorno

O problema é governado pela equação de Cauchy sem o termo inercial. Onde o tensor de tensões do núcleo é dado pelo modelo de Casson e a região de plasma é considerada um fluido newtoniano convencional de viscosidade μ_p

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla p \quad (7.7)$$

Utilizando uma análise de escala, mostra-se que é possível utilizar a hipótese de lubrificação. Aplicando esta, o problema se reduz a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) = \frac{dp}{dz} = -G(z) \quad (7.8)$$

Onde τ é o termo τ_{rz} da parte não-hidrostática do tensor de tensões, que no núcleo é dado pelo modelo de Casson, e na camada de plasma pela equação constitutiva clássica para um fluido newtoniano. As condições de contorno utilizadas para o problema são:

- Não-deslizamento na parede
- Continuidade do campo de velocidade
- Continuidade do campo de tensão

Utilizando a condição de continuidade do campo de tensão, pode-se obter a seguinte relação:

$$\tau = -\frac{Gr}{2} \quad (7.9)$$

E conseqüentemente, utilizando o modelo de Casson e sabendo que para o caso específico tem-se que $\dot{\gamma} = -\partial u/\partial r$, encontra-se o seguinte resultado para o termo $\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{para } r \leq R_C \\ \frac{Gr}{2\mu_\infty} + \frac{GR_C}{2\mu_\infty} - \frac{GR_C^{1/2}}{\mu_\infty} r^{1/2} & \text{para } R_C < r \leq R_\delta \\ \frac{Gr}{2\mu_p} & \text{para } R_\delta < r \leq R \end{cases} \quad (7.10)$$

Onde $R_C = \frac{2\tau_0}{G}$ é o raio de Casson, que indica o limite da região onde o fluido possui movimento de corpo rígido

7.4.3 Solução do Problema

Apesar de não ser necessário para o cálculo da vazão, uma expressão para o campo de velocidades pode ser encontrada apenas integrando $-\dot{\gamma}$, onde $\dot{\gamma}$ foi obtido em (7.10). Integrando e utilizando as condições de contorno, encontra-se:

$$u(r, z) = \begin{cases} \frac{G}{4\mu_\infty} (R_\delta^2 - R_C^2) + \frac{GR_C}{2\mu_\infty} (R_\delta - R_C) \\ \quad - \frac{2}{3} \frac{GR_C^{1/2}}{\mu_\infty} (R_\delta^{3/2} - R_C^{3/2}) + \frac{G}{4\mu_p} (R^2 - R_\delta^2) & \text{para } r \leq R_C \\ \frac{G}{4\mu_\infty} (R_\delta^2 - r^2) + \frac{GR_C}{2\mu_\infty} (R_\delta - r) \\ \quad - \frac{2}{3} \frac{GR_C^{1/2}}{\mu_\infty} (R_\delta^{3/2} - r^{3/2}) + \frac{G}{4\mu_p} (R^2 - R_\delta^2) & \text{para } R_C < r \leq R_\delta \\ \frac{G}{4\mu_p} (R^2 - r^2) & \text{para } R_\delta < r \leq R \end{cases} \quad (7.11)$$

A vazão de fluido que passa por uma seção transversal é calculada pela seguinte identidade:

$$Q = \pi \int_0^R r^2 \dot{\gamma} dr \quad (7.12)$$

O cálculo da integral resulta:

$$Q = \frac{\pi GR_\delta^4}{8\mu_\infty} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{R_C}{R_\delta} \right) - \frac{17}{7} \left(\frac{R_C}{R_\delta} \right)^{1/2} - \frac{1}{21} \left(\frac{R_C}{R_\delta} \right)^4 \right] + \frac{\pi G}{8\mu_p} (R^4 - R_\delta^4) \quad (7.13)$$

7.4.4 Adimensionalização da Equação da Vazão

A adimensionalização do gradiente de pressão e do raio do escoamento é feita da seguinte forma:

$$\tilde{G} = \frac{G}{\frac{8Q\mu_w}{\pi R_0^4}} \quad (7.14)$$

$$\tilde{R} = \frac{R}{R_0} \quad (7.15)$$

Onde μ_w é a viscosidade da água e R_0 é o raio médio da seção transversal circular do vaso, utilizada como referência. Nota-se que se o raio da seção transversal é uniforme, o raio adimensional é sempre igual a 1.

Também é feita a adimensionalização das viscosidades pela viscosidade da água, da seguinte forma:

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_w} \quad (7.16)$$

A vazão do escoamento é definida como:

$$Q = \bar{U} \pi R_0^2 \quad (7.17)$$

Onde \bar{U} é a velocidade média do escoamento.

Desta forma, a equação (7.13) toma a seguinte forma:

$$\tilde{R}^4 = \mu_p^* \frac{1}{\tilde{G}} - \frac{\lambda^4 \mu_p^*}{\mu_\infty^*} P \left(\frac{\Omega Re_w}{\lambda} \frac{1}{\tilde{G}} \right) + \lambda^4 \quad (7.18)$$

Com os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\lambda = \frac{R_\delta}{R_0} \quad (7.19)$$

$$Re_w = \frac{\rho_w \bar{U} R_0}{\mu_w} \quad (7.20)$$

$$\Omega = \frac{\tau_0}{4\rho_w \bar{U}^2} \quad (7.21)$$

O parâmetro λ está relacionado com a espessura do núcleo do escoamento; ou seja, está relacionada com a depleted layer. O parâmetro Re_w é o número de Reynolds da água escoando no vaso e o parâmetro Ω está relacionado com a tensão necessária para o fluido de Casson escoar.

7.4.5 Viscosidade do Sangue

Para o estudo do problema, existe interesse em saber o valor do termo μ_∞ , que seria a viscosidade do sangue em altas taxas de cisalhamento. De acordo com (POPEL; JOHNSON, 2005), o valor desta é de aproximadamente 3,84 cPs para um hematócrito de 45 %, porém, muitas vezes é necessário saber esta viscosidade para outros valores de hematócritos. Existem três formas principais de se encontrar a viscosidade do sangue “bulk” em função do hematócrito, experimentais e numéricas. A primeira inclui modelos ad-hoc oriundos de interpolações de curvas em resultados numéricos ou até gráficos com valores da viscosidade (BASKURT; MEISELMAN et al., 2003), já as últimas partem de uma modelagem do sangue, utilizando conceitos de microhidrodinâmica: por exemplo, pode-se aproximar o sangue como uma emulsão e calcular a viscosidade desta utilizando o stresslet das gotas (KIM; KARRILA, 2013). Para modelos mais simples, existem inclusive soluções analíticas. Porém, como estes modelos podem divergir muito da realidade, existe uma grande utilização de métodos numéricos para o cálculo desta viscosidade intrínseca do fluido equivalente. (OLIVEIRA, 2007)

7.4.6 Método Numérico Para o Cálculo da Viscosidade Efetiva

Devido à relação não linear entre vazão e gradiente de pressão, foi necessário utilizar um método numérico para isolar o termo de gradiente de pressão adimensional \tilde{G} em função do comprimento, afim de encontrar a perda de carga do fluido. Para este propósito, foi utilizado o método de Newton-Raphson para cada um dos valores de z^* . Após isso, é feita uma integração numérica da função $\tilde{G}(z^*)$ utilizando a regra do trapézio para achar a viscosidade efetiva. A metodologia numérica é feita da seguinte forma.

- É definido um passo
- É criado um vetor com todos os pontos de z^* que serão utilizados
- Cálculo da raiz da equação $\tilde{Q} - f(\tilde{G}, z_i) = 0$, definindo $\tilde{G}(z_i)$ através do método de Newton-Raphson
- Avançar para o próximo ponto z_{i+1} e repetir o passo anterior
- Quando acabarem os passos, integrar a função utilizando regra do trapézio

7.5 Efeito de Fahraeus-Lindqvist

Utilizando o código numérico para um tubo liso ($\alpha = 0$), plotou-se um gráfico da viscosidade efetiva em função do raio (adimensionalizado pela espessura da “depleted layer”), o mesmo segue abaixo:

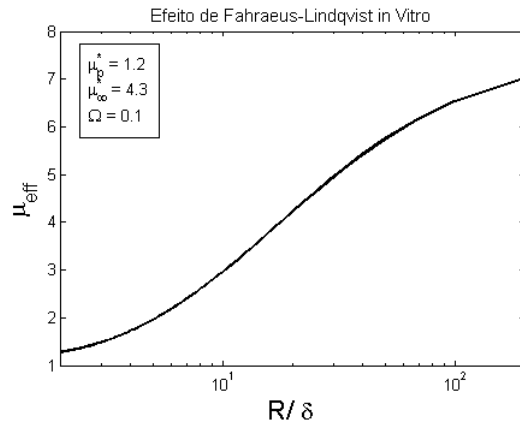


Figura 19 – Efeito de Fahraeus-Lindqvist previsto pelo código

A consideração feita para a viscosidade do sangue como mistura μ_∞ foi maior do que o de uma pessoa saudável, com valor de 4.3 vezes a viscosidade da água. O gráfico obtido é muito semelhante ao gráfico de viscosidade efetiva in vitro obtido por (PRIES et al., 1994) para um hematócrito de 75 %. O que é coerente, tendo em vista que a viscosidade “bulk” do sangue com hematócrito 45 % é de aproximadamente 3.8 vezes a viscosidade da água.

7.6 Efeito da Rugosidade da Parede na Viscosidade Efetiva

O gráfico abaixo mostra o efeito da rugosidade α na viscosidade efetiva:

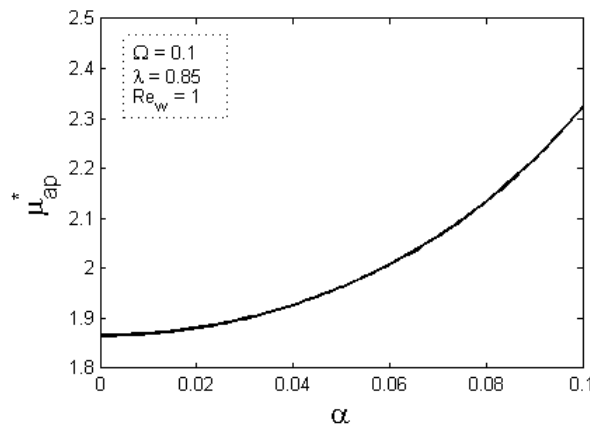


Figura 20 – Efeito da rugosidade do vaso sobre a viscosidade efetiva

Percebe-se que a rugosidade do vaso altera consideravelmente o valor da viscosidade efetiva; ou seja, aumenta a resistência do escoamento. Este efeito era esperado, pois existe uma diferença clara entre escoamentos em tubos capilares lisos (in vitro) e escoamento de sangue in vivo. (PRIES et al., 1994)

8 Resultados

8.1 Efeito de Fahraeus-Lindqvist

Como mostrado no capítulo 3, é possível definir uma metodologia para o cálculo de uma viscosidade efetiva para o escoamento em um tubo utilizando a Lei de Poiseuille. Pelas aproximações feitas no modelo, não é esperado um resultado exato de um valor para viscosidade efetiva do sangue, caso sejam utilizados valores reais para a viscosidade do plasma, velocidade e tamanho das células. Porém, o que era esperado, um resultado qualitativamente coerente com o fenômeno inverso de Fahraeus-Lindqvist (FÅHRÆUS; LINDQVIST, 1931). Combinando o modelo de células enfileiradas (Capítulo 3) com o modelo contínuo utilizando modelo de Casson (Capítulo 7). Tem-se dois “limites assintóticos” para o efeito de Fahraeus-Lindqvist. Como ilustra a seguinte figura:

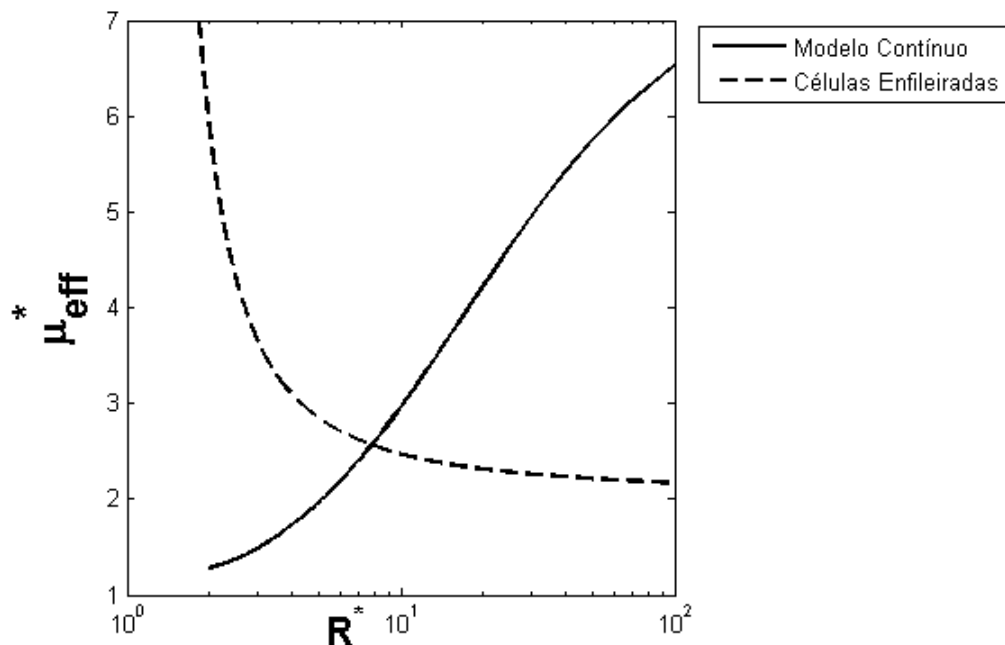


Figura 21 – Cálculo do efeito de Fahraeus-Lindqvist utilizando os métodos analíticos propostos

Pode-se comparar o resultado obtido pelo modelo analítico com o resultado da literatura (NICHOLS; O'ROURKE; VLACHOPOULOS, 2011) a partir da figura a seguir:

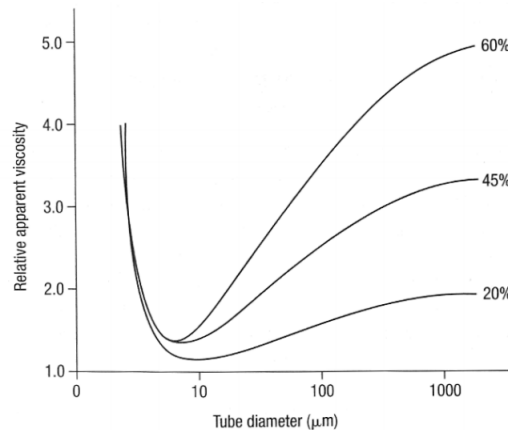


Figura 22 – Resultado experimental para o efeito de Fahraeus-Lindqvist (NICHOLS; O'ROURKE; VLACHOPOULOS, 2011)

Percebe-se que o resultado do modelo é qualitativamente consistente com o resultado experimental, apesar de os valores numéricos não coincidirem. Porém, é completamente possível calibrar o modelo de forma a fazer com que os resultados coincidam. Foi percebido que ao diminuir o valor da viscosidade do plasma no modelo de células enfileiradas, ocorre uma translação da curva para baixo. Alterando a velocidade da célula, é possível transladá-lo levemente na direção horizontal. O próximo passo para um bom “fitting” é reduzir a viscosidade no infinito do modelo de Casson. Um exemplo de como esse ajuste pode funcionar é representado abaixo:

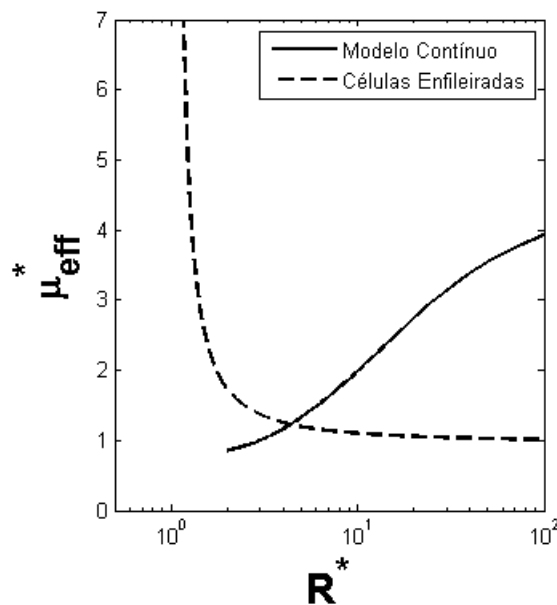


Figura 23 – Ajuste dos modelos analíticos para encontrar valores mais próximos aos reais

Para a obtenção deste resultado, foram utilizados valores de viscosidade do plasma e outros que não são coerentes com os reais. Porém, como dito anteriormente, os dados reais não geraram resultados satisfatórios, tendo em vista que os métodos são de certa forma bem simplificados.

8.2 Cálculo da Curvatura

Para a validação do código para o cálculo de curvatura, foi calculada a curvatura em todos os pontos de uma malha esférica de raio 1. Esta foi escolhida pois o seu valor de curvatura média é muito conhecido e igual a 1 em todos os pontos da superfície. A malha utilizada para este cálculo tinha seu número de elementos da ordem de 19 mil, advindos de uma parametrização de 100x100. Para mostrar a convergência deste código, foi feito um histograma:

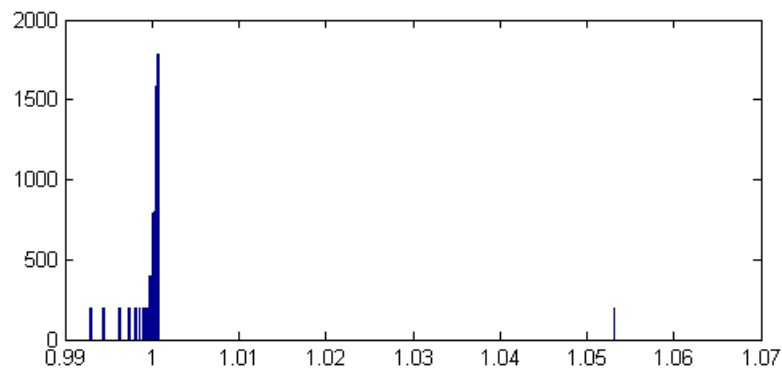


Figura 24 – Frequências das curvaturas médias calculadas na esfera

Os desvios do resultado tem diversas origens, como o cálculo dos vetores normais, o erro da aproximação por mínimos quadrados e o fato da malha ser discreta. Apesar destes desvios, porém, os resultados são bons e concordam com a teoria, apesar de certo grau de erro.

Com o código desenvolvido ao longo do projeto, já é possível computar numericamente as integrais de contorno necessárias para descrever o movimento de membranas. Porém, para tal, caso sejam estudadas deformações significativas, é necessário a utilização de uma malha adaptativa.

8.3 Integral para a Energia de Flexão

Utilizando o código para integração numérica de funções na superfície, foi integrada a curvatura ao quadrado em alguns casos distintos. Os resultados são apresentados a seguir.

8.3.1 Esfera

No caso de uma malha de uma esfera de raio unitário, com 19404 elementos, foi encontrada que a integral superficial da curvatura média ao quadrado resultou 12.65, ao contrario dos 12.56 calculados analiticamente. Este erro é devido ao erro acumulado no cálculo das curvaturas. A área da superfície calculada foi de 12.5605, com erros menores, a partir da terceira casa decimal.

8.3.2 Elipsoide

No caso de um elipsoide com razão 2x1x1 de mesma área da esfera, a integral resultou o valor de 107.44. que é bem maior que o resultado na esfera. Este resultado concorda com a geometria do elipsoide, que contem uma ampla região de grandes curvaturas (pequenos raios).

8.3.3 Hemácia

Para o modelo de uma hemácia, devido ao seu formato bicôncavo, foi utilizado um ovoide de Cassini de mesma área superficial que a esfera e o elipsoide. O valor encontrado para esta integral foi de 83.51. Foi encontrado também que a energia de flexão do formato bicôncavo é menor do que a de outras geometrias achatadas de formato convexo.

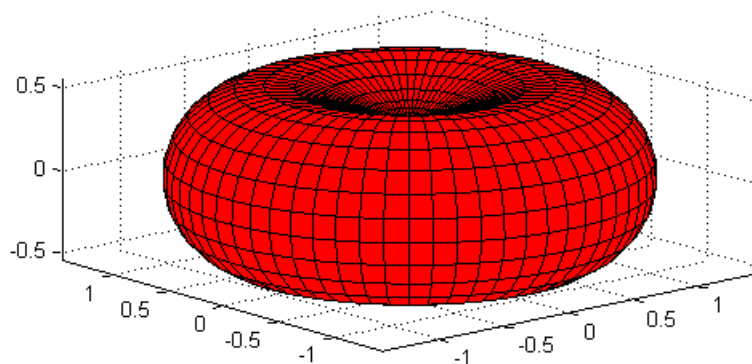


Figura 25 –

Este resultado, na verdade, faz bastante sentido quando se percebe o fato de que qualquer superfície “achatada” vai possuir regiões de alta curvatura, devido ao seu achatamento acarretar em menores raios do que o formato esférico. Porém, percebe-se também,

que formatos bicôncavos possuem energia de flexão inferiores a formatos de elipsoide. Isto se deve ao fato da curvatura ser uma função contínua em superfícies regulares. Em formatos bicôncavos, a magnitude de suas curvaturas médias é da mesma magnitude de um elipsoide equivalente, mas pelo fato do formato bicôncavo possuir regiões com curvatura negativa, isto requer que exista uma região na qual a curvatura seja nula, onde ocorre a transição, acarretando um “alívio” na integral da curvatura ao quadrado. Portanto, o que se percebe, é que além de iguais áreas, se as superfícies tiverem iguais volumes, o formato bicôncavo reduz a energia de flexão. O que é coerente com os resultados encontrados por Canham. (CANHAM, 1970)

8.4 Estudo do Efeito da Agregação de Hemácias Utilizando o Modelo de Células Enfileiradas

Utilizando o código do modelo de células enfileiradas, pode-se estudar uma primeira aproximação do efeito de agregação das células reduzindo a distância S entre as hemácias. O gráfico abaixo mostra o efeito medido de agregação utilizando células no formato cilíndrico e no formato de parabolóide. O resultado obtido é representado na figura a seguir:

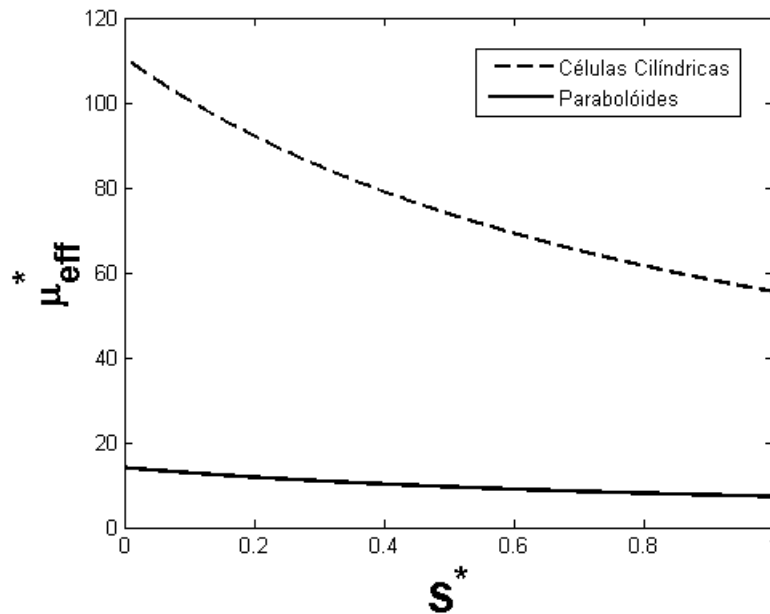


Figura 26 – Modelo de agregação de hemácias pela distância entre células

Como era esperado, a viscosidade efetiva do sangue aumenta à medida que as células se aproximam. Entretanto, quando se fala em medida de agregação de células, se fala sobre o aumento da concentração destas. Para isto, podemos utilizar a seguinte

relação:

$$\phi = \frac{V_{célula}}{V_{tubo}}, \quad (8.1)$$

na qual $V_{célula}$ é o volume de uma célula e V_{tubo} é o volume do vaso na região que contém a célula com a região livre entre duas células. Tem-se que para um vaso ou tubo cilíndrico:

$$V_{tubo} = \pi R_0^2(L + S) \quad (8.2)$$

Já o volume da célula depende do formato desta. No caso de um formato cilíndrico, tem-se que:

$$V_{célula} = \pi R_\delta^2 L, \quad (8.3)$$

e portanto:

$$\phi = \frac{\lambda^2}{1 + \tilde{S}} \quad (8.4)$$

Lembrando que nesta equação, $\lambda = R_\delta/R_0$, definido nas adimensionalizações dos capítulos 3 e 7. Desta forma, como λ foi dado como 0.9 no programa, pode-se plotar um gráfico da viscosidade efetiva em função da concentração no caso de células cilíndricas com a seguinte forma:

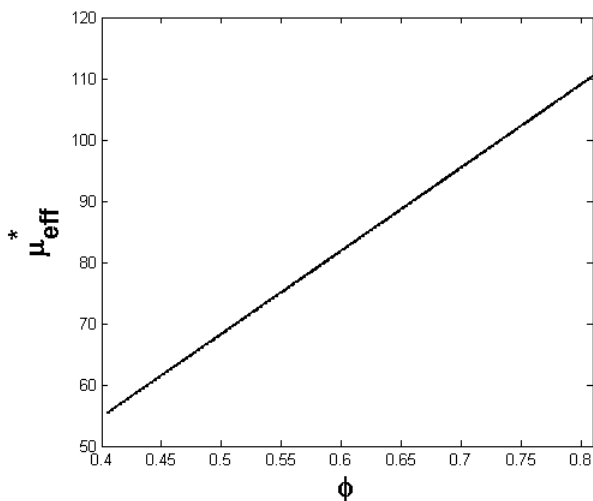


Figura 27 – Viscosidade efetiva em função da concentração no caso de células cilíndricas

No caso do modelo considerando células como paraboloides, tem-se pelo teorema de Pappus que:

$$V_{célula} = 2\pi \int_0^{R_\delta} L \left(1 + \frac{r^2}{R_{delta}^2}\right) r dr = \frac{\pi R_\delta^2 L}{2} \quad (8.5)$$

Da mesma forma feita anteriormente, agora é possível plotar um gráfico da viscosidade efetiva em função da concentração para células em formato de parabolóide:

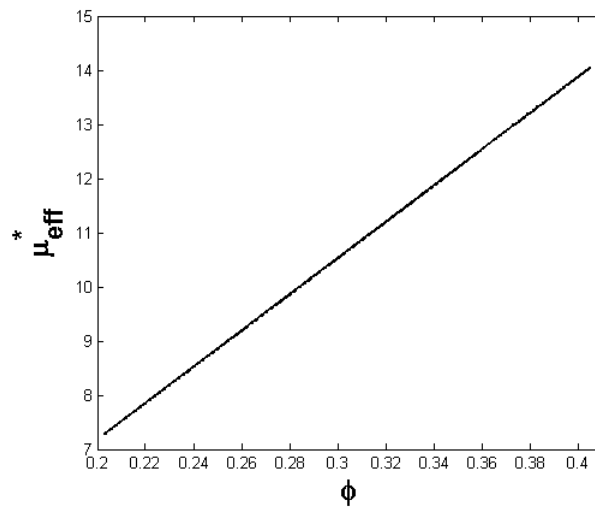


Figura 28 – Viscosidade efetiva em função da concentração no caso de células em formato de parabolóide

Pode-se comparar este gráfico do modelo de parabolóide com o gráfico experimental apresentado por Baskurt e Meiselman, mostrado abaixo:

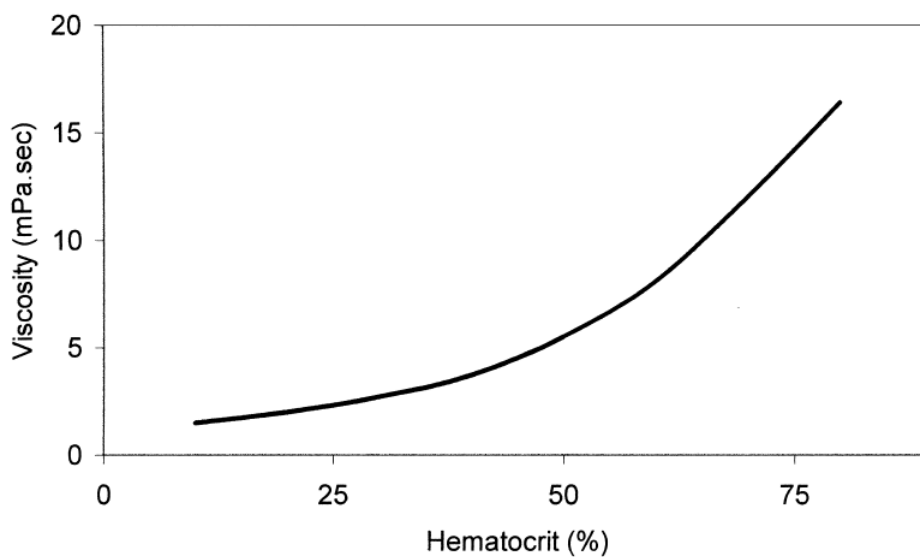


Figura 29 – Viscosidade efetiva em função da concentração (BASKURT; MEISELMAN et al., 2003)

Apesar das escalas de viscosidade estarem na mesma ordem, percebe-se que existe uma diferença em formato de curva e de valores entre os dois gráficos (do parabolóide e o experimental). Porém, percebe-se também que é possível mais uma vez calibrar o modelo para que estes gráficos se aproximem, pois como pode-se ver, na região coberta pelo gráfico gerado pelo modelo, o experimento tem seus resultados praticamente lineares

8.5 Solução Assintótica do Problema da Camada de Depleção de Gotas

Até este momento, houveram alguns problemas na solução da equação governante para o problema assintótico para pequenos tempos do problema de migração-difusão hidrodinâmica.

9 Conclusão e Trabalhos Futuros

Ao longo do trabalho foram desenvolvidos dois modelos para o estudo do escoamento de sangue na microcirculação. Estes dois modelos mostraram resultados coerentes qualitativamente com os experimentos. Foi mostrado que a calibração correta destes modelos pode levar a boas previsões do comportamento do sangue em microvasos. Foi observado o efeito de Fahraeus-Lindqvist, assim como o efeito de Fahraeus-Lindqvist inverso, sendo estes efeitos cruciais do comportamento do sangue na microcirculação. Utilizando o modelo de células enfileiradas também foi feita uma previsão da viscosidade do sangue em função do hematócrito. Neste ponto, foi vista a grande diferença entre a utilização de formatos cilíndricos e formato de parabolóide para este modelo. Algumas inconsistências nestes modelos encontradas em trabalhos anteriores do grupo foram revisadas e corrigidas, como a integração do gradiente de pressão na modelagem contínua e a inconsistência da vazão no modelo de células enfileiradas, causada pela não-consideração da contribuição do movimento da célula.

Foi desenvolvido, também, códigos para geração de malha, cálculo de curvaturas e integração numérica em superfícies, utilizando funções de forma. Estes códigos foram utilizados para o cálculo da energia de flexão de diferentes formas de mesma área superficial, mostrando que um formato bicôncavo possui menor energia de flexão se comparado com formatos igualmente achatados convexos (elipsoides). Estes mesmos códigos podem ser utilizados posteriormente para a simulação do movimento de gotas ou vesículas, se adaptados.

Foi feita uma formulação assintótica para o problema da camada limite de gotas, abandonando a ideia inicial de uma solução similar, após provar que uma solução por similaridade entraria em choque com as condições de contorno. Apesar de a modelagem ter sido feita por completa, falta ainda a solução da equação diferencial ordinária do “matching” assintótico. Além disto, a solução assintótica obtida anteriormente foi compreendida de uma forma melhor.

9.1 Trabalhos Futuros

No que diz respeito à complementação dos tópicos trabalhados ao longo deste projeto, proposição de trabalhos futuros consistem na calibração dos modelos, de forma a obter resultados mais próximos aos experimentais, além da solução da equação de “matching” assintótico, proposta no capítulo 6 deste projeto.

Outras propostas de projeto incluem o estudo de modelos de difusão nos quais a difusividade depende de forma não-linear da concentração, o que ocorre em regimes de maior deformação, além de modelos de velocidade de migração da parede que não possuem solução assintótica. Utilizando um código de diferenças finitas é possível obter uma solução numérica do problema de migração de gotas, comparando-a com as soluções assintóticas para pequenos e grandes tempos estudadas neste projeto.

Referências

- BASKURT, O. K.; MEISELMAN, H. J. et al. Blood rheology and hemodynamics. In: NEW YORK: STRATTON INTERCONTINENTAL MEDICAL BOOK CORPORATION, C1974-. *Seminars in thrombosis and hemostasis*. [S.l.], 2003. v. 29, n. 5, p. 435–450. Citado 3 vezes nas páginas [vi](#), [84](#) e [92](#).
- CANHAM, P. B. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *Journal of Theoretical Biology*, 1970. Elsevier, v. 26, n. 1, p. 61–81, 1970. Citado 2 vezes nas páginas [47](#) e [90](#).
- CARVALHO, J. A. A. d. Hidrodinâmica do escoamento do sangue em microvasos. 2008. 2008. Citado 2 vezes nas páginas [v](#) e [62](#).
- CHAN, P.-H.; LEAL, L. The motion of a deformable drop in a second-order fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 1979. Cambridge Univ Press, v. 92, n. 01, p. 131–170, 1979. Citado 2 vezes nas páginas [60](#) e [66](#).
- CUNHA, F.; GONTIJO, R.; SOBRAL, Y. Symmetry breaking of particle trajectories due to magnetic interactions in a dilute suspension. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2013. Elsevier, v. 326, p. 240–250, 2013. Citado na página [55](#).
- CUNHA, F. D.; HINCH, E. Shear-induced dispersion in a dilute suspension of rough spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 1996. Cambridge Univ Press, v. 309, p. 211–223, 1996. Citado 6 vezes nas páginas [2](#), [55](#), [60](#), [62](#), [63](#) e [66](#).
- DRAZER, G. et al. Deterministic and stochastic behaviour of non-brownian spheres in sheared suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002. Cambridge Univ Press, v. 460, p. 307–335, 2002. Citado na página [55](#).
- ECKSTEIN, E. C.; BAILEY, D. G.; SHAPIRO, A. H. Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 1977. Cambridge Univ Press, v. 79, n. 01, p. 191–208, 1977. Citado na página [60](#).
- FÅHRÆUS, R.; LINDQVIST, T. The viscosity of the blood in narrow capillary tubes. *American Journal of Physiology–Legacy Content*, 1931. Am Physiological Soc, v. 96, n. 3, p. 562–568, 1931. Citado 2 vezes nas páginas [64](#) e [86](#).
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. Citado na página [56](#).
- GRANDCHAMP, X. et al. Lift and down-gradient shear-induced diffusion in red blood cell suspensions. *Physical review letters*, 2013. APS, v. 110, n. 10, p. 108101, 2013. Citado na página [64](#).

- HELFRICH, W. Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments. *Zeitschrift für Naturforschung C*, 1973. v. 28, n. 11-12, p. 693–703, 1973. Citado na página 47.
- KIM, S.; KARRILA, S. J. *Microhydrodynamics: principles and selected applications*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 53, 58, 61, 65 e 84.
- KLINGEL, R. et al. Rheopheresis: rheologic, functional, and structural aspects. *Therapeutic Apheresis*, 2000. Wiley Online Library, v. 4, n. 5, p. 348–357, 2000. Citado na página 1.
- KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. [S.l.]: University of Toronto Press, 1959. Citado na página 37.
- LOEWENBERG, M.; HINCH, E. Collision of two deformable drops in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 1997. Cambridge Univ Press, v. 338, p. 299–315, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 60.
- NICHOLS, W.; O'ROURKE, M.; VLACHOPOULOS, C. *McDonald's blood flow in arteries: theoretical, experimental and clinical principles*. [S.l.]: CRC Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas vi e 87.
- OLIVEIRA, T. F. de. *Microhidrodinâmica e reologia de emulsões*. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2007. Citado na página 84.
- POISEUILLE, J. L. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres*. [S.l.]: Imprimerie Royale, 1844. Citado na página 29.
- PEPEL, A. S.; JOHNSON, P. C. Microcirculation and hemorheology. *Annual review of fluid mechanics*, 2005. NIH Public Access, v. 37, p. 43, 2005. Citado na página 84.
- POZRIKIDIS, C. Shell theory for capsules and cells. *Modeling and Simulation of Capsules and Biological Cells*, 2003. Boca Raton, FL:(C. Pozrikidis ed.) Chapman & Hal, p. 35–101, 2003. Citado 3 vezes nas páginas v, 39 e 41.
- PRIES, A. et al. Resistance to blood flow in microvessels in vivo. *Circulation research*, 1994. Am Heart Assoc, v. 75, n. 5, p. 904–915, 1994. Citado na página 85.
- SCHOWALTER, W.; CHAFFEY, C.; BRENNER, H. Rheological behavior of a dilute emulsion. *Journal of colloid and interface science*, 1968. Elsevier, v. 26, n. 2, p. 152–160, 1968. Citado na página 65.
- SKALAK, R.; OZKAYA, N.; SKALAK, T. C. Biofluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 1989. Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 21, n. 1, p. 167–200, 1989. Citado na página 2.
- SMART, J. R.; JR, D. T. L. Measurement of the drift of a droplet due to the presence of a plane. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, 1991. AIP Publishing, v. 3, n. 1, p. 21–28, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 65.
- SUNG, K. et al. Influence of physicochemical factors on rheology of human neutrophils. *Biophysical journal*, 1982. The Biophysical Society, v. 39, n. 1, p. 101, 1982. Citado na página 1.

WANG, Y.; MAURI, R.; ACRIVOS, A. The transverse shear-induced liquid and particle tracer diffusivities of a dilute suspension of spheres undergoing a simple shear flow. *Journal of fluid mechanics*, 1996. Cambridge Univ Press, v. 327, p. 255–272, 1996. Citado na página 55.

WANG, Y.; MAURI, R.; ACRIVOS, A. Transverse shear-induced gradient diffusion in a dilute suspension of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 1998. Cambridge Univ Press, v. 357, p. 279–287, 1998. Citado na página 60.

ZWANZIG, R. *Nonequilibrium statistical mechanics*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2001. Citado na página 56.

Apêndices

A Equação de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas

A.1 Coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas consiste em um conjunto de coordenadas que mapeia o espaço R^3 , tal que:

$$\mathbf{r}(r, \theta, z) = \begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Este sistema de coordenadas é útil para estudar problemas com simetria axial, pois simplifica alguns termos de equações. Para isso acontecer, deve-se escrever as equações neste sistema de coordenadas.

No caso de equações escalares isto é simples, pois apenas uma transformação de coordenadas é o suficiente; porém, para equações vetoriais a tarefa se torna mais complicada, já que não existe mais interesse nas componentes cartesianas dos vetores, e sim pelas componentes relacionadas com o novo sistema de coordenadas e sua nova base.

A.2 Adendo Matemático: Formalismo Covariante e Contravariante

A.2.1 Tensor métrico

Nesta seção, considera-se uma transformação geral $f : R^3 \rightarrow R^3$, tal que:

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{q}). \quad (\text{A.2})$$

Um exemplo de vetor infinitesimal neste espaço euclidiano seria $d\mathbf{r}$. Esta diferencial pode ser computada em termos das coordenadas x^i utilizando a regra da cadeia:

$$d\mathbf{r} = dx^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad (\text{A.3})$$

por outro lado, pela definição de $d\mathbf{r}$ como vetor euclidiano, tem-se

$$d\mathbf{r} = dx^i \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (\text{A.4})$$

Observando as duas equações acima, conclue-se intuitivamente que:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}. \quad (\text{A.5})$$

Porém, assim como pode-se determinar $d\mathbf{r}$ em termos das coordenadas x^i , pode-se fazer o mesmo utilizando as coordenadas q^i da transformação:

$$d\mathbf{r} = dq^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}. \quad (\text{A.6})$$

Fazendo $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \hat{\mathbf{e}}_i$, percebe-se que o novo sistema de coordenadas definiu uma nova base diferente da euclidiana. Esta base é útil em sistemas onde a transformação de coordenadas define uma variedade de dimensão menor dentro do espaço euclidiano; como por exemplo, uma superfície.

Ela também é útil para enxergar simetrias de um problema. Por exemplo: uma partícula puntiforme com carga elétrica gera um campo apenas com componentes radiais; logo, em uma base em que um dos vetores tenha direção radial, apenas um este vetor de base é necessário para descrever o seu campo elétrico, ao contrário da base euclidiana, que precisaria dos 3 termos.

A.2.1.1 Componentes covariantes e contravariantes

Considere um vetor \mathbf{v} , tal que:

$$\mathbf{v} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.7})$$

em que as componentes v^i do vetor são chamadas contravariantes, pois em uma transformação de base, a mesma se transforma de forma inversa à da base, pois o vetor deve ser invariante à mudanças de base. Assim como o vetor, sua norma também deve ser invariante à mudanças de base. Esta norma é dada por v , onde:

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.8})$$

$$v^2 = v^i (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.9})$$

Assim, pode-se definir:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.10})$$

em que v_i é chamada componente covariante do tensor, pois se transforma da mesma forma que a base. Definindo isso, percebe-se que a norma de um vetor \mathbf{v} é dada por:

$$v^2 = v^i v_i. \quad (\text{A.11})$$

A relação entre as componentes covariantes e contravariantes de um tensor são dadas por:

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad (\text{A.12})$$

em que g_{ij} é denominado tensor métrico e é dado por:

$$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 Derivada Covariante

Considere o problema de derivar um vetor \mathbf{v} nas variáveis q^i :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} (v^k \hat{\mathbf{e}}_k) = \frac{\partial v^k}{\partial q^i} \hat{\mathbf{e}}_k + v^k \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{\partial q^i}. \quad (\text{A.14})$$

Como a derivada de um vetor (não das componentes do vetor, mas de um vetor em si) é um vetor, podemos dizer que:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_k}{\partial q^i} = \Gamma_{ik}^j \hat{\mathbf{e}}_j, \quad (\text{A.15})$$

em que Γ_{ik}^j são chamados símbolos de Christoffel de segunda espécie. O nome "símbolo" é dado pois as componentes desse elemento não se transformam como as de um tensor.

Isolando a base na derivada, encontra-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i} = (\partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k) \hat{\mathbf{e}}_j. \quad (\text{A.16})$$

Assim, define-se derivada covariante como:

$$\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k. \quad (\text{A.17})$$

A.2.3 Símbolos de Christoffel

Utilizando a definição acima para os símbolos de Christoffel, é simples demonstrar que:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl}[ij, l], \quad (\text{A.18})$$

em que $[ij, l]$ são denominados símbolos de christoffel de primeira espécie e são dados por:

$$[ij, l] = \frac{1}{2} (g_{il,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}). \quad (\text{A.19})$$

(índices após vírgulas indicam derivadas em q)

A.3 Equação Governante em coordenadas Cilíndricas

A.3.1 Vetores de Base

Para definir a base de coordenadas cilíndricas, utiliza-se a equação mostrada anteriormente:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}. \quad (\text{A.20})$$

Esta base é ortogonal; porém, não é normalizada. Para definir as bases normalizadas, faz-se:

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{h_i}, \quad (\text{A.21})$$

em que:

$$h_i = |\hat{\mathbf{e}}_i|. \quad (\text{A.22})$$

Agora considere um vetor \mathbf{u} tal que:

$$\mathbf{u} = \sum u^i \hat{\mathbf{e}}_i = \sum u(i) \hat{\mathbf{q}}_i, \quad (\text{A.23})$$

no qual $u(i)$ são as componentes do vetor na base normalizada. Percebe-se claramente a relação:

$$u^i = \frac{u(i)}{h_i}. \quad (\text{A.24})$$

A.3.2 Tensor Métrico e Símbolos de Christoffel para Coordenadas Cilíndricas

Considerado a definição de tensor métrico, a representação matricial das componentes covariantes do mesmo para a base de coordenadas cilíndricas é dada por:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

E as contravariantes:

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são dados pelas seguintes equações

$$[\Gamma^r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

e

$$[\Gamma^\theta] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.28})$$

A.3.3 Ligeira mudança de notação

Como o interesse é encontrar uma equação com as componentes do vetor \mathbf{u} em uma base cilíndrica normalizada, pode se criar confusão entre o índice de u nessa base normalizada com os da base dual. Para esclarecer isto mantendo a notação de índices, deixa-se claro que não serão trabalhadas as componentes contravariantes de \mathbf{u} . Ou seja, toda vez que os índices da velocidade aparecerem embaixo, significa que essas são as componentes na base normalizada.

Logo, tem-se a relação:

$$u^i = \frac{u_i}{h_i} \quad (\text{A.29})$$

A.3.4 Equação de Navier-Stokes

A equação de Navier-Stokes em forma vetorial para um fluido newtoniano incompressível é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{A.30})$$

Em formalismo covariante e contravariante, temos a equação em notação indicial

$$\rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^k \nabla_k u^i \right) = g^{ik} \nabla_k p + \mu g^{kl} \nabla_k \nabla_l u^i. \quad (\text{A.31})$$

A.3.5 Termo Advectivo

Expandindo a derivada covariante do termo convectivo, tem-se que:

$$u^k \nabla_k u^i = u^k \partial_k u^i + \Gamma_{kl}^i u^k u^l \quad (\text{A.32})$$

Nota-se que o termo $\Gamma_{kl}^i u^k u^l$ para um i fixo pode ser interpretado algebricamente como o produto escalar entre duas matrizes, este ponto ajuda a visualizar melhor a equação. Este produto escalar será representado como “:”, semelhante ao produto escalar de tensores de segunda ordem; porém, tomando cuidado com a semântica pois não está se trabalhando com tensores.

$$A : B = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} \quad (\text{A.33})$$

Exemplo: Cálculo de $[\Gamma^r] : [u^k u^l]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} u_r u_r & u_r u_\theta & u_r u_z \\ u_\theta u_r & u_\theta u_\theta & u_\theta u_z \\ u_z u_r & u_z u_\theta & u_z u_z \end{bmatrix} = -r(u_\theta)^2 \quad (\text{A.34})$$

Desta forma fica simples calcular o termo para cada componente da equação:

Na direção r:

$$u^r \partial_r u^r + u^\theta \partial_\theta u^r + u^z \partial_z u^r - r(u^\theta)^2 \quad (\text{A.35})$$

Abaixando os índices:

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{(u_\theta)^2}{r} \quad (\text{A.36})$$

Na direção θ :

$$u^r \partial_r u^\theta + u^\theta \partial_\theta u^\theta + u^z \partial_z u^\theta + 2 \frac{u^r u^\theta}{r} \quad (\text{A.37})$$

Abaixando os índices e simplificando:

$$\frac{1}{r} \left[u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] \quad (\text{A.38})$$

Na direção z :

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.39})$$

A.3.6 Laplaciano de um Vetor

Esta é a parte mais trabalhosa de ser calculada. A única forma simples de computar este termo foi se aproveitar das simetrias dos símbolos de Christoffel e da ortogonalidade da base, que faz com que o tensor métrico seja completamente diagonal.

De início, sabe-se que:

$$\nabla_l \nabla_j u^i = \partial_l \partial_j u^i - \Gamma_{lj}^k \partial_k u^i + (\Gamma_{jk}^i \partial_l u^k + \Gamma_{lk}^i \partial_j u^k) + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{jk}^m u^k - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mk}^i u^k + u^k \partial_l \Gamma_{jk}^i \quad (\text{A.40})$$

Sabendo que as componentes contravariantes do laplaciano de um vetor são dadas por

$$(\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^i = g^{lj} \nabla_l \nabla_j u^i. \quad (\text{A.41})$$

Com isso, pode-se resolver termo a termo componente a componente:

$$g^{lj} \partial_l \partial_j u^i = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} & \text{para } r \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) & \text{para } \theta \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} & \text{para } z \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

$$-g^{lj} \Gamma_{lj}^k \partial_k u^i = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \text{para } r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) & \text{para } \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} & \text{para } z \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$g^{lj} \Gamma_{jk}^i \partial_l u^k = \begin{cases} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \text{para } \theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & \text{para } \theta \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

Por simetria:

$$g^{lj}\Gamma_{lk}^i\partial_j u^k = g^{lj}\Gamma_{jk}^i\partial_l u^k \quad (\text{A.45})$$

Resolvendo os outros termos:

$$g^{lj}\Gamma_{lm}^i\Gamma_{jk}^m u^k = \begin{cases} -\frac{1}{r^2}u_r & \text{para } r \\ -\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r^2}u_\theta\right] & \text{para } \theta \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

$$-g^{lj}\Gamma_{lj}^m\Gamma_{mk}^i u^k = \begin{cases} 0 & \text{para } r \\ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r^2}u_\theta\right] & \text{para } \theta \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

E por último:

$$g^{lj}u^k\partial_l\Gamma_{jk}^i = \begin{cases} 0 & \text{para } r \\ -\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r^2}u_\theta\right] & \text{para } \theta \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

A.3.7 Equação de Navier-Stokes em Coordenadas Cilíndricas

Utilizando o que foi desenvolvido nas seções anteriores, pode-se escrever as equações de Navier-Stokes para um fluido newtoniano incompressível em coordenadas cilíndricas como se segue abaixo:

Direção r:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Direção θ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ &+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Direção z:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} +$$
$$+ \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A.51})$$

B Cálculo do Tensor de Tensões Efetivo em Suspensões e Emulsões

Este apêndice tem como objetivo mostrar a influência na tensão de um fluido provocada por partículas suspensas em um fluido newtoniano. Ao longo do projeto foram obtidos vários resultados sobre fluidos não-newtonianos, cuja viscosidade era afetada pela presença de algum elemento neste fluido, anulando a relação linear entre tensão e gradiente de deformação. A importância deste apêndice, então, está em explicar um pouco melhor como entidades em suspensão podem alterar a reologia de um fluido.

Por definição, a tensão efetiva é uma média de ensemble da distribuição de tensões. Para uma suspensão ou emulsão homogênea, esta média é igual a uma média volumétrica em um volume suficientemente grande para conter um número de partículas estatisticamente relevante e suficientemente pequeno de modo que é menor do que as escalas onde ocorrem as variações de interesse no sistema macroscópico. A expressão formal para este termo é escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{B.1})$$

A integral acima pode ser decomposta no domínio do fluido e no das partículas, resultando:

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\sum V_n} \boldsymbol{\sigma} dV + \sum_n \int_{V_n} \boldsymbol{\sigma} dV \right] \quad (\text{B.2})$$

O tensor de tensões nas partículas ou gotas não é conhecido; porém, é possível calcular a segunda integral utilizando a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{x}))^T - \mathbf{x} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.3})$$

Como as partículas devem ser livres de força resultante, deve-se ter que $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$,

fazendo que a equação para tensão efetiva fique na forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} = \frac{1}{V} \left[\int_{V-\sum V_n} (-p\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{D})dV + \sum_n \int_{S_n} \mathbf{x}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}dS \right] \quad (\text{B.4})$$

A média do termo de pressão resulta apenas em uma pressão efetiva, portanto, não é necessário desenvolvimento. Para a integral do tensor taxa de deformação, tem-se que:

$$\int_{V-\sum V_n} 2\mu\mathbf{D}dV = \int_V 2\mu\mathbf{D}dV - \sum_N \int_{S_n} \mu(\mathbf{u}\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\mathbf{u})dV \quad (\text{B.5})$$

Combinando os resultados, tem-se a seguinte equação:

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} = -p^{eff}\mathbf{1} + 2\mu \langle \mathbf{D} \rangle + \boldsymbol{\sigma}^p \quad (\text{B.6})$$

Onde:

$$\boldsymbol{\sigma}^p = \frac{1}{V} \sum_n \int_{S_n} [\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu(\mathbf{u}\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\mathbf{u})] dV \quad (\text{B.7})$$

Esta equação também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}^p = n \langle \mathbf{S} \rangle, \quad (\text{B.8})$$

na qual:

$$n = \frac{N}{V} \quad (\text{B.9})$$

é a densidade de partículas e:

$$\mathbf{S}_n = \int_{S_n} [\mathbf{x}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mu(\mathbf{u}\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\mathbf{u})] dV \quad (\text{B.10})$$

é o chamado “stresslet” da partícula, que corresponde ao distúrbio de tensão que uma partícula provoca em um fluido