



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM TURBINA
EÓLICA UTILIZANDO ABSORVEDOR
PASSIVO DE COLUNA DE LÍQUIDO
SINTONIZADO**

Por,

Mansour Hassan Alkmim

Brasília, 11 de dezembro de 2015

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM TURBINA EÓLICA UTILIZANDO ABSORVEDOR PASSIVO DE COLUNA DE LÍQUIDO SINTONIZADO

Por,

Mansour Hassan Alkmim

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Adriano Todorovic Fabro, UnB/ENM _____
(Orientador)

Marcus Vinicius Girão de Moraes, UnB/ENM _____
(Co-orientador)

Suzana Moreira Ávila, UnB/FGA _____

Brasília 11 de dezembro de 2015

*In theory, there is no difference between theory and practice. But, in practice, there is. -
Jan L.A. Van de Snepscheut*

Resumo

Mecanismos de absorção de vibração se fazem necessários para reduzir níveis de vibração em diversas aplicações de engenharia como pontes, edifícios, aerogeradores, entre outros. Na literatura existem diversos estudos acerca dos vários tipos de absorvedores. Um dos dispositivos mais promissores para a absorção de energia são os absorvedores que utilizam líquidos devido principalmente a sua simplicidade e baixo custo. Em especial, os Absorvedores por Colunas de Líquido Sintonizado (ACLS) – do inglês *Tuned Liquid Column Damper* (TLCD) – são uma classe de controle passivo que utilizam líquidos em um reservatório em forma de “U” para controlar a vibração da estrutura primária. A energia é dissipada pela passagem de líquido por um orifício dentro do reservatório que possui perdas de cargas como características intrínsecas associadas a efeitos de turbulência e de fricção.

A aplicação estudada no trabalho para esses tipos de dispositivos são as turbinas eólicas. Devido a sua geometria delgada e o alto custo associado a construção e manutenção dessas estruturas, dispositivos de absorção de vibração são aplicados para prolongar a vida útil dos aerogeradores e proteção contra a excitação proveniente das forças dos ventos.

Esse trabalho apresenta uma revisão bibliográfica acerca do tema controle estrutural de vibração e seus diversos tipos de dispositivos estudados pela literatura bem como os avanços nas últimas décadas acerca do assunto. Conceitos teóricos básicos de vibrações mecânicas são apresentados como vibração em sistemas com um grau de liberdade, sistemas com dois graus de liberdade e absorvedores de vibração. Também são discutidos tópicos de vibração aleatória dando ênfase às ferramentas estocásticas e probabilística que fornecem conceitos essenciais como densidade espectral de potência e autocorrelação. Em seguida, é apresentado o modelo matemático proposto e os métodos utilizados para tratar a não-linearidade presente no sistema. Métodos de otimização desenvolvidos pela literatura foram usados para se determinar parâmetros otimizados do sistema e por fim uma análise comparativa é realizada considerando o sistema linearizado equivalente e o sistema não-linear utilizando tanto forçamento harmônico quanto forçamento aleatório.

A objetivo da análise consiste em comparar o modelo não-linear com o seu equivalente linear. Para isso, utilizam-se os conceitos de linearização estatística que procuram minimizar o erro dessa aproximação. Em seguida são analisadas os métodos de solução utilizando dois tipos de forçamentos, o forçamento harmônico e o forçamento aleatório.

Para o forçamento harmônico, primeiramente são feitas comparação apenas com o ACLS e depois o sistema integrado a estrutura variando parâmetros. Para a análise com forçamento aleatório, comparam-se os sistema linear e não-linear utilizando os conceitos de densidade espectral de potência.

Os resultados apresentados para o forçamento harmônico mostram que o modelo linear apresenta boa acurácia embora a resposta apresente uma maior amplitude que para amortecimento não-linear. Para a análise com forçamento aleatório, primeiro se descreve o algoritmo utilizado e os dois métodos utilizados para a comparação. Nesse caso, o resultados obtidos são apresentados tanto utilizando ruído branco quanto espectro do tipo filtro de primeira ordem, este último apresenta resultados mais satisfatórios pois é um modelo fisicamente mais realista do que o ruído branco. O comparativo foi feito considerando os sistema não-linear e linearizado e obteve-se uma boa aproximação entre os dois.

Abstract

Vibration absorbing mechanisms are promising devices that help reducing vibration levels in many engineering applications such as bridges, buildings, wind turbines, among others. In the literature, there are several studies on a variety of absorbers. One of the most promising devices for the absorption of energy are those using liquid, mainly due to its simplicity and low cost. In particular, Tuned Liquid Column Damper (TLCD) is a class of passive control, which utilize liquid in a “U” shape reservoir to control structural vibration of the primary system. The energy is dissipated from the movement of the liquid passing through an orifice in the reservoir, which has head-losses associated with turbulent, and friction effects.

The application of TLCDs in wind turbines presented in this work gain significant attention mainly due to its slender geometry, the high cost associated with building, manufacture and the maintenance of these structures. Vibration absorbers devices are applied to extend the life and safety of the wind turbines from the wind forces.

This work presents a literature overview on the subject structural control describing the different types of devices studied by the literature as well as advances in recent years on the subject. Basic theoretical concepts are shown, for instance, vibration of single degree of freedom systems, vibration of two degree of freedom systems and vibration absorbers. In addition, topics of random vibration are discussed with an emphasis on stochastic and probabilistic tools providing the essential concepts such as power spectral density and autocorrelation. Then, the mathematical model and the methods used to overcome the nonlinearity present in the system are shown. Optimization methods developed by the literature are used to determine optimum parameters of the system and finally a comparative analysis is made considering the linearized system and the equivalent nonlinear system using both harmonic and random excitation.

The objective of the analysis is to compare the nonlinear model with the linear equivalent. In order to accomplish this, the concepts of statistical linearization seeking to minimize the error between the nonlinear and equivalent linear system are used. Next, a variety of methods of solution are analyzed using two types of excitation, the harmonic and the random excitation. For harmonic excitation, comparisons are first made only with the TLCD and then the integrated system varying structural parameters. For the analysis of the random excitation, the linear and nonlinear system using the concepts of power

spectral density are compared .

The results for the harmonic excitation show that the linear model has good accuracy although the response amplitude has been shown to be slightly higher than for the nonlinear system. For the random excitation analysis, first, the algorithm used and the two methods used for the comparison are described. In this case, the results are presented using both white noise and filters of the first order spectrum, the latter presents more satisfactory results since the excitation spectrum is physically more realistic than white noise spectrum model. The comparison are made with regards the nonlinear system and the linearized system where it has been shown satisfactory approximation between the two methods.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Oferta interna de energia elétrica no Brasil em 2015 (ANEEL, 2015).	2
Figura 1.2 – Atlas do potencial eólico brasileiro (Amarante et al., 2001).	3
Figura 1.3 – Diâmetro do rotor das pás de turbinas ao longo dos anos (AGENCY, 2013).	4
Figura 2.1 – Taipei 101 com sistema AMS (Haskett et al., 2004)	9
Figura 2.2 – Elemento de sistema de controle passivo (Constantinou, Soong e Dargush, 1998) modificado	9
Figura 2.3 – Elemento de sistema de controle ativo (Constantinou, Soong e Dargush, 1998) modificado.	10
Figura 2.4 – Diagrama de uma turbina eólica com AMS(TMD) instalado (Stewart, 2012).	11
Figura 2.5 – Exemplo de um AMS, absorvedor sem amortecimento e massa principal sujeitos a excitação harmônica (<i>Frahm's Absorber</i>)(Soong e Dargush, 1997).	12
Figura 2.6 – Exemplo de um ALS (TLD) instalado no Aeroporto Internacional de Tokio (Tamura et al., 1996).	13
Figura 2.7 – Esquema de ACLS em turbina eólica.	14
Figura 2.8 – Tipos de absorvedores: A: AMS B: absorvedor do tipo pendular C: absorvedor de oscilação sintonizado D: ACLS E: Elementos de absorção auxiliar (Altay et al., 2014).	15
Figura 3.1 – Sistema com um grau de liberdade com amortecimento (Rao e Yap, 1995).	19
Figura 3.2 – Comparação do movimento para diferentes tipos de amortecimento (Rao e Yap, 1995).	21
Figura 3.3 – Absorvedor de vibração não amortecido modificado (Rao e Yap, 1995).	23
Figura 3.4 – Gráfico da resposta em frequência de um sistema sem amortecedor (Rao e Yap, 1995).	24
Figura 3.5 – Absorvedor de vibração amortecido modificado (Rao e Yap, 1995).	25
Figura 3.6 – Gráfico da resposta em frequência de um sistema com absorvedor com e sem amortecimento e sem absorvedor	26

Figura 4.1 – Possível descrição no tempo de um sistema em vibração aleatória (Newland, 2012).	27
Figura 4.2 – Dados anemométricos da velocidade e direção dos ventos (Xu e Coastal, 2002).	28
Figura 4.3 – Curva da função de densidade de probabilidade (Newland, 2012).	30
Figura 4.4 – Distribuição da função de densidade de probabilidade do tipo Gaussiana (Newland, 2012).	31
Figura 4.5 – Conjunto de amostras de processos estocásticos (Newland, 2012).	31
Figura 4.6 – Curva da função de densidade espectral de potência (Newland, 2012).	35
Figura 4.7 – Diagrama de blocos do sistema linear com r parâmetros de entrada e s de saída no domínio do tempo e da frequência (Roberts e Spanos, 2003).	36
Figura 5.1 – Modelo esquemático do sistema estrutura ACLS.	44
Figura 5.2 – Comparação entre os parâmetros otimizados (a) ζ e (b) γ para diferentes valores dos variáveis μ e α	48
Figura 5.3 – Função de transferência do Filtro de primeira ordem e do sistema primário para diferentes valores de ν	50
Figura 5.4 – Deslocamento da altura de coluna d'água em função do tempo em regime permanente para escoamento laminar e turbulento.	53
Figura 5.5 – Resposta em frequência para os quatro tipos de modelos: transiente laminar e turbulento e harmônico laminar e turbulento equivalente.	54
Figura 5.6 – Esquema representativo de uma turbina eólica como uma viga engastada e uma massa pontual modificada (Avila et al., 2009).	55
Figura 5.7 – Resposta em frequência para diferentes valores da razão de massa (a) $\mu = 0,02$, (b) $\mu = 0,03$, (c) $\mu = 0,04$, (d) $\mu = 0,06$, (e) $\mu = 0,08$ e (f) $\mu = 0,1$ utilizando valores otimizados para a razão de amortecimento.	56
Figura 5.8 – DEP da resposta $S_{yy}(\omega)$ obtida via função de transferência para o caso linearizado e via integração numérica para o caso não-linear.	57
Figura 5.9 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória ruído branco sem ACLS e com ACLS obtida via linearização estatística e via integração numérica do sistema não-linear utilizando espectro do tipo Ruído branco.	58
Figura 5.10 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória FOF sem ACLS e com ACLS obtida via linearização estatística e via integração numérica do sistema não-linear utilizando espectro do tipo FOF.	59
Figura 5.11 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória FOF sem ACLS e com ACLS com diferentes valores da razão de massa, $\mu = 0,05$ e $\mu = 0,1$	59
Figura 5.12 – Evolução do deslocamento da estrutura com absorvedor e sem absorvedor quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco.	60

Figura 5.13–Evolução do deslocamento da estrutura com absorvedor e sem absorvedor quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo FOF.	60
Figura 5.14–Evolução do deslocamento da estrutura para diferentes razões de massas μ quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco.	61
Figura 5.15–Evolução do deslocamento da estrutura para diferentes valores da razão de massas μ quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo FOF.	61
Figura A.1–Quantidade de movimento para um escoamento na direção s através de um volume de controle.	65
Figura A.2–Esquema de um tubo em forma de U com fluido oscilando.	67
Figura A.3–Diagrama de moody mostrando o fator de fricção de Darcy-Weisbach plotado contra o número de Reynolds para várias rugosidades modificado (DAVIS, 2005).	70
Figura A.4–Orifício num tubo.	71
Figura B.1–Modelo massa, mola, amortecedor do sistema com dois graus de liberdade (Rao e Yap, 1995).	77

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Tipos usuais de modelo de densidade espectral de potencia para o vento.	40
Tabela 5.1 – Parâmetros do absorvedor otimizados para ruído branco para diferentes razões de massa.	49
Tabela 5.2 – Parâmetros do absorvedor otimizados para ruído FOF para diferentes razões de massa.	51
Tabela 5.3 – Parametros do absorvedor otimizados para diferentes parâmetros ν da FOF.	51
Tabela 5.4 – Parâmetros para a massa e rigidez generalizados.	55

Lista de abreviaturas e siglas

TLCD	<i>Tuned Liquid Mass Damper</i>
ACLS	Absorvedor de Coluna de Liquido Sintonizado
TMD	<i>Tuned Mass Damper</i>
AMS	Absorvedor de massa sintonizada
BVA	<i>Ball Vibration Absorber</i>
AVE	Absorvedor de Vibração Esférico
ALS	Absorvedor de Liquido Sintonizado
AOS	Absorvedor de Oscilação Sintonizado
UGdL	Um Grau de Liberdade
DGdL	Dois Graus de Liberdade
FOF	First Order Filter
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
TFR	Transformada de Fourier Rápida
TRF	Transformada Rápida de Fourier
TFD	Transformada de Fourier Discreta
ODE	Equação Diferencial Ordinária

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Aspectos Gerais	1
1.2	Motivação	1
1.3	Objetivos	4
1.4	Metodologia	5
1.5	Estrutura do Trabalho	5
2	CONTROLE DE VIBRAÇÃO	7
2.1	Estado da Arte	7
2.2	Controle Estrutural Passivo	10
2.2.1	Absorvedor de Massa Sintonizados (AMS)	11
2.2.2	Absorvedor de Líquido Sintonizado (ALS)	12
2.2.3	Outros Absorvedores	15
2.3	Revisão Bibliográfica	15
3	FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÃO MECÂNICA	18
3.1	Sistemas com Um Grau de Liberdade	18
3.1.1	Resposta em frequência de um sistema com amortecimento viscoso para forçamento harmônico	20
3.2	Sistemas com Dois Graus de Liberdade	21
3.3	AMS - Absorvedor de Vibrações	22
3.3.1	Absorvedor de vibração em sistema não amortecido	23
3.3.2	Absorvedor de vibração em sistema amortecido	24
4	VIBRAÇÃO ALEATÓRIA	27
4.1	Resposta em Vibração Aleatória	28
4.2	Função de Densidade de Probabilidade	29
4.3	Processo Estocástico	30
4.4	Correlação e Autocorrelação	32
4.5	Transformada de Fourier	32

4.6	Densidade Espectral de Potências	34
4.7	Transformada de Fourier Rápida	37
4.8	Exemplo de Aplicação	39
4.9	Linearização Estatística	40
5	ABSORVEDOR DE COLUNA DE LÍQUIDO SINTONIZADO (ACLS)	43
5.1	Modelagem do ACLS	43
5.2	Linearização Estatística do Amortecimento	45
5.3	Otimização de Parâmetros	46
5.3.1	Espectro filtro de primeira ordem	49
5.4	Resposta do sistema ao Forçamento Harmônico	52
5.5	Resposta do sistema ao Forçamento Aleatório	57
6	CONCLUSÃO	62
	ANEXOS	64
	ANEXO A – PROBLEMA DE OSCILAÇÃO NA MECÂNICA DOS FLUIDO	65
A.1	Conceito Fundamentais da Mecânica dos Fluidos	65
A.2	Oscilação de Líquido num Tubo em “U”	66
A.3	Sobre a Natureza do Fator de Fricção	70
A.4	Perdas no escoamento Através do Orifício	71
	ANEXO B – SOLUÇÃO DE INTEGRAL EM VIBRAÇÃO ALEA- TÓRIA	73
B.1	Equação Para as Funções de Correlação e Correlação Cruzada	73
B.2	Momento Espectral do Sistema	75
B.3	Exemplo: Sistema com dois graus de liberdade	76
	REFERÊNCIAS	79

1 INTRODUÇÃO

1.1 Aspectos Gerais

Devido a necessidade de diversificação da matriz energética brasileira, busca-se outras fontes energéticas que sejam eficientes e renováveis, entre as opções possíveis a que mais se destaca é a energia eólica devido principalmente as boas condições geográficas e econômicas.

A tecnologia empregada em turbinas eólicas vêm crescendo a cada ano, os avanços na área estrutural permitem a criação de turbinas maiores e mais eficientes. Entretanto, com o surgimento de estruturas mais altas e esbeltas surgem também preocupações a respeito de sua integridade em relação aos carregamentos dinâmicos provenientes dos ventos.

O comportamento dinâmico que ocorrem nas turbinas eólicas tem suscitado diversos estudos técnicos nos últimos anos. A redução da vibração, com o intuito de aumentar a vida útil de aerogeradores, motiva o uso de diversos sistemas de controle de vibração passivo e/ou semi-ativo. Dentre as diversas propostas de controle de vibração, os absorvedores de coluna de líquido sintonizado (ACLS) – do inglês, *Tuned liquid column dampers* (TLCD) – estão presentes em diversas publicações especializadas nos últimos anos e tem se tornado uma opção com relativo baixo custo e boa eficiência.

1.2 Motivação

O atual cenário energético brasileiro passa por uma situação delicada, a recente crise no setor elétrico fez com que a ONS (Orgão Nacional do Sistema) aprovasse a volta de plena carga das usinas termoeletricas. É evidente uma necessidade de reajuste do modelo energético atual que está em desequilíbrio. Como é possível observar na Fig.1.1, depende quase que exclusivamente das hidrelétricas. De acordo com dados divulgados pelo PNE 2030 (Plano Nacional de Energia) a maior parte da energia produzida no país é proveniente das usinas hidrelétricas. Prevê-se que até o ano de 2030, hidrelétricas terão participação de 77,4% da matriz energética. Apesar de todo o mérito das hidrelétricas, há incertezas quanto a sua oferta no futuro. Grandes obras e projetos como o de S. Luiz do Tapajós e

Belo Monte têm enfrentado sérios conflitos sócio-ambientais como a transposição de rios, impactos na fauna e conflitos com comunidades locais. Outros problemas estratégicos das hidrelétricas é a existência de uma grande dependência das condições climáticas e da localização dessa energia que se encontra primariamente na região Amazônica. Exemplos recentes de má gestão dos níveis de água em reservatórios acarretam na reativação de usinas termoelétricas que geram prejuízos ambientais e econômicos.

Diante desses fatos, o governo brasileiro tem criado planos que buscam mudar o quadro atual. Uma das opções recentes são as pequenas centrais hidrelétricas (PCHs) que causam menor impacto ambiental já que estas operam com uma menor capacidade de reservatório. Fontes eólicas são responsáveis pela maior variação da matriz energética brasileira. A previsão é de que o país tenha mais de 17 GW de geração eólica em 2022 de acordo com PDE-2022 (Plano Decenal de Expansão de Energia).

Fonte		Capacidade Instalada			Total		
Origem	Fonte Nível 1	Nº de Usinas	(KW)	%	Nº de Usinas	(KW)	%
Biomassa	Agroindustriais	389	10.045.550	6,9092	405	10.152.505	6,9828
		2	1.722	0,0011			
		3	65.700	0,0451			
		11	39.533	0,0271			
	Biocombustíveis líquidos	2	4.350	0,0029	2	4.350	0,0029
		7	51.397	0,0353			
	Floresta	8	109.865	0,0755	79	2.405.836	1,6547
		17	1.885.649	1,2969			
		47	358.925	0,2468			
		12	2.081	0,0014			
Resíduos animais	11	70.873	0,0487	11	70.873	0,0487	
Resíduos sólidos urbanos	11	70.873	0,0487	11	70.873	0,0487	
Eólica	Cinética do vento	277	6.138.549	4,2220	277	6.138.549	4,2220
Fóssil	Carvão mineral	1	24.400	0,0167	23	3.614.155	2,4857
		13	3.389.465	2,3312			
		9	200.290	0,1377			
	Gás natural	1	40.000	0,0275	138	12.898.200	8,8712
		137	12.858.200	8,8437			
	Outros Fósseis	1	147.300	0,1013	1	147.300	0,1013
	Petróleo	7	339.960	0,2338	1954	9.647.888	6,6357
		40	4.091.353	2,8140			
		1891	4.278.647	2,9428			
		16	937.928	0,6451			
Hídrica	Potencial hidráulico	1176	90.135.529	61,994	1176	90.135.529	61,994
Nuclear	Urânio	2	1.990.000	1,3687	2	1.990.000	1,3687
Solar	Radiação solar	318	15.185	0,0104	318	15.185	0,0104
Importação	Paraguai		5.650.000	3,8860			5,6192
	Argentina		2.250.000	1,5475			
	Venezuela		200.000	0,1375			
	Uruguai		70.000	0,0481			
Total		4398	145.392.451	100	4398	145.392.451	100

Figura 1.1 – Oferta interna de energia elétrica no Brasil em 2015 (ANEEL, 2015).

O Brasil possui um bioma invejável devido ao seu extenso território localizado em uma zona inter-tropical, tem-se nos quatro cantos do país um clima que proporciona um rico ambiente para exploração de energias renováveis como a eólica e a solar.

A energia solar está se tornando bastante popular em todo mundo, países Europeus, como Alemanha e Itália, são pioneiros em energia solar e contam com 60% deste mercado. No Brasil, infelizmente parques de energia solar (ou usinas solar) ainda possuem um custo muito elevado e no presente momento não há um plano concreto de incentivos para esse tipo de energia. A tecnologia nacional ainda está em fases inicial e não existem montadoras estrangeiras instaladas no país. Quem se aventura nesse tipo de empreendimento, sofre com preços elevados para importação de equipamentos.

A energia eólica, em contrapartida, já possui um ambiente mais favorável para

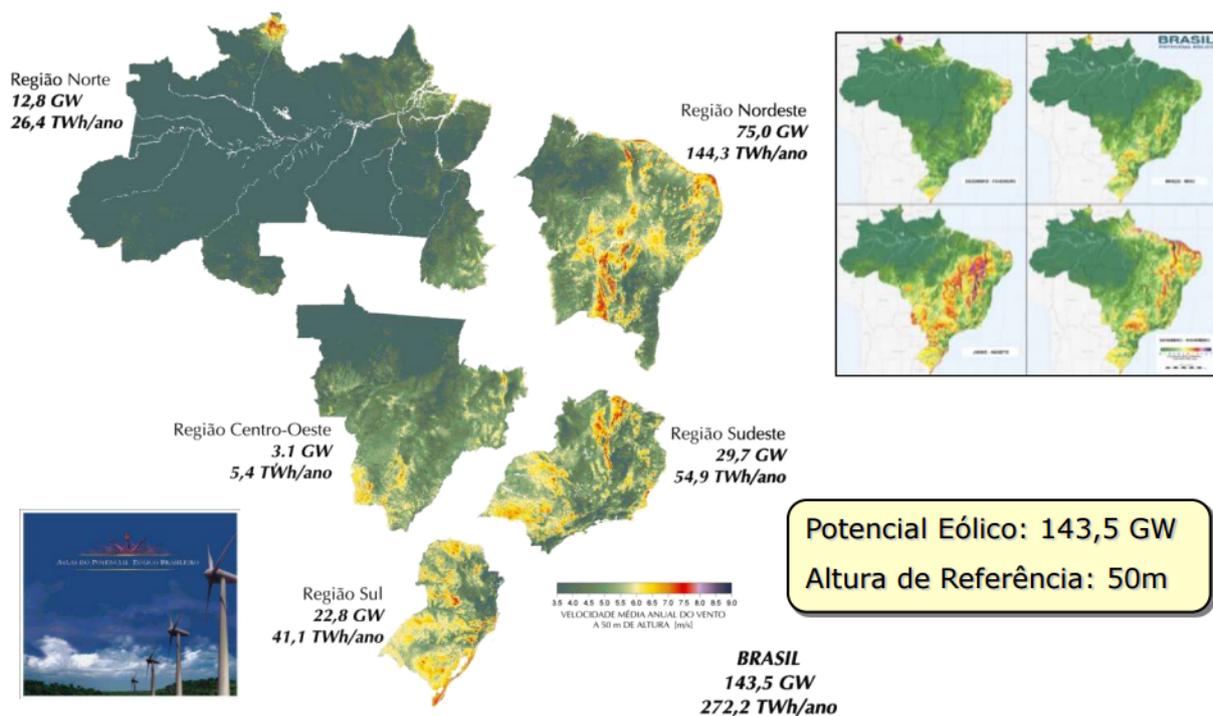


Figura 1.2 – Atlas do potencial eólico brasileiro (Amarante et al., 2001).

expansão. O governo trabalha com isenção de impostos para turbinas eólicas desde do ano 2009, o que diminui os custos e viabiliza a criação de novos empreendimentos por todo país tendo como destaque a região nordeste, sul e sudeste, onde se localizam os principais parques eólicos. A energia eólica possui diversas vantagens entre esses benefícios, pode-se destacar o fato de ser uma matriz renovável e não emitir gases do efeito estufa ou resíduos tóxicos, o maquinário empregado possui vida útil elevada e evita danos ambientais uma vez que as áreas onde os parques são instalados podem ser usadas para agricultura e outras atividades. Entre essas e outras vantagens, percebe-se que a energia eólica tem grandes perspectivas de crescimento o que certamente contribuirá para a diversificação da matriz energética brasileira.

No cenário atual, há em capacidade instalada de energia eólica um total de 6,1 *GW*, um valor muito aquém da capacidade de produção que de acordo com o Atlas do Potencial Eólico Brasileiro (Amarante et al., 2001), gira em torno de 143,5 *GW* com indicado na Fig.1.2. Além do mais, no estudo não se considera as regiões *offshore* onde constam ventos abundantes e uniformes. Percebe-se o imenso potencial dessa matriz que pode ser explorada e aproveitada.

As turbinas eólicas são mecanismo que convertem o movimento mecânico gerado pela força dos ventos em energia elétrica. O vento atinge as pás do rotor que transferem o movimento de rotação para um gerador elétrico responsável por produzir eletricidade.

Durante a fase de projeto, as turbinas eólicas devem ser projetadas para atender a uma velocidade de vento que produza a máxima potência de saída. Porém, podem existir momentos em que as forças do vento atuante será muito elevada, e portanto, se faz necessário limitar o movimento das pás de forma a evitar um sobrecarregamento do

rotor, da caixa de máquinas e do gerador. Usualmente, turbinas eólicas possuem sistemas de controle angular nas turbinas e freios que mantem a integridade e previnem a vibração excessiva das torres. Esse sistemas são úteis pois regulam a velocidade do rotor baseando-se na velocidade do vento em determinadas condições de operação. Geralmente, turbinas eólicas possuem pequenos valores de amortecimento se comparado com outras estruturas. A razão de amortecimento resultante de amortecimento aerodinâmico corresponde a 1-2 % (Altay et al., 2014).

A preocupação com a integridade das turbinas eólicas com o passar dos anos torna-se um ponto chave quando se pretende projetá-las. O avanço da tecnologia envolvida nas turbinas eólica sofreu nas últimas décadas fez com que se criassem turbinas maiores e eficientes como pode ser observados na Fig.1.3. Dessa forma, surgem desafios para evitar a vibração excessiva tanto das hélices quanto das torres.

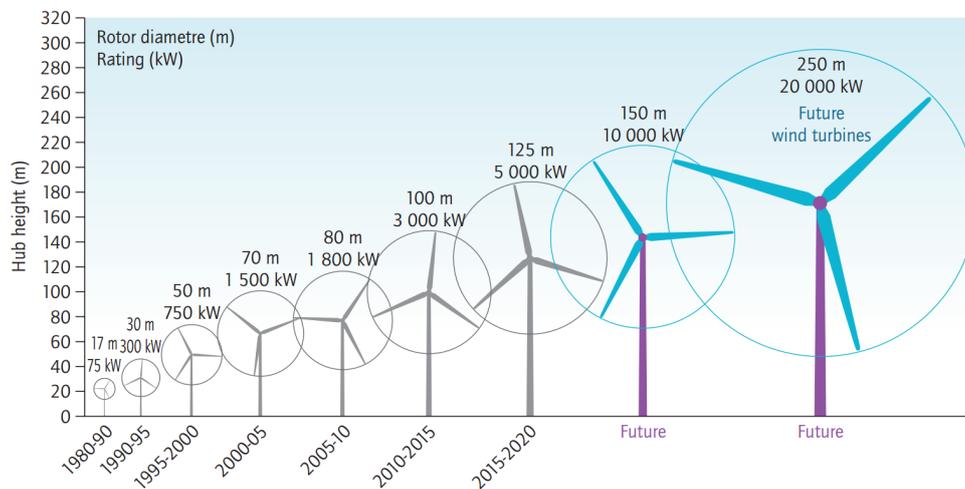


Figura 1.3 – Diâmetro do rotor das pás de turbinas ao longo dos anos (AGENCY, 2013).

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo avaliar o desempenho de um absorvedor de vibração por meio de análise Estocástica. Pretende-se consolidar os conceitos teóricos tais como vibração em sistemas amortecidos com um ou dois graus de liberdade, absorvedores de vibração, e conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos como equação da energia, oscilação em tubo em “U” e perdas de carga em orifícios. Em seguida, serão realizados modelos analíticos para as diversas configuração do sistema considerando apenas o fluido com sua natureza laminar ou turbulenta e considerando o sistema com dois graus de liberdade e sua interação fluido estrutura. Também são discutidos tópicos de vibração aleatória dando ênfase às ferramentas estocásticas e probabilística que fornecem conceitos essenciais como densidade espectral de potência e autocorrelação. Em seguida, é apresentado o modelo matemático proposto e os métodos utilizados para tratar a não-linearidade presente no sistema. Métodos de otimização desenvolvidos pela literatura foram usados

para se determinar parâmetros otimizados do sistema e por fim uma análise comparativa é realizada considerando o sistema linearizado equivalente e o sistema não-linear utilizando tanto forçamento harmônico quanto forçamento aleatório.

Para realização deste trabalho, o aluno contará com os recursos laboratoriais do GDS bem como com a colaboração dos professores do grupo.

1.4 Metodologia

O plano de dissertação consiste em elencar os principais avanços na área de controle estrutural bem como propor uma aplicação na área de energias renováveis tendo em vista as preocupações em relação ao futuro da matriz energética brasileira.

A metodologia se divide em três etapas. A primeira etapa é um estudo teórico do tema e a criação de um modelo numérico. A segunda etapa é a implementação de teorias estocásticas que auxiliam na descrição do modelo. A terceira etapa consiste em comparar os diferentes métodos de solução e discutir a eficácia das diferentes abordagens.

A análise realizada na terceira etapa consiste em comparar o modelo não-linear com o seu equivalente linear. Para isso, utilizam-se os conceitos de linearização estatística que procuram minimizar o erro dessa aproximação. Em seguida são analisadas os métodos de solução utilizando dois tipos de forçamentos, o forçamento harmônico e o forçamento aleatório. Para o forçamento harmônico, primeiramente são feitas comparação apenas com o ACLS e depois o sistema integrado a estrutura variando parâmetros do sistema. Para a análise com forçamento aleatório, comparam-se os sistema linear e não-linear utilizando os conceitos de densidade espectral de potência. Para a análise com forçamento aleatório, primeiro se descreve o algoritmo utilizado e os dois métodos utilizados para a comparação.

1.5 Estrutura do Trabalho

Esse trabalho é dividido em 6 capítulos. O Capítulo 2 apresenta o estado da arte acerca do tema controle estrutural de vibração, uma revisão bibliográfica tratando os diversos tipos de dispositivos estudados pela literatura bem como os avanços nas últimas décadas acerca do assunto. O Capítulo 3 apresenta os conceitos teóricos básicos de vibrações mecânicas como vibração em sistemas com um grau de liberdade, dois graus de liberdade e absorvedores de vibração. No Capítulo 4 discute-se tópicos de vibração aleatório dando ênfase às ferramentas estocásticas e probabilística que nos fornece conceitos essenciais como função de densidade de probabilidade, correlação, autocorrelação, densidade espectral de potência e transformada de Fourier. Em seguida, no Capítulo 5 é apresentado o modelo matemático proposto e os métodos utilizados para contornar a não-linearidade presente no sistema. Métodos de otimização desenvolvidos pela literatura

foram usados para se determinar parâmetros otimizados do sistema e por fim uma análise comparativa é feita considerando o sistema linearizado equivalente e o sistema não-linear utilizando tanto forçamento harmônico quanto forçamento aleatório. Por fim, no Capítulo 6 os resultados são apresentados e discutidos.

2 CONTROLE DE VIBRAÇÃO

Também chamado de controle estrutural quando o controle de vibração age em estruturas, este capítulo apresenta os principais tipos de controle de vibração dando ênfase nos controles passivos e mais especificamente, nos absorvedores de líquido sintonizado e seu uso em turbinas eólicas que é o tema deste trabalho. Uma breve revisão bibliográfica é feita acerca do uso de absorvedores em diversas aplicações, seu desenvolvimento nos últimos anos, e a busca por parâmetros otimizados.

2.1 Estado da Arte

A necessidade de se construir estruturas maiores e complexas cria desafios aos engenheiros que precisam lidar com vibrações indesejadas e, ao mesmo tempo, manter construções seguras e por esse motivo, métodos de absorção de vibrações são usados extensivamente. Engenheiros de diversas partes do mundo vêm usando métodos de controle de vibração nas últimas décadas principalmente nas seguintes áreas:

- estruturas altas e/ou esbeltas (pontes, chaminés, torres) que tendem a ser excitadas perigosamente pelo vento, em um ou mais de seus modos naturais;
- escadas, arquibancadas, passarelas sujeitas à ressonância devido à movimentação dos pedestres. Essas vibrações geralmente não são perigosas para a estrutura em si, mas podem tornar-se muito desagradáveis para as pessoas;
- estruturas metálicas que vibram em uma frequência harmônica pela ação de máquinas, tais como peneiras, centrífugas, ventiladores, etc;
- conveses de embarcações, excitados em um de seus modos naturais pelos motores principais, equipamentos embarcados ou mesmo pelo ritmo das ondas.

Em anos recentes, inovações que aumentam as funcionalidades e segurança de estruturas contra desastres naturais e humanos estão em vários estágios de pesquisa e desenvolvimento. De forma global, eles podem ser agrupados em três áreas, controle passivo e controle ativo e o controle semi-ativo ou híbrido. Dentre os três, o isolamento de base apresenta uma tecnologia mais madura e já possui diversas aplicações.

Em projetos convencionais, por razões econômicas, é aceitável que estruturas sofram danos desde que não haja colapso e preserve sua vida útil. Entretanto, há ocasiões em que não se admite qualquer prejuízo à estrutura que prejudique seu funcionamento. Neste caso, deseja-se que sobre grandes carregamentos a estrutura seja capazes de absorver e dissipar energia de maneira estável por vários ciclos sem que danos sejam causados a estrutura e que seja resistente suficiente para evitar ou minimizar ações inelásticas.

Durante um evento sísmico, ou na presença de fortes ventos, uma quantidade finita de energia é adicionada a estrutura. Essa energia é transformada em ambas energia cinética e potencial (deformação) que deve ser absorvida ou dissipada por calor. Caso não haja amortecimento, a estrutura vibrará indefinitivamente. Entretanto, sempre há um nível de amortecimento inerente a estrutura que dissipa parte da energia e, portanto, reduz a amplitude de vibração até que o movimento cesse. A performance da estrutura apresenta melhoras caso parte da energia possa ser absorvida, não apenas pela estrutura, mas sim por algum tipo de dispositivo complementar (Constantinou, Soong e Dargush, 1998).

Controle estrutural é uma técnica utilizada comumente por engenheiros civis e mecânicos que envolve um sistema de dissipação ou absorção de energia, também conhecidos por sistemas de controle de movimento. Entre os tipos de controle de movimento, existem os absorvedores dinâmicos que possuem aplicação restrita a estruturas elásticas. Absorvedores dinâmicos são osciladores que quando anexados à estrutura e devidamente sintonizados em frequência próxima a um modo de vibração ou de uma excitação harmônica, ocorre transferência de energia cinética da estrutura primária para o absorvedor. Absorvedores dinâmicos possuem diversas formas, a saber, absorvedor de massa sintonizado (AMS), absorvedor de líquido sintonizado (ALS), absorvedor de coluna de líquido sintonizado (ACLS), ou qualquer combinação desses dispositivos cada um sintonizado em uma frequência específica (Hartog, 1985). A Fig.2.1, exemplifica o uso de AMS do tipo pêndulo utilizado no edifício Taipei 101 (Taipei World Financial Center) construído em Taipei, Tailândia no ano de 2004.

A diferença entre sistema passivo e ativo pode ser observada nas Fig.2.2 e 2.3. Um sistema de controle passivo (sistema de dissipação de energia ou absorvedor dinâmico de vibração) desenvolve forças de controle de movimento nos pontos de fixação do sistema. A energia necessária para gerar essas forças é proveniente dos movimentos dos pontos de fixação durante excitação dinâmica. O movimento relativo desses pontos de fixação determinam a amplitude e direção das forças de controle.

Um sistema de controle ativo também desenvolve forças de controle de movimento como observado na Fig.2.3. Entretanto, a magnitude e direção dessas forças é determinada por um controlador baseado nas informações de sensores e de uma estratégia de controle (algoritmo). Um sistema de controle ativo, em princípio, possui uma resposta de controle melhor e mais versátil.

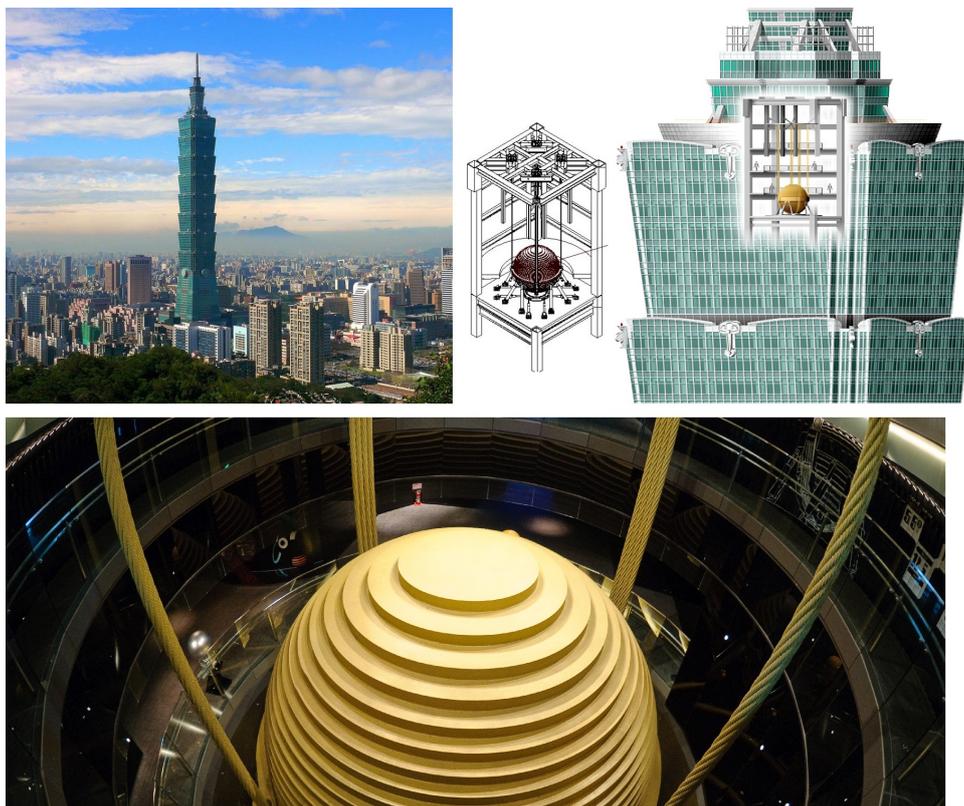


Figura 2.1 – Taipei 101 com sistema AMS (Haskett et al., 2004)

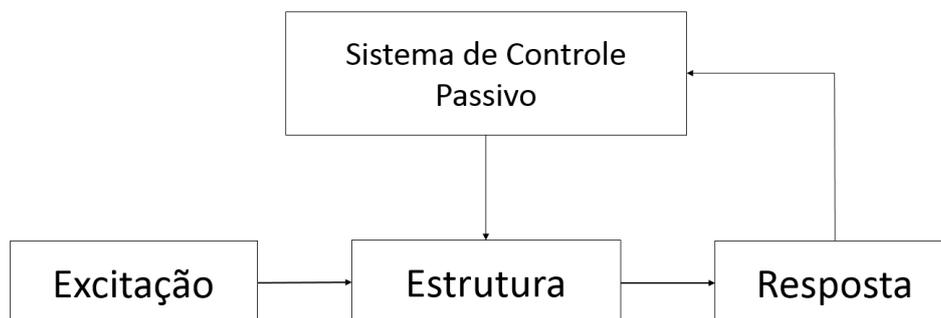


Figura 2.2 – Elemento de sistema de controle passivo (Constantinou, Soong e Dargush, 1998) modificado

O sistema de controle ativo utiliza algum tipo de fonte externa de potência para executar sua função, proporcional a magnitude da excitação do corpo vibrando. O processador de sinal produz um comando que informa ao atuador a quantidade de movimento ou forçamento proporcional ao sinal que deve ser executada de forma a controlar o deslocamento para manter o sistema em uma estado constante e controlado. O sinal de *feedback* pode ser obtido por diversas maneiras que podem se basear na distância, deslocamento, velocidade, aceleração, força, entre outros. O processador de sinal consiste em um mecanismo passivo que pode envolver componentes mecânicos, eletrônicos e fluidos. Os atuadores são usualmente sistemas mecânicos.

Sistemas de controle semi-ativo, ou híbridos, originam-se dos controles passivos que sofreram modificação para permitir ajustes em suas propriedades mecânicas. As pro-

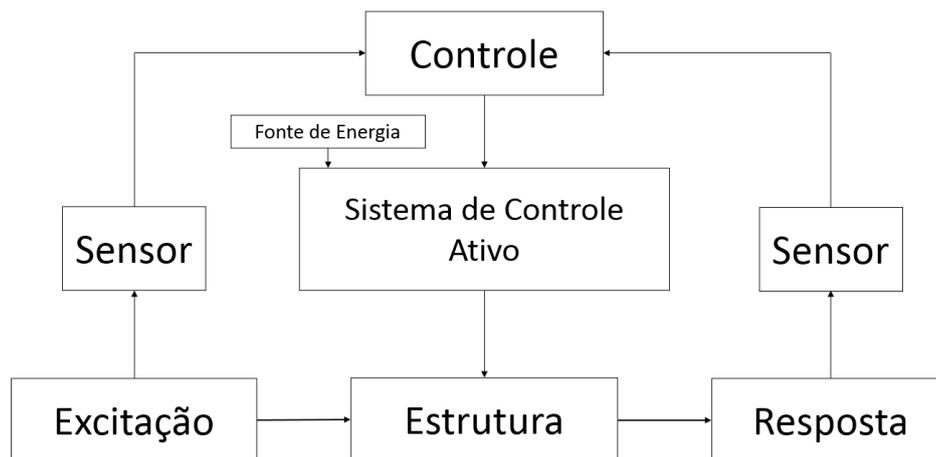


Figura 2.3 – Elemento de sistema de controle ativo (Constantinou, Soong e Dargush, 1998) modificado.

priedades mecânicas dos sistemas de controle semi-ativos podem ser representados de forma semelhante aos elementos retratados na Fig.2.3. Entretanto, as forças de controle são desenvolvidas através dos movimentos dos pontos de fixação do dispositivo semi-ativo. Sistemas de controle semi-ativo requerem uma fonte de energia para ajuste das propriedades mecânicas do sistema. Em geral, a demanda por energia é baixa se comparado aos Sistemas de controle ativo.

O foco desse trabalho são os sistemas de controle estrutural passivo. O motivo de se usar o passivo, alguns exemplos de controle passivo e o porquê da utilização dos absorvedores de coluna de líquido são discutidos nas seções seguintes.

2.2 Controle Estrutural Passivo

O controle estrutural passivo engloba uma gama de materiais e equipamentos que aumentam o amortecimento, rigidez e resistência e podem ser utilizados tanto para mitigação de desastres naturais quanto para reabilitação de estruturas antigas ou danificadas. Em anos recentes, esforços são tomados para desenvolver conceitos de dissipação de energia, ou amortecimento suplementar, em tecnologia funcional. Em geral, esses sistemas são caracterizados pela sua habilidade de elevar a dissipação de energia no sistema em que seja instalado. Esse efeito pode ser obtido por conversão de energia cinética em calor, ou pela transferência de energia entre os modos de vibração (Soong e Dargush, 1997). O controle estrutural inclui equipamentos que operam com base nos princípios de fricção, escoamento de metais, transformação física de metais, deformação de sólidos viscoelásticos ou fluido, e fluidos com orifício que hajam como um absorvedor dinâmico suplementar.

Diversos dispositivos foram criados e instalados em estruturas para aumentar performance sobre elevados carregamentos. A discussão seguinte apresenta os tipos de dis-

positivos mais comumente encontrados em aplicações atuais.

2.2.1 Absorvedor de Massa Sintonizados (AMS)

Na literatura existem diversos mecanismos que executam a função de absorvedor das torres eólicas. Os métodos mais comuns de absorção, utilizam controle estrutural passivo do tipo massa sintonizada (AMS) ilustrado na Fig.2.4.

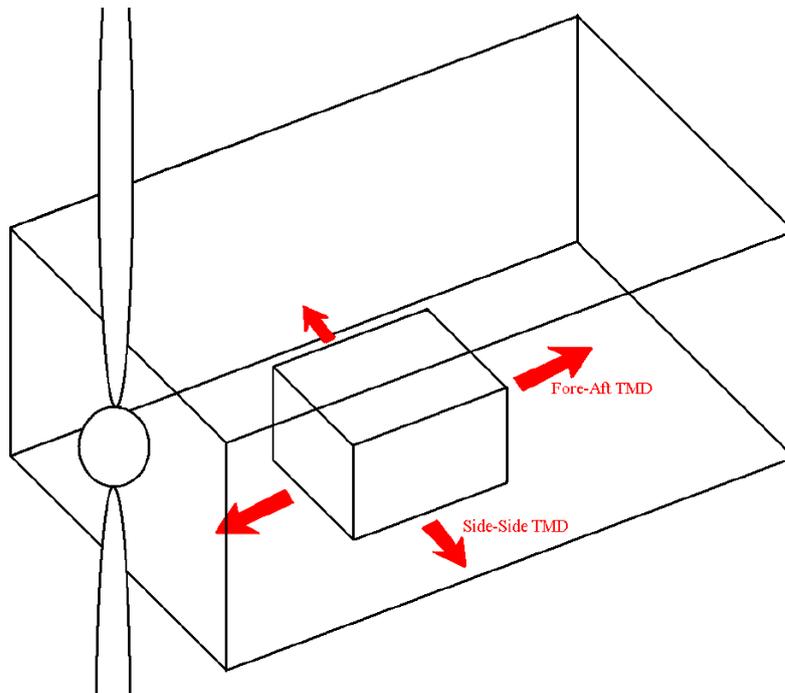


Figura 2.4 – Diagrama de uma turbina eólica com AMS(TMD) instalado (Stewart, 2012).

Do inglês, *tuned mass damper* (TMD), teve sua primeira aparição em patentes de Frahm (1911), e foi extensivamente estudada por Hartog (1985). O esquema representado na Fig.2.5 é conhecido como *Frahm's Absorber*. O dispositivo consiste em uma pequena massa m e uma mola com rigidez k fixada a massa principal M que possui rigidez K . Considerando o caso mais simples de carregamento harmônico é possível manter a massa principal M completamente estacionária quando a frequência natural do absorvedor $\sqrt{k/m}$ é escolhida (sintoniza) como sendo a frequência de excitação.

As primeiras estruturas que utilizam AMS tinham como objetivo absorver excitação induzida pelo vento. AMS foram instalados na Centerpoint Tower in Sidney, Austrália, e no Citicorp em Nova York. A essa altura o edifício pode ser representado por uma simples massa modal de aproximadamente 20 toneladas de forma que o AMS forme o sistema de dois graus de liberdade. Teste realizados no Citicorp mostram que o AMS produz 4% mais amortecimento que os 1% de amortecimento da estrutura original o que pode reduzir os níveis de aceleração da estrutura em cerca de 50% (Soong e Dargush, 1997).

Em anos recentes, estudos numéricos e experimentais foram realizados para avaliar a eficiência dos AMSs. Vale notar que os AMS passivos só podem ser sintonizado a

uma frequência específica. Para casos de estruturas com n-graus de liberdade que possuem AMS, a resposta ao primeiro modo de vibração (primeiro grau de liberdade) pode ser reduzida consideravelmente, embora as demais respostas apresentem um aumento de vibração. Para excitações do tipo sísmica, considerando um prédio de 12 andares, a resposta ao primeiro modo de vibração corresponde a mais de 80% do movimento total. Entretanto, para estruturas maiores a resposta aos demais modos de vibração torna-se mais significativa (Soong e Dargush, 1997).

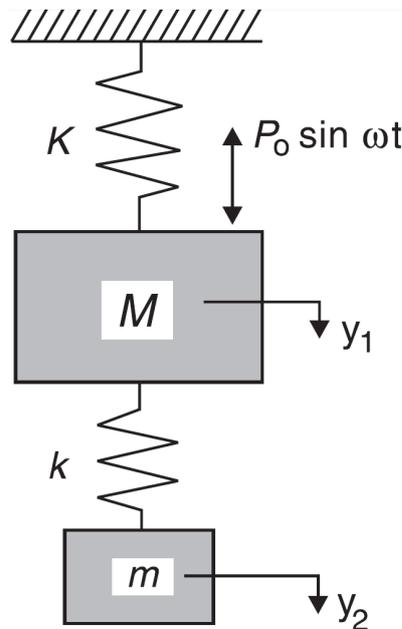


Figura 2.5 – Exemplo de um AMS, absorvedor sem amortecimento e massa principal sujeitos a excitação harmônica (*Frahm's Absorber*)(Soong e Dargush, 1997).

2.2.2 Absorvedor de Líquido Sintonizado (ALS)

Do inglês, *Tuned Liquid Damper* (TLD) é uma classe de AMS onde a massa é substituída por um líquido, usualmente água para agir como um absorvedor dinâmico de vibração. Seu princípio básico envolve aplicar uma ALS para reduzir a resposta dinâmica da estrutura de forma similar ao AMS. Entretanto, a resposta do sistema é não linear devido ao efeito de *sloshing* (movimento do fluido irregular no reservatório próximo a superfície) ou a presença de orifícios do interior de reservatório que geram efeitos turbulentos. Em comparação com os AMSs, as vantagens associadas aos ALSs incluem o baixo custo, praticamente zero necessidade de manutenção e facilidade de sintonização dependendo apenas da geometria escolhida.

Aplicações de ALSs foram realizadas primeiramente no Japão, entre elas, incluem o Aeroporto de Nagasaki em 1987, Torre Yokohama Marine também em 1987, ponte de cabo estaiado Higashi-Kobe construída em 1992 e o Aeroporto internacional de Tokio em 1993. O ALS instalado no Aeroporto internacional de Tokio ilustrado na Fig.2.6, consiste de 1400 contêineres contendo água, partículas flutuantes e conservantes que servem para

otimizar a dissipação de energia através de uma aumento da área de superfície e pelo contato entre as partículas. Os contêineres, circulares com $0,6\text{ m}$ de diâmetro e $0,125\text{ m}$ de altura são empilhados em seis camadas em prateleiras metálicas. A massa total do ALS é de aproximadamente $3,5\%$ da massa do primeiro modo generalizado da torre. A frequência de *sloshing* é otimizada a $0,743\text{ Hz}$. Outras obras foram propostas e estão em fase de projeto como a Millennium Tower em Tokio, Japão e Shanghai Financial Trade Center em Shanghai, China. Em todos os casos, se comprova a eficiência, a economicidade, a adaptabilidade para se ajustar em diferentes espaços físicos e o fato de serem contra falhas quando bem projetados. Para ventos com velocidade instantânea de 25 m/s , os resultados observados mostram que o ALS reduz a resposta à aceleração para vento em direção cruzada de 60% em relação ao valor sem o amortecedor (Soong e Dargush, 1997).

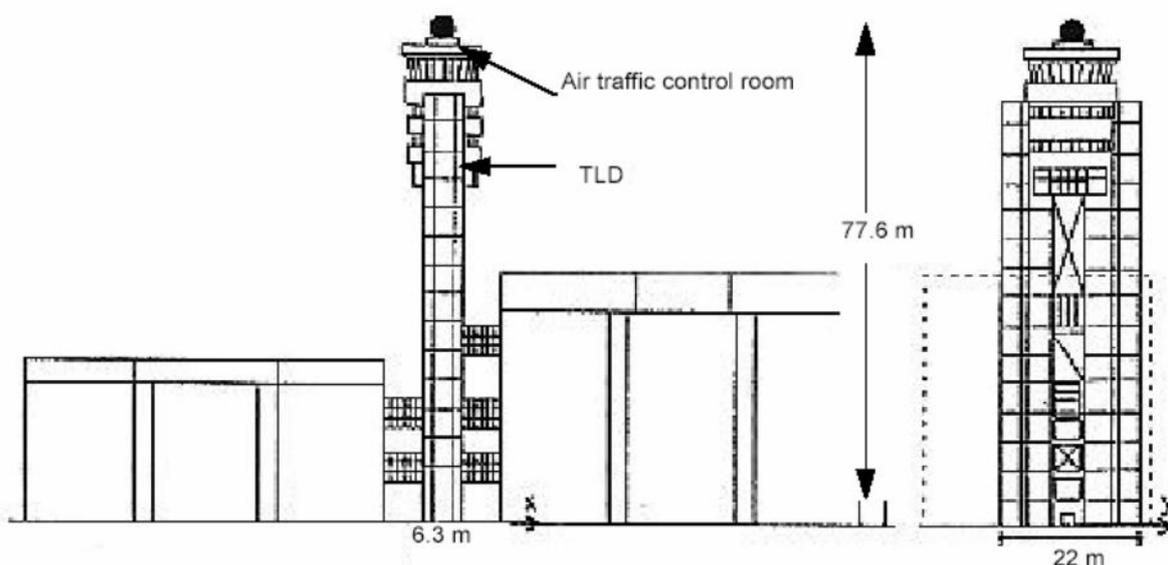


Figura 2.6 – Exemplo de um ALS (TLD) instalado no Aeroporto Internacional de Tokio (Tamura et al., 1996).

Os ALSs possuem diversas ramificações, dentre elas, tem-se os amortecedores de oscilação sintonizados (AOS), amortecedores de coluna de líquido sintonizados (ACLS), amortecedores de líquido sintonizados circular (ALSC), entre outros. O funcionamento dos AOSs deve-se ao fenômeno de *sloshing* do líquido presente no contêiner. Uma pequena parte do líquido no AOS participa do movimento de *sloshing* e por isso, para aumentar a participação do líquido, os ACLS são propostos (Min, Kim e Lee, 2014). O ACLS como o representado na Fig.2.7 são o foco de interesse do trabalho pelo fato de ser ainda uma solução pouco explorada para aplicação em turbinas eólicas.

Os ACLS tem seu funcionamento devido ao movimento do líquido na coluna de líquido. A coluna pode apresentar diversas geometrias, neste trabalho, o tipo de ACLS escolhido possui o formato de tubo em “U”. Diferente do AMS, o amortecimento é dependente da amplitude do líquido, e portanto a dinâmica do ACLS é não-linear. Os ACLSs tem como principais vantagens o baixo custo, baixa frequência de manutenção e a multi

utilização do dispositivo para, por exemplo, reservatório de água. Ao contrário dos AMS que necessitam de rolamentos, tipo de piso especial para instalação, ativação do mecanismo, molas, e outros elementos mecânicos que só encarecem do absorvedor de vibrações. Algumas aplicações recentes dos ACLSs estudadas são estabilização de navios, satélites, edifícios e torres.

Os ACLSs podem ser controlados através de um orifício localizado no tubo de seção horizontal. De acordo com a abertura desse orifício, é possível controlar o coeficiente de perda de carga associado a dissipação turbulenta de energia cinética do líquido na sua passagem pela seção do orifício, conseqüentemente, afetando o amortecimento da estrutura. Embora esta seja uma solução possível, a solução adotada não envolve controle ativo, mas sim passivo, ou seja, decide-se a priori o tamanho da abertura do orifício.

A utilização de ACLSs como mecanismo de absorção de vibração é bastante interessante pelo fato do mecanismo possuir naturalmente frequências baixas e ser relativamente fácil de sintonizar com a estrutura. De acordo com a Fig.2.7, os ACLSs não necessitam de nenhum mecanismo extras como molas ou juntas, fazendo com que sua geometria possa variar de acordo com as necessidades de projeto o que os torna bastante versáteis. Existem basicamente dois tipos de absorção de energia envolvidos nessa configuração, a absorção devido ao ACLS e a absorção do tipo *sloshing damping* em que ocorrem oscilação na superfície livre do líquido. A absorção do tipo *sloshing* apesar de ser de simples aplicação, exige certo aprofundamento em estudos de otimização, devido ao fato da frequência do absorvedor aumentar com a amplitude de excitação.

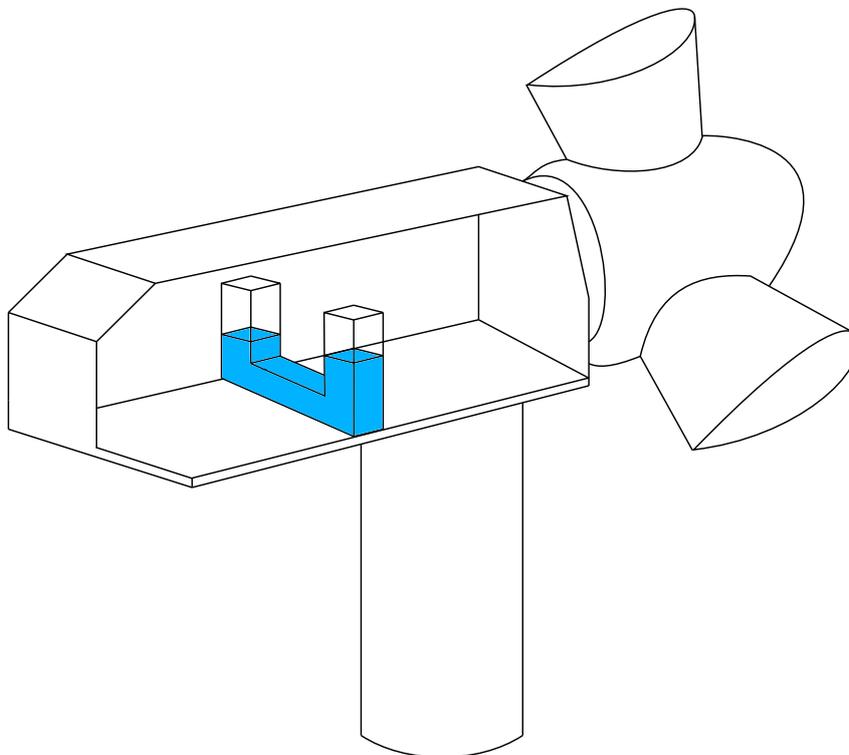


Figura 2.7 – Esquema de ACLS em turbina eólica.

2.2.3 Outros Absorvedores

Existem na literatura diversos mecanismos de controle estrutural, os que mais se destacam são absorvedores por fricção, por escoamento de metais, os viscoelástico, os fluido viscoso e por fim os absorvedores do tipo pendular. Os três primeiros tipos citados não apresentam mecanismos de mola, já o absorvedor do tipo pendular é do tipo AMS. Todos os dispositivos de absorção possuem vantagens e desvantagens que precisam ser avaliadas dependendo da aplicação. A Fig.2.8 mostra alguns tipos de absorvedores aplicados em turbinas eólicas.

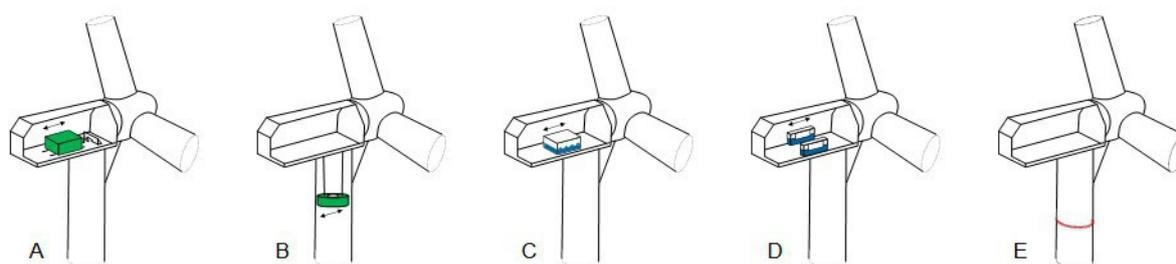


Figura 2.8 – Tipos de absorvedores: A: AMS B: absorvedor do tipo pendular C: absorvedor de oscilação sintonizada D: ACLS E: Elementos de absorção auxiliar (Altay et al., 2014).

É importante destacar a diferença entre os conceitos dos absorvedores e dos amortecedores. Um absorvedor pode também amortecer através de dissipação de energia e por isso existem elementos de amortecimento em absorvedores de vibração. Os absorvedores são dispositivos adicionados a estrutura para absorver, ou seja, transferir parte da excitação que a priori iria à estrutura principal para o absorvedor. Tanto a estrutura quanto o absorvedor possuem amortecimento presente em seus sistemas e por isso, podem dissipar energia por diferentes maneiras (atrito e turbulência).

2.3 Revisão Bibliográfica

O controle estrutural ganhou espaço significativo na aplicação em turbinas eólicas com o surgimento da exploração *offshore*. A exploração *offshore* requer bastante das estruturas por se tratar de um ambiente propício à esforços elevados, causados por carregamentos como as ondas do mar e ventos. Essas estruturas precisam ser muito resistentes o que encarecem no preços e as tornam menos atrativa, além disso, deve-se considerar a falta de acesso e o custo de manutenção. Diversos trabalhos estudam o comportamento da turbina eólica *offshore* que utilizam sistemas de mitigação de vibração do tipo AMS (Stewart, 2012), (Guimaraes et al., 2014) e ACLS (Colwell e Basu, 2009). No Estudo de Stewart (2012), analisa-se diversos modelos de turbinas de forma a observar o comportamento do sistema afetado pelo uso de absorvedores. Os modelos são testados por dois

métodos, o primeiro por perturbação inicial onde a torre é deslocada e o segundo método onde o sistema é submetido a modelagens de vento e onda. Já o trabalho de Guimaraes et al., (2014), analisa o comporta dinâmico de uma turbina eólica off-shore com a utilização de um absorvedor do tipo AMS pendular.

Aplicações iniciais de ACLS foram proposta por Sakai, Takaeda e Tamaki (1991) em que se descreve a aplicação dos absorvedores em pontes de cabos estaiados. ACLS foram estudados para excitação de estruturas que sofrem ações dos ventos por Xu, Samali e Kwok (1992).

A procura por parâmetros otimizados teve início no trabalho clássico de dinâmica de absorvedores de vibração de Hartog (1985). Em seu trabalho, Hartog derivou expressões otimizadas para a razão de amortecimento e razão de frequências naturais otimizadas para um sistema sem amortecimento sujeito a excitações harmônicas. Foi observado que os parâmetros que minimizam a resposta do sistema principal são apenas função da razão das massas.

Enevoldsen e Mørk (1996) investigaram a performance de uma turbina eólica utilizando otimização estrutural com e sem absorvedor de massa, no artigo, o carregamento do vento é considerado estático e se considera o componente turbulento. Os resultados obtidos mostram uma economia de projeto significativa se comparado com projetos tradicionais.

McNamara (1977) publicou e desenvolveu AMSs em prédios levando em considerações análise experimental.

Chang e Qu (1998) estabeleceram fórmulas unificadas para diferentes tipos de absorvedores dinâmicos passivos. Entre eles, AMC, ACLS, e outras formas geométricas para os amortecedor de liquido sintonizado como a circular e retangular. Esse trabalho é importante, pois fornece uma comparação para diferentes tipos de absorvedores.

Yalla e Kareem (2000) desenvolveram um novo procedimento que contorna a não linearidade dos ACLS para obtenção dos parâmetros otimizados para perda de carga em um ACLS de forma analítica e compararam os resultados com modelos iterativos.

Colwell e Basu (2009) aproveitaram o aumento de interesse em turbinas eólicas *offshore* e realizaram uma simulação realista da estrutura com absorvedor do tipo ACLS sujeita às forças dos ventos e do mar. Colwell e Basu utilizam o espectro de Kaimal que combina o carregamento do vento e das ondas e utilizam modelo com múltiplos graus de liberdade. Em seu trabalho, observaram um aumento da vida em fadiga da estrutura e uma redução do momento fletor do sistema.

Lackner e Rotea (2011) aplicaram técnicas de controle estrutural passivo e ativo em turbinas eólicas *offshore* flutuantes. Lackner e Rotea determinaram por meio de investigação paramétrica, parâmetros passivos otimizados. Um modelo com graus de liberdade limitado foi identificado e em seguida simulações no domínio do tempo foram feitas. Os

resultados obtidos foram comparados com o sistema base e observou-se uma redução da fadiga para o caso passivo de 10% e para o controle ativo obtiveram uma redução de 30%. Lackner e Rotea concluíram que o modelo de controle estrutural ativo é uma maneira efetiva de reduzir a carga estrutural.

Farshidianfar (2011) investigou a aplicação de um sistema vibratório bi-direcional do tipo ACLS com equipamento de ajuste periódico utilizado para diminuir a vibração de arranha-céus que sofrem oscilações devido a terremotos. O sistema consiste de dois ACLS em formato de “U” e um pendulo. Esse estudo ajudou a obter um melhor entendimento dos ACLS para aplicação em edifícios e conduzir a busca dos projetista a obter absorvedores mais eficientes.

Li, Zhang e Chen (2012) realizaram experimentos em escala 1/13 de uma turbina eólica utilizando um absorvedor de vibração esférico (AVE) – do inglês, *ball vibration absorber* (BVA). Li, Zhang e Chen examinaram a redução do deslocamento, da aceleração, das tensões para diferentes carregamentos. Seus resultados mostram uma melhora da estrutura com o absorvedor esférico se comparado com a estrutura base.

Zuluaga (2007) avaliou a eficiência de um amortecedor de massa sintonizado na geometria de pêndulo na redução de deslocamentos, velocidade e aceleração de uma estrutura quando submetido a excitações dinâmicas e diferentes densidades espectrais de potência.

Lima (2009) apresentou uma análise dinâmica da laje de um edifício comercial propondo controle estrutural do tipo AMS capaz de reduzir vibração excessiva. Foi registrado uma atenuação nos valores máximos de velocidade e aceleração verticais na estrutura.

Valencia (2007) analisou numericamente a posição mais eficiente para instalação de AMSs em vigas metálicas do tipo Euler-Bernoulli com distintas configurações de apoio com intuito de diminuir vibração excessiva e controlar a resposta dinâmica. O modelo foi submetido tanto a carregamento harmônico quanto aleatório.

No próximo capítulo serão apresentados conceitos fundamentais para análise de vibrações, necessários para o projeto de absorvedores dinâmicos.

3 FUNDAMENTOS DE VIBRAÇÃO MECÂNICA

Este capítulo faz uma revisão das ferramentas necessárias para o entendimento mínimo do problema. Primeiramente, na seção 3.1 serão tratados os conceitos fundamentais de vibração como a vibração num sistema com um grau de liberdade com e sem amortecimento, na mesma seção será introduzido a definição de resposta em frequência para sistemas amortecidos. A seção 3.2 introduz o conceito de vibração nos sistemas com dois graus de liberdade. A seção 3.3 descreve os absorvedores de vibração e suas propriedades tanto para os sistemas com e sem amortecimento e suas principais características.

3.1 Sistemas com Um Grau de Liberdade

A vibração em sistemas com um grau de liberdade (UGdL) é o modelo mais simples para descrever o movimento de excitação de um sistema. A equação que governa o movimento é descrita por uma equação diferencial que relaciona o deslocamento, $x(t)$ e a força atuante, $F(t)$. Um método utilizado para resoluções de problemas que envolvem vibração com forçamento harmônico é separar a análise do sistema em dois tipos, uma sem forçamento (excitação inicial devido as condições iniciais) e a outra com forçamento harmônico. A solução para ambos os casos pode ser obtida separadamente e pelo princípio da superposição é possível determinar a solução geral do movimento.

Considera-se primeiramente o caso de vibração livre para um sistema sem amortecimento. Para se obter a resposta à excitação inicial é preciso resolver a equação diferencial ordinária homogênea que descreve o movimento dada por

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (3.1)$$

onde $x(t)$ é o deslocamento, m é a massa e k é a constante de rigidez. A partir da Eq.3.1, pode-se dividir os dois lado da igualdade por m , reescrevendo a equação

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0, \quad (3.2)$$

em que ω_n é a frequência natural dada por $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

A Eq.3.2 é submetida a duas condições iniciais, a saber

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3.3)$$

onde x_0 e v_0 são o deslocamento e a velocidade iniciais, respectivamente.

A solução da Eq.3.2 é do tipo exponencial e possui características oscilatórias. Uma vez definida as condições iniciais, o sistema começa a oscilar de forma contínua e definida com a mesma amplitude e frequência já que o sistema é conservativo.

Agora, considere o caso de um sistema sem amortecimento sobre forçamento harmônico, a equação do movimento é descrita por,

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (3.4)$$

onde F_0 é a amplitude do forçamento e ω é a frequência de excitação. Pelo fato do forçamento ser harmônico, a resposta também apresenta comportamento harmônico e de mesma frequência. Combinando as soluções do caso homogêneo e o forçado é possível obter a solução geral da resposta do sistema.

Considerando agora o caso de sistema com amortecimento c , rigidez k e massa m . Pode-se representar de forma genérica o sistema como ilustrado na Fig.3.1 em que também é descrito seu diagrama de corpo livre. pela equação da energia chega-se a seguinte equação

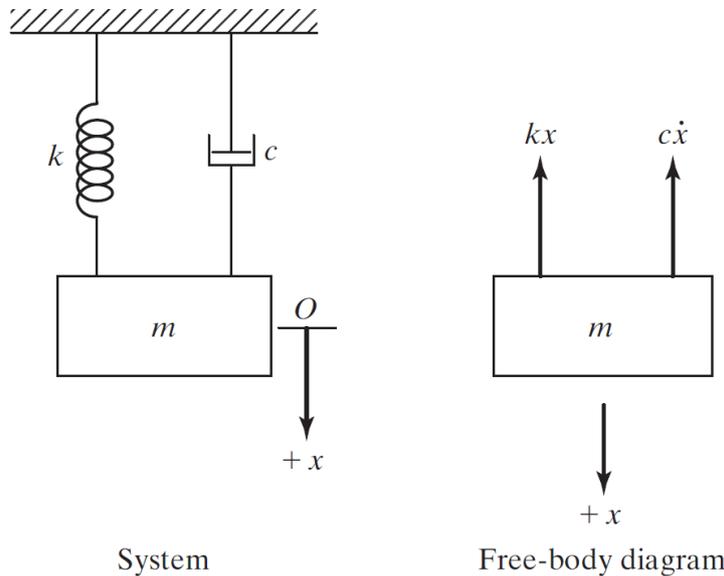


Figura 3.1 – Sistema com um grau de liberdade com amortecimento (Rao e Yap, 1995).

do movimento

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (3.5)$$

É conveniente dividir a equação pela massa para se obter a seguinte forma

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0, \quad (3.6)$$

onde ω_n é a frequência natural e ζ é uma quantidade adimensional conhecido com fator de amortecimento, dado por

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}. \quad (3.7)$$

Para as mesmas condições iniciais definidas na Eq.3.3, assume-se solução da forma $x(t) = Ce^{st}$, em que C e s são constantes indeterminadas, chega-se a equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (3.8)$$

que possui raízes

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \quad (3.9)$$

essas raízes dão origem a duas soluções possíveis, $x_1(t) = C_1e^{s_1t}$ e $x_2(t) = C_2e^{s_2t}$, que podem ser combinadas para gerar uma solução geral,

$$x(t) = C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t}, \quad (3.10)$$

os valores de C_1 e C_2 são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais.

Define-se amortecimento crítico a partir da Eq.3.9 para o caso em que o valor do radical é zero, ou seja,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0, \quad (3.11)$$

ou em função do amortecimento crítico c_c

$$c_c = 2m\omega_n = 2\sqrt{km}, \quad (3.12)$$

e assim, é possível expressar a razão de amortecimento como $\zeta = c/c_c$ e realizando algumas simplificações, pode-se chegar a solução geral,

$$x(t) = C_1e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}. \quad (3.13)$$

Nota-se que a natureza do movimento depende do valor do parâmetro ζ . O valor de ζ indica se o sistema será sub-amortecido, $\zeta < 1$ ou super-amortecido, $\zeta > 1$. Para o caso em que $\zeta = 1$, por exemplo, o movimento do sistema se encontra em amortecimento crítico, ou seja, no limiar entre os dois tipos de amortecimento e para o outro caso extremo em que $\zeta = 0$ é o caso em que não há amortecimento. Os quatro casos podem ser observados na Fig.3.2.

3.1.1 Resposta em frequência de um sistema com amortecimento viscoso para forçamento harmônico

Como visto na seção 3.1, pode-se obter a resposta total de um sistema linear utilizando superposição do movimento forçado e do movimento natural, ou seja, sem

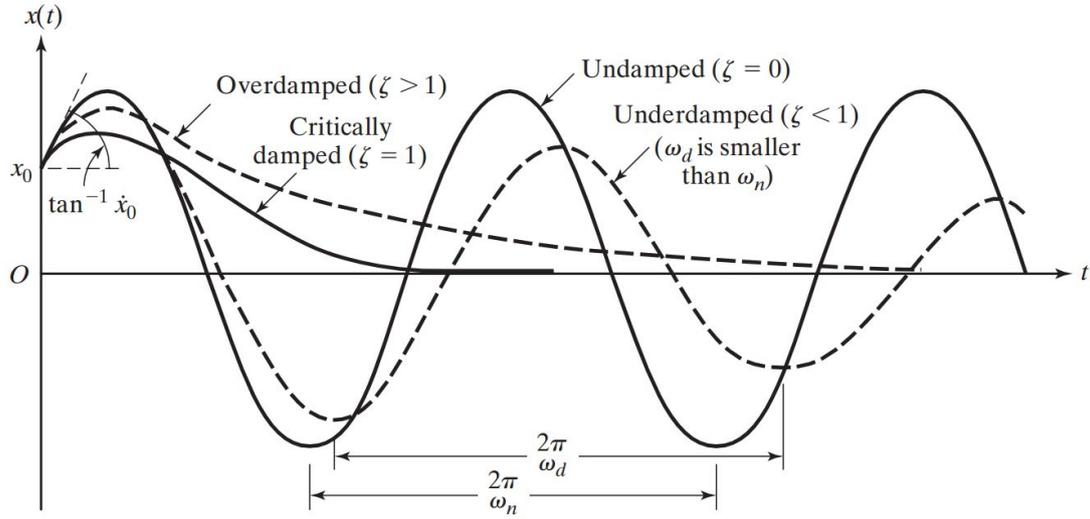


Figura 3.2 – Comparação do movimento para diferentes tipos de amortecimento (Rao e Yap, 1995).

forçamento. Esta seção trata da resposta de um sistema UGDL com amortecimento devido a forçamento harmônico.

Considere o sistema UGDL da Eq.3.5 com amortecimento viscoso, porém agora, acrescenta-se um movimento forçado, a equação do movimento fica

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad (3.14)$$

supõe-se que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ e $x(t) = X_0 e^{i\omega t}$, onde F_0 e X_0 são as amplitudes do forçamento e do deslocamento respectivamente e ω é a frequência de oscilação do sistema. A resposta em frequência é complexa devido ao termo $i = \sqrt{-1}$. O uso do plano complexo simplifica a análise e os cálculos. Substituindo as duas hipóteses na equação governante Eq.3.14, obtêm-se

$$(k - \omega^2 m + ic\omega)X_0 = F_0, \quad (3.15)$$

que pode ser escrito da forma

$$X_0 = \frac{1}{K_d(\omega)} F_0 = H(\omega) F_0, \quad (3.16)$$

onde $K_d(\omega)$ é denominado rigidez dinâmica e $H(\omega)$ é conhecido como função de transferência. A partir do valor da frequência é possível determinar a função de transferência e portanto resolver a equação para o deslocamento. A função de transferência tem um papel central na análise em vibração aleatória e será revista nas seções seguintes.

3.2 Sistemas com Dois Graus de Liberdade

O número de graus de liberdade em um sistema é definido pelo número de coordenadas necessárias e suficientes para se descrever um sistema. No caso de um sistema com dois graus de liberdade, é preciso de duas variáveis independente para se descrever

completamente o movimento. Para o caso de um sistema com um grau de liberdade sem amortecimento, seu movimento pode ser descrito por uma única frequência, a frequência natural do sistema. No caso de sistemas com mais de um grau de liberdade, a vibração natural implica não apenas nas frequências naturais do sistema mas também nos modos naturais de vibração assumidos pelo sistema durante seu movimento (Meirovitch e Parker, 2001). O sistema possui quantos modos de vibração forem necessários para descrever o sistema, para o caso de sistemas com dois graus de liberdade, o sistema possui dois modos de vibração que dependendo das condições iniciais, o sistema pode vibrar em cada um desses modos separadamente, devido à propriedade de ortogonalidade, ou uma combinação linear entre eles.

Basicamente, a diferença entre um sistema com um grau de liberdade para dois ou mais é o número de equação governantes. Para o caso de dois graus de liberdade, o número de equações governantes que regem o sistema são duas. Dependendo das coordenadas escolhidas para representar o sistema, o movimento de cada grau de liberdade depende das duas equações, ou seja, o sistema está acoplado. Essa configuração em que as massas são acopladas é comumente evitada por motivos de simplicidade matemática. Escolhendo-se devidas coordenadas, chamada de coordenadas naturais, é possível desacoplar as massas do sistema e resolver as equações separadamente. Vale ressaltar que essa é uma configuração teórica e não pode ser possível realizá-la fisicamente. Entretanto, representar a solução como uma combinação linear do movimento por meios da superposição das coordenadas naturais é uma estratégia válida e bastante difundida, conhecida como análise modal. Uma outra forma de obter a solução do sistema é utilizar inversão direta da matriz de rigidez dinâmica pela análise harmônica. Esse método só pode ser usado para forçamento harmônico e resposta em regime permanente.

A análise harmônica segue as mesmas premissas da seção 3.1.1, com a diferença de que agora o sistema é composto de duas equações governantes e portanto a análise é feita utilizando matrizes. A análise qualitativa é realizada na seção 3.3.

3.3 AMS - Absorvedor de Vibrações

Os AMSs, também chamados na literatura de absorvedores de vibração, são dispositivos mecânicos usados para reduzir ou eliminar vibrações indesejadas. Os absorvedores consistem de sistema massa e mola acoplado na estrutura que se deseja absorver vibração. Dessa forma, o sistema da massa principal e da massa do absorvedor constituem um sistema de dois graus de liberdade e, por tanto, possui duas frequências naturais. Sua principal aplicação ocorre em máquinas que operam a uma frequência constante, já que o absorvedor é sintonizado para absorver essa frequência em particular. O modelo de absorvedor é realizado de tal forma que a frequência natural do sistema resultante esteja fora do alcance da frequência de excitação da máquina. Nas subseções 3.3.1 e 3.3.2, são

desenvolvidas as equações do movimento para os dois casos, não amortecido e amortecido.

3.3.1 Absorvedor de vibração em sistema não amortecido

O sistema representado na Fig.3.3 sofre um forçamento harmônico. Ao se adicionar uma massa m_2 a uma máquina de massa m_1 através de uma mola de rigidez k_2 tem-se como resultado um sistema com dois graus de liberdade não amortecido dados pelas equações do movimento

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0e^{i\omega t}, \quad (3.17)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0. \quad (3.18)$$

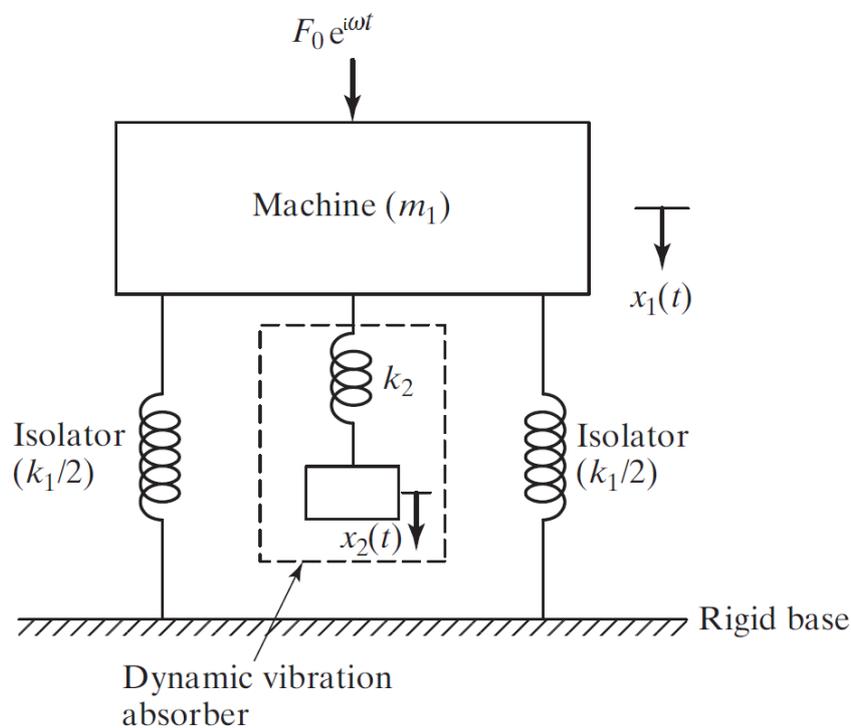


Figura 3.3 – Absorvedor de vibração não amortecido modificado (Rao e Yap, 1995).

Assumindo solução harmônica $x_j(t) = X_j e^{i\omega t}$, $j = 1, 2$ e substituindo o valor da solução e suas respectivas derivadas nas equações do movimento Eq.3.17 e Eq.3.18, obtêm-se as seguintes amplitudes em regime permanente

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}, \quad (3.19)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2}. \quad (3.20)$$

O principal objetivo do absorvedor é reduzir a vibração da massa m_1 , em outras palavras, reduzir a amplitude X_1 . Analisando a Eq.3.19, é possível observar que a condição

para obter o resultado ideal, ou seja, $X_1 = 0$. Excluindo a solução trivial ($F_0 = 0$), chega-se à conclusão que

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad (3.21)$$

ou seja, se o absorvedor for projetado de forma que sua frequência opere perto da frequência de ressonância da massa m_1 a amplitude de vibração do sistema, operando na frequência original será zero.

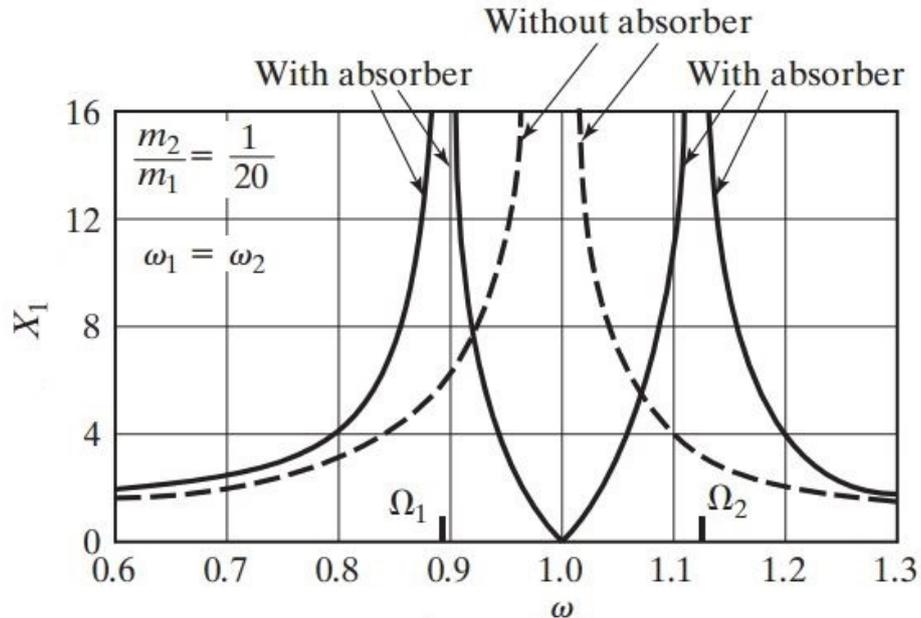


Figura 3.4 – Gráfico da resposta em frequência de um sistema sem amortecedor (Rao e Yap, 1995).

Na Fig.3.4 é possível observar a resposta em frequência de um sistema com um e dois graus de liberdade, ou seja, sem e com absorvedor. Repare que o absorvedor atua justamente no pico de ressonância do sistema primário com a introdução dos dois picos de ressonância em que a amplitude da máquina é infinita e por isso o valor da frequência de operação deve ser diferente de Ω_1 e Ω_2 . O valor de Ω_1 é sempre menor que o de Ω_2 , e usualmente em um sistema para se chegar na frequência de operação, deve-se passar por Ω_1 . O absorvedor só pode ser sintonizado em uma frequência para a qual a amplitude seja zero. Em muitas aplicações em que se opera em diversas frequências a amplitude de vibração pode não ser absorvida

3.3.2 Absorvedor de vibração em sistema amortecido

Devido ao sistema possuir dois graus de liberdade ele apresenta dois picos de ressonância ao invés de apenas um. Essa configuração gera algumas implicações. Ao se iniciar uma máquina com absorvedor, por exemplo, ela passará pelo primeiro pico de ressonância para em seguida estabilizar na frequência de trabalho da máquina. Em certos aspectos, esse pico de ressonância que a máquina é obrigada a passar pode representar

um problema se levarmos em conta determinadas aplicações. Desse modo, como forma de contornar o problema, utilizam-se amortecedores.

Os amortecedores têm a função de diminuir a amplitude de vibração ou até mesmo eliminar os picos de ressonâncias.

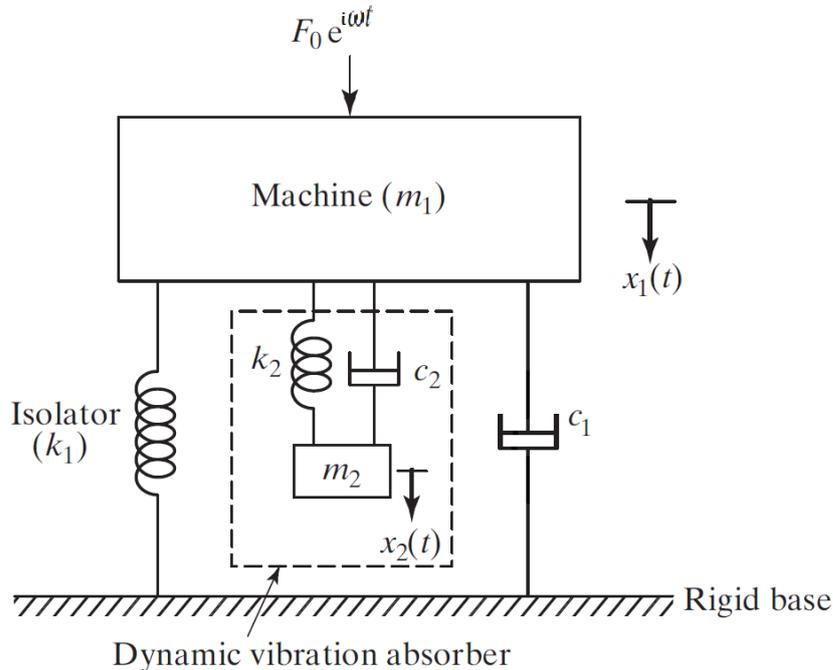


Figura 3.5 – Absorvedor de vibração amortecido modificado (Rao e Yap, 1995).

De acordo com a Fig.3.5, a equação do movimento é dada por

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 e^{i\omega t}, \quad (3.22)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0, \quad (3.23)$$

reescrevendo a Eq.3.23 em forma matricial $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$ tem-se

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.24)$$

Utilizando a solução do tipo $x_j(t) = X_j e^{i\omega t}$, $j = 1, 2$ na equação do movimento resulta nas seguintes expressões para as amplitudes,

$$\left\{ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} (-\omega^2) + \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} (i\omega) + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde a expressão entre chaves, por analogia ao caso UGdL da seção 3.1.1, é o inverso da matriz de transferência e, portanto,

$$\mathbf{H}(\omega) = [\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}(i\omega) + \mathbf{K}]^{-1}, \quad (3.26)$$

assim, pode-se escrever a Eq.3.25 de forma,

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{F}. \quad (3.27)$$

em que $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2]^T$ são as amplitudes do primeiro e segundo grau de liberdade.

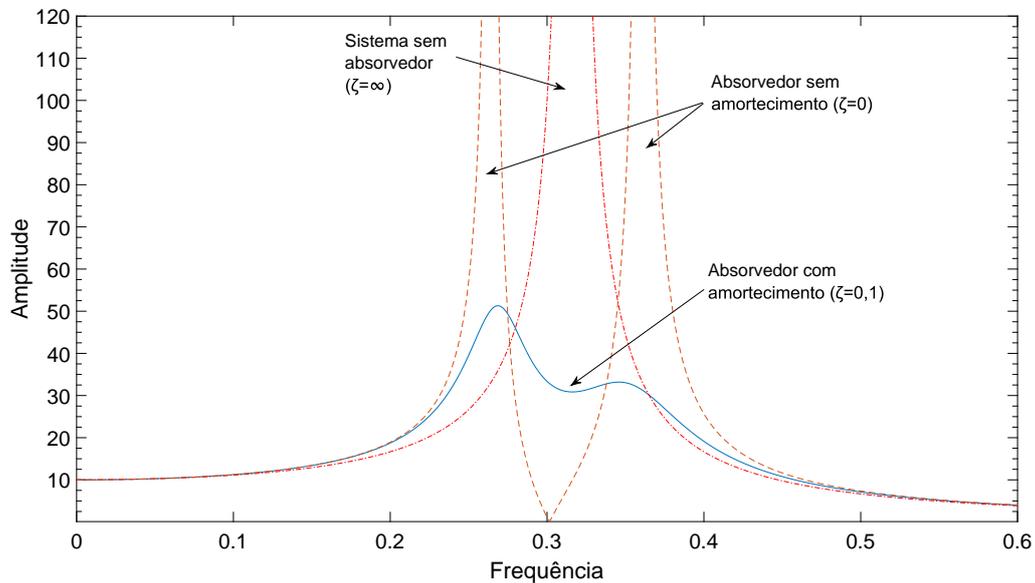


Figura 3.6 – Gráfico da resposta em frequência de um sistema com absorvedor com e sem amortecimento e sem absorvedor

A Fig.3.6 ilustra a variação da amplitude do sistema primário X_1 em relação a frequência para os três diferentes casos, sem absorvedor, com absorvedor com e sem amortecimento. O caso sem absorvedor é o caso de sistema com 1 grau de liberdade, já discutido. O caso com absorvedor sem amortecimento é o mesmo discutido na seção 3.3.1 e representado na Fig.3.4. E por fim, o caso de absorvedor com amortecimento onde é possível observar sua vantagem em relação ao absorvedor sem amortecimento. A amplitude de movimento para as duas frequências naturais do sistema é consideravelmente menor para o absorvedor com amortecimento.

A maioria dos casos de aplicação não apresentam excitação do tipo puramente harmônica, mas são de natureza não-determinística, como ventos e ondas oceânicas. O próximo capítulo apresenta uma revisão das ferramentas necessárias para a análise de vibrações aleatórias, como resultado deste tipo de forçamento.

4 VIBRAÇÃO ALEATÓRIA

Um sistema com movimentos não determinísticos é exposto a vibrações aleatórias ou randômicas. Se analisarmos o movimento de uma folha, por exemplo, flutuando sobre o vento percebe-se um comportamento imprevisível em sua trajetória. A folha está sujeita a excitações randômicas provenientes da força e direção do vento que mudam constantemente. Entretanto, a taxa e a quantidade de movimento a que a folha está submetida não só depende da severidade da excitação do vento, mas também de sua massa, rigidez e amortecimento inerentes ao sistema (Newland, 2012). O conceito de vibrações aleatórias preocupa-se em determinar as características do movimento de um sistema excitado aleatoriamente, como a folha, que dependem das estatísticas da excitação, no caso o vento, e das propriedades dinâmicas do sistema em vibração, neste caso a massa, a rigidez e o amortecimento da folha.

Casos em que as respostas em vibração de um sistema são conhecidas para um tempo t determinado, são chamados de vibrações determinísticas. Vibração determinística existe apenas quando se tem um perfeito controle de todas as variáveis que influenciam a estrutura e os carregamentos do sistema. Existem diversos processos e fenômenos que não podem ser precisamente determinados, para um instante qualquer, processos desse tipo são conhecidos por processos randômicos ou aleatórios. Exemplos de vibração randômicas podem ser encontrados em simulações que lidam fenômenos naturais como vento, fluidos e eventos sísmicos.

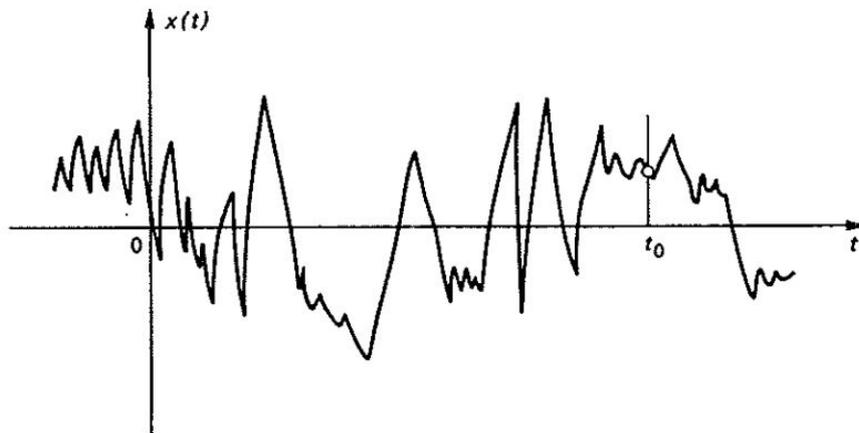


Figura 4.1 – Possível descrição no tempo de um sistema em vibração aleatória (Newland, 2012).

A Fig.4.1 mostra uma descrição no tempo de um sistema em vibração aleatória. O deslocamento x é plotado em função do tempo t . Pelo fato do movimento ser aleatório, o valor preciso de x para um tempo qualquer t_0 não pode ser precisamente predito. O que a teoria prega como melhor solução é encontrar a chance (probabilidade) de x em t_0 está em um certo limite. A Fig.4.2 mostra dados anemométricos da direção e velocidade dos ventos.

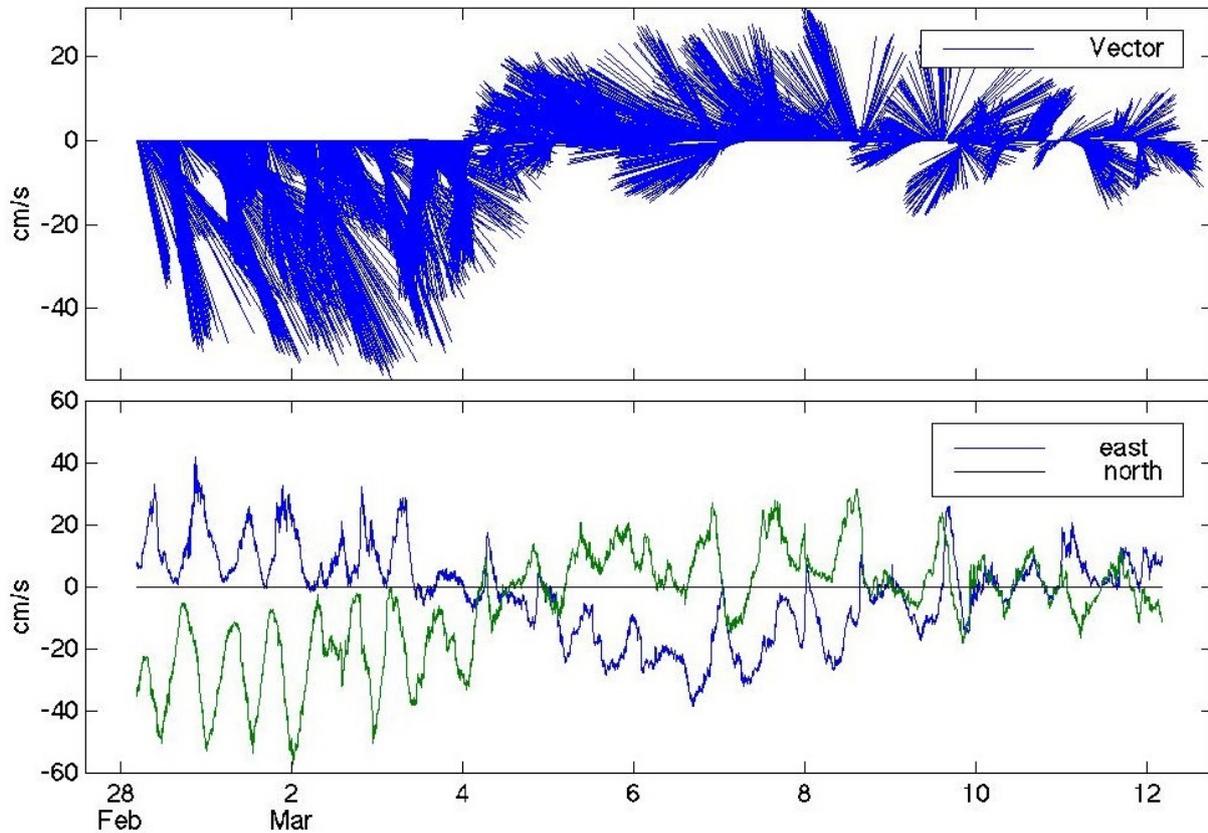


Figura 4.2 – Dados anemométricos da velocidade e direção dos ventos (Xu e Coastal, 2002).

O conceito de probabilidade é intrínseco à teoria de vibração aleatória. A seguir, uma discussão das ideias fundamentais da teoria de probabilidade em que ferramentas probabilísticas como os conceitos de processos estocásticos utilizando covariância e funções de densidade espectral serão introduzidos e utilizados para descrever fenômenos não determinísticos que envolvem variáveis aleatórias e suas especificações probabilísticas.

4.1 Resposta em Vibração Aleatória

Um sistema determinístico, geralmente uma estrutura em vibração, como uma máquina, ou um prédio, possuem parâmetro de entrada $x(t)$, que constituem a excitação do sistema, e parâmetros da saída $y(t)$, que representam a resposta do sistema. Duas simplificações são propostas, primeiramente, supõe-se que os sistema seja linear, de forma que cada excitação de entrada corresponda a uma resposta de saída do sistema, também

se leva em consideração o princípio da superposição, e por isso, é possível tratar cada parâmetro de entrada e saída de forma separada o que simplifica a análise. A hipótese de linearidade é aceita pois a vibração no sistema geralmente envolve apenas pequenos deslocamentos. É possível representar a relação entre os parâmetros de entrada e saída do sistema por meio de uma equação diferencial linear, entretanto, métodos alternativos mais convenientes para a análise de sistemas dinâmicos são usados como, por exemplo, a resposta em frequência e a resposta ao impulso. Os conceitos de resposta em frequência e resposta ao impulso também são importantes quando se deseja representar vibração aleatória e serão sucintamente apresentados a seguir.

O método de resposta em frequência necessita de um parâmetro de entrada com amplitude constante e frequência fixa de forma que pela relação de linearidade a resposta do sistema terá uma amplitude fixa com a mesma frequência que a entrada, porém defasada por uma fase. Assim, conhecendo a relação entre as amplitudes de entrada e saída e o ângulo de fase para cada frequência, é possível definir as características de transmissão do sistema.

O método de resposta ao impulso é uma outra maneira de representar a característica dinâmica do sistema. A partir de um impulso inicial, mede-se a resposta transiente para todos os tempos até o equilíbrio estático ser estabelecido

É possível relacionar a resposta em frequência e resposta ao impulso utilizando os conceitos da análise de Fourier. A Eq.4.2 corresponde a relação entre os dois métodos por meio de uma transformada de Fourier que pode ser compreendida pelo seguinte argumento, quando o sistema linear é submetido a uma excitação harmônica permanente a uma frequência ω , ele responde com uma resposta harmônica de saída de mesma frequência. É, portanto, razoável esperar que para um sinal aperiódico, a banda de frequência do sinal de entrada corresponda a mesma banda de frequência do sinal de saída. A relação seguinte é válida

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (4.1)$$

e a relação entre a resposta em frequência e a resposta ao impulso é dada por,

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (4.2)$$

4.2 Função de Densidade de Probabilidade

Define-se a função de densidade de probabilidade de um processo randômico como sendo uma função que representa a distribuição de probabilidade de uma função aleatória.

Considere um variável randômica X que pode assumir qualquer valor x_1, x_2, \dots, x_n com probabilidade p_1, p_2, \dots, p_n

$$m = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i. \quad (4.3)$$

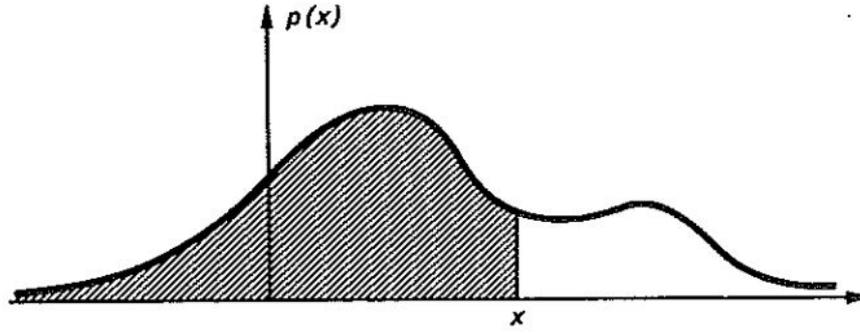


Figura 4.3 – Curva da função de densidade de probabilidade (Newland, 2012).

Em um processo contínuo pode-se obter uma função de distribuição de probabilidade $P(x)$, pela Fig.4.3, é interpretado como a área sobre a curva de densidade de probabilidade. Ou seja,

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x^*} p(x)dx, \quad (4.4)$$

em que derivada de $P(x)$ com relação a x é denominada de função de densidade de probabilidade. Ou seja,

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}, \quad (4.5)$$

pode-se interpretar a expressão $P(x + \Delta x) - P(x)$ como a probabilidade de $x(t)$ estar entre o intervalo $[x, x + \Delta x]$. A função de densidade de probabilidade $p(x)$ pode ser interpretada com a densidade da distribuição de x . Por definição analisando a Fig.4.3,

$$Prob(-\infty \leq x \leq \infty) = P(x = \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (4.6)$$

Uma função de densidade de probabilidade muito utilizada é a distribuição Gaussiana ilustrada na Fig.4.4 e expressa na Eq.4.7 em que σ_x é o desvio padrão e m a média. O processo Gaussiano, também chamado de processo normal, possui um formato característico de sino. Muitos processos naturais de vibração randômica possuem forma semelhante a Gaussiana e, por isso, a importância dessa função de densidade de probabilidade.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma_x^2}. \quad (4.7)$$

4.3 Processo Estocástico

Em muitos casos, quando se lida com variáveis aleatórias os resultados obtidos para uma amostra não são suficientes. Por exemplo, a medição de ventos obtidas na Fig.4.2 muito provavelmente não se repetiria no ano seguinte. A solução para esse problema é realizar infinitas medições e assim analisar o conjunto de amostra. É óbvio que não é possível realizar infinitas medições, mas caso se assuma um valor considerável a aproximação se torna aceitável.

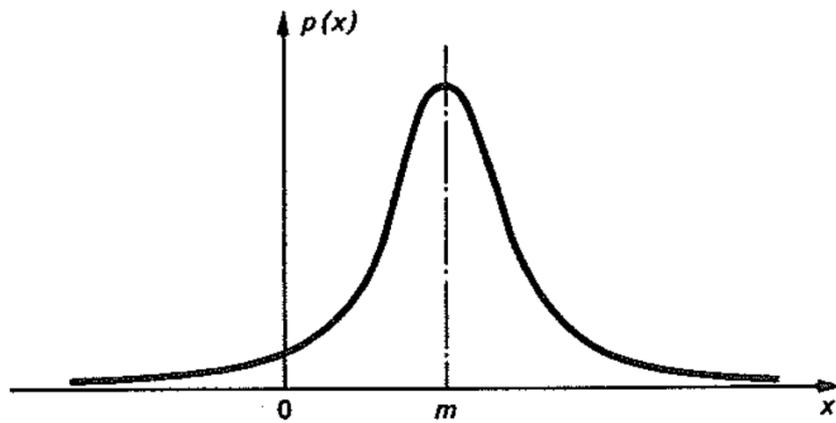


Figura 4.4 – Distribuição da função de densidade de probabilidade do tipo Gaussiana (Newland, 2012).

A Fig.4.5 ilustra um conjunto de amostras de processos aleatórios. Ao invés de se calcular a distribuição de probabilidade de apenas uma amostra, agora é possível calcular a distribuição de probabilidade do conjunto de amostras. Com isso, o conceito de estacionariedade pode ser definida para o caso de um processo aleatório em que a distribuição de probabilidade do conjunto de amostras não depende do tempo absoluto. Um processo é dito estacionário se quando dividido em intervalos de tempo as várias seções do processo exibem essencialmente as mesmas propriedades estatísticas. Caso contrário é dito não-estacionário. O termo estacionário refere-se a distribuição de probabilidade e não das próprias amostras. Isso implica que todas as médias, médias ao quadrado e desvio padrão das amostras são independentes do tempo absoluto.

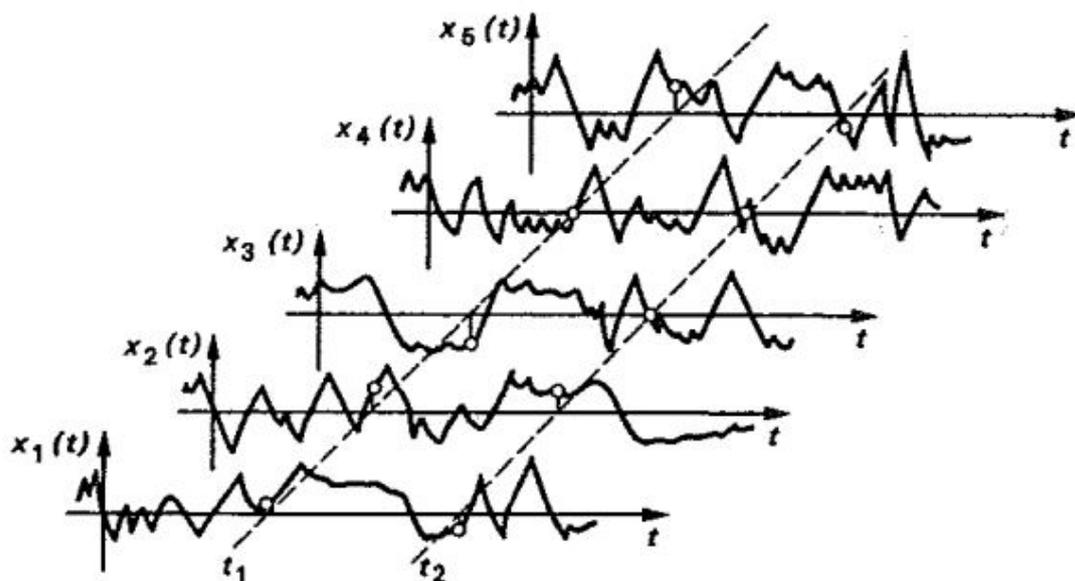


Figura 4.5 – Conjunto de amostras de processos estocásticos (Newland, 2012).

Um processo estacionário é ergódico se, além da condição de estacionariedade no tempo absoluto, a média de cada amostra deve ser igual a média do conjunto de amostras. Em termos práticos, isso implica que cada amostra é uma representação completa do

conjunto de amostras que representam o processo aleatório. Repare que todo processo ergódico é estacionário porém o contrário não é válido.

4.4 Correlação e Autocorrelação

A definição de correlação e autocorrelação é baseada nos conceitos estatísticos de esperança. Esperança é definida como a média de um processo aleatório da seguinte forma: seja uma função de um processo aleatório, $x(t)$ com período T e função de densidade de probabilidade $p(t)$, então,

$$E[x] = \int_0^T x(t) \frac{dt}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(t)dx, \quad (4.8)$$

ou seja, é possível determinar a média de um processo aleatório quando se conhece a função de densidade de probabilidade.

A partir da definição de média, é possível derivar outras quantidades relevantes como a média ao quadrado, $E[x^2]$, e o quadrado do desvio padrão, $\sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$, também conhecida como variância. O conceito de média ao quadrado nos fornece a ferramenta para comparar (correlacionar) duas funções ou a mesma função em diferentes intervalos (autocorrelação).

A função de autocorrelação de um processo aleatório, $x(t)$ é definido como a média do produto em que τ é um intervalo de tempo que separa as duas amostras. Para processos estacionários, o valor de $E[x(t)x(t + \tau)]$ é determinado independentemente do valor absoluto do tempo t , assim, pode-se reescrever a esperança do produto $x(t)x(t + \tau)$ da seguinte forma

$$E[x(t)x(t + \tau)] = R_x(\tau), \quad (4.9)$$

em que $R_x(\tau)$ é a função de autocorrelação de $x(t)$ no intervalo de tempo τ .

4.5 Transformada de Fourier

A análise de Fourier é uma poderosa ferramenta que permite expressar uma função arbitrária por uma série trigonométrica. Por exemplo, para uma função $x(t)$ com período T , pode-se representa-la da seguinte forma, pela série de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right), \quad (4.10)$$

onde a_0 , a_k e b_k são constantes dadas por

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (4.11)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \omega_k t dt, \quad k \geq 1, \quad (4.12)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \text{sen} \omega_k t dt, \quad k \geq 1, \quad (4.13)$$

em que $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ é a k -ésima frequência.

Para casos em que se deseja analisar o comportamento contínuo, ou seja, utilizando um período $T \rightarrow \infty$ e um intervalo entre as frequências infinitesimal, $\Delta\omega \rightarrow d\omega$, a série de Fourier se transforma em integral de Fourier

$$x(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega + 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \text{sen}(\omega t) d\omega, \quad (4.14)$$

onde os termos $A(\omega)$ e $B(\omega)$ são as componentes da transformada de Fourier de $x(t)$.

A teoria clássica das séries de Fourier descrita acima precisa satisfazer a condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (4.15)$$

ou seja, só é possível escrever uma função por série de Fourier se, e somente se, a função decai para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Uma outra forma de representar as funções senoidais é utilizar a forma complexa. Utilizando o resultado $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$ e definindo $X(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$ resulta em

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.16)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.17)$$

Este par de equações Eq.4.16 e Eq.4.17 são conhecidas como equação integral de Fourier e equação integral de Fourier inversa, respectivamente. $X(\omega)$ é a transformada de Fourier complexa de $x(t)$. O par de equações são importantes para vibração aleatória pois, a partir delas, é possível relacionar uma série temporal com as frequências que compõem o processo. Assim, conceitos importantes podem ser extraídos como a densidade espectral e sua relação com o conceito de correlação.

O modelo do forçamento aleatório deve ser obtido digitalmente. Esse forçamento é obtido através de uma conversor analógico-digital que fornece o que é chamado de série temporal discreta. A partir da série temporal discreta é possível determinar as características da função temporal continua por meio de análise estatística. Um dos objetivos é extrair a composição de frequência da série temporal discreta, em outras palavras, deseja-se obter o espectro do processo aleatório.

Um método que pode ser utilizado para estimar o espectro é, a partir dos dados de entrada, estimar a função de correlação apropriada e depois aplicar a transformada de

Fourier. Até o final dos anos 1960 este era o método utilizado, de fato, o procedimento seguia a matemática formal em que espectro é definido como a transformada de Fourier da correlação. Existem diversas hipóteses e aproximação tratadas na literatura desse método clássico. Entretanto, com o surgimento do algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT) obteve-se uma maneira mais eficiente em calcular a transformada de Fourier de uma série temporal. Por esse método é possível obter um resultado mais rápido utilizando apenas a série temporal sem a necessidade de utilizar a rota do análise espectral e correlação.

Pela Eq.4.17 não seria possível utilizar a série temporal discreta sem antes realizar algumas aproximações. Representando a série temporal discreta por $\{x_r\}$, $r = 0, 1, 2, \dots, (N - 1)$, e o tempo discretizado por $t = r\Delta$ pode-se representa a Eq.4.17 na sua forma discreta

$$X_k = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{i(2\pi k/T)(r\Delta)} \Delta \quad (4.18)$$

ou substituindo $T = N\Delta$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{i(2\pi kr/N)} \quad (4.19)$$

onde N representa o número de elementos da série. O resultado obtido na Eq.4.19 é chamado de Transformada de Fourier Discreta (TFD).

A transformada de Fourier discreta é explorada para desenvolver o algoritmo da FFT. Mas antes é preciso introduzir os conceitos básicos de densidade espectral de potência.

4.6 Densidade Espectral de Potências

A utilização de espectros de frequência para visualizar funções periódicas é um método bastante conveniente de compreender o comportamento do processo por meio da disposição das frequências. Um gráfico em forma de espectro é descrito por uma amplitude de frequência harmônica para cada componente harmônico em função da frequência. Para representar espectros de potência se utiliza séries de Fourier em que é possível escrever uma função de período τ como uma soma de infinitos números de harmônicos em que cada harmônico possui amplitude e frequências múltiplos da frequência natural do sistema. Assim, quanto maior for o período τ , mais denso será o espectro de frequência.

Para os casos em que a composição de frequência em um processo aleatório ocorrem naturalmente, a função $x(t)$ não é periódica e, portanto, não pode ser expressa pela série de Fourier já que não se sabe ao certo o comportamento da função que pode mudar de amostra para amostra. Essa dificuldade em descrever o processo pode ser solucionada se olharmos não para a função que o descreve mas sim para a função de autocorrelação

$R_x(\tau)$ ao invés da função aleatória. A lógica por trás desse procedimento é que a função de autocorrelação fornece informações acerca da frequência em um processo randômico, ou seja, em uma análise de correlação é possível obter as frequências presentes em uma amostra aleatória.

A função densidade espectral de potência de um processo randômico estacionário, ou seja, a distribuição de probabilidade permanece invariável quando sob variação temporal, é definido pela transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau)/2\pi$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.20)$$

de forma que

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.21)$$

a função de autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ faz conexões estatísticas entre valores da função variável $x(t)$ em diferentes intervalos de tempo τ , mas não depende do instante t . Processos estocásticos com essa característica são chamados de ergódicos. As Eqs. 4.20 e 4.21 são conhecidas por fórmulas de Wiener-Khintchine.

Uma das propriedades mais importante de $S_{xx}(\omega)$ se torna aparente quando $\tau = 0$ na Eq.4.21, neste caso,

$$E[x^2] = R_{xx}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (4.22)$$

esse resultado pode ser interpretado graficamente como indicado na Fig.4.6. A média ao quadrado do processo aleatório é igual a área do gráfico da densidade espectral.

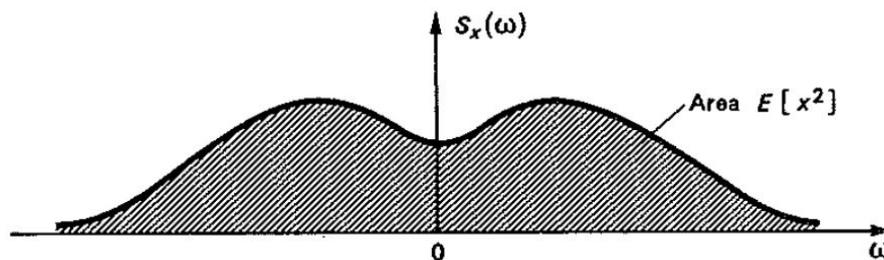


Figura 4.6 – Curva da função de densidade espectral de potência (Newland, 2012).

A relação entre a função de densidade espectral da resposta e da excitação pode ser extraída das relações de entrada e saída de um sistema linear determinístico. Seja os elementos $x(t)$ e $y(t)$ como sendo a entrada e saída do sistema. Considere agora essas funções no domínio da frequência, $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, a relação entre elas pode ser obtida pelas expressões

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\nu) x(t - \nu) d\nu \quad (4.23)$$

$$Y(\omega) = \mathbf{H}(\omega) X(\omega) \quad (4.24)$$

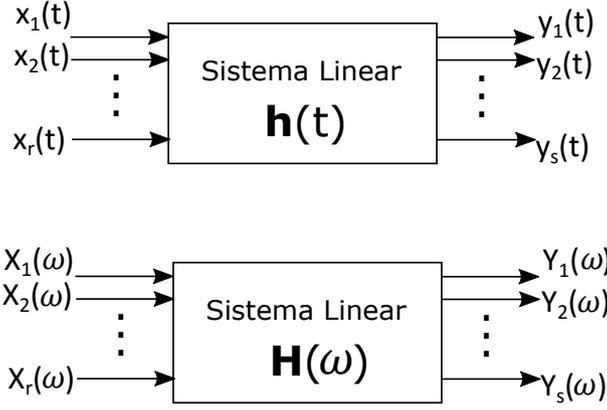


Figura 4.7 – Diagrama de blocos do sistema linear com r parâmetros de entrada e s de saída no domínio do tempo e da frequência (Roberts e Spanos, 2003).

as relações podem também ser representada pelo diagrama da Fig.4.7 em que o sistema possuem r parâmetros de entrada e s parâmetros de saída.

Agora, considere que $x(t)$ e $y(t)$ representam processos estocásticos. As relações entre entrada e saída ainda são validas porém, agora possuem natureza estocástica e precisam ser interpretadas considerando a teoria probabilística.

A função de correlação de saída se relaciona com a função de correlação de entrada pela equação (Roberts e Spanos, 2003)

$$\mathbf{R}_{yy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(t_1 - \nu_1) \mathbf{R}_{xx}(\nu_1, \nu_2) \mathbf{h}^T(t_2 - \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 \quad (4.25)$$

onde as variáveis ν_1 e ν_2 podem ser interpretado como um atraso no tempo. Para o caso em que $x(t)$ é estacionário, $\mathbf{R}_{xx}(t_1, t_2)$ depende apenas da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e portanto, $\mathbf{R}_{yy}(t_1, t_2)$ também depende apenas de τ . Assim, reescrevendo a Eq.4.25, com uma mudança de variáveis

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\nu_1) \mathbf{R}_{xx}(\tau + \nu_1 - \nu_2) \mathbf{h}^T(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 \quad (4.26)$$

Realiza-se a transformada de Fourier da Eq.4.26 e utiliza-se os conceitos de densidade espectral de potência, tem-se

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_2 \mathbf{h}(\nu_1) \mathbf{h}^T(\nu_2) R_{xx}(\tau + \nu_1 - \nu_2) \right\} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_1 \mathbf{h}(\nu_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_2 \mathbf{h}^T(\nu_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} R_{xx}(\tau + \nu_1 - \nu_2) \quad (4.28)$$

é possível mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R_{xx}(\tau + \nu_1 - \nu_2) d\tau = 2\pi \mathbf{S}_{xx}(\omega) e^{i\omega(\nu_1 - \nu_2)}$ (Newland, 2012), assim

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \mathbf{S}_{xx}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\nu_1) e^{i\omega\nu_1} d\nu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}^T(\nu_2) e^{-i\omega\nu_2} d\nu_2 \quad (4.29)$$

pela definição de função impulso, nota-se que

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \mathbf{H}^*(\omega) \mathbf{H}(\omega) \mathbf{S}_{xx}(\omega) \quad (4.30)$$

em que $\mathbf{H}^*(\omega)$ é a função de transferência conjugada. Como o produto complexo de um número por seu conjugado é igual a sua magnitude ao quadrado, conclui-se que

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = |\mathbf{H}(\omega)|^2 \mathbf{S}_{xx}(\omega) \quad (4.31)$$

A Eq.4.31 é a equação mais importante de vibração aleatória pois ela fornece uma relação direta e simples entre a densidade espectral de potência de entrada e saída.

4.7 Transformada de Fourier Rápida

Como discutido na Seção 4.5, os conceitos de TFD podem ser usados para estimar a densidade espectral de potência de um processo aleatório e consequentemente desenvolver um algoritmo que nos permita obter a série temporal a partir da densidade espectral e vice versa com baixo custo computacional.

Partindo da definição de correlação e de densidade espectral das séries temporais discretas x_r e y_r

$$R_r = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_s y_{s+r} \quad r = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (4.32)$$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} R_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad (4.33)$$

combinando as Eq.4.32 e Eq.4.33, tem-se

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_s y_{s+r} \right\} e^{-i(2\pi kr/N)} \quad (4.34)$$

rearranjando os termos

$$S_k = \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} x_s e^{-i(2\pi ks/N)} y_{s+r} e^{-i(2\pi k(s+r)/N)} \quad (4.35)$$

considerando os termos com variáveis em r podem ser agrupados

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} x_s e^{-i(2\pi ks/N)} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_{s+r} e^{-i(2\pi k(s+r)/N)} \right\} \quad (4.36)$$

definindo uma nova variável $t = (s+r)$, onde o termo entre chaves se torna

$$\frac{1}{N} \sum_{t=s}^{(N-1)+s} y_t e^{-i(2\pi kt/N)} \quad (4.37)$$

comparando o lado direito da Eq.4.36 com a forma da Eq.4.19, nota-se que

$$S_k = X_k^* Y_k \quad (4.38)$$

esse resultado é importante pois é a base do algoritmo da TFR. A partir dele é possível obter uma estimativa do espectro apenas conhecendo a série temporal discreta e vice-versa sem necessitar do cálculo da correlação. Conhecendo o valor da densidade espectral discretizada S_k pode-se obter o seu valor real.

A FFT funciona particionando a sequência completa x_r em um número de pequenas sequências. Ao invés de calcular a TFD da sequência original, apenas a TFD das sequências menores são calculadas. A FFT então combina esses resultados para gerar a TFD total de x_r .

Considere uma sequência x_r com N número de eventos que é particionada em duas sequências y_r e z_r

$$y_r = x_{2r}; \quad z_r = x_{2r+1} \quad (4.39)$$

a TFD dessas duas sequências são dadas por Y_k e Z_k

$$Y_k = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} y_r e^{-i \frac{2\pi k r}{(N/2)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1) \quad (4.40)$$

$$Z_k = \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} z_r e^{-i \frac{2\pi k r}{(N/2)}} \quad (4.41)$$

retornando para a TFD da sequência original x_r e rearranjando a soma em duas somas, par e ímpar da forma

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i \frac{2\pi k r}{N}} \quad (4.42)$$

$$X_k = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{r=0}^{N/2-1} x_{2r} e^{-i \frac{2\pi k (2r)}{N}} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x_{2r+1} e^{-i \frac{2\pi k (2r+1)}{N}} \right\} \quad (4.43)$$

substituindo na Eq.4.43 as sequências da Eq.4.39, tem-se

$$X_k = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{r=0}^{N/2-1} y_r e^{-i \frac{2\pi k r}{(N/2)}} + e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \sum_{r=0}^{N/2-1} z_r e^{-i \frac{2\pi k r}{(N/2)}} \right\} \quad (4.44)$$

de outra forma

$$X_k = \frac{1}{2} \{Y_k + e^{-i \frac{2\pi k}{N}} Z_k\} \quad (4.45)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1)$

A TFD da sequência original pode ser obtida diretamente das TFD das duas sequências Y_k e Z_k de acordo com a Eq.4.45. Essa equação é a base do método da FFT. Para o caso de número de amostras N da sequência x_r o custo computacional e da ordem de N^2 . Caso utilize o método da FFT, o custo computacional diminuiu para ordem de $N \log_2 N$ o que representa uma redução considerável, na medida que N aumenta.

4.8 Exemplo de Aplicação

Caso se deseje estudar o comportamento de um sistema com excitação aleatória, faz-se necessário desenvolver relações entre os momentos estatísticos tanto da resposta de entrada quanto da excitação de saída do sistema. Seja um sistema um grau de liberdade adimensional

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = y(t), \quad (4.46)$$

em que $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/c_c$ e $y(t) = F(t)/m$ é uma função composta por séries de impulso com diferentes magnitudes.

Seja o impulso aplicado no tempo τ escrito da forma $y(\tau)d\tau$, se $y(t) = h(t - \tau)$ é a resposta de um impulso unitário, a resposta total do sistema é dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (4.47)$$

A função transiente de excitação de saída do sistema pode ser expressa a partir de sua transformada de Fourier $Y(\omega)$,

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (4.48)$$

em que $y(t)$ é a superposição da função $Y(\omega)$ para todas as frequências ω . Considerando a função transiente de excitação como sendo harmônica, ou seja, $y(t) = y_0e^{i\omega t}$, então, a resposta de entrada pode ser expressa da forma

$$x(t) = H(\omega)y_0e^{i\omega t}, \quad (4.49)$$

onde $H(\omega)$ é a resposta em frequência complexa. Como a excitação atual é dada por uma superposição de resposta em frequência, a resposta total do sistema pode ser obtida da seguinte forma

$$x(t) = H(\omega)y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)Y(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.50)$$

Se $X(\omega)$ denota a transformada de Fourier da função de saída, pode-se expressar $x(t)$ em termos de $X(\omega) = H(\omega)Y(\omega)$, conclui-se que

$$x(t) = H(\omega)y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.51)$$

A resposta do sistema também pode ser descrita em forma de densidade espectral de potência, que por definição, é descrito na Eq.4.20. Utilizando-se o resultado fundamental obtido na Eq.4.31, o valor da resposta do valor médio quadrado, a variância, pode ser expressa pela função de densidade espectral através

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{yy}(\omega)d\omega, \quad (4.52)$$

pode-se extrair da Eq.4.52 o valor da resposta para a velocidade

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 S_{yy}(\omega) d\omega, \quad (4.53)$$

em que devido ao Teorema de Parseval o valor da resposta da Eq.4.53 é idêntico a variância temporal da vibração.

Formas simplificadas da solução são estudadas por (Roberts e Spanos, 2003). Neste trabalho, a análise é simplificada com a utilização da função densidade espectral de potência do tipo ruído branco pelo fato de ser possível encontrar uma solução explicita de forma simplificada. Sabe-se que a modelagem do vento não apresenta a forma de ruído branco, ou seja, há uma certa correlação entre o vento em um determinado tempo com ele mesmo em um tempo seguinte. Em uma primeira análise é aceitável utilizar o ruído branco para validação de dados devido à simplicidade de formulação, porém uma análise mais rigorosa se faz necessário com modelos fisicamente representativos.

O ruído branco é uma idealização do espectro que cobre todas as faixas de frequência. Ele é usada para simplificar a análise de forma que seja possível obter resultados analíticos com aproximações bastante satisfatórias no estudo de vibrações aleatórias. Outros tipos de densidade espectral valem ser mencionados como o Espectro de Kanai-Tajimi e o espectro de Davenport que produzem séries temporais de ventos fisicamente representativas, por levar em consideração questões de relevância ao problema real como diferentes rugosidades, alturas, forças do vento e em geral as alterações das propriedades dinâmicas de excitação com a frequência. A Tab.4.1 mostra a forma dos modelos de de densidade espectral de potência para o vento.

Tabela 4.1 – Tipos usuais de modelo de densidade espectral de potencia para o vento.

Filtro de Davenport	$S_{DAV}(\omega) = \frac{4\kappa LU\chi}{(1+\chi^2)^{4/3}}, \quad \chi = \frac{\omega L}{U}$
Filtro de Kanai-Tajimi	$S_{KT}(\omega) = \frac{1+4\xi_g^2(\omega/\omega_g)}{[1+(\omega/\omega_g)^2+4\xi_g^2(\omega/\omega_g)^2]} S_0$

Para o Filtro de Davenport ω é a frequência, U é a velocidade média, L é o comprimento e κ é o coeficiente de arraste (Kaasen et al., 1999). Para o Filtro de Kanai-Tajimi S_0 é densidade espectral de potência para o caso de ruído branco, ω_g e ξ_g podem ser interpretados como frequência característica e razão de amortecimento característica respectivamente. O espectro de Kanai-Tajimi amplifica as frequência ao redor de ω_g , atenua as frequências altas e não altera as pequenas frequências (Thráinsson, Kiremidjian e Winterstein, 2000).

4.9 Linearização Estatística

Métodos de linearização estatística permitem lidar com problemas de vibração aleatória em sistemas não-lineares. As técnicas analíticas envolvidas para aplicar o método

de linearização estatística pode ser aplicado em diferentes sistema contendo um ou mais elementos não-lineares, e um ou mais de um grau de liberdade. Uma consideração feita (Roberts e Spanos, 2003) para manter a simplicidade é de que as não-linearidades envolvidas não são do tipo histerética, ou seja, não dependem da história total de resposta do sistema, mas sim apenas do movimento instantâneo. Além disso, se considera a resposta e a excitação do tipo estacionária.

A resposta de um elemento não-linear em excitação aleatória é considerado. Esse elemento é do tipo memória-zero, de forma que ele transforme um parâmetro de entrada, $x(t)$, em saída, $y(t)$, de acordo com a relação algébrica

$$y(t) = g[x(t)], \quad (4.54)$$

assim, $y(t)$ depende apenas dos valores instantâneos de $x(t)$ no tempo t . Nesse caso, a função $g(x)$ é o elemento não linear. Esse tipo de relação não-linear não necessita de técnicas de aproximação para obter a relação entre a distribuição de probabilidade do parâmetro de saída com o de entrada, porém ainda é importante sua aplicação como forma de demonstração dos princípios básicos e comprovação da acurácia dos métodos de linearização.

O procedimento consiste em decompor $x(t)$ na forma

$$x(t) = x_0(t) + m_x \quad (4.55)$$

em que m_x é o valor médio de $x(t)$. Assume-se que tanto a parâmetro de entrada quanto o de saída possuem médio diferente de zero.

O elemento linear que serve para o propósito de aproximar o elemento não-linear, é de forma que produza uma resposta do tipo

$$y_e = ax_0 + b, \quad (4.56)$$

onde a e b são constantes. Define-se a diferença ϵ

$$\epsilon = y - y_e = g(x) - ax_0 - b, \quad (4.57)$$

os parâmetros a e b são escolhidos de forma que minimizem a diferença ϵ entre o elemento não linear e o linear equivalente na Eq.4.57. Caso ϵ seja minimizado com êxito, o sistema governado pela Eq.4.57 é chamado de sistema linear equivalente que se aproxima ao sistema não linear da Eq.4.54 e assim, as propriedades estatísticas obtidas para y_e podem ser aproximadas as propriedades estatística do sistema não-linear. Essa é a essência do método de linearização estatística, ou seja a linearização é feita no sentido dos estatísticos da resposta e não uma linearização do sistema em si.

Diversos critérios de minimização podem ser usados, porém o que, em geral, proporciona melhores resultados advêm da minimização da esperança de ϵ^2 , $E\{\epsilon^2\}$. Portanto, adotando esse critério

$$E\{\epsilon^2\} = E\{[g(x) - ax_0 - b]^2\}, \quad (4.58)$$

a quantidade $E\{\epsilon^2\}$ pode ser minimizada com respeito a a e b resolvendo a equação

$$\frac{\partial}{\partial a} E\{\epsilon^2\} = \frac{\partial}{\partial b} E\{\epsilon^2\} = 0, \quad (4.59)$$

desse procedimento, segue que

$$a = \frac{E\{x_0 g(x)\}}{x_0^2} = \frac{E\{x_0 y\}}{\sigma_x^2}, \quad (4.60)$$

$$b = E\{g(x)\} = E\{y\}, \quad (4.61)$$

a Eq.4.61 mostra que o valor otimizado de b é igual a esperança do parâmetro de saída não-linear, ou seja, a média verdadeira de y . A Eq.4.60 é a relação cruzada entre os parâmetros de entrada e saída avaliados sem defasagem.

Para o caso particular em que $x(t)$ é um processo Gaussiano, pode-se simplificar a expressão para a utilizando as propriedades da função gaussiana em processos aleatórios (Roberts e Spanos, 2003). O valor da esperança é dado por

$$E\{x_0 g(x_0 + m)\} = \sigma_x^2 E\left\{\frac{\partial g}{\partial x}\right\}, \quad (4.62)$$

combinando com a Eq.4.60, tem-se

$$a = E\left\{\frac{\partial g}{\partial x}\right\}. \quad (4.63)$$

Esta técnica é utilizada no Capítulo 5 para tratar do problema do ACLS sujeito à ventos com características aleatórias. O ACLS possui um termo de amortecimento não-linear, devido ao escoamento do fluido por um orifício. A utilização do resultados apresentados neste capítulo dependem da linearização do sistema em torno de um ponto de trabalho. A linearização estatística apresenta uma alternativa de análise, sem que o sistema tenha que ser linearizado, ou que tenha que se recorrer a métodos numéricos de solução, que podem ter um custo computacional elevado.

5 ABSORVEDOR DE COLUNA DE LIQUIDO SINTONIZADO (ACLS)

Neste capítulo, o modelo dos absorvedores de coluna de liquido são discutidos. A análise numérica consiste em estudar o comportamento do ACLS e da estrutura para diversas condições a que o sistema possa vir a apresentar. Primeiramente, se desenvolve as equações governantes do sistema considerando as hipóteses simplificadoras. Em seguida realiza-se uma análise com forçamento harmônico, e por fim, realiza-se uma simulação com forçamento aleatório.

Como discutido no Anexo A, não é possível resolver de forma analítica o caso de escoamento turbulento devido a não-linearidade presente no fator de amortecimento. Este problema pode ser contornado de duas maneiras, pelos métodos iterativos de soluções computacionais ou por outro modelo de amortecimento equivalente que pode ser obtido por análise estocástica.

O modelo de otimização de parâmetros foi desenvolvido por Yalla e Kareem (2000). Em seu estudo, Yalla e Kareem também utilizam ferramentas da análise de vibração aleatória para realizar a linearização estatística.

5.1 Modelagem do ACLS

O modelo do ACLS montado na estrutura é esquematizado na Fig.5.1. A idealização para a estrutura é aceitável pois se considera a massa dos apoios desprezível e seção transversal constante. Dessa forma, é possível aproximar o sistema por um *shear-frame* de 1 andar em um modelo de um grau de liberdade com rigidez e amortecimento equivalente.

A equação que descreve o movimento do fluido é dada por

$$\rho A l \ddot{u}(t) + \frac{1}{2} \rho A \xi |\dot{u}(t)| \dot{u}(t) + 2 \rho A g u(t) = -\rho A b \ddot{x}(t), \quad (5.1)$$

onde u a função deslocamento do fluido, x é a função deslocamento do sistema primário, ρ é a densidade do fluido, ξ é coeficiente de perda de carga, A é a área da seção trans-

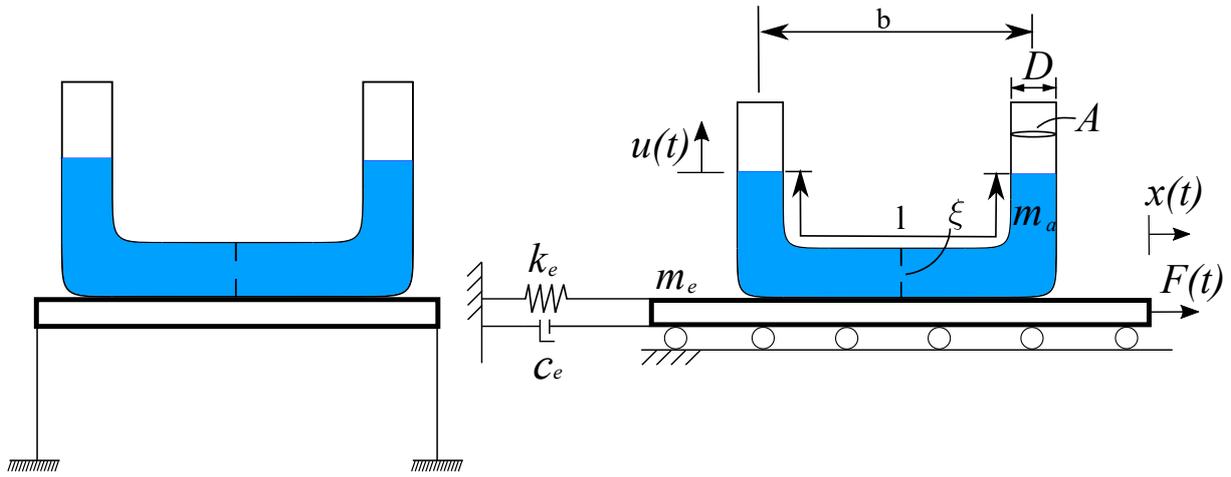


Figura 5.1 – Modelo esquemático do sistema estrutura ACLS.

versal do tubo, b e l são os comprimentos horizontal e vertical respectivamente. Como simplificação da notação, observa-se que a massa do absorvedor é dada por $m_a = \rho Al$, seu amortecimento é $c_a = \frac{1}{2}\rho A\xi|\dot{u}(t)|$ e a rigidez é dada por $k_a = \rho Ag$. A frequência natural de oscilação no tubo é dada por

$$\omega_a = \sqrt{\frac{2g}{l}}. \quad (5.2)$$

Pela teoria de tubos em “U” descrita no Anexo A, existem perdas envolvidas na equação da energia. Em um escoamento laminar essa perda possui caráter linear, em quanto que para o escoamento turbulento a perda possui caráter não-linear que pode ser notado no termo de amortecimento da Eq.5.1. Para resolver a equação de forma explícita, é preciso aplicar um tratamento numérico iterativo ou simplificar a equação utilizando modelos equivalente.

A equação da estrutura primária é dada por

$$(m_e + m_a)\ddot{x}(t) + \rho Ab\ddot{u}(t) + c_e\dot{x}(t) + k_e x(t) = F(t), \quad (5.3)$$

em que o parâmetro m_e representa a massa da estrutura, k_e a rigidez e c_e o amortecimento da estrutura e $F(t)$ o forçamento externo. Assim, combinando as Eq.5.1 e a Eq.5.3 na equação do movimento em forma matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} m_e + m_a & \alpha m_a \\ \alpha m_a & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_e & 0 \\ 0 & c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & 0 \\ 0 & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad |u| \leq \frac{l-b}{2}, \quad (5.4)$$

em que se introduz a forma adimensional da razão de comprimento $\alpha = b/l$, e a condição da Eq.5.4 é usada para garantir que o líquido no tubo mantenha a forma de “U” e a água não derrame para que não se altera sua característica de amortecimento. Uma outra forma de escrever a Eq.5.4 é utilizar sua forma adimensional, dada por

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu & \alpha\mu \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_e\zeta_e & 0 \\ 0 & \frac{\xi|u|}{2l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_e^2 & 0 \\ 0 & \omega_a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F(t)}{m_e} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.5)$$

em que ζ_e é razão de amortecimento da estrutura primária, ω_e é a frequência natural da estrutura primária. Os parâmetros adimensionais razão das massas e razão de sintonização são definidos

$$\mu = \frac{m_a}{m_e}; \quad \gamma = \frac{\omega_a}{\omega_e}. \quad (5.6)$$

5.2 Linearização Estatística do Amortecimento

A natureza não-linear do amortecimento exige a determinação de um valor equivalente para o coeficiente de amortecimento turbulento. Roberts e Spanos (2003) propõem um procedimento para estimar o valor otimizado do coeficiente de amortecimento. Utilizando métodos de linearização estatística proposto na Seção 4.9, é possível expressar o erro da aproximação entre o sistema não-linear com o sistema linear equivalente da seguinte forma

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho A\xi|\dot{u}|\dot{u} - c_{eq}\dot{u}, \quad (5.7)$$

o valor do amortecimento equivalente, c_{eq} pode ser obtido minimizando o valor do desvio padrão do erro, ou seja, $E\{\epsilon^2\}$. Primeiro, comparando a forma da Eq.4.58 com a Eq.5.7, nota-se que $a = c_{eq}$ e $b = 0$. Utilizando os resultados obtidos na Eq.4.63, tem-se

$$c_{eq} = E \left\{ \frac{dg(\dot{u})}{d\dot{u}} \right\}, \quad (5.8)$$

onde $g(\dot{u}) = \frac{1}{2}\rho A\xi|\dot{u}|\dot{u}$ é a função não-linear do problema. Assim,

$$c_{eq} = E \left\{ \frac{1}{2}\rho A\xi \frac{d|\dot{u}|\dot{u}}{d\dot{u}} \right\}, \quad (5.9)$$

$$c_{eq} = \frac{1}{2}\rho A\xi E \left\{ \frac{d|\dot{u}|^2}{d\dot{u}} \right\}, \quad (5.10)$$

$$c_{eq} = \rho A\xi E \{|\dot{u}|\} = \rho A\xi \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{u}|p(\dot{u})d\dot{u}, \quad (5.11)$$

onde $p(\dot{u})$ é a função de densidade de probabilidade. Assumindo que a velocidade do líquido possui forma Gaussiana dada pela Eq.4.7, a expressão para o amortecimento equivalente pode ser dada por (Roberts e Spanos, 2003)

$$c_{eq} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho A\xi\sigma_{\dot{u}} = 2\omega_a\zeta_a, \quad (5.12)$$

onde $\sigma_{\dot{u}}$ é o desvio padrão da velocidade do fluido. Portanto, o amortecimento equivalente aproximado por linearização estatística c_{eq} pode substituir o valor de c_a não-linear na Eq.5.4. De acordo com Eq.5.12, existe uma relação entre o coeficiente de perda de carga e o desvio padrão da velocidade do fluido. A medida que o carregamento aumenta devido ao termo $\sigma_{\dot{u}}$, o valor de ξ deve diminuir para manter o amortecimento constante. O amortecimento equivalente também pode ser expresso em função da razão de amortecimento

do absorvedor ζ_a , para tornar mais conveniente o cálculo de otimização da seção seguinte. Na próxima seção, obtêm-se a partir da razão de amortecimento e do desvio padrão σ_u uma expressão para a perda de carga ξ .

A equação matricial para o caso de amortecimento equivalente é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 + \mu & \alpha\mu \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_e\zeta_e & 0 \\ 0 & 2\omega_a\zeta_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_e^2 & 0 \\ 0 & \omega_a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F(t)}{m_e} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.13)$$

5.3 Otimização de Parâmetros

O coeficiente de perda de carga ξ afeta a curva de resposta em frequência da estrutura (Yalla e Kareem, 2000). Com o objetivo de minimizar o valor do deslocamento da estrutura primária, procura-se um valor ótimo para a perda de carga considerando várias intensidades de carregamento. O primeiro passo, entretanto, é obter os valores otimizados para a razão de amortecimento e razão de sintonização definida adiante.

As funções de transferências no domínio da frequência para os dois graus de liberdade podem ser definidas da seguinte forma,

$$H(\omega) = \frac{X_e(\omega)}{F(\omega)}, \quad (5.14)$$

$$G(\omega) = \frac{X_a(\omega)}{F(\omega)}, \quad (5.15)$$

as seguintes expressões são obtidas

$$H(\omega) = \frac{-\Delta\mu\alpha(i\omega)^2 + (i\omega)^2 + \zeta_a\omega_d(i\omega) + \omega_d^2}{((i\omega)^2(1 + \mu) + 2\zeta_e\omega_e(i\omega) + \omega_e^2)((i\omega)^2 + 2\zeta_a\omega_a(i\omega) + \omega_a^2) - (i\omega)^4\alpha^2\mu}, \quad (5.16)$$

$$G(\omega) = \frac{-\alpha(i\omega)^2 + \Delta}{((i\omega)^2(1 + \mu) + 2\zeta_e\omega_e(i\omega) + \omega_e^2)((i\omega)^2 + 2\zeta_a\omega_a(i\omega) + \omega_a^2) - (i\omega)^4\alpha^2\mu}, \quad (5.17)$$

em que Δ indica a referência que se toma na análise do sistema, caso $\Delta = 1$, indica excitação de base e x é o deslocamento relativo. Caso $\Delta = 0$ indica excitação do sistema primário em que x é o deslocamento absoluto.

As respostas do sistema podem ser computadas utilizando a teoria de vibração aleatória do Capítulo 4, em particular a seção de interesse são a variância do sistema principal e a variância da velocidade do ACLS. As resposta do sistema em função da densidade espectral de potencia são dadas por,

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega, \quad (5.18)$$

$$\sigma_{\dot{u}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |G(\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega, \quad (5.19)$$

em que $S_{ff}(\omega)$ é a densidade espectral de potência do forçamento e pode assumir diversos valores dependendo do modelos utilizado. Para o caso de densidade espectral de potência do tipo ruído branco é possível obter uma solução analítica das Eq.5.18 e Eq.5.19 e assim extrair algumas conclusões sobre o modelo. Outros modelos de densidade espectral de potência trazem complexidade ao cálculo da solução fechada pelo fato de algumas características do sistema de amortecimento clássico como pontos de invariância não existir quando introduzidos no sistema (Hartog, 1985). Para esses casos mais complexos os parâmetros otimizados devem ser obtidos numericamente. Nas seções seguintes é discutido a densidade de espectro de potência com filtro de primeira ordem.

A solução da integrais complexas das Eq.5.18 e Eq.5.19 necessita uma abordagem simplificada (Anexo B). Para o caso de densidade espectral de potência do tipo ruído branco tem-se que

$$\sigma_x^2 = S_0 \frac{\pi}{\lambda_4} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}; \quad \sigma_{\dot{u}}^2 = S_0 \frac{\pi}{\lambda_4} \frac{\begin{vmatrix} \chi_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}; \quad (5.20)$$

em que

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \omega_a^4; & \chi_1 &= 4\zeta_a^2 \omega_a^2 - 2\omega_a^2; & \chi_2 &= 1; & \chi_3 &= \alpha^2; & \lambda_0 &= \omega_a^2 \omega_e^2; \\ \lambda_1 &= 2\omega_a^2 \zeta_e \omega_e + 2\zeta_a \omega_a \omega_e^2; & \lambda_2 &= \omega_a^2 (1 + \mu) + 4\zeta_a \omega_a \omega_e \zeta_e + \omega_e^2; \\ \lambda_3 &= 2\zeta_a \omega_a (1 + \mu) + 2\zeta_e \omega_e; & \lambda_4 &= 1 + \mu - \alpha^2 \mu \end{aligned}$$

Baseado nos resultados obtidos nas solução das variâncias da Eq.5.20, busca-se valores otimizados para a razão de amortecimento do fluido e para razão de sintonização para as seguintes condições

$$\frac{\partial \sigma_{\dot{u}}^2}{\partial \zeta_a} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_x^2}{\partial \gamma} = 0, \quad (5.21)$$

ou seja, ζ_a e γ tais que resultem em valores mínimos de vibração aleatória de \dot{u} e x .

A solução para a condição da Eq.5.21 pode ser obtida diretamente (analiticamente) no caso de sistema primário sem amortecimento, $\zeta_e = 0$, Yalla e Kareem (2000) apresentam os resultados

$$\zeta_{opt} = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{2\mu \left(\alpha^2 \frac{\mu}{4} - \mu - 1 \right)}{(\alpha^2 \mu^2 + \alpha^2 \mu - 4\mu - 2\mu^2 - 2)}}, \quad (5.22)$$

$$\gamma_{opt} = \frac{\sqrt{1 + \mu \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)}}{1 + \mu}, \quad (5.23)$$

os valores obtidos para as razões estão em função de parâmetros do sistema como as massas, as frequências naturais e o comprimento do tubo. Nota-se que o valor de ζ_{opt} varia com a razão de massas μ , a medida que a razão de comprimento cresce α . A razão de amortecimento cresce pelo fato de aumentar a porção horizontal do tubo e consequentemente aumentar a massa do ACLS, o que contribui indiretamente para o amortecimento.

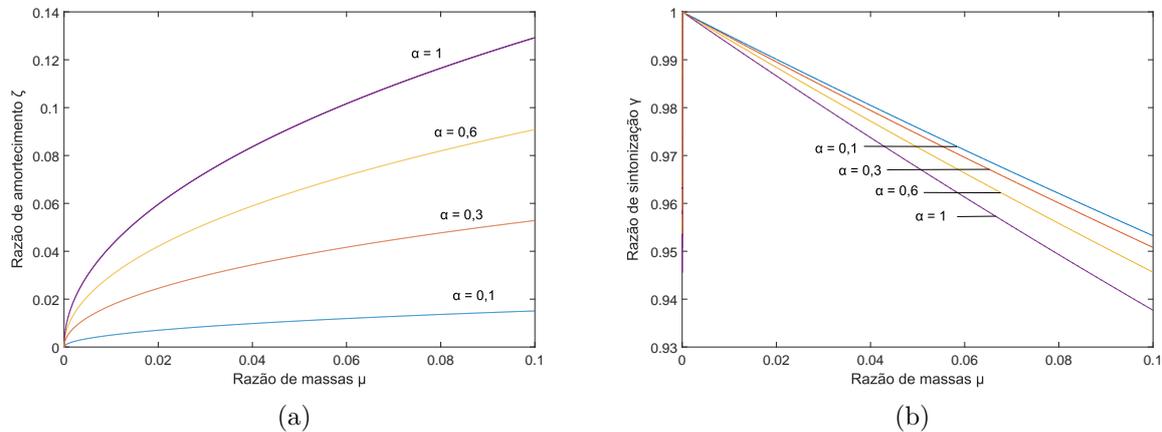


Figura 5.2 – Comparação entre os parâmetros otimizados (a) ζ e (b) γ para diferentes valores dos variáveis μ e α .

A Fig.5.2 ilustra os parâmetros ζ e γ se comportam com a variação da razão das massas μ . A razão de amortecimento aumenta para maiores valores de μ . Isso significa que quanto maior for o ACLS maior será a razão de amortecimento. Entretanto, a razão de sintonização diminui a medida que a razão de massas aumenta. O parâmetro geométrico α mostra que para ACLSs com comprimentos verticais iguais ao comprimento horizontal, ou seja, $\alpha = 1$, o valor da razão de amortecimento é maior embora seu formato mude consideravelmente e o ACLS acaba funcionando como um AMS. Essa observação por ser entendida fisicamente pelo fato de existir mais massa na porção horizontal do ACLS o que contribui indiretamente com o amortecimento, esse tipo de amortecimento é conhecido como AOS. Para a razão de sintonização, maiores valores de α fazem com que a razão de sintonização diminua, porem essa variação é menos expressiva do que a variação da razão de massas.

Como discutido anteriormente, não é possível obter a forma explicita da solução dos parâmetros otimizado para sistema primário com amortecimento. Assim, para esse caso é preciso de uma estimativa numérica. Esse cálculo foi realizado para amortecimento do sistema primário de 1%, 2% e 5% para diferentes valores da razão da massa μ e para o valor fixo de $\alpha = 0,9$. Os resultados para razão de amortecimento de ACLS e a razão de sintonização são apresentados na Tab.5.1.

A Tab.5.1 mostra que a medida que a razão de massa aumenta, ζ_{opt} também aumenta o que pode ser comprovado pela Eq.5.22 do sistema primário sem amortecimento que é aproximadamente proporcional ao quadrado da razão da massas. A razão de sintonização, pelo contrário decresce a medida que a razão de massas aumenta. A medida

que o nível de amortecimento primário aumenta, a razão de sintonização diminui. O valor da razão de amortecimento otimizado do ACLS se mantém constante independentemente do nível de amortecimento da estrutura o que nos leva a concluir que o amortecimento otimizado não depende do amortecimento da estrutura principal e por isso, a utilização de ζ_{opt} procedente do caso de sistema primário sem amortecimento é válida.

Tabela 5.1 – Parâmetros do absorvedor otimizados para ruído branco para diferentes razões de massa.

μ (%)	Sistema primário sem amortecimento		Amortecimento 1%		Amortecimento 2%		Amortecimento 5%	
	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}
	0,5	0,9965	0,0318	0,9962	0,0318	0,9959	0,0318	0,9949
1	0,9930	0,0448	0,9926	0,0448	0,9922	0,0448	0,9908	0,0448
1,5	0,9896	0,0548	0,9891	0,0548	0,9885	0,0548	0,9869	0,0548
2	0,9862	0,0631	0,9856	0,0631	0,9850	0,0631	0,9832	0,0631
2,5	0,9828	0,0705	0,9822	0,0705	0,9815	0,0705	0,9795	0,0705
3	0,9795	0,0770	0,9788	0,0770	0,9780	0,0770	0,9758	0,0770
3,5	0,9762	0,0830	0,9754	0,0830	0,9746	0,0830	0,9723	0,0830
4	0,9729	0,0886	0,9721	0,0886	0,9712	0,0886	0,9687	0,0886
4,5	0,9697	0,0938	0,9688	0,0938	0,9679	0,0938	0,9653	0,0938
5	0,9664	0,0987	0,9655	0,0987	0,9646	0,0987	0,9619	0,0987

Caso se deseje obter um expressão para o coeficiente de perda de carga, é possível combinar os resultados da Eq.5.12 e Eq.5.22 resolvendo para ξ_{opt} obtêm-se

$$\xi_{opt} = \mu \sqrt{\frac{(1 + \mu - \alpha^2)}{S_o} \left(\frac{\mu + \alpha^2}{1 + \mu}\right)^{3/2} gl\omega_d \sqrt{\mu}}. \quad (5.24)$$

Esta expressão pode ser diretamente utilizada no projeto do orifício do ACLS.

5.3.1 Espectro filtro de primeira ordem

Existem outros tipos de densidade espectral de potência existem e melhor modelam o comportamento do vento de modo fisicamente mais consistente do que o ruído branco.. A densidade espectral de potência com filtro de primeira ordem (FOF) é usada para aproximar carregamento induzido por vento e é explorada na busca por parâmetros otimizados. Esse espectro de forçamento apresenta a seguinte forma

$$S_{ff}(\omega) = \frac{S_0}{\nu^2 + \omega^2}, \quad (5.25)$$

em que S_0 é uma constante espectral, ν é um parâmetro de filtro e ω é a frequência de oscilação do sistema. Esse espectro é útil pois modela um carregamento de vento induzido com pressão positiva.

A Fig.5.3 ilustra a função de transferência do FOF para diferentes valores do parâmetro ν e a função de transferência do sistema primário como referência. A Tab.5.2

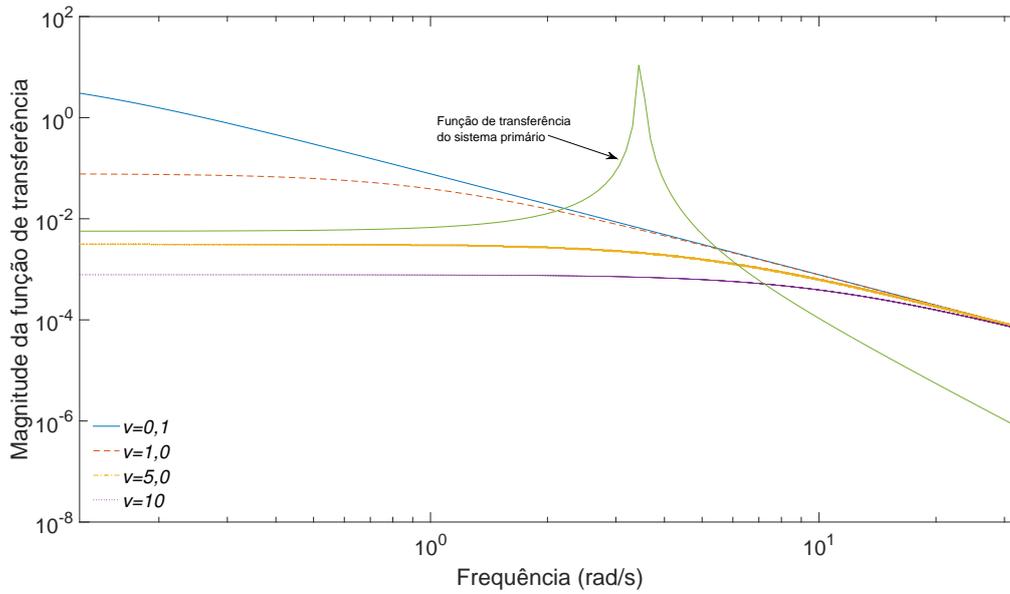


Figura 5.3 – Função de transferência do Filtro de primeira ordem e do sistema primário para diferente valores de ν .

mostra valores otimizados para razão de amortecimento e de sintonização para diferentes condições de amortecimento do sistema primário e diferentes valores da razão de massa.

A Tab.5.3 ilustra o comportamento da otimização para diferentes valores do parâmetro de filtro ν . Repare que, a variação dos valores otimizados com a variação de ν é praticamente desprezível. Esse fato pode ser notado na Fig.5.3 onde há uma pequena diferença entre as curvas na região de ressonância. Ainda analisando a Fig.5.3, para o caso de $\nu = 10$ é possível notar que o filtro possui característica similar ao ruído branco porque o filtro se torna aproximadamente uniforme nas proximidades da frequência de ressonância do sistema primário.

Realizando um método semelhante ao ruído branco do Anexo B, é possível obter um estimativa da integral da variância do deslocamento do sistema primário e a variância da velocidade do líquido dados por,

$$\sigma_x^2 = S_0 \frac{\pi}{\lambda_5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_0 \\ -\lambda_5 & \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \\ \hline \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ -\lambda_5 & \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}; \quad \sigma_u^2 = S_0 \frac{\pi}{\lambda_5} \begin{vmatrix} 0 & \chi_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_5 & \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \\ \hline \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ -\lambda_5 & \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix} \quad (5.26)$$

em que,

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \omega_a^4; & \chi_1 &= 4\zeta_a^2 \omega_a^2 - 2\omega_a^2; & \chi_2 &= 1; & \chi_3 &= \alpha^2; \\ \lambda_0 &= \nu \omega_a^2 \omega_e^2; & \lambda_1 &= \nu(2\omega_a^2 \zeta_e \omega_e + 2\zeta_a \omega_a \omega_e^2) + \omega_a^2 \omega_e^2; \\ \lambda_2 &= \nu[\omega_a^2(1 + \mu) + 4\zeta_a \omega_a \omega_e \zeta_e + \omega_e^2] + 2\zeta_a \omega_a \omega_e^2 + 2\omega_a^2 \zeta_e \omega_e; \\ \lambda_3 &= \nu[2\zeta_a \omega_a(1 + \mu) + 2\zeta_e \omega_e] + \omega_a^2(1 + \mu) + 4\zeta_a \omega_a \omega_e \zeta_e + \omega_e^2 + \omega_e^2; \\ \lambda_4 &= \nu(1 + \mu - \alpha^2 \mu) + 2\zeta_e \omega_e + 2\zeta_a \omega_a(1 + \mu); & \lambda_5 &= 1 + \mu - \alpha^2 \mu; \end{aligned}$$

Tabela 5.2 – Parâmetros do absorvedor otimizados para ruído FOF para diferentes razões de massa.

μ (%)	Sistema primário sem amortecimento		Amortecimento 1%		Amortecimento 2%		Amortecimento 5%	
	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}	γ_{opt}	ζ_{opt}
0.5	0.9956	0.0317	0.9946	0.0317	0.9934	0.0317	0.9887	0.0316
0.1	0.9912	0.0448	0.9898	0.0447	0.9883	0.0447	0.9826	0.0446
1.5	0.9868	0.0547	0.9852	0.0547	0.9834	0.0546	0.9769	0.0496
2.0	0.9825	0.0630	0.9807	0.0629	0.9786	0.0629	0.9715	0.0495

Tabela 5.3 – Parametros do absorvedor otimizados para diferentes parâmetros ν da FOF.

Parâmetro FOF	Sistema primário sem amortecimento	
	γ_{opt}	ζ_{opt}
ν		
0.1	0.99104	0.044777
1	0.99118	0.044771
5	0.99235	0.044776
10	0.99281	0.044803

5.4 Resposta do sistema ao Forçamento Harmônico

Uma forma de validar a linearização estatística é verificar a resposta do sistema quando submetido a forçamento harmônico. A análise com forçamento aleatório melhor descreve o modelo e é tratada na seção seguinte.

Primeiro, uma comparação entre dois tipos de escoamento é feita. Considera-se os casos de escoamento laminar e turbulento discutidos em mais detalhes no Anexo A que podem ser descritos pelas seguintes equações

$$\ddot{u}(t) + \frac{32\nu}{D^2}\dot{u}(t) + \omega_d^2 u(t) = F(t), \quad (5.27)$$

$$\ddot{u}(t) + \frac{1}{2}\rho\xi A|\dot{u}(t)|\dot{u}(t) + \omega_d^2 u(t) = F(t), \quad (5.28)$$

em que a Eq.5.27 é a equação governante para o caso laminar e Eq.5.28 para o caso turbulento onde u é a função deslocamento do ACLS, ν é a viscosidade, D o diâmetro do tubo, ρ a densidade, ξ o fator de fricção, $F(t)$ o forçamento e $\omega_d = \sqrt{\frac{2g}{2l+b}}$ a frequência natural.

A Fig.5.4 ilustra o comportamento do fluido ao longo do tempo para o caso laminar e turbulento considerando um forçamento harmônico. As condições iniciais utilizadas são de fluido em repouso, $u(0) = 0$ e $\dot{u}(0) = 0$.

Para a comparação dos escoamentos, utiliza-se dois métodos de resolução das equações diferenciais, resposta no tempo (discreta) e resposta no domínio da frequência (harmônica).

Para a resposta no tempo, calcula-se a primeiramente a solução permanente da análise de forma a evitar perturbações iniciais que venham a ocorrer devido as condições iniciais do sistema e para cada iteração no tempo, extrai-se a máxima amplitude do deslocamento. Faz-se isso para diversas iterações no tempo e, dessa forma, é possível obter um gráfico da resposta em frequência discreta. O método de resolução da análise transiente é feito utilizando ODE45 que é uma função do MATLAB que calcula a solução da equação diferencial pelo método numérico Runge-Kutta de quarta ordem.

Para a resposta no domínio da frequência, utiliza-se a teoria apresentada na Seção 3.1.1. Este método de solução é utilizado para se obter a curva de resposta em frequência de sistemas não-lineares. Partindo da equação do movimento na sua forma geral

$$\ddot{u}(t) + \delta\dot{u}(t) + \omega_d^2 u(t) = F(t), \quad (5.29)$$

assume-se comportamento harmônico tanto para o movimento quanto para o forçamento, ou seja, $u(t) = U_0 e^{i\omega t}$ e $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$. Em seguida, resolvendo a equação, chega-se a uma expressão similar à Eq.3.16 onde é possível obter a resposta do sistema em função da frequência. A função de transferência é apresentada para ambos os casos laminar e

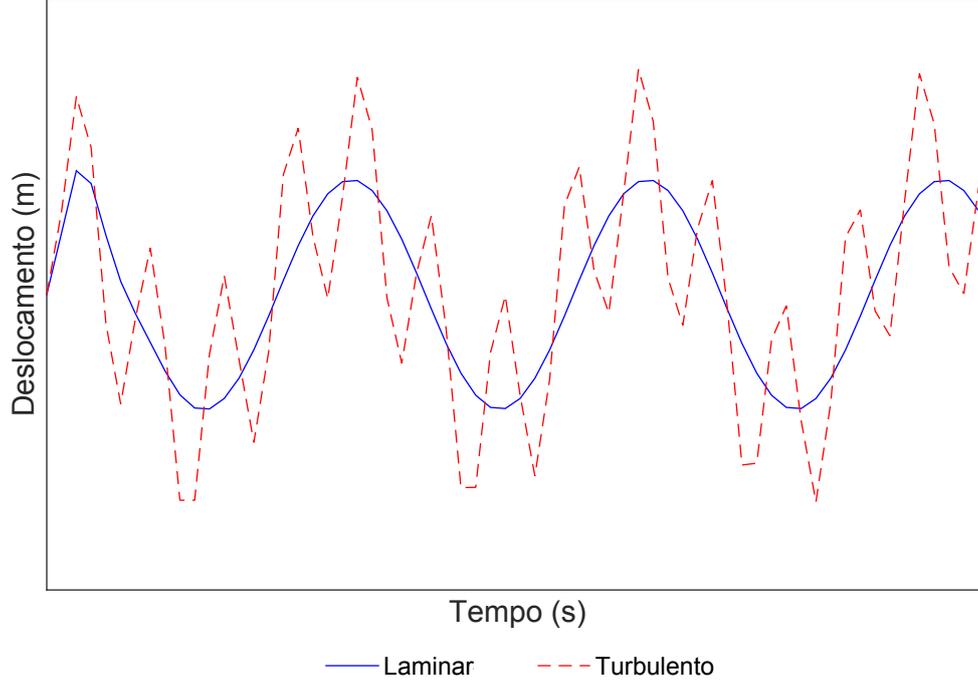


Figura 5.4 – Deslocamento da altura de coluna d’água em função do tempo em regime permanente para escoamento laminar e turbulento.

turbulento

$$\frac{U_0}{F_0} = \frac{1}{\{(\omega_d^2 - \omega^2) + (i\omega)\delta\}}, \quad (5.30)$$

onde o termo δ difere entre os dois casos sendo que, para caso laminar $\delta_{laminar} = 32\nu/D^2$ e para o caso turbulento $\delta_{turbulento} = (1/2)\rho\xi A|u_0|$. O modelo de escoamento turbulento para o caso de resposta em frequência necessita da utilização do modelo equivalente desenvolvido na seção anterior. Assim, o valor do amortecimento é dado por $\delta_{equivalente} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho A\xi\sigma_{\dot{u}}$.

O gráfico da Fig.5.9 mostrado a resposta em frequência utilizando os dois métodos para os dois tipos de escoamento. Pode-se observar que o regime laminar possui fator de amortecimento maior que o caso turbulento. Além disso, a resposta em frequência para o modelo laminar é menor que para o modelo turbulento. Comparando as duas análises do modelo turbulento, o modelo não linear (discreto) e o equivalente, se observa que o amortecimento equivalente possui um pico de ressonância maior que o calculado pela análise transiente o que é aceitável e, portanto, está a favor da segurança do modelo.

Considere agora o sistema com dois graus de liberdade em que se deseja analisar parâmetros de projeto (massa, geometria) quanto a sua eficiência de amortecimento. Utilizando o modelo de ACLS otimizado e equivalente descrito nas seções anteriores, deseja-se analisar sua aplicação em uma turbina eólica ilustrada na Fig.5.6 considerando forçamento harmônico.

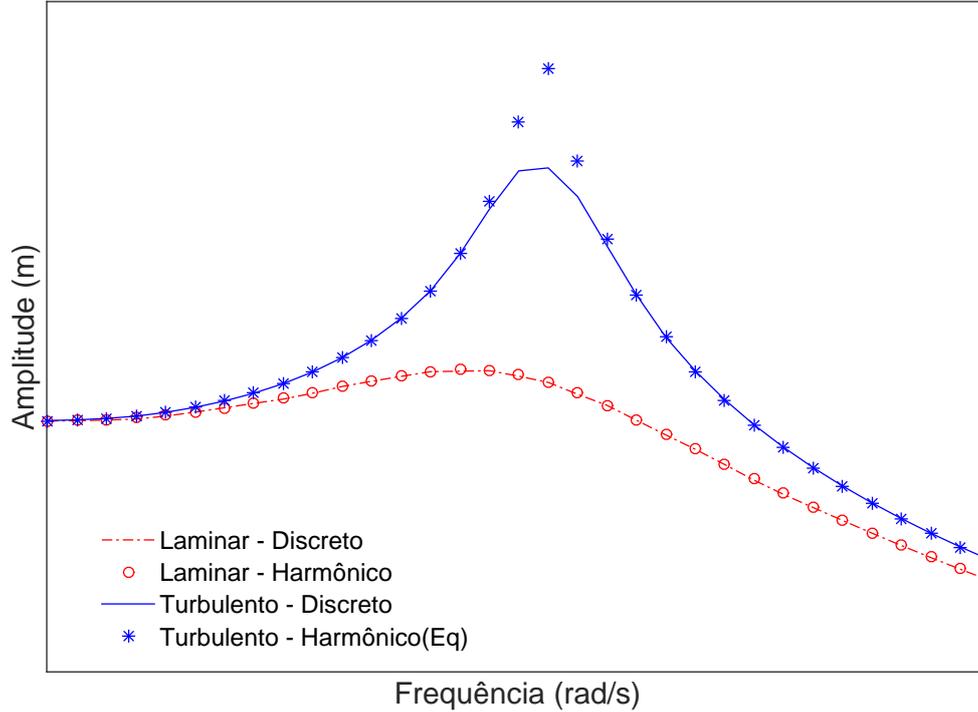


Figura 5.5 – Resposta em frequência para os quatro tipos de modelos: transiente laminar e turbulento e harmônico laminar e turbulento equivalente.

O modelo da turbina eólica usado foi proposto por Avila et al.(2009) e é apresentado na Fig.5.6. Utilizando o modelo simplificado de uma viga engastada com uma massa pontual no seu topo e realizando análise modal é possível obter a massa e a rigidez generalizada da torre.

$$K^* = \frac{\pi^4}{32L^3}EI, \quad (5.31)$$

$$M^* = \frac{mL}{2\pi} \left[\pi \left(3 + 2\frac{L_e}{L} \right) - 8 \right], \quad (5.32)$$

em que m é a massa por unidade de comprimento da viga e M é a massa pontual no topo da viga, w é o deslocamento normal a viga, E e I são o módulo de elasticidade e o momento de inércia respectivamente. L e L_e são o comprimento da viga e equivalente definido por $M = mL_e$

A turbina eólica utilizada possui torre de aço com altura do cubo de $60m$, largura de $3m$ e espessura de $0,015m$. O módulo de elasticidade é $E = 2,1 \cdot 10^{11} N/m^2$ e densidade de $\rho = 7850 kg/m^3$. A massa do rotor é de $M = 19876 kg$. Usando estes dados nas Eq.5.31 e Eq.5.32 chega-se ao seguinte resultado

Outras variáveis definidas a partir da massa e da rigidez generalizada são a frequência natural e a razão de amortecimento da estrutura dados por,

$$\omega_e = 3.6450; \quad \zeta_e = 0.0018.$$

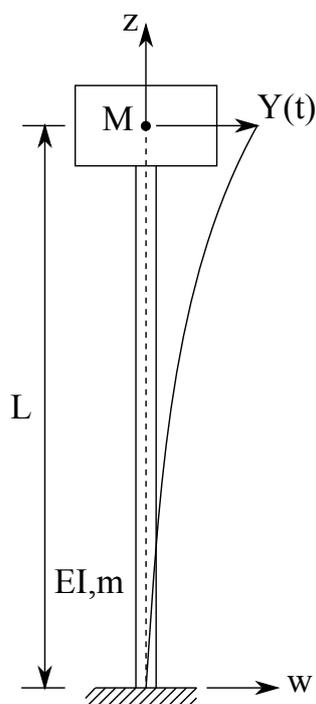


Figura 5.6 – Esquema representativo de uma turbina eólica como uma viga engastada e uma massa pontual modificada (Avila et al., 2009).

Tabela 5.4 – Parâmetros para a massa e rigidez generalizados.

M^*	34899 kg
K^*	463671 N/m

As funções de resposta em frequência apresentados na Fig.5.7 indicam que o uso do ACLS, de fato, produz um amortecimento considerável na estrutura. O amortecimento já é alcançado para a menor razão de massas, portanto é preferível essa configuração já que quanto menor a adição de massa na estrutura melhor para o sistema em geral.

O valor da massa da estrutura já considera a adição do peso do ACLS. A simulação com o ACLS mostra que é possível suprimir com eficiência a vibração da estrutura mesmo para pequenos valores para a razão de massa.

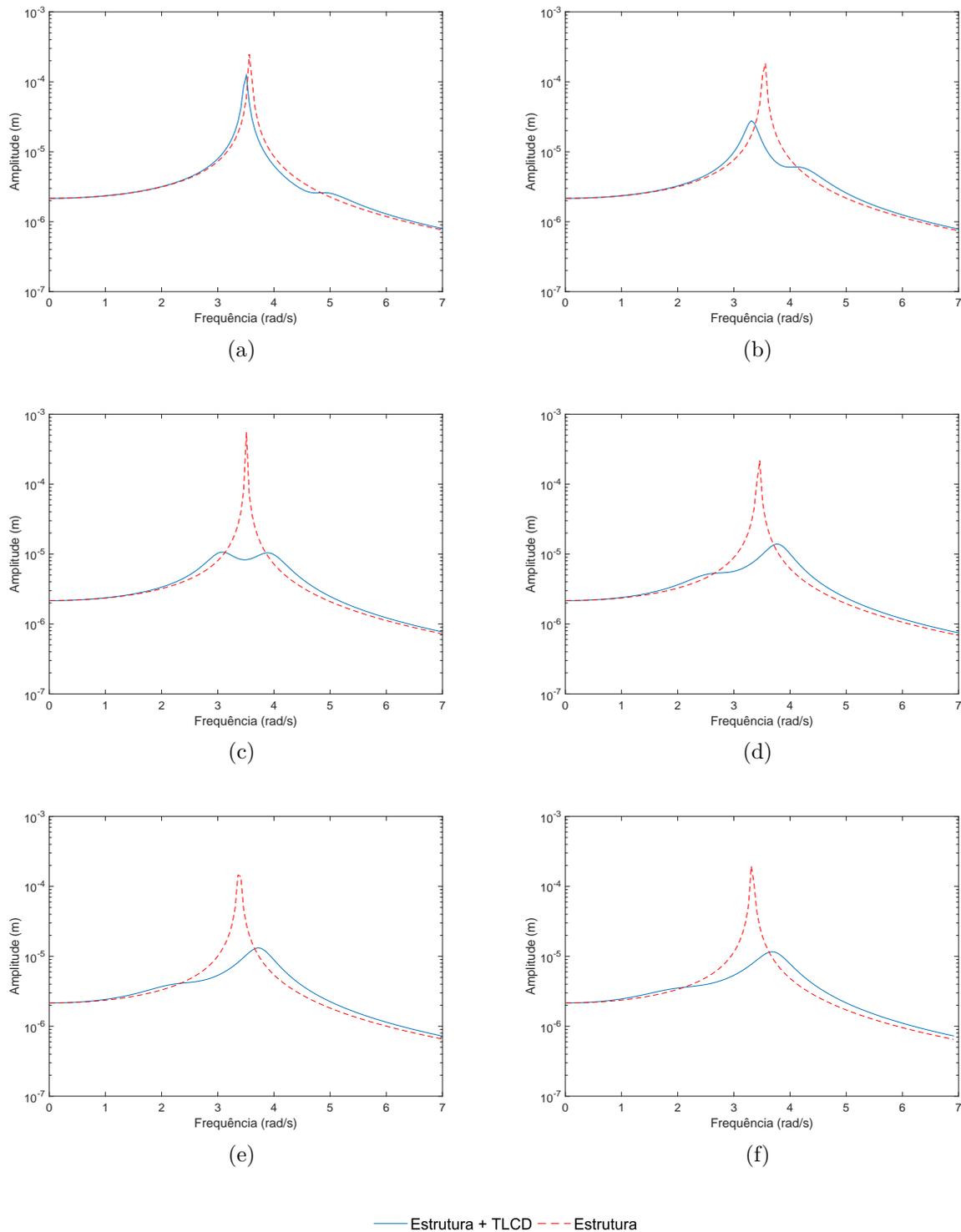


Figura 5.7 – Resposta em frequência para diferentes valores da razão de massa (a) $\mu = 0,02$, (b) $\mu = 0,03$, (c) $\mu = 0,04$, (d) $\mu = 0,06$, (e) $\mu = 0,08$ e (f) $\mu = 0,1$ utilizando valores otimizados para a razão de amortecimento.

5.5 Resposta do sistema ao Forçamento Aleatório

Uma outra forma de verificar a eficácia do modelo de amortecimento equivalente obtido via linearização estatística é realizar uma análise espectral comparando os dois métodos, a saber, a resposta transiente que utiliza o sistema não-linear e utilizando a função de transferência que utiliza o sistema linearizado (equivalente) são exemplificados no diagrama da Fig.5.8.

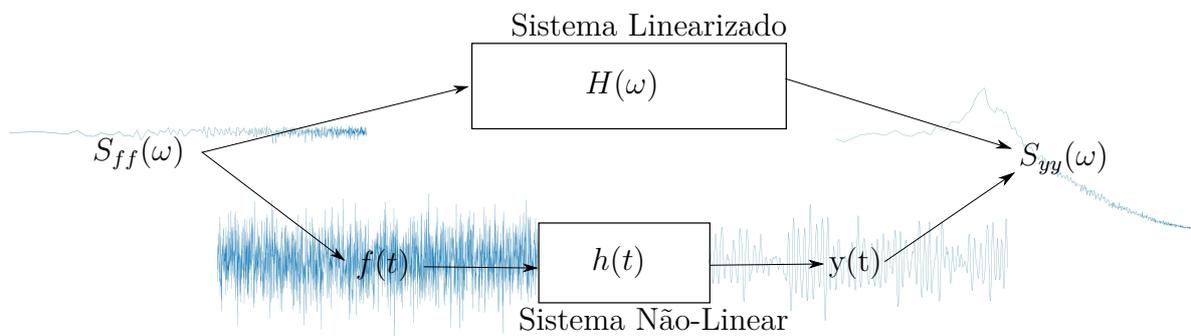


Figura 5.8 – DEP da resposta $S_{yy}(\omega)$ obtida via função de transferência para o caso linearizado e via integração numérica para o caso não-linear.

A Fig.5.8 ilustra um diagrama que partir de um modelo inicial de densidade espectral de potência (DEP) S_{ff} , existem dois caminhos a serem seguidos para a obtenção da DEP de saída S_{yy} , realizar a análise pelo sistema não-linear ou pelo sistema linearizado. A seguir, um detalhamento desses dois métodos.

Para o método da resposta transiente, o algoritmo utilizado para gerar a série temporal discreta do forçamento se inicia a partir do modelo de densidade de espectro de potência adotado S_{ff} . Em seguida, define-se um sinal discretizado f_r com passo de tempo Δt , calculado a partir da Transformada Discreta de Fourier (ITDF) inversa

$$f_r = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i(2\pi kr/N)} = ITDF(|X_k|e^{\theta_k}) \quad (5.33)$$

em que a amplitude F_k é dado por

$$|F_k| = \sqrt{S_k} \quad (5.34)$$

e a fase θ_k é um número aleatório de distribuição uniforme entre 0 e 2π , ou seja $\theta_k \sim U(0, 2\pi)$. O parâmetro S_k é a forma discretizada e aproximada da densidade espectral de potência (DEP) S_{ff} (Newland, 2012).

Em seguida resolve-se a ODE para obter a série temporal da resposta y_r . Da posse de x_r e y_r , calcula-se a TDFs que são dadas por

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad (5.35)$$

$$Y_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} y_r e^{-i(2\pi kr/N)} \quad (5.36)$$

Por meio dessas transformadas, pode-se utilizar os resultados para se obter

$$S_{ff_k} = F_k^* F_k \quad (5.37)$$

$$S_{yy_k} = Y_k^* Y_k \quad (5.38)$$

que são as séries espectrais discretas do forçamento S_{ff_k} e da resposta S_{yy_k} . O espectro real da resposta é então obtido pelo somatório

$$S_{ff} = \sum_k S_{ff_k} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (5.39)$$

$$S_{yy} = \sum_k S_{yy_k} \delta \left(\omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \quad (5.40)$$

onde T é o período e δ é a função delta de Dirac.

Em resumo, partindo-se de um modelo de espectro de excitação do vento do tipo ruído branco $S_{ff}(\omega)$ obtêm-se a excitação aleatória $f(t)$ no domínio do tempo por meio de uma operação de transformada de Fourier rápida (FFT). Em seguida, o deslocamento $y(t)$ é obtido através da equação do movimento e pelo método de resolução Runge Kutta de 4ª ordem. A DEP da resposta $S_{yy}(\omega)$ é finalmente obtida via periodograma (Newland, 2012).

O próximo método consiste em usar o amortecimento equivalente para obter a função de transferência $H(\omega)$ e partindo modelo de DEP do forçamento, utilizando a expressão $S_{yy} = |H(\omega)|^2 S_{ff}$, obter o DEP da resposta. A partir desse sistema linear encontra-se de forma direta o espectro da resposta. Nota-se que este método é muito mais simples e econômico do ponto de vista computacional.

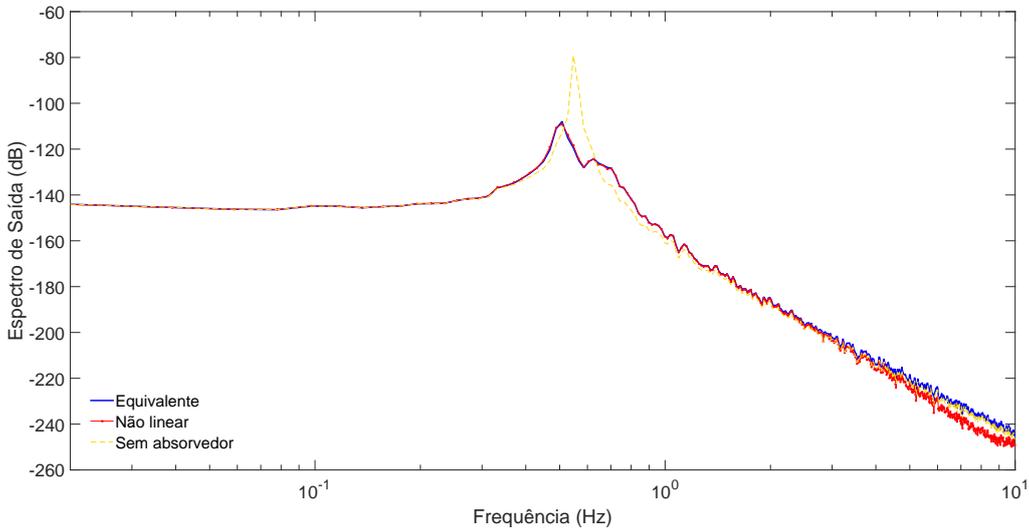


Figura 5.9 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória ruído branco sem ACLS e com ACLS obtida via linearização estatística e via integração numérica do sistema não-linear utilizando espectro do tipo Ruído branco.

Os resultados apresentados ilustram os dois métodos bem como o caso sem absorvedor. Aplica-se as mesmas condições da turbina eólica propostas na Seção 5.4 ($\omega_e = 3.6450$ e $\zeta_e = 0.0018$) utilizando como parâmetro adimensional de comprimento $\alpha = 0,9$.

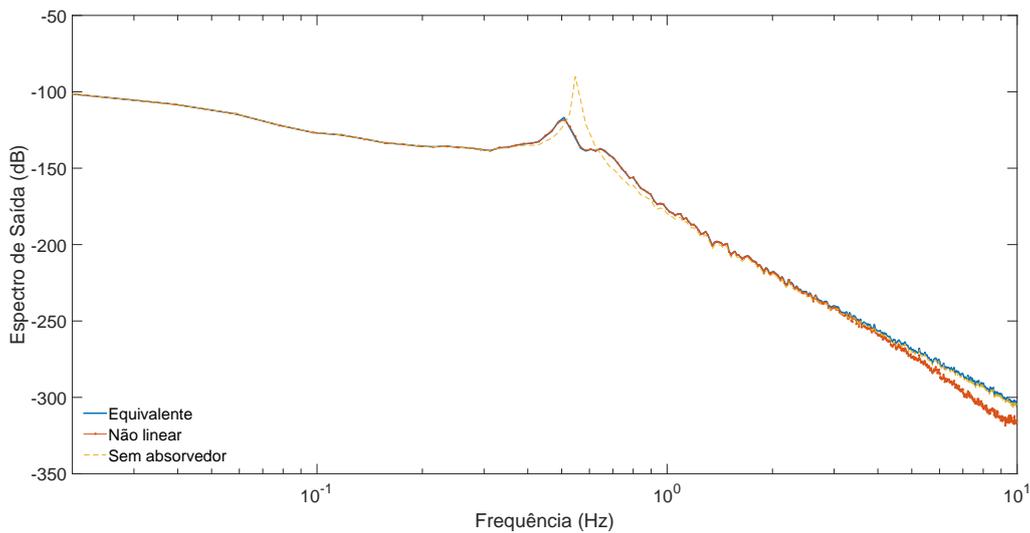


Figura 5.10 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória FOF sem ACLS e com ACLS obtida via linearização estatística e via integração numérica do sistema não-linear utilizando espectro do tipo FOF.

Pelas Fig.5.9 e Fig.5.10 se observa uma boa aproximação entres os dois métodos além de uma absorção de vibração comparando o caso sem o ACLS. Ainda, é possível notar que existe uma diferença entre os modelos equivalente e não-linear para altas frequências. Essa diferença pode ser explicada devido a aproximações numéricas e não acarretam grandes perturbações no modelo pois a região de interesse, ou seja, o pico de ressonância está fora da área em que ocorre essa anomalia.

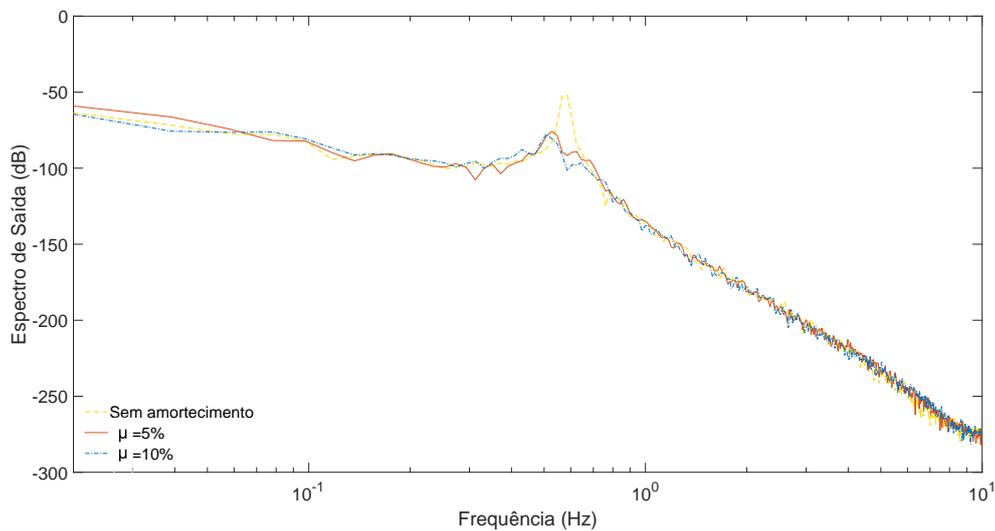


Figura 5.11 – DEP da resposta do sistema principal à excitação aleatória FOF sem ACLS e com ACLS com diferentes valores da razão de massa, $\mu = 0,05$ e $\mu = 0,1$.

A Fig.5.11 mostra a densidade espectral de potência da resposta para diferentes valores da razão de massas. É possível notar uma boa absorção de vibração comparando o caso sem o ACLS, porém não há uma diferença significativa para a variação da razão de massas estudada. Embora não sejam variações expressivas, não seria interessante fisicamente um absorvedor de massa com uma razão de massa maior que $\mu = 0,1$ por razões

lógicas, já que a massa do absorvedor seria expressiva e inviável para uma aplicação real.

As Fig.5.12 e Fig.5.13 ilustram a evolução do deslocamento da estrutura para o modelo com absorvedor e sem absorvedor quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco e do tipo FOF. Houve uma redução na média ao quadrado do deslocamento da estrutura principal quando adicionado o absorvedor de 4,5% para o caso de forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco e 11,9% para o tipo FOF.

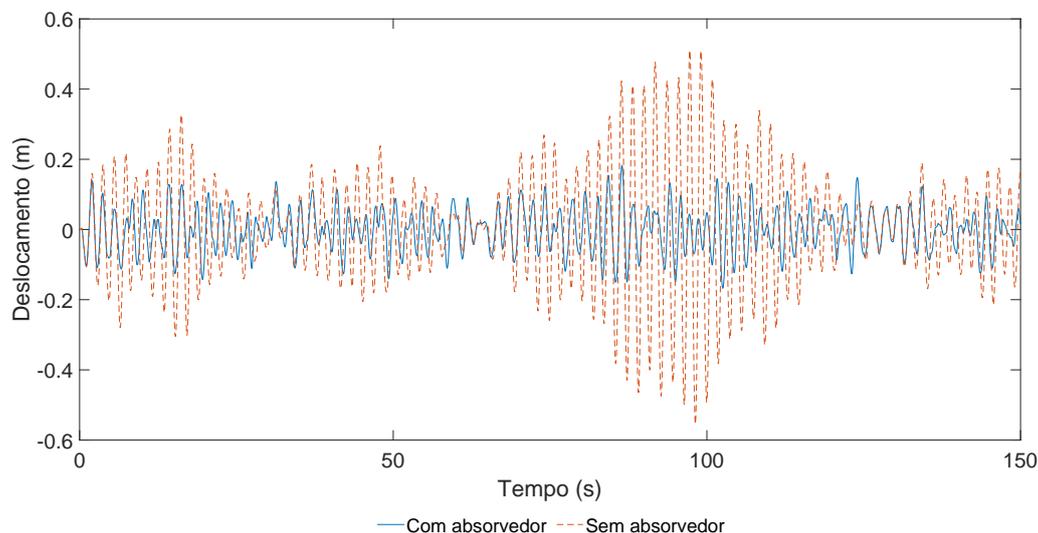


Figura 5.12 – Evolução do deslocamento da estrutura com absorvedor e sem absorvedor quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco.

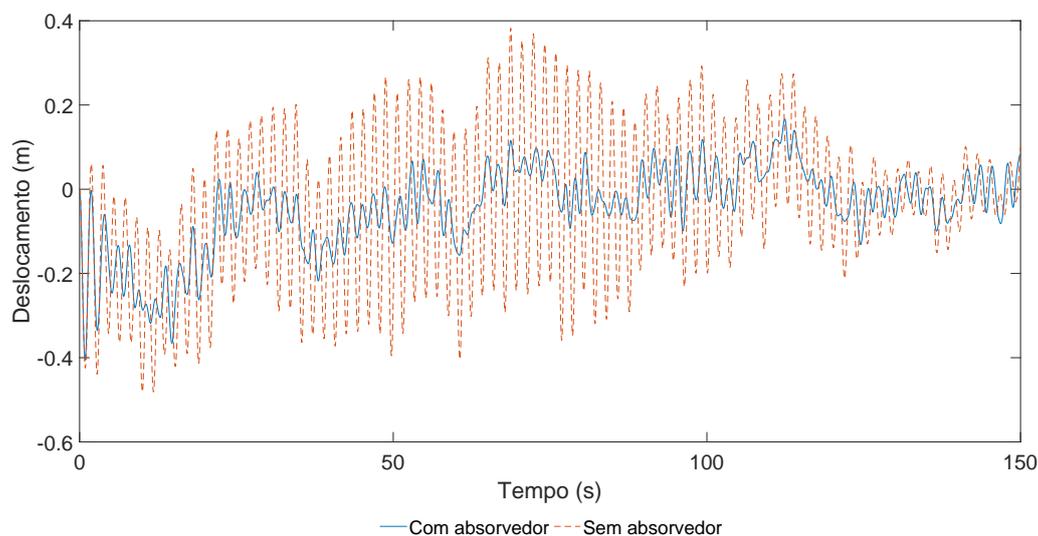


Figura 5.13 – Evolução do deslocamento da estrutura com absorvedor e sem absorvedor quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo FOF.

As Fig.5.14 e Fig.5.15 ilustram a evolução do deslocamento da estrutura para diferentes valores da razão de massas μ quando submetido a forçamento aleatório com

DEP do tipo ruído branco e do tipo FOF. Houve uma redução na média ao quadrado do deslocamento da estrutura principal quando adicionado o absorvedor de 3,46% para $\mu = 5\%$ ($\mu = 0,05$) e de 5,45% para $\mu = 10\%$ ($\mu = 0,1$) para o caso de forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco o que indica quanto maior o absorvedor, maior a redução do deslocamento da estrutura. Para o forçamento aleatório com DEP do tipo FOF o valor da diminuição do deslocamento não se alterou significativamente entres as duas razões de massas. Houve uma redução de 11,48% para $\mu = 5\%$ ($\mu = 0,05$) e de 11,49% para $\mu = 10\%$ ($\mu = 0,1$).

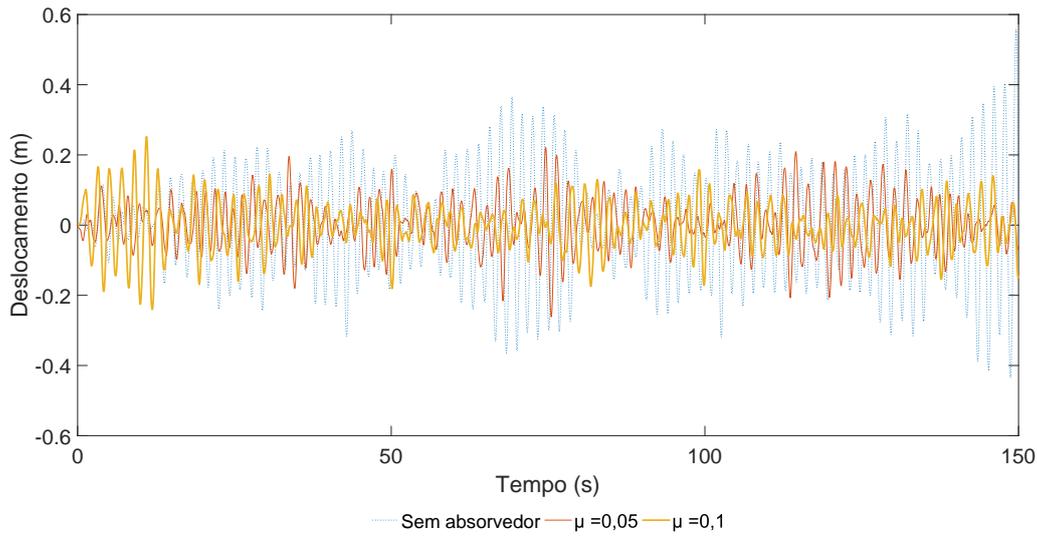


Figura 5.14 – Evolução do deslocamento da estrutura para diferentes razões de massas μ quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo ruído branco.

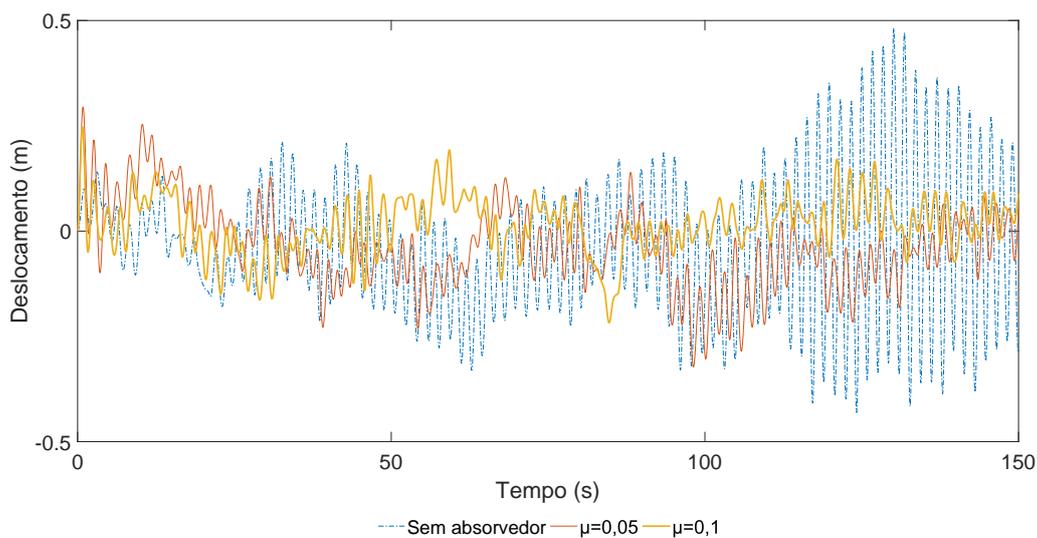


Figura 5.15 – Evolução do deslocamento da estrutura para diferentes valores da razão de massas μ quando submetido a forçamento aleatório com DEP do tipo FOF.

6 CONCLUSÃO

Essa trabalho foca nos estudos dos Absorvedores passivo de Coluna de Liquido Sintonizados (ACLSs) para aplicação em turbinas eólicas. O uso de absorvedores como forma de mitigação de vibração em turbinas eólicas tem crescido em número de pesquisa nos últimos anos e dentre os diversos tipos existentes decidiu-se por explorar os ACLS devido a diversas vantagens como, por exemplo, baixo custo.

Foi apresentado uma breve revisão bibliográfica e discussão acerca do tema controle estrutural passivo de vibração e seus diversos tipos de dispositivos estudados pela literatura bem como os avanços nas últimas décadas acerca do assunto. Conceitos teóricos básicos de vibrações mecânicas foram apresentados como vibração com um grau de liberdade, dois graus de liberdade e absorvedores de vibração. Foram discutidos tópicos de vibração aleatória dando ênfase às ferramentas estocásticas e probabilística que nos fornece conceitos essenciais como densidade espectral de potência e transformada de Fourier. Em seguida, foi apresentado o modelo matemático proposto e os métodos utilizado para contornar a não-linearidade presente no sistema. Métodos de otimização desenvolvidos pela literatura foram usados para se determinar parâmetros do sistema e por fim algumas comparações foram feitas considerando o sistema linearizado equivalente e o sistema não-linear utilizando tanto forçamento harmônico quanto forçamento aleatório.

A análise do problema consistiu em comparar o modelo não linear com o equivalente. Para isso, utilizou-se os conceitos de linearização estatística que procuram minimizar o erro dessa aproximação. Em seguida foram analisadas os métodos de solução utilizando dois tipos de forçamentos, o forçamento harmônico e o forçamento aleatório. Para o forçamento harmônico, primeiramente foram feitas comparação apenas com o ACLS e depois o sistema integrado a estrutura variando parâmetros. Para a análise com forçamento aleatório, comparam-se os sistema linear e não-linear utilizando os conceitos de densidade espectral de potência.

Os resultados apresentados para o forçamento harmônico mostram que o modelo linearizado apresenta boa precisão embora a resposta tenha se mostrado um pouco maior que o resultado para amortecimento não linear. Esse resultado é aceitável uma vez que esteja a favor da segurança. Os resultados comparativos para diferentes razões de massa apresentam uma variação significativa no grau de amortecimento em que se obteve melhor resultado para uma razão de $\mu = 0,04$.

Para a análise com forçamento aleatório primeiro se descreveu o algoritmo utilizado e os dois métodos utilizados para a comparação. Nesse caso, os resultados obtidos foram apresentados tanto utilizando ruído branco quanto espectro do tipo filtro de primeira ordem. Este último apresenta resultados mais satisfatórios já que o modelo do forçamento melhor modela as forças do vento. O comparativo foi feito considerando os sistema não-linear e linearizado e obteve-se uma boa aproximação entre os dois como observado nas Fig.5.9 e Fig.5.10. Há uma pequena variação entre os dois modelos para grandes frequência porem não afeta a região de interesse que é a próxima ao pico de ressonância. Por fim, variou-se o parâmetro razão de massas para verificar o impacto no grau de absorção de vibração. Pode-se notar que não houve uma variação expressiva do grau de absorção para os casos da razão de massas entre 5 e 10%. Por isso, o mais sensato é utilizar a menor massa possível para o ACLS já que assim, tem-se uma menor impacto no peso total da estrutura.

Como perspectivas futuras, pretende-se:

- validar os resultados utilizando uma modelo experimental;
- avaliar a robustez do modelo à incertezas nos parâmetros de projeto;
- modelar o problema para outros tipos de densidade espectral de potência que melhor represente o comportamento do vento;
- estudar outras geometria de amortecedores com liquido;

Anexos

A PROBLEMA DE OSCILAÇÃO NA MECÂNICA DOS FLUIDO

A.1 Conceito Fundamentais da Mecânica dos Fluidos

Essa seção introduz os conceitos fundamentais da análise do escoamento de fluidos. Para descrever o movimento do fluido utiliza-se o conceito de volume de controle que permite deduzir as equações da continuidade, da energia e da quantidade de movimento. A análise aqui se concentrará em escoamentos variáveis e na oscilação do tubo em “U”.

Primeiramente, é preciso definir o que é um escoamento. O escoamento pode ser classificado por diversas formas (Streeter, Wylie e Bedford, 1998). Entre elas, o escoamento pode ser laminar ou turbulento, real ou ideal, reversível ou irreversível, permanente ou variado, uniforme ou não-uniforme, rotacional ou irrotacional.

As equações que definem um sistema fluido mecânico são a equação da continuidade, da energia e da quantidade de movimento.

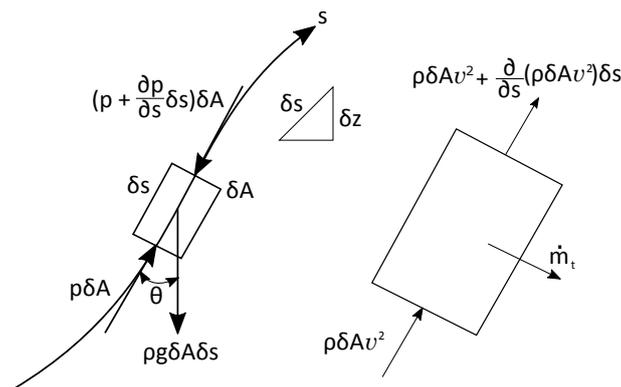


Figura A.1 – Quantidade de movimento para um escoamento na direção s através de um volume de controle.

A partir de um volume de controle ilustrado na Fig.A.1 cujo área da seção transversal é δA e comprimento δs ao longo de uma linha de corrente s . Adotando viscosidade nula, ou seja, escoamento sem atrito, as forças que agem no volume de controle são as normais na direção s e o peso. Pode-se aplicar a equação da quantidade de movimento

para o volume de controle na direção s , tem-se

$$\sum F_s = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v)\delta s\delta A + \sum_{sc} \rho v \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (\text{A.1})$$

em que ρ é a densidade do fluido \mathbf{v} é o vetor com as componentes da velocidade e v é a componente da velocidade na direção s . As forças atuantes são

$$\begin{aligned} \sum F_s &= p\delta A - \left(p\delta A + \frac{\partial p}{\partial s}\delta s\delta A \right) - \rho g\delta A\delta s \cos \theta, \\ &= \frac{\partial p}{\partial s}\delta s\delta A - \rho g\frac{\partial z}{\partial s}\delta s\delta A, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde p é a pressão, e foi usado o fato de que $\cos \theta = \partial z/\partial s$. O fluxo total da quantidade de movimento é dado por

$$\sum_{sc} \rho v \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \dot{m}_t v - \rho\delta A v^2 + \left[\rho\delta A v^2 + \frac{\partial}{\partial s}(\rho\delta A v^2)\delta s \right], \quad (\text{A.3})$$

onde \dot{m}_t representa a vazão da superfície lateral, utilizando a equação na continuidade no volume de controle da Fig.A.1, segue que

$$\dot{m}_t = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta s\delta A + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v)\delta s\delta A, \quad (\text{A.4})$$

onde se tem no primeiro termo a taxa de variação da massa no volume de controle e o segundo termo representa o fluxo através da superfície de controle. Em seguida, substitui-se a Eq.A.4 na Eq.A.3, realizando uma regra da cadeia e simplificando, obtêm-se

$$\sum_{sc} \rho v \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \left(\rho v \frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \delta s\delta A, \quad (\text{A.5})$$

substituindo Eq.A.2 e Eq.A.5 na Eq.A.1,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \frac{\partial z}{\partial s} + \rho v \frac{\partial v}{\partial s} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right) \delta s\delta A = 0, \quad (\text{A.6})$$

pode-se dividir a equação por $\rho\delta A\delta s$ e em seguida tomar o limite para δA e δs tendendo a zero, a equação se reduz a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.7})$$

A Eq.A.7 é a forma da equação da energia ao longo de uma linha de corrente para as hipóteses de escoamento sem atrito.

A.2 Oscilação de Líquido num Tubo em “U”

A análise num tubo em “U” pode ser dividida em três casos, o primeiro caso é a análise sem atrito, ou seja, o sistema é conservativo. A segunda análise considera o caso em que haja resistência laminar, em que se inclui na equação da energia um termo de tensão

de cisalhamento que age na parede do tubo e se opem ao movimento da coluna líquida. Por fim, a análise para o caso de resistência turbulenta que representa um caso real. Em todos os casos se considera a hipótese de que o fluido é incompressível e a resistência num escoamento em regime variável seja igual à resistência num escoamento em regime permanente.

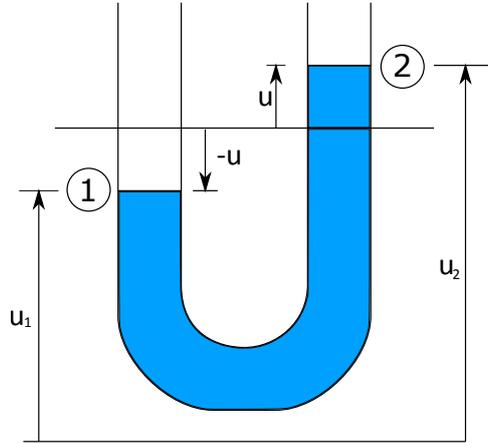


Figura A.2 – Esquema de um tubo em forma de U com fluido oscilando.

Uma primeira análise simplificado considerando o líquido sem atrito é feita. Para esse caso, a equação da energia Eq.A.7 pode ser aplicada. Considerando as seções 1 e 2 do tubo da Fig.A.2 e integrando a equação da energia, tem-se

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(u_2 - u_1) + v_2^2 - v_1^2 + \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0, \quad (\text{A.8})$$

mas $p_1 = p_2$ e $v_1 = v_2$ além do fato de que $v(t)$ ser função apenas do tempo, resulta em

$$g(u_2 - u_1) = -L \frac{dv}{dt}, \quad (\text{A.9})$$

onde L é o comprimento da coluna líquida. Por motivos de conveniência, muda-se o plano de referência de cotas para a posição de equilíbrio dos meniscos, ou seja, $g(u_2 - u_1) = 2gu$. Podemos reescrever a equação,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{2g}{L} u. \quad (\text{A.10})$$

A solução do tipo $u = C_1 e^{t\sqrt{L/2g}}$ pode ser prontamente verificada derivando-se duas vezes e substituindo na equação diferencial Eq.A.10. Chega-se a forma final da solução,

$$u(t) = u \cos \sqrt{\frac{2g}{L}} t, \quad (\text{A.11})$$

nota-se que a solução tem características harmônicas simples com período de oscilação $2\pi\sqrt{L/2g}$. A velocidade da coluna pode ser obtida por derivação de u em relação a t .

Para o caso em que se considera a resistência laminar e turbulenta, uma tensão de cisalhamento τ_0 surge na parede do tubo e se opem ao movimento da coluna líquida.

Esse termo pode ser incluído na equação da energia Eq.A.7 ao longo de uma linha de corrente. Considerando a Fig.A.2, a resistência no comprimento δs é $\tau_0 \pi D \delta s$, onde D é o diâmetro do tubo. Seguindo o procedimento da seção A.1, dividi-se a resistência pela massa da partícula. Portanto a nova equação da energia para escoamento laminar é dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0. \quad (\text{A.12})$$

A expressão usada para a tensão de cisalhamento τ_0 vem da equação de Poiseuille que trata da equação que governa o movimento de um fluido dentro de um tubo. Ela leva em consideração a viscosidade, embora ela realmente só é válida para escoamento não-turbulento (escoamento laminar). Da equação de Poiseuille, a tensão de cisalhamento é dada por,

$$\tau_0 = \frac{8\mu v}{D},$$

realizando a integração da Eq.A.12 e utilizando a expressão para τ_0 , resulta em

$$g(u_2 - u_1) + L \frac{dv}{dt} + \frac{32\nu v L}{D^2} = 0, \quad (\text{A.13})$$

em que $\nu = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática. Realizando a mudança de variável $g(u_2 - u_1) = 2gu$, a mudança de derivadas totais e a substituição de $v = du/dt$ segue que

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{32\nu}{D^2} \frac{du}{dt} + \frac{2g}{L} u = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para os casos turbulentos em que esta presente na maioria dos casos práticos, a resistência ao escoamento tem caráter turbulento. Para o caso estudado, adota-se a hipótese de que a resistência ao movimento é proporcional ao quadrado da velocidade, ou seja o fator de atrito, f , é constante (Streeter, Wylie e Bedford, 1998). Essa hipótese se aproxima ao comportamento verdadeiro, embora no caso de movimentos muito lentos o valor da resistência se torna desprezível. Portanto, o valor da tensão de cisalhamento para o caso turbulento é dado por,

$$\tau_0 = f \frac{\rho v^2}{8}, \quad (\text{A.15})$$

substituindo Eq.A.15 na Eq.A.7,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{f\rho A v^2}{2} = 0, \quad (\text{A.16})$$

em que A é a área da seção transversal do tubo. Integrando a equação entre as seções 1 e 2, de acordo com a Fig.A.1, segue que

$$g(u_2 - u_1) + L \frac{dv}{dt} + L \frac{f\rho A v^2}{2} = 0, \quad (\text{A.17})$$

realizando a substituição de coordenada análogo a análise laminar, e dividindo a equação pelo comprimento do tubo L , tem se

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{2}f\rho A \frac{du}{dt} \left| \frac{du}{dt} \right| + \frac{2g}{L}u = 0, \quad (\text{A.18})$$

em que o valor absoluto da velocidade é necessário para que a resistência se oponha à velocidade, quer esta seja positiva ou negativa. Repare que a equação diferencial é não linear devido ao termo que contém o quadrado da velocidade. Uma forma de simplificar a análise turbulenta é utilizar um termo equivalente de amortecimento.

Amortecimentos linear possuem geralmente modelo matemático mais simples (Craig e Kurdila, 2006), pelo fato da força atuante ser diretamente proporcional à velocidade. Mesmo quando o amortecimento no sistema é muito mais complexo que o caso linear, é possível reter a simplicidade do modelo linear introduzindo um amortecimento equivalente.

O principal efeito de um amortecedor é remover energia do sistema. O conceito do amortecedor equivalente se baseia na equivalência da energia removida pelo amortecedor seja ele viscoso ou não, linear ou não.

Considere um volume de controle com velocidade moderada em um fluido sofrendo uma força de resistência. Sabe-se por meio experimental que essa força de resistência é proporcional ao quadrado da velocidade. Assim, a força de amortecimento f_d atuando no sistema é dada por $f_d = \pm c\dot{u}^2$ em que c é a constante de amortecimento. Portanto, considerando o movimento harmônico, o deslocamento pode ser expresso por $u = u_0 \cos(\omega t)$ e o trabalho realizado por essa força em um ciclo é obtido

$$W_d = \int_{-u_0}^{u_0} (-2c\dot{u}^2)du = -\left(\frac{8}{3}\right)c\omega^2u_0^2, \quad (\text{A.19})$$

ou seja, a energia dissipada em um ciclo devido ao amortecimento viscoso é $-(8/3)c\omega^2u_0^2$. Assim, a energia dissipada por cada ciclo devido ao amortecimento viscoso linear é proporcional à constante de amortecimento, ao quadrado da frequência de excitação e ao quadrado da amplitude. Portanto, uma constante de amortecimento equivalente pode ser expressa por,

$$c_{eq} = -\frac{W_d}{\pi\omega u_0^2} = \left(\frac{8}{3\pi}\right)c\omega u_0, \quad (\text{A.20})$$

em que W_d é a energia dissipada pelo amortecimento não-viscoso.

Na análise de resposta em frequência em que se deseja analisar o comportamento da amplitude do deslocamento ao longo da frequência, o amortecimento equivalente ainda carrega um termo da amplitude o que o torna impossível de resolver analiticamente. Métodos iterativos na análise da dinâmica não linear, como o método da perturbação podem ser usados (Savi, 2006). Neste trabalho, optou-se por seguir um outro caminho de análise.

A.3 Sobre a Natureza do Fator de Fricção

Osborne Reynolds foi um cientista e matemático britânico que primeiro distinguiu um fluido entre laminar e turbulento. Para isso, Reynolds utilizou um simples aparato que injeta tinta em um tubo escoando água. Ele observou que para pequenas velocidades de escoamento o rastro de tinta se mantinha bem definido ao longo do tubo. Já para o caso de altas velocidades, o rastro de tinta rapidamente se dispersava ao longo do tubo de modo aleatório. Esses dois casos caracterizados são denominados de escoamento laminar e turbulento. Uma forma de quantificar o que é um escoamento lento e rápido se faz necessária, para isso, utiliza-se o parâmetro adimensional número de Reynolds, R_e — a razão entre os efeitos de inércia e viscosos no fluido. Assim, quando se quer determinar a característica de um fluido, se leva em conta os parâmetros que compõem o número de Reynold, a saber, a velocidade média do fluido v , o diâmetro do tubo d , a densidade do fluido ρ e sua viscosidade μ , $R_e = \rho v d / \mu$.

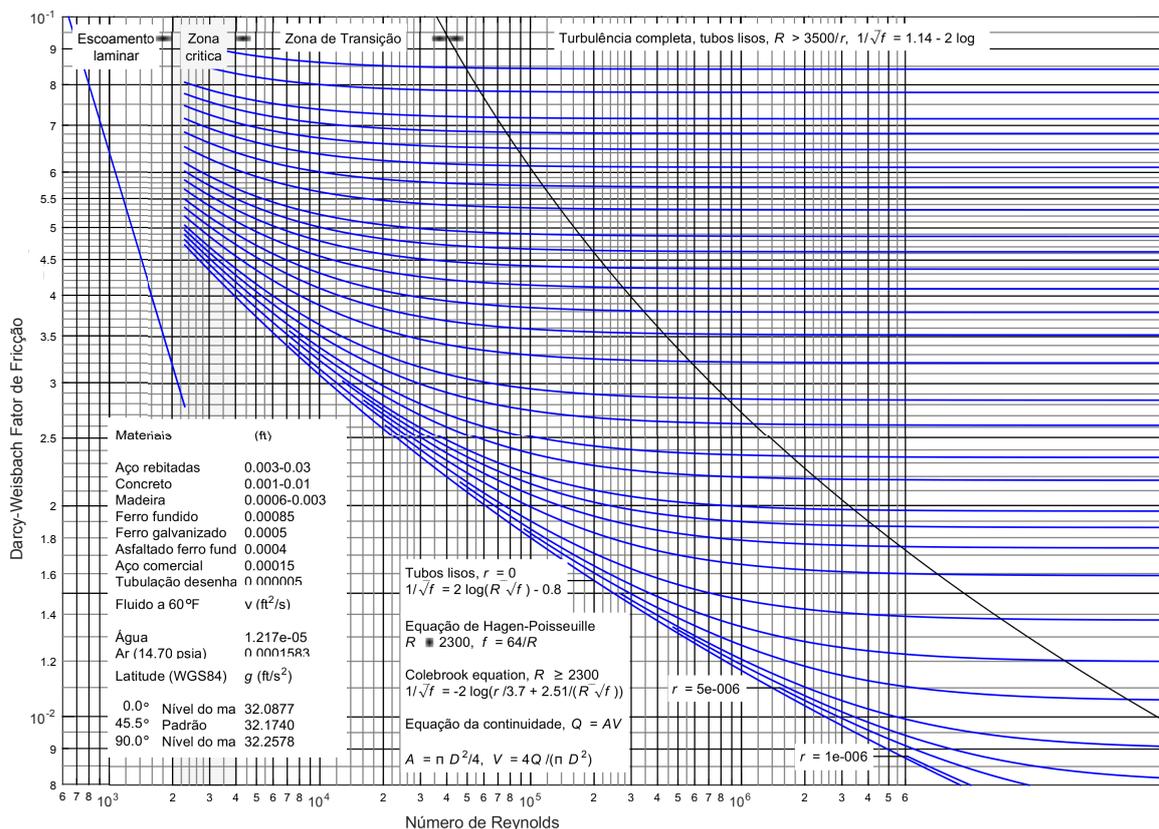


Figura A.3 – Diagrama de moody mostrando o fator de fricção de Darcy-Weisbach plotado contra o número de Reynolds para várias rugosidades modificadas (DAVIS, 2005).

O cálculo do número de Reynolds possui pouca precisão, fatores como vibração do tubo e rugosidade influenciam o comportamento do fluido e por isso não se sabe ao certo

o ponto de transição exato de um fluido laminar para turbulento. Existe uma região de transição que possui tanto natureza laminar como turbulento.

O modelos de escoamento turbulento ainda não foi completamente desenvolvido, uma série de aproximações é feita para previsões a cerca da randomização do fluido, sua não linearidade e comportamento caótico.

Na análise adimensional de escoamento turbulentos em tubos, surgem termos referentes as perdas . Dentre eles, O fator de fricção depende do número de Reynolds e da rugosidade relativa, $f = \phi(R_e, \epsilon/d)$. O valor de f ainda não possui solução exata. Dados experimentais são utilizados para se construir curvas que nos fornecem valores aproximados.

O uso da análise adimensional é importante pois o valor das variáveis variam de acordo com o tipo de material utilizando e a geometria, a forma adimensional é uma maneira de normatizar os parâmetros para que se crie um padrão de análise que pode ser usado e entendido posteriormente.

A.4 Perdas no Escoamento Através do Orifício

A função do orifício no tubo estudado é criar perdas no fluido. O orifício faz com que o fluido sofre uma contração ao longo de uma pequena distância a jusante da abertura o que provoca a criação de vorticidade nas bordas do orifício. Pelo fato do fluido por sua natureza não ser capaz de fazer uma curva em ângulo reto, cria-se uma componente radial da velocidade que reduz a área do jato. O ponto em que a contração da seção transversal é maior é chamado de veia contraída. As perdas de carga no escoamento associado é determinado pela aplicação da equação da energia considerando o termo de perda.

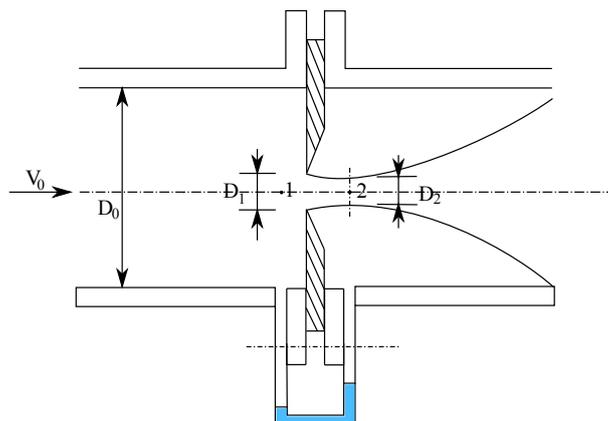


Figura A.4 – Orifício num tubo.

Considere um orifício delgado instalado num tubo como na FIG.A.4 . O orifício provoca a contração do jato a jusante da abertura do orifício. Para um escoamento de fluido incompressível, a equação da energia, aplicada entre a seção 1 do jato e a seção 2

da veia contraída, é

$$\frac{V_{1t}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - \left(\frac{V_{2t}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_L, \quad (\text{A.21})$$

em que V_{1t} e V_{2t} são as velocidades teórica nos pontos 1 e 2, γ é o peso específico do fluido e p_1 e p_2 são as pressões estáticas na seção transversal considerada. h_L é a perda de carga do escoamento. No modelo experimental, o orifício será feito por uma válvula que pode alterar o tamanho da abertura e assim obter diferentes valores de perda de carga.

As perdas de carga do TLCD pode ser representada pela função $f_{\text{fricção}} + f_{\text{orifício}}$ em que o termo $f_{\text{fricção}}$ é referente as perdas devido a fricção entre o fluido e a parede do tubo, ou seja, o valor das perdas é função do comprimento do tubo. O termo $f_{\text{orifício}}$ refere-se as perdas devido ao orifício e são mais difíceis de ser computadas analiticamente. Uma maneira de simplificar a análise das perdas devido ao orifício é definir um comprimento equivalente de maneira semelhante ao fator de fricção. De modo geral, defini-se um termo único de fator de fricção que engloba ambas as perdas e é função do comprimento do tubo adicionado a um comprimento equivalente, ou seja, $f_{\text{turbulento}}(L + L_{eq})$ e por motivos de simplicidade daqui em diante a variável será escrita apenas por ξ , ou seja,

$$\xi = f_{\text{fricção}} + f_{\text{orifício}} = f_{\text{turbulento}}(L + L_{eq}). \quad (\text{A.22})$$

B SOLUÇÃO DE INTEGRAL EM VIBRAÇÃO ALEATÓRIA

Quando se calcula a resposta estatística de um sistema oscilatório excitado aleatoriamente por um espectro de potencia é necessário calcular a integral na forma (Roberts e Spanos, 2003)

$$I_m = \int \frac{\Xi_m(\omega)d\omega}{\Lambda_m(-i\omega)\Lambda_m(i\omega)}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\Xi_m(\omega) = \xi_{m-1}\omega^{2m-2} + \xi_{m-2}\omega^{2m-4} + \dots + \xi_0, \quad (\text{B.2})$$

$$\Lambda_m(i\omega) = \lambda_m(i\omega)^m + \lambda_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \dots + \lambda_0, \quad (\text{B.3})$$

e ξ_r , λ_r são constantes arbitrárias. Este apêndice apresenta o método de determinar I_m em sua forma fechada. Esse método é derivado indiretamente considerando certas propriedades do espectro estacionário de saída de um sistema linear variante no tempo para um ruído branco de entrada.

B.1 Equação Para as Funções de Correlação e Correlação Cruzada

Considere a resposta de um sistema linear de ordem m para um ruído branco de entrada descrito pela equação

$$[\lambda_m D^m + \lambda_{m-1} D^{m-1} + \lambda_{m-2} D^{m-2} + \dots + \lambda_0]x(t) = w(t), \quad (\text{B.4})$$

na Eq.(B.4), D^r ($r = 0, 1, \dots, m$) denota o operador da r -ésima ordem de diferenciação, λ_r ($r = 0, 1, \dots, m$) são constantes que não variam no tempo, e $w(t)$ representa um ruído branco com função de correlação

$$R_w(\tau) \equiv E\{w(t)w(t + \tau)\} = 2\pi\delta(\tau), \quad (\text{B.5})$$

onde $\delta(\tau)$ denota a função delta de Dirac. Assumindo que o critério de Routh-Hurwicz é satisfeito e a equação característica correspondente a Eq.(B.4) tem raízes com partes

rais negativas, ou seja, a parte homogênea da Eq.(B.4) é estável. Dessa forma, pode-se assumir que $x(t)$ eventualmente se tornará um processo estacionário com função de correlação $R_x(\tau)$ e função de densidade espectral $S_x(\omega)$. A forma da função $S_x(\omega)$ pode ser descrita pela equação

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{\Lambda_m(-i\omega)\Lambda_m(i\omega)}. \quad (\text{B.6})$$

Denota-se por $R_{xw}(\tau)$ a correlação cruzada das funções $x(t)$ e $w(t)$. Assim, duas equações diferenciais ordinária da relação entre $R_x(\tau)$, $R_{xw}(\tau)$ e a defasagem no tempo τ podem ser derivadas. Para isso, as seguintes relações podem ser usadas

$$E\{x(t)D^r x(t - \tau)\} = (-1)^r D^2 R_x(\tau), \quad (\text{B.7})$$

$$E\{w(t - \tau)D^r x(t)\} = D^2 R_{xw}(\tau). \quad (\text{B.8})$$

Essas formulas podem ser provada considerando a definição de diferenciação de um processo estocástico. Realizando uma mudança de variável na Eq.(B.4) de t por $t - \tau$ e multiplicando por $x(t)$ e realizando a média, resulta

$$[\hat{\lambda}_m D^m + \hat{\lambda}_{m-1} D^{m-1} + \hat{\lambda}_{m-2} D^{m-2} + \dots + \hat{\lambda}_0] R_x(\tau) = R_{xw}(\tau) \quad \tau \geq 0, \quad (\text{B.9})$$

onde $\hat{\lambda}_r = (-1)^r \lambda_r$. De forma similar, multiplicando a Eq.(B.4) por $w(t - \tau)$ e realizando a média (esperança), resulta

$$[\lambda_m D^m + \lambda_{m-1} D^{m-1} + \lambda_{m-2} D^{m-2} + \dots + \lambda_0] R_{xw}(\tau) = \pi \hat{\delta}(\tau) \quad \tau \geq 0, \quad (\text{B.10})$$

onde $\hat{\delta}(\tau)$ é a função delta de Dirac considerando apenas um lado. A Eq.(B.9) pode ser derivada r vezes ($0 \leq r \leq m - 1$) para se obter

$$[\hat{\lambda}_m D^{m+r} + \hat{\lambda}_{m-1} D^{m+r-1} + \dots + \hat{\lambda}_0 D^r] R_x(\tau) = D^r R_{xw}(\tau) \quad \tau \geq 0, \quad (\text{B.11})$$

As condições iniciais de $R_{xw}(\tau)$ estão determinadas para $\tau = 0$. Considere agora a função resposta por impulso, $h(t)$ do sistema linear descrito pela Eq.(B.4). Assim, a resposta estacionária de saída pode ser expressa como

$$x(t) = \int_0^t h(t-u)w(u)du, \quad (\text{B.12})$$

onde u é uma variável qualquer. Multiplicando Eq.(B.12) por $w(t - \tau)$ e realizando a média resulta em

$$R_{xw}(\tau) = \int_0^\infty h(t)w(t-\tau)dt \quad \tau \geq 0, \quad (\text{B.13})$$

nota-se que $R_{xw}(\tau)$ não é uma função ímpar de τ , fato que $R_{xw}(\tau) = 0$ para $\tau \leq 0$. Além disso, a Eq.(B.13) pode ser generalizada na forma

$$D^r R_{xw}(\tau) = \int_0^\infty D^r h(t)w(t-\tau)dt \quad r = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (\text{B.14})$$

O resultado da Eq.(B.14) em conjunto com o da Eq.(B.8) podem ser usados para determinar a correlação cruzada entre $w(t - \tau)$ e qualquer derivativa da resposta de saída do sistema. Para um caso de defasagem zero, usando as propriedades de $h(t)$, obtêm-se

$$D^r R_{xw}(0) = 0 \quad r = 0, 1, \dots, m - 2 \quad (\text{B.15})$$

$$D^{m-1} R_{xw}(0) = \frac{\pi}{\lambda_m}. \quad (\text{B.16})$$

B.2 Momento Espectral do Sistema

Com as Eq.(B.11), Eq.(B.15) e Eq.(B.16) é possível derivar a formula do momento espectral de saída do sistema. Define-se momento espectral

$$M_{2r} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2r} S_{xx}(\omega) d\omega, \quad (\text{B.17})$$

onde $S_x(\omega)$ é dado pela Eq.(B.6). Note que $S_x(\omega)$ relaciona-se com $R_x(\tau)$ pela equação

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) S_x(\omega) d\omega, \quad (\text{B.18})$$

assim, diferenciando Eq.(B.18) $2m - 1$ vezes e considerando a definição de momento espectral, resulta

$$M_{2r-1} = 0 \quad 0 \leq r \leq m, \quad (\text{B.19})$$

$$M_{2r} = (-1)^r D^{2r} R_x(0) \quad 0 \leq r \leq m - 1. \quad (\text{B.20})$$

Como é possível notar, M_r , $r \geq 2m$ é ilimitado. Substituindo os resultados das Eq.(B.19) e Eq.(B.20) na Eq.(B.11) e fazendo $r = m - 1, m - 2, \dots, 0$ obtêm-se

$$\lambda_{m-1} M_{2m-2} - \lambda_{m-3} M_{2m-4} + \lambda_{m-5} M_{2m-6} - \dots = \frac{\pi}{\lambda_m} \quad (\text{B.21})$$

$$-\lambda_m M_{2m-2} + \lambda_{m-3} M_{2m-4} - \lambda_{m-5} M_{2m-6} - \dots = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$0 - \lambda_{m-1} M_{2m-4} + \lambda_{m-3} M_{2m-6} - \dots = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$\dots \quad \dots = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$\dots \quad -\lambda_2 M_2 + \lambda_0 M_0 = 0. \quad (\text{B.25})$$

Como pode ser observado, o momento espectral M_{2r} , $r = 0, \dots, m - 1$ satisfaz m equações algébricas lineares. Assim, elas podem ser determinados utilizando as formula clássica de Cramer. Por exemplo, o momento M_{2r} pode ser obtido trocando a $(m - r)$ -ésima

coluna do determinante dos coeficientes pelo lado direito da Eq.(B.25), daí

$$M_{2r} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_{m-1} & -\lambda_{m-3} & \lambda_{m-5} & -\lambda_{m-7} & \dots & \pi/\lambda_m & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda_m & \lambda_{m-2} & -\lambda_{m-4} & \lambda_{m-6} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda_{m-1} & \lambda_{m-3} & -\lambda_{m-5} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_m & -\lambda_{m-2} & \lambda_{m-4} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & \cdot & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{m-1} & -\lambda_{m-3} & \lambda_{m-5} & -\lambda_{m-7} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda_m & \lambda_{m-2} & -\lambda_{m-4} & \lambda_{m-6} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda_{m-1} & \lambda_{m-3} & -\lambda_{m-5} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_m & -\lambda_{m-2} & \lambda_{m-4} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}. \quad (\text{B.26})$$

Examinando as Eq.(B.1) até a Eq.(B.3) e Eq.(B.17) , é possível expressar a formula para I_m

$$I_m = \xi_{m-1}M_{2m-2} + \xi_{m-2}M_{2m-4} + \dots + \xi_0 \quad (\text{B.27})$$

substituindo na Eq.(B.27) os valores de M_{2r} obtidos na Eq.(B.26), realizando algumas manipulações, obtêm-se

$$I_m = \frac{\pi}{\lambda_m} \frac{\begin{vmatrix} \xi_{m-1} & \xi_{m-2} & \dots & \dots & \dots & \xi_0 \\ -\lambda_m & \lambda_{m-2} & -\lambda_{m-4} & \lambda_{m-6} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda_{m-1} & \lambda_{m-3} & -\lambda_{m-5} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_m & -\lambda_{m-2} & \lambda_{m-4} & \dots & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & \cdot & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_{m-1} & -\lambda_{m-3} & \lambda_{m-5} & -\lambda_{m-7} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda_m & \lambda_{m-2} & -\lambda_{m-4} & \lambda_{m-6} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -\lambda_{m-1} & \lambda_{m-3} & -\lambda_{m-5} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \lambda_m & -\lambda_{m-2} & \lambda_{m-4} & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}. \quad (\text{B.28})$$

B.3 Exemplo: Sistema com dois graus de liberdade

Considerando um sistema com dois graus de liberdade como na Fig.(B.1) onde os símbolos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são o deslocamento horizontal das massas m_1 e m_2 respectivamente. Os símbolos k_1 , k_2 , c_1 e c_2 são a rigidez e o amortecimento do primeiro e segundo grau de

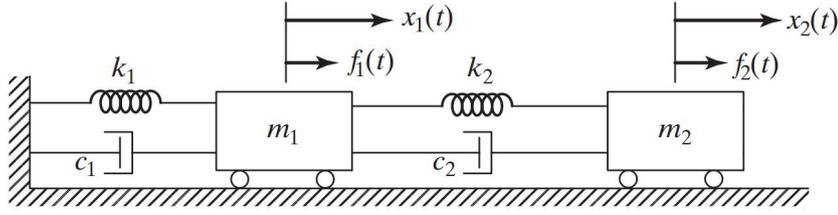


Figura B.1 – Modelo massa, mola, amortecedor do sistema com dois graus de liberdade (Rao e Yap, 1995).

liberdade respectivamente. Deseja-se encontrar a expressão que define o desvio padrão de $x_1(t)$

Nesse problema existem dois parâmetros de entrada, $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e dois de saída $x_1(t)$ e $x_2(t)$, assim, a função de transferência, $\mathbf{H}(\omega)$ é uma matriz 2x2 e seu valor pode ser obtido pela expressão

$$\mathbf{H}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1}, \quad (\text{B.29})$$

em que \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} são as matrizes massa, amortecimento e rigidez do sistema. Se a densidade espectral de potencial de entrada, $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ do processo é especificada, a densidade espectral de potencial de saída, $\mathbf{S}_{xx}(\omega)$ pode ser obtida através do resultado da Eq.4.31. Para o caso particular de excitação com ruído branco e considerando $f_1(t) = 0$, então $f_2(t)$ pode ser modelado como sendo ruído branco, de forma que

$$\mathbf{S}_{ff}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

onde S_0 é uma constante. Aplicando a Eq.4.31 resulta

$$S_{x_1x_1} = S_0 |H_{12}(\omega)|, \quad (\text{B.31})$$

onde, pode ser facilmente mostrado que $H_{12}(\omega)$ é dado por

$$H_{12}(\omega) = \frac{k_2 + i\omega c_2}{\Delta}, \quad (\text{B.32})$$

onde Δ é o determinante da matriz $\mathbf{H}(\omega)$ dado por

$$\Delta = \sum_{r=0}^4 A_r (i\omega)^r, \quad (\text{B.33})$$

onde A_r são constantes que podem ser expressas em termos dos parâmetros do sistema, assim,

$$A_0 = k_1 k_2, \quad (\text{B.34})$$

$$A_1 = c_1 k_2 + c_2 k_1, \quad (\text{B.35})$$

$$A_2 = m_2(k_1 + k_2) + c_2(c_1 + c_2) - m_1 k_2 + c_2^2, \quad (\text{B.36})$$

$$A_3 = m_1 c_1 + m_2(c_1 + c_2), \quad (\text{B.37})$$

$$A_4 = m_1 m_2. \quad (\text{B.38})$$

Para calcular o desvio padrão, σ_{x_1} de $x_1(t)$, utiliza-se

$$\sigma_{x_1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_1}(\omega) d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_{12}(\omega)|^2. \quad (\text{B.39})$$

Esta equação possui a mesma forma apresentada na Eq.(B.1) e portanto pode-se utilizar os resultados obtidos. Reescrevendo a Eq.(B.39) na forma $\sigma_{x_1}^2 = S_0 I_4$, onde pela Eq.B.26, tem-se

$$I_4 = \frac{\pi}{\lambda_4} \frac{\begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_4 & \lambda_2 & -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -\lambda_2 & \lambda_0 \end{vmatrix}}, \quad (\text{B.40})$$

nesse caso, comparando a equação da resposta em frequência com as Eq.(B.2) e Eq.(B.3), tem-se

$$\xi_1 = k_2^2 \quad \xi_2 = c_2^2 \quad \xi_3 = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$\lambda_r = A_r, \quad r = 0, 1, \dots, 4 \quad (\text{B.42})$$

Referências

- AGENCY, I. E. *Technology Roadmap: Wind Energy*. [S.l.]: International Energy Agency, OECD, 2013. Citado 2 vezes nas páginas vii e 4.
- ALTAY, O. et al. Vibration mitigation of wind turbine towers by tuned liquid column dampers. In: *Proceedings of the IX international conference on structural dynamics, Porto, Portugal*. [S.l.: s.n.], 2014. v. 12. Citado 3 vezes nas páginas vii, 4 e 15.
- AMARANTE, O. A. et al. Atlas do potencial eólico brasileiro. In: *Atlas do potencial eólico brasileiro*. [S.l.]: Ministerio de Minas e Energia/Eletronorte, 2001. Citado 2 vezes nas páginas vii e 3.
- ANEEL. *Banco de Informações de Geraçã*. 2015. <<http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/capacidadebrasil.cfm>>. [Online; accessed 28-junho-2015]. Citado 2 vezes nas páginas vii e 2.
- AVILA, S. M. et al. Vibration control of the set tower and wind turbine under the wind influence. In: *20th international congress of mechanical engineering COBEM*. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas viii, 54 e 55.
- CHANG, C.; QU, W. Unified dynamic absorber design formulas for wind-induced vibration control of tall buildings. *The structural design of tall buildings*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 7, n. 2, p. 147–166, 1998. Citado na página 16.
- COLWELL, S.; BASU, B. Tuned liquid column dampers in offshore wind turbines for structural control. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 31, n. 2, p. 358–368, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- CONSTANTINOU, M. C.; SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. *Passive energy dissipation systems for structural design and retrofit*. [S.l.]: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research Buffalo, New York, 1998. Citado 4 vezes nas páginas vii, 8, 9 e 10.
- CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006. Citado na página 69.
- DAVIS, T. *Moody Diagram*. 2005. <<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/7747-moody-diagram>>. [Online; accessed 25-maio-2015]. Citado 2 vezes nas páginas ix e 70.
- ENEVOLDSEN, I.; MØRK, K. Effects of a vibration mass damper in a wind turbine tower*. *Journal of Structural Mechanics*, Taylor & Francis, v. 24, n. 2, p. 155–187, 1996. Citado na página 16.
- FARSHIDIANFAR, A. Tuned liquid column dampers with period adjustment equipment for earthquake vibrations of high-rise structures. In: *6th National Congress on Civil Engineering, 6NCCE*. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 17.

- FRAHM, H. *Device for damping vibrations of bodies*. [S.l.]: Google Patents, 1911. US Patent 989,958. Citado na página 11.
- GUIMARAES, P. V. et al. Vibration control of an offshore wind turbine modeled as an inverted pendulum. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- HARTOG, J. P. D. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: Courier Corporation, 1985. Citado 4 vezes nas páginas 8, 11, 16 e 47.
- HASKETT, T. et al. Tuned-mass damper under excessive structural excitation. *Report of the Motioneering Inc., Guelph, Ontario, Canada*, 2004. Citado 2 vezes nas páginas vii e 9.
- KAASEN, K. E. et al. Time domain model representations of standard wind gust spectra. In: INTERNATIONAL SOCIETY OF OFFSHORE AND POLAR ENGINEERS. *The Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference*. [S.l.], 1999. Citado na página 40.
- LACKNER, M. A.; ROTEVA, M. A. Structural control of floating wind turbines. *Mechatronics*, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 704–719, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- LI, J.; ZHANG, Z.; CHEN, J. Experimental study on vibration control of offshore wind turbines using a ball vibration absorber. *Energy and Power Engineering*, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 03, p. 153, 2012. Citado na página 17.
- LIMA, D. V. F. Controle de vibrações induzidas em uma laje de academia de ginástica com a utilização de amortecedores de massa sintonizados (ams). 2009. Citado na página 17.
- MCNAMARA, R. J. Tuned mass dampers for buildings. *Journal of the structural Division*, ASCE, v. 103, n. 9, p. 1785–1798, 1977. Citado na página 16.
- MEIROVITCH, L.; PARKER, R. Fundamentals of vibrations. *Applied Mechanics Reviews*, v. 54, p. 100, 2001. Citado na página 22.
- MIN, K.-W.; KIM, J.; LEE, H.-R. A design procedure of two-way liquid dampers for attenuation of wind-induced responses of tall buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Elsevier, v. 129, p. 22–30, 2014. Citado na página 13.
- NEWLAND, D. E. *An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado 8 vezes nas páginas viii, 27, 30, 31, 35, 36, 57 e 58.
- RAO, S. S.; YAP, F. F. *Mechanical vibrations*. [S.l.]: Addison-Wesley New York, 1995. v. 4. Citado 8 vezes nas páginas vii, ix, 19, 21, 23, 24, 25 e 77.
- ROBERTS, J. B.; SPANOS, P. D. *Random vibration and statistical linearization*. [S.l.]: Courier Corporation, 2003. Citado 7 vezes nas páginas viii, 36, 40, 41, 42, 45 e 73.
- SAKAI, F.; TAKAEDA, S.; TAMAKI, T. Tuned liquid column dampers (tlcd) for cable-stayed bridges. In: *Proc. Specialty Conf. Innovation in Cable-Stayed Bridges*. [S.l.: s.n.], 1991. p. 197–205. Citado na página 16.
- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. [S.l.]: Editora E-papers, 2006. Citado na página 69.

- SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. *Passive energy dissipation systems in structural engineering*. [S.l.]: Wiley, 1997. Citado 5 vezes nas páginas vii, 10, 11, 12 e 13.
- STEWART, G. M. Load reduction of floating wind turbines using tuned mass dampers. 2012. Citado 3 vezes nas páginas vii, 11 e 15.
- STREETER, V. L.; WYLIE, E. B.; BEDFORD, K. W. *Fluid mechanics, WCB*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 68.
- TAMURA, Y. et al. Wind-induced responses of an airport tower—efficiency of tuned liquid damper. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, Elsevier, v. 65, n. 1, p. 121–131, 1996. Citado 2 vezes nas páginas vii e 13.
- THRÁINSSON, H.; KIREMIDJIAN, A. S.; WINTERSTEIN, S. R. *Modeling of earthquake ground motion in the frequency domain*. [S.l.]: John A. Blume Earthquake Engineering Center, 2000. Citado na página 40.
- VALENCIA, L. *Controle de vibrações em distintas configurações de vigas metálicas utilizando amortecedores de massa sintonizados. 2007*. Tese (Doutorado) — Dissertação de mestrado—Universidade de Brasília, Brasília, 2007. Citado na página 17.
- XU, J.; COASTAL, W. *CMGTool user's manual*. [S.l.]: US Geological Survey, 2002. Citado 2 vezes nas páginas viii e 28.
- XU, Y.; SAMALI, B.; KWOK, K. Control of along-wind response of structures by mass and liquid dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 118, n. 1, p. 20–39, 1992. Citado na página 16.
- YALLA, S. K.; KAREEM, A. Optimum absorber parameters for tuned liquid column dampers. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 8, p. 906–915, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 16, 43, 46 e 47.
- ZULUAGA, A. *Controle de vibrações em edifícios submetidos a ação de cargas dinâmicas utilizando amortecedor de massa sintonizado na forma de pêndulo*. Tese (Doutorado) — Master thesis, Civil Engineering Department, University of Brasília, 2007. Citado na página 17.