



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESTUDO DE CONTATO ELASTO-PLÁSTICO
ENTRE FIOS DE CABOS DE LINHAS DE
TRANSMISSÃO**

Por,
Eduardo Luis Souza de Athayde Nunes Filho

Brasília, 24 de Junho de 2014

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESTUDO DE CONTATO ELASTO-PLÁSTICO
ENTRE FIOS DE CABOS DE LINHAS DE
TRANSMISSÃO**

POR,

Eduardo Luis Souza de Athayde Nunes Filho

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Edgar Mamiya, UnB/ ENM (Orientador)

Prof. Fábio Comes de Castro, UnB/ ENM

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM

Brasília, 24 de Julho de 2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família pelo apoio incondicional durante minha vida, pela compreensão, paciência e amor. Agradeço, também, meu pai Eduardo pelo conselhos dados e apoio nas decisões tomadas durante o percurso caminhado. Minha mãe Virgínia pela dedicação e suporte durante os tempos difíceis que enfrentei. E finalmente ao meu irmão Pedro pela amizade e noites viradas nos momentos de estudo.

Agradeço meus futuros sogros, Vandick e Celeste, pelo suporte dado em todas as vezes que precisei. Minha namorada Mariana pelo carinho, amizade e apoio ao longo dos últimos dez anos de namoro.

Agradeço a todos os colegas de curso ao qual tive o privilégio de compartilhar a experiência de estudo na Universidade de Brasília, aonde sempre será guardado os aprendizados durante o caminho da graduação. Gostaria de lembrar de todos os professores que compartilharam seus conhecimentos e ensinamentos para me tornar um futuro engenheiro mecânico.

E finalmente, gostaria de agradecer ao Prof. Edgar Mamiya pela ajuda, paciência e conselhos dados durante a jornada deste projeto de graduação, que com certeza ajudou me ajudou bastante nestes últimos semestres de curso.

Eduardo Luis Souza de Athayde Nunes Filho

RESUMO

O presente relatório apresenta o estudo de contato de Hertz entre cilindros simulando o contato de fios, de caso sobre atrito estático e de plasticidade. A teoria presente aqui será posta à prova com a análise de elementos finitos com o Abaqus CAE para os tópicos estudados. O caso de contato será dividido em contato bidimensional e tridimensional elástico, sendo este último com cilindros com eixos paralelos e rotacionados por ângulos de 30° e 90° em relações ao seus eixos. Será, ainda, apresentado a simulação de obtenção da curva de plasticidade do Al 7075-T651 bem como a aplicação do contato elasto-plástico para o contato entre fios rotacionados por 30°.

ABSTRACT

This report presents the study of Hertz' contact between cylinders simulating the contact of wires under influences of static friction and plasticity. The theory here presented will be tested using the finite element analysis with Abaqus CAE to the topics studied. The case of contact will be divided into two-dimensional and three-dimensional elastic contact situations, the latter with cylinders arranged according its parallel axes and being rotated by angles of 30 ° and 90 ° in relationship to their axes. The simulation of the plasticity curve of Al 7075-T651 is also presented and the application of elastic-plastic contact between wires rotated by 30 °.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2 OBJETIVOS	2
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	2
2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	3
2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	3
2.1.1 EQUILÍBRIO	4
2.1.2 COMPORTAMENTO ELÁSTICO	5
2.1.3 FORMA FORTE DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO	6
2.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL	6
2.2.1 EQUAÇÃO VARIACIONAL	6
2.2.2 FORMA FRACA DO PROBLEMA	8
2.3 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA	8
2.4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	10
2.5 ELEMENTOS P1	10
3 EMBASAMENTO TEÓRICO	13
3.1 CONTATO UNILATERAL ENTRE CORPOS ELÁSTICOS	13
3.1.1 ATRITO DE COULOMB	15
3.2 CONTATO DE HERTZ	15
3.2.1 GEOMETRIA DO PROBLEMA	16
3.2.2 HIPÓTESES DE HERTZ	17
3.2.3 EQUAÇÕES DO CONTATO DE HERTZ	17
3.2.3 CONTATO BIDIMENSIONAL ENTRE CILINDROS COM EIXOS PARALELOS	18
3.3 PLASTICIDADE	21
3.3.1 CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO	24
3.3.1.1 RELAÇÃO EXPONENCIAL DE PLASTICIDADE	24
3.3.1.2 RELAÇÃO DE RAMBERG-OSGOOD	24
3.3.2 DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DA DEFORMAÇÃO	26
3.3.3 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO	26
3.3.4 DOMÍNIO ELÁSTICO	27
3.3.5 LEIS DE EVOLUÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO	27
3.3.4.5 CONDIÇÃO DE COMPLEMENTARIDADE	28
3.3.4.6 CONDIÇÃO DE PERSISTÊNCIA	28
4 O ABAQUS	29
4.1 JANELA INICIAL DO ABAQUS	29
4.2 MÓDULO DE ENTRADA	29
4.2.1 PART	31
4.2.2 PROPERTY	31
4.2.3 ASSEMBLY	34
4.2.4 STEP	35
4.2.5 INTERACTION	39
4.2.6 Load	43
4.2.7 Mesh	44
4.2.8 JOB	48
4.2.9 VISUALIZATION	48
5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	50
5.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CONTATO DE HERTZ ELÁSTICO	50
5.1.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	50
5.1.2 MODELAGEM DO PROBLEMA	51
5.1.3 RESULTADOS	66
5.1.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	81
5.2 VALIDAÇÃO DA CURVA DE PLASTICIDADE DO Al 7075-T651	82
5.2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	82
5.2.2 MODELAGEM DO PROBLEMA	82
5.2.3 RESULTADOS	87
5.2.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	88
5.3 CONTATO ELASTO-PLÁSTICO ENTRE CILINDROS ROTACIONADOS POR 30°	89
5.3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	89
5.3.3 RESULTADOS	89
5.3.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	94
5.3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ATRITO	95

5.3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	95
5.3.2	MODELAGEM DO PROBLEMA.....	96
5.3.3	RESULTADOS.....	99
5.3.4	CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS	106
6	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	107
	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	108
	ANEXOS.....	109

LISTA DE FIGURAS

- 2.1 Sólido Ω submetido a forças de campo, de contato e deslocamentos prescritos.....
- 2.2 Elementos de volume e os esforços atuantes sobre o mesmo, no contexto unidimensional.
- 2.3 Elemento de volume e os esforços atuantes sobre o mesmo, no contexto tridimensional.
- 2.4 Partição do domínio Ω em elementos finitos Ω_e
- 2.5 Função $N_i(x, y)$

- 3.1 Representação cinemática de movimento entre dois corpos quaisquer.
- 3.2 Representação gráfica das condições de complementariedade de Kuhn-Tucker.
- 3.3 Movimento relativo entre corpos em contato.
- 3.4 Contato entre as superfícies de dois corpos.
- 3.5 Deslocamento dos pontos internos na região de contato
- 3.6 Dois cilindros pressionados por duas cargas distribuídas
- 3.7 Representação bidimensional do contato entre cilindros
- 3.8 Soluções analíticas das tensões
- 3.9 Comportamento elasto-plástico ideal.
- 3.10 Comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico.
- 3.11 Comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático.
- 3.12 Curva de tensão-deformação Al 7075-T651 (Dowling, 2007).

- 4.1 Janela de início do Abaqus CAE.
- 4.2 Criação de novas partes.
- 4.3 Caixa de ferramentas do módulo *Property*.
- 4.4 Tipo de material analisado.
- 4.5 Material mecânico com comportamento elástico.
- 4.6 Seção a ser criada para o corpo a ser analisado.
- 4.7 Material e espessura para a seção criada.
- 4.8 Caixa de ferramenta módulo *Assembly*.
- 4.9 Janela para determinar o tipo de instancia inserido
- 4.10 Caixa de ferramentas do módulo *Step*
- 4.11 Janela para criar um Step
- 4.12 Aba básica de edição do *Step*
- 4.13 Aba referente ao incremento do Step
- 4.14 Aba *Other* da edição do Step
- 4.15 Criação dos dados a serem extraídos para determinado Step
- 4.16 Campo de resultados requeridos pelo usuário
- 4.17 Barra de ferramentas do módulo de *Interaction*
- 4.18 Janela de edição de interação entre superfícies
- 4.19 Plano tangente local para *Small-Sliding* com discretização *Node-to-Surface*
- 4.20 Barra de ferramentas utilizadas no módulo *Load*
- 4.21 Janela para definição do carregamento
- 4.22 Janela para a criação das condições de contorno
- 4.23 Barra de ferramenta do módulo *Mesh*
- 4.24 Janela para discretização de toda parte
- 4.25 Distância h do elemento L a superfície curva
- 4.26 Janela para discretização de bordas específicas da parte
- 4.27 Elementos *Quad*
- 4.28 Elementos *Quad-Dominated*
- 4.29 Elementos *Tri*
- 4.30 Janela para escolha dos tipos de elementos
- 4.31 Barra de ferramentas do módulo *Job*
- 4.32 Comando de *Path* para obtenção de dados

- 5.1 Contato 2D entre cilindros comprimidos por um deslocamento uniforme d
- 5.2 Cilindro particionado e suas dimensões
- 5.3 Representação do problema 2D via Abaqus
- 5.4 Malha estrutura gerada sobre os cilindros
- 5.5 Representação da posição dos deslocamentos sobre os diâmetros dos cilindros
- 5.6 Condições de contorno para o submodelo
- 5.7 Malha estruturada para o submodelo
- 5.8 Condições de contorno aplicadas ao caso 3D
- 5.9 Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D
- 5.10 Condições de contorno aplicadas aos cilindros 3D rotacionados por 30°
- 5.11 Sistema de eixo coordenado auxiliar (vermelho) em relação ao eixo principal (amarelo) vista superior
- 5.12 Sistema de eixo coordenado auxiliar (vermelho) em relação ao eixo principal (amarelo) vista lateral
- 5.13 Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D rotacionado por 30° .
- 5.14 Condições de contorno aplicadas aos cilindros 3D rotacionado por 90°
- 5.15 Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D rotacionado por 90°
- 5.16 Gráfico da força distribuída sobre o diâmetro do cilindro
- 5.17 Gráfico de comparação entre a pressão na região de contato analítica e os valores numéricos para 60 e 120 elementos na região de contato
- 5.18 Gráfico das tensões de Hertz para o caso 2D com 120 elementos em contato
- 5.19 Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 2D
- 5.20 Tensão de Mises no submodelo do contato 2D
- 5.21 Gráfico de comparação entre pressão de contato analítica e numérica na região de contato para o caso 3D com 1200 elementos em contato
- 5.22 Gráfico das tensões de Hertz caso 3D
- 5.23 Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D
- 5.24 Tensão de Mises no submodelo do contato 3D
- 5.25 Gráfico das tensões de Hertz caso 3D rotacionado por 30°
- 5.26 Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D rotacionado por 30°
- 5.27 Gráfico de pressão para cilindros rotacionados por 90° .
- 5.28 Gráfico das tensões de Hertz caso 3D rotacionado por 90°
- 5.29 Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D rotacionado por 90°
- 5.30 Tensão de Mises no submodelo do contato 3D rotacionado por 90°
- 5.31 Corpo de prova com dimensões especificadas em mm
- 5.32 Curva de plasticidade do Al 7075-T651
- 5.33 Malha aplicada ao corpo de prova analisado
- 5.34 Aplicação das condições de contorno ao problema
- 5.35 Deformação plástica sobre o corpo de prova após o carregamento
- 5.36 Comparação entre os valores obtidos de tensão-deformação
- 5.37 Tensão de Mises no momento de carregamento máximo dos cilindros rotacionados por 30°
- 5.38 Tensão de Mises residual sobre os cilindros rotacionados por 30°
- 5.39 Pressão de contato máximo sobre o cilindro rotacionados por 30°
- 5.40 Curva de plasticidade para contato 3D entre fios rotacionado por 30° do Al 7075-T651.
- 5.41 Curva de deformação versus pressão no nó com pressão máxima para cilindros rotacionados por 30° do Al 7075-T651.
- 5.42 Bloco apoiado em repouso com cargas distribuídas F e f .
- 5.43 Representação do problema em relação ao eixo de simetria
- 5.44 Representação do problema via Abaqus
- 5.45 Representação da posição das cargas e condições de contorno do bloco e superfície de contato
- 5.46 Malha gerada pelo Abaqus
- 5.47 Comparação entre a força normal nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$

- 5.48 Comparação entre a força tangencial nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$
- 5.49 Comparação entre o deslocamento em relação ao eixo x dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$.
- 5.50 Comparação entre o deslocamento em relação ao eixo y dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$
- 5.51 Comparação entre a força normal nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$
- 5.52 Comparação entre a força tangencial nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$
- 5.53 Comparação entre o deslocamento em relação ao eixo x dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$

LISTA DE TABELAS

- 4.1 – Erros associados ao método de discretização na pressão de contato
- 5.1 – Dados para contato entre cilindros
- 5.2 – Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 2D
- 5.3 - Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 3D
- 5.4 – Número de elementos na região de contato e o valor da pressão numérica para o caso 3D rotacionado por 30°
- 5.5 - Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 3D rotacionado por 90°.
- 5.6 – Dados do material analisado
- 5.7 – Dados para curva de deformação plástica para o Abaqus
- 5.8 – Problema de atrito para $\mu = 1$
- 5.9 – Problema de atrito para $\mu = 0,2$
- 5.10 – Resultados do Abaqus para $\mu = 1$
- 5.11 – Resultados do Abaqus para $\mu = 0,2$
- 5.12 – Resultados de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 1$
- 5.13 – Resultados de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 0,2$

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

a,b,c	Coeficientes	
a	Dimensão da área de contato	[mm]
\mathbf{b}	Vetor força de campo	
d	Distância inicial entre os corpos 1 e 2	
F_N	Força normal de contato	[N]
F_t	Força tangencial de contato	[N]
E	Módulo de elasticidade	[N/mm ²]
E^*	Módulo de elasticidade equivalente	[N/mm ²]
$f(\cdot)$	Função deformação	
f	Carga distribuída	[daN/mm ²]
F	Carga distribuída	[daN/mm ²]
h	Função	
R	Raio relativo dos cilindros	[mm]
R_1, R_2	Raio do cilindro	[mm]
\mathbf{N}	Vetor normal as superfícies	
P	Força atuante nos cilindros	[N]
$p(x)$	Pressão na área de contato	[N/mm ²]
p_0	Pressão máxima na área de contato	[N/mm ²]
\mathcal{S}	Conjunto de soluções testes	
\mathbf{u}	Vetor deslocamento	
\mathcal{V}	Conjunto de funções de ponderação	
x,y,z	Coordenadas cartesianas	

Símbolos Gregos

Γ_h	Parcela do contorno submetida às forças de contato	
Γ_u	Parcela do contorno submetido ao deslocamento	
$\partial\Omega$	Contorno do sólido Ω	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor deformação	
λ, μ	Constantes de Lamé	
ν	Coeficiente de Poisson	
ν_1, ν_2	Coeficiente de Poisson dos cilindros	
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensões	[MPa]
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor tensão	
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Tensões de cisalhamento	[MPa]
Ω	Corpo sólido	

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Diversos problemas físicos envolvem contato entre superfícies. O efeito deste contato precisa ser investigado em detalhe pelos engenheiros, pois pode ser local de elevada concentração de tensão sendo, portanto, crítico em um projeto de engenharia. Na mecânica, o contato é importante em diversos componentes de máquinas como em transmissões de movimentos por engrenagens, em parafusos de fixação, na fabricação de peças, em sistemas de freios, entre outros.

Um problema que vem sendo estudado intensamente pelo Grupo de Fadiga, Fratura e Materiais da Universidade de Brasília é o da fadiga em cabos condutores de energia conforme as teses da Profa. Aida Fadel e do Prof. Antônio Manoel. A perda da integridade por fadiga em tais cabos está fortemente associado ao fenômeno de “fretting”, observado (i) na região de contato entre o cabo condutor e o grampo de sustentação e (ii) entre fios do cabo condutor, também na vizinhança do grampo de sustentação. O “fretting”, por sua vez, envolve fenômenos de contato, atrito e desgaste, entre outros, que devem ser quantificados na análise do dano à fadiga. No presente contexto, o foco da atenção será dirigido ao contato de Hertz para aplicação no contato de fios de cabos condutores de energia.

Os problemas envolvendo contato podem ser estudados analiticamente, numericamente ou experimentalmente. Infelizmente, nem sempre o uso de soluções analíticas pode ser utilizado, pois muitos problemas, na prática, são demasiadamente complexos para serem modelados matematicamente por meio do uso de equações diferenciais, gerando a necessidade da utilização de aproximações. Isto já justifica o emprego de métodos numéricos, pois com o crescente avanço tecnológico, já se é capaz de descrever problemas complexos com o uso de computadores com um baixo custo e rapidez. Por fim, o uso de método experimental é usado para verificar na prática os resultados obtidos pelas aproximações numéricas, mas estão quase sempre associados a custos elevados.

Dentre os métodos numéricos mais utilizados para análise de problemas mecânicos, destaca-se o Método dos Elementos Finitos, que é um dos diversos métodos numéricos utilizados para obter a solução de problemas de valor de contorno. O método, baseado em um princípio variacional e em uma metodologia de escolha conveniente e automatizável de funções aproximadoras, pode ser aplicado a praticamente todos os setores das engenharias e constitui-se na base teórica de diversos aplicativos comerciais, entre os quais o Abaqus, o ANSYS e o Nastran. O crescente avanço tecnológico reduziu significativamente o tempo de análise de problemas complexos, permitindo-se para tanto o uso de computadores pessoais. No presente estudo, considera-se como ferramenta computacional para a análise dos problemas de contato com atrito o Abaqus. Este aplicativo é desenvolvido e mantido pela Dassault Systèmes e faz parte de um conjunto de produtos da SIMULIA.

1.2 OBJETIVOS

O presente estudo tem como objetivo o estudo de problemas de contato de Hertz via método dos elementos finitos. Em particular, será desenvolvido um estudo versando sobre o contato entre fios de cabos condutores de energia elétrica.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A presente monografia está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2, apresenta-se um resumo teórico do Método dos Elementos Finitos. O Capítulo 3 é dedicado às formulações dos problemas de Contato Unilateral, Atrito Seco e Plasticidade. O Capítulo 4 apresenta uma introdução à interface gráfica do aplicativo Abaqus, enquanto o Capítulo 5 apresenta algumas simulações computacionais acadêmicas dos problemas de contato unilateral, sem atrito e com atrito, sendo que o contato sem atrito será, ainda, realizado no caso de material elástico e elasto-plástico para cilindros com eixos paralelos e com rotação de 30 e 90 graus.

2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Este capítulo apresenta aspectos introdutórios do Método dos Elementos Finitos aplicado a problemas de equilíbrio de sólidos elásticos.

O método, desenvolvido a partir da década de 1960, é baseado em:

- i. Definição do problema de interesse;
- ii. Descrição do problema na forma de um princípio variacional;
- iii. Uma estratégia de discretização da formulação variacional.

2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

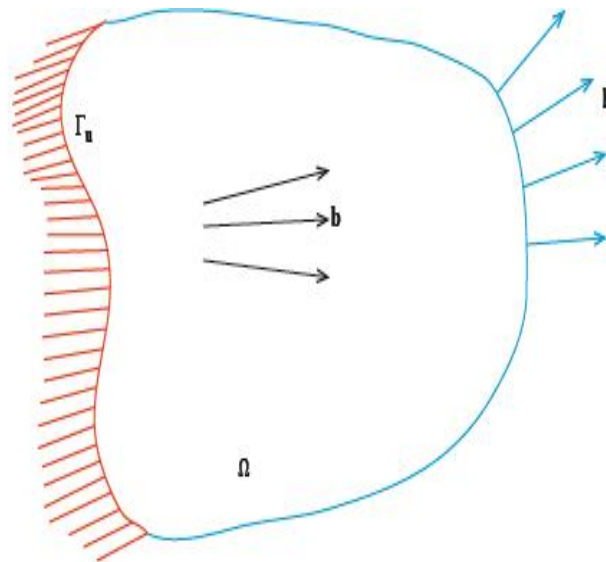


Figura 2.1. Sólido Ω submetido a forças de campo, de contato e deslocamentos prescritos.

Seja um sólido Ω submetido a forças de campo $\mathbf{b}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, forças de contato $\mathbf{h}: \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde Γ_h é a parcela do contorno de Ω submetido as forças de contato. Sejam os deslocamentos $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ do sólido analisado submetido a valores prescritos $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre a parcela Γ_u do contorno de Ω .

Observe que $\Gamma_h \cup \Gamma_u = \partial\Omega$, $\Gamma_h \cap \Gamma_u = \emptyset$, isto é, o contorno $\partial\Omega$ do sólido Ω está submetido a forças de contato ou a deslocamentos prescritos. Além disso, nenhum ponto do contorno de Ω pode estar submetido simultaneamente a forças de contato e a deslocamentos prescritos.

O problema de interesse no presente estudo é definido no contexto dos corpos elásticos em equilíbrio. Neste sentido, os conceitos de equilíbrio e de comportamento elástico do material necessitam ser formalizados.

2.1.1 EQUILÍBRIO

Inicialmente, introduz-se a equação de equilíbrio no contexto unidimensional. Neste sentido, considera-se o elemento de volume submetido ao tensor σ_x e força de campo b_x conforme ilustrado na Fig. 2.2.

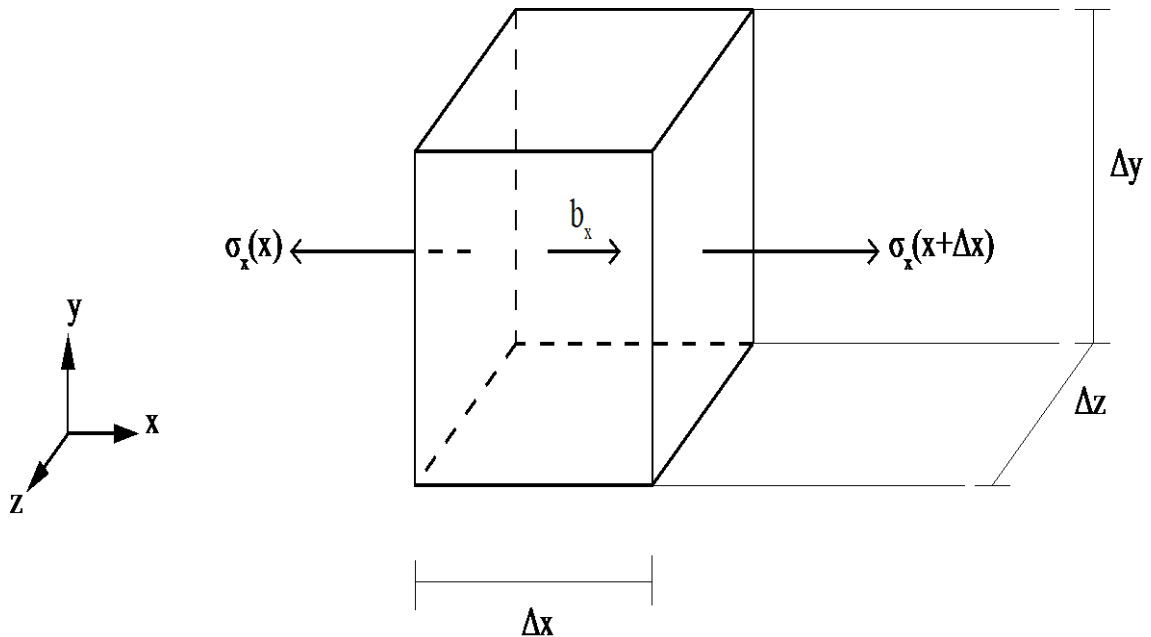


Figura 2.2 – Elemento de volume e os esforços atuantes sobre o mesmo, no contexto unidimensional.

A aplicação da condição de equilíbrio de forças sobre o elemento de volume fornece:

$$-\sigma_x(x)\Delta y\Delta z + b_x(x + \xi\Delta x)\Delta x\Delta y\Delta z + \sigma_x(x + \Delta x)\Delta y\Delta z = 0 \quad (2.1)$$

Dividindo a equação (2.1) por $\Delta x\Delta y\Delta z$, tem-se:

$$\frac{\sigma_x(x + \Delta x) - \sigma_x(x)}{\Delta x} + b_x(x + \xi\Delta x) = 0 \quad (2.2)$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, chega-se à equação diferencial de equilíbrio:

$$\frac{d\sigma_x(x)}{dx} + b_x(x) = 0, x \in \Omega$$

No caso tridimensional, o procedimento para obtenção das equações de equilíbrio é análogo, impondo-se a condição de equilíbrio do elemento ilustrado na Fig. 2.3 em cada uma das direções x, y e z.

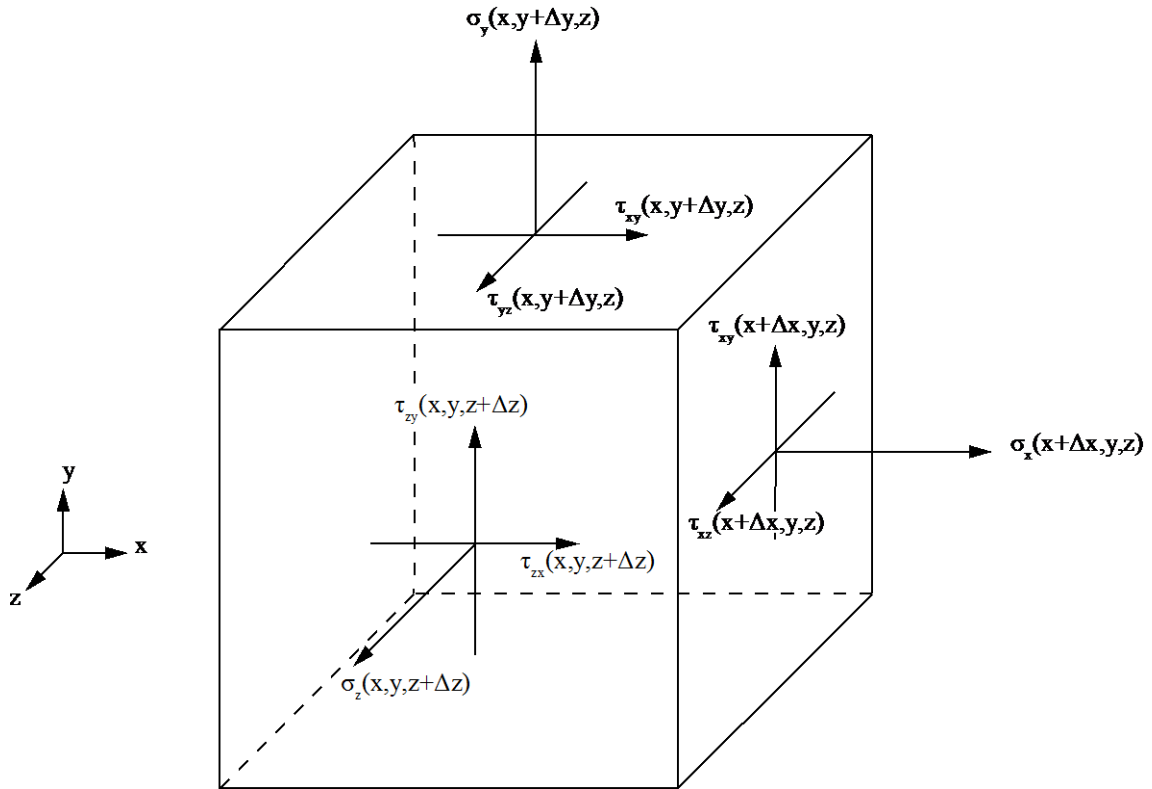


Figura 2.3 – Elemento de volume e os esforços atuantes sobre o mesmo, no contexto tridimensional.

Como consequência, obtêm-se as equações de equilíbrio expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ou

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

2.1.2 COMPORTAMENTO ELÁSTICO

Diz-se que o comportamento do material é elástico se a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é uma função da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.5)$$

No presente estudo, considera-se que o comportamento elástico do material seja linear e isotrópico. Neste caso, a equação constitutiva (2.5) assume a forma específica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, que se relacionam com o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν por meio das expressões:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

2.1.3 FORMA FORTE DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO

A partir da equação de equilíbrio (2.4) e da relação constitutiva (2.6), pode-se definir o problema de equilíbrio, em sua forma *forte*:

“Dado um sólido Ω submetido a forças de campo $\mathbf{b}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, forças de contato $\mathbf{h}: \Gamma_{\mathbf{h}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e deslocamentos prescritos $\bar{\mathbf{u}}: \Gamma_{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbb{R}^3$, determine o campo de deslocamentos $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}).$$

2.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos tem, como ponto de partida, uma formulação alternativa do problema de equilíbrio, baseada em um princípio variacional que pode ser estabelecido independentemente da formulação forte apresentada na seção anterior.

Entretanto, no intuito de facilitar a compreensão do método, a formulação variacional será obtida a partir da forma forte do problema de equilíbrio.

2.2.1 EQUAÇÃO VARIACIONAL

O primeiro passo consiste na definição de um conjunto de campos de deslocamentos $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ *cinematicamente admissíveis*, isto é, que satisfazem a condição de contorno $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre $\Gamma_{\mathbf{u}}$:

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tais que } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sobre } \Gamma_{\mathbf{u}}\} \quad (2.9)$$

Observe-se que, se $\bar{\mathbf{u}}$ for não nulo sobre $\Gamma_{\mathbf{u}}$, então \mathcal{S} não é um espaço vetorial. Como consequência, não é possível construir uma base (de funções) para \mathcal{S} , o que seria conveniente para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos.

Define-se também o espaço dos deslocamentos virtuais:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tais que } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_u\} \quad (2.10)$$

Na forma forte, pesquisa-se a função $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ tal que:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \text{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Omega \quad (2.11)$$

ou seja, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ seja igual ao elemento zero.

Na abordagem variacional, considera-se $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ como sendo uma função de \mathcal{V} e o objetivo é caracterizá-la como sendo o elemento *zero* de \mathcal{V} .

Tal caracterização se utiliza do fato de que o zero é o único elemento de um espaço vetorial ortogonal a todos os elementos deste conjunto. Se \mathbf{v} e \mathbf{w} são elementos de \mathcal{V} , seja definindo o produto interno entre \mathbf{v} e \mathbf{w} como:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{w}(x, y, z) d\Omega \quad (2.12)$$

Os elementos \mathbf{v} e \mathbf{w} serão ditos ortogonais se:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Nestas condições, para se caracterizar que $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ seja a função zero, impõe-se a condição de ortogonalidade:

$$(\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.14)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Considerando que:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.16)$$

e lembrando que o termo $\boldsymbol{\sigma}$ é simétrico, então:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) d\Omega &= \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_u} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega \quad (2.17)$$

A substituição da equação (2.17) na equação (2.15) fornece:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.18)$$

A equação (2.18) representa a forma variacional da equação de equilíbrio e é denominada Princípio dos Trabalhos Virtuais.

2.2.2 FORMA FRACA DO PROBLEMA

A partir da equação (2.18), pode-se escrever a forma fraca do problema de equilíbrio como:

“Determine $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). "$$

2.3 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

O princípio variacional da equação (2.18) impõe condições de ortogonalidade sobre um espaço de funções \mathcal{V} de dimensão infinita.

No que se segue, o objetivo é a definição de problemas com condições de ortogonalidade menos rigorosas, que levem à obtenção de uma aproximação para a solução do problema.

Neste contexto, considera-se, como primeiro passo, um subespaço $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ de dimensão finita $\dim(\mathcal{V}^h) = n^h$. Assim, a primeira equação (2.19) é substituída por:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}^h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.20)$$

Como \mathcal{V}^h é um espaço vetorial, pode-se definir uma base:

$$\{\mathbf{N}_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n^h\} \quad (2.21)$$

para este conjunto, de modo que cada elemento $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$ admite-se a representação:

$$\mathbf{v}^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_h} v_i \mathbf{N}_i(x, y, z) \quad (2.22)$$

O segundo passo consiste na condição de um subconjunto $\mathcal{S}^h \subset \mathcal{S}$. Entretanto, como \mathcal{S} não é espaço vetorial, não faz sentido discorrer sobre a dimensão de \mathcal{S}^h . Entretanto, observa-se que a diferença entre \mathcal{S} e \mathcal{V} consiste na condição de contorno sobre Γ_u : enquanto para os elementos de \mathcal{S} $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre Γ_u , no caso dos elementos de \mathcal{V} , $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sobre Γ_u . Se $\tilde{\mathbf{u}}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um elemento arbitrariamente escolhido de \mathcal{S} (i.e., tal que $\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre Γ_u), então é possível representar cada elemento \mathbf{u} de \mathcal{S} como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.23)$$

Da mesma forma, \mathcal{S}^h pode ser construído considerando-se elementos de $\mathbf{u} \in \mathcal{S}^h$ tais que:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \tilde{\mathbf{u}}^h, \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.24)$$

Nestas condições, apesar de \mathcal{S}^h não admitir base, seus elementos podem ser escritos em função de uma base \mathcal{V}^h como:

$$\mathbf{u}^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_h} u_i \mathbf{N}_i(x, y, z) + \tilde{\mathbf{u}}^h(x, y, z) \quad (2.25)$$

Assim, a forma discretizada do problema de equilíbrio, em sua forma fraca, é dada por:

“Determine $\mathbf{u}^h \in \mathcal{S}^h$ tais que:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) \cdot \nabla \mathbf{v}^h d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma, \quad (2.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h)) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}),$$

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{n_h} u_i \mathbf{N}_i + \tilde{\mathbf{u}}^h,$$

$$\mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^{n_h} v_i \mathbf{N}_i.$$

Observe-se que:

- (i) As condições de ortogonalidade sobre a equação variacional não precisam ser impostas sobre todos os elementos $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$, mas apenas sobre os elementos $\{\mathbf{N}_i, i = 1, \dots, n^h\}$ de sua base. Assim, apenas n^h condições de ortogonalidade necessitam ser impostas.
- (ii) O problema de equilíbrio fica reduzido à determinação dos n^h coeficientes u_i .

Portanto, o problema discutido reduz-se à um problema de u^h condições de ortogonalidade para se determinar u^h incógnitas u_i .

2.4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os passos apresentados até o presente momento são essenciais para o Método dos Elementos Finitos. Entretanto, este método se caracteriza como tal apenas a partir do momento em que se seleciona uma base específica $\{N_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ para \mathcal{V}^h . As estratégias para obtenção desta base podem ser diversas e, nesta seção, apresenta-se apenas uma destas possibilidades.

2.5 ELEMENTOS P1

O processo de construção de uma base para \mathcal{V}^h é ilustrado, neste momento, no contexto de problemas planos, em que o sólido analisado pode ser representado como uma região bidimensional.

Seja então Ω submetido a uma partição em sub-regiões triangulares Ω_e , conforme é ilustrado na Fig. 2.4.

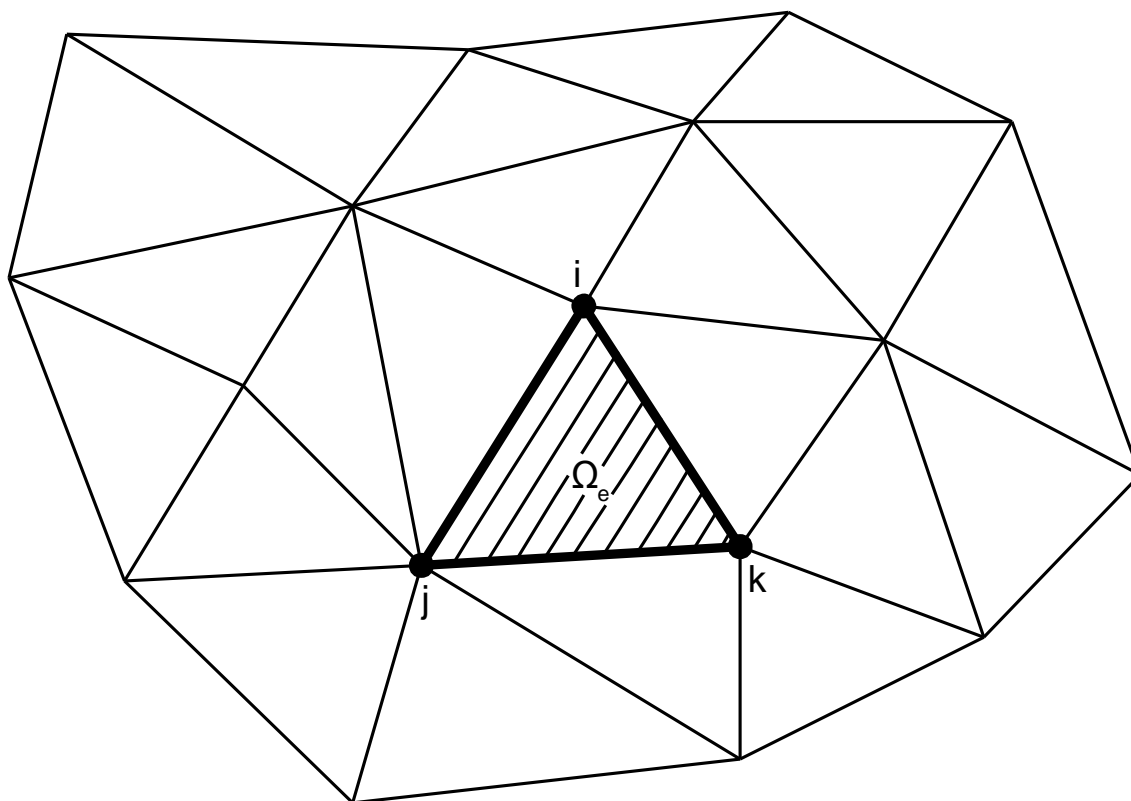


Figura 2.4 – Partição do domínio Ω em elementos finitos Ω_e .

Cada sub-região Ω_e é denominada de *elemento finito* e seus vértices são denominados *nós* ou *pontos nodais* da malha.

Cada função $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, n^h$ tem a forma:

$$N_i(x, y) = \begin{pmatrix} N_i(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } N_i(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ N_i(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

dependendo se a mesma é empregada para descrever o componente x ou o componente y do deslocamento \mathbf{u} ou do deslocamento \mathbf{v} . Por sua vez, cada função $N_i(x, y)$ é associada ao ponto nodal i e construída da seguinte forma:

$$N_i(x, y) = a + bx + cy \quad (2.28)$$

tal que :

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad (2.29)$$

$$N_i(x_j, y_j) = 0 \text{ se } j \neq i.$$

A Fig. 2.5 ilustra a forma de $N_i(x, y)$. Tem-se, assim, uma função contínua linear sobre cada elemento finito, com valor unitário no ponto nodal i e com valor nulo nos demais pontos nodais.

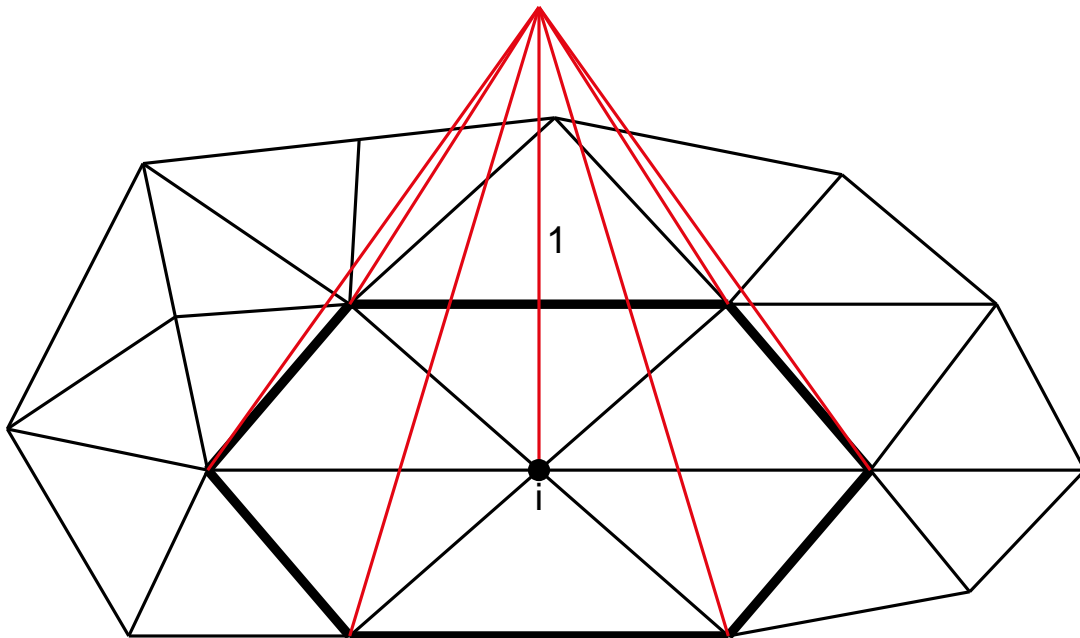


Figura 2.5- Função $N_i(x, y)$

Os coeficientes a , b e c podem ser obtidos impondo-se as condições (2.29) sobre a expressão (2.28), obtendo-se:

$$1 = a + bx_i + cy_i,$$

$$1 = a + bx_j + cy_j, \quad (2.30)$$

$$1 = a + bx_k + cy_k.$$

A solução do sistema de equações lineares (2.30) para a , b e c fornece:

$$a = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - y_i x_j - x_i y_k - x_k y_j} \quad (2.31)$$

$$b = \frac{y_j - y_k}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - y_i x_j - x_i y_k - x_k y_j} \quad (2.32)$$

$$c = \frac{x_k - x_j}{x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - y_i x_j - x_i y_k - x_k y_j} \quad (2.33)$$

3 EMBASAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo será tratado o embasamento teórico necessário para as simulações numéricas realizadas pelo software de Elementos Finitos Abaqus. A teoria aqui apresentada pode ser dividida em Contato Geral, Atrito Seco, Contato de Hertz e Plasticidade e será analisada separadamente.

3.1 CONTATO UNILATERAL ENTRE CORPOS ELÁSTICOS

O contato unilateral entre dois corpos quaisquer pode ser representado conforme a Fig. 3.1 a seguir.

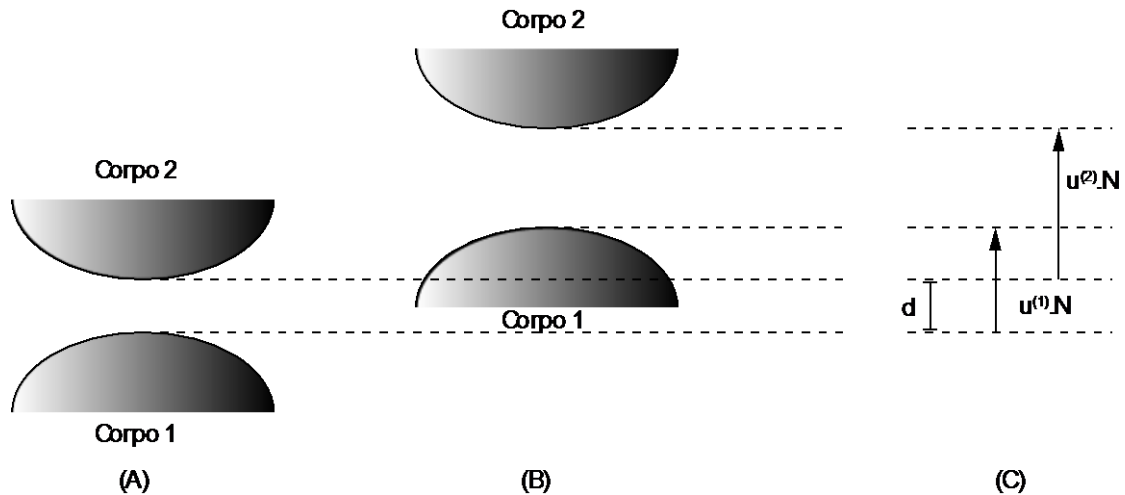


Figura 3.1 – Representação cinemática de movimento entre dois corpos quaisquer.

Quando dois corpos estão na situação inicial (A) a uma distância d e se deslocam para uma situação posterior (B), o vetor $\mathbf{u}^{(1)}$ representa o deslocamento do corpo 1, o vetor $\mathbf{u}^{(2)}$ o deslocamento do corpo 2 e \mathbf{N} o vetor normal as superfícies. Caso os corpos estejam em contato, a seguinte condição será satisfeita:

$$\mathbf{u}^{(2)}. \mathbf{N} + d = \mathbf{u}^{(1)}. \mathbf{N} \quad (3.1)$$

Para o caso de não ocorrer contato entre os corpos, obtém-se a seguinte igualdade:

$$\mathbf{u}^{(2)}. \mathbf{N} + d > \mathbf{u}^{(1)}. \mathbf{N} \quad (3.2)$$

Significando que por mais que o corpo 1 se desloque, este será sempre menor que a soma do deslocamento do corpo 2 mais a distância d de separação entre as superfícies na posição (A) inicial.

A desigualdade (3.3) a seguir é denominada como restrição cinemática de contato, representando que duas superfícies contínuas só podem estar separadas ou em contato.

$$(\underline{\mathbf{u}}^{(2)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}). \mathbf{N} + d \geq 0 \quad (3.3)$$

Para o contato unilateral, podem ser feitas as seguintes observações:

1. O vetor \mathbf{N} caracteriza as superfícies de contato.

2. Os deslocamentos representados são pequenos, podendo-se desprezar as variações de \mathbf{N} .

No caso de contato, haverá uma força normal F_N entre os corpos de sinal negativo, pois se trata de uma força compressiva, portanto:

$$F_N < 0 \quad (3.4)$$

Caso não haja contato, não ocorrerá força normal, sendo esta nula.

Para relacionar a força e a ocorrência de contato, existem as seguintes relações denominadas de relações de complementariedade de Kuhn-Tucker.

$$\begin{cases} (\underline{\mathbf{u}}^{(2)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{N} + d > 0 \Rightarrow F_N = 0 \\ (\underline{\mathbf{u}}^{(2)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{N} + d = 0 \Rightarrow F_N \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} F_N = 0 \Rightarrow (\underline{\mathbf{u}}^{(2)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{N} + d > 0 \\ F_N \leq 0 \Rightarrow (\underline{\mathbf{u}}^{(2)} - \underline{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{N} + d = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

As relações (3.5) significam que caso a diferença dos deslocamentos dos corpos mais a distância inicial d seja maior que zero, não existirá força de compressão normal nas superfícies, mas se a diferença dos deslocamentos entre os corpos mais a distância inicial d for nula, pode ser que haja forças compressivas. E as relações (3.6) significam que se não houver contato entre as superfícies, as distâncias dos deslocamentos serão maiores que zero e se houver a possibilidade de contato, as distâncias de deslocamentos serão nulas. Sendo, portanto, relações de complementariedade, pois para que uma situação ocorra necessariamente à outra também deve ocorrer.

Estas condições de complementariedade podem ser resumidas graficamente conforme mostrado na Fig. 3.2.

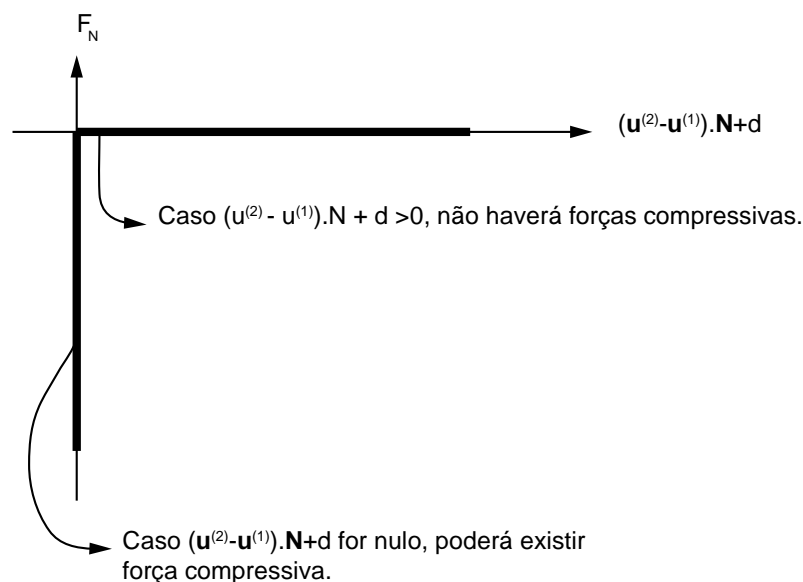


Figura 3.2 – Representação gráfica das condições de complementariedade de Kuhn-Tucker.

3.1.1 ATRITO DE COULOMB

Considerando-se dois corpos em contato com velocidades $\dot{\mathbf{u}}^{(1)}$ e $\dot{\mathbf{u}}^{(2)}$, o movimento relativo entre eles ocorrerá caso a força tangencial F_t seja maior que o coeficiente μ multiplicado pela força normal F_N . Esta situação é representada na Fig. 3.3.

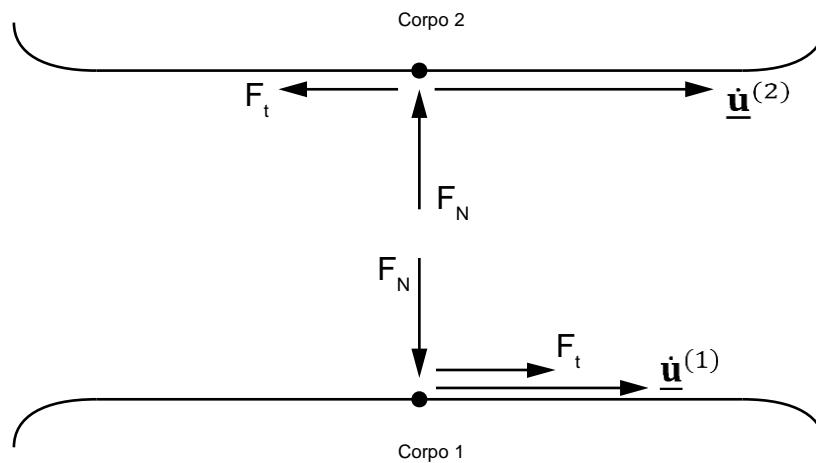


Figura 3.3 – Movimento relativo entre corpos em contato.

Não ocorrerá escorregamento entre os corpos, situação de atrito estático, quando:

$$|F_t| < \mu|F_N| \quad (3.7)$$

e a velocidade relativa entre eles for nula.

Se a força tangente F_t for igual a $\mu|F_N|$ pode ser que haja escorregamento, sendo representado como:

$$|F_t| = \mu|F_N| \Rightarrow |(\dot{\mathbf{u}}^{(2)} - \dot{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{T}| \geq 0 \quad (3.8)$$

As condições de escorregamento podem ainda ser escritas da seguinte maneira formal:

- Sem escorregamento:

$$|F_t| - \mu|F_N| < 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \quad (3.9)$$

- Com escorregamento:

$$|F_t| - \mu|F_N| \geq 0 \Rightarrow |(\dot{\mathbf{u}}^{(2)} - \dot{\mathbf{u}}^{(1)}) \cdot \mathbf{T}| \geq 0 \quad (3.10)$$

3.2 CONTATO DE HERTZ

A primeira análise satisfatória sobre tensões de contato para sólidos elásticos, foi realizada por Hertz após a observação da interferência ótica entre duas lentes em contato. Hertz se preocupou em estudar a deformação elástica quando duas lentes fossem pressionadas entre si.

Como referências básicas, foi considerado o livro de mecânica do contato de Johnson, 1985.

3.2.1 GEOMETRIA DO PROBLEMA

O contato entre dois corpos se inicia ao longo de uma linha ou sobre um ponto. Se uma força de pequena magnitude for aplicada sobre ambos os corpos, pode-se observar um aumento da área de contato que, em geral, é pequena se comparada às dimensões dos corpos envolvidos no contato. A Fig. 3.4 ilustra de forma esquemático o contato entre as superfícies de dois corpos.

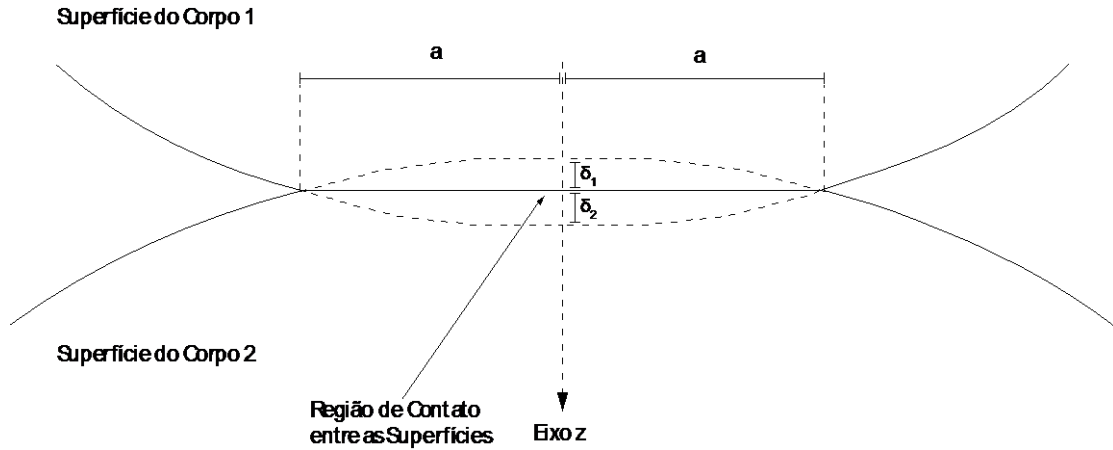


Figura 3.4 – Contato entre as superfícies de dois corpos.

Como pode ser observado na Fig. 3.4, dois corpos quando submetidos ao contato sofrem uma deformação nesta região que foi exagerada na ilustração para facilitar a observação do fenômeno. O eixo z representa o eixo de simetria, dividindo a área de contato em duas partes iguais de dimensão a , com sentido positivo apontado para baixo. As superfícies dos corpos 1 e 2 sofrem, respectivamente, uma deformação de δ_1 e δ_2 . A Fig. 3.5 a seguir ilustra os pontos P_1 e P_2 , com deslocamento \bar{u}_{z1} e \bar{u}_{z2} , dentro da região de contato.

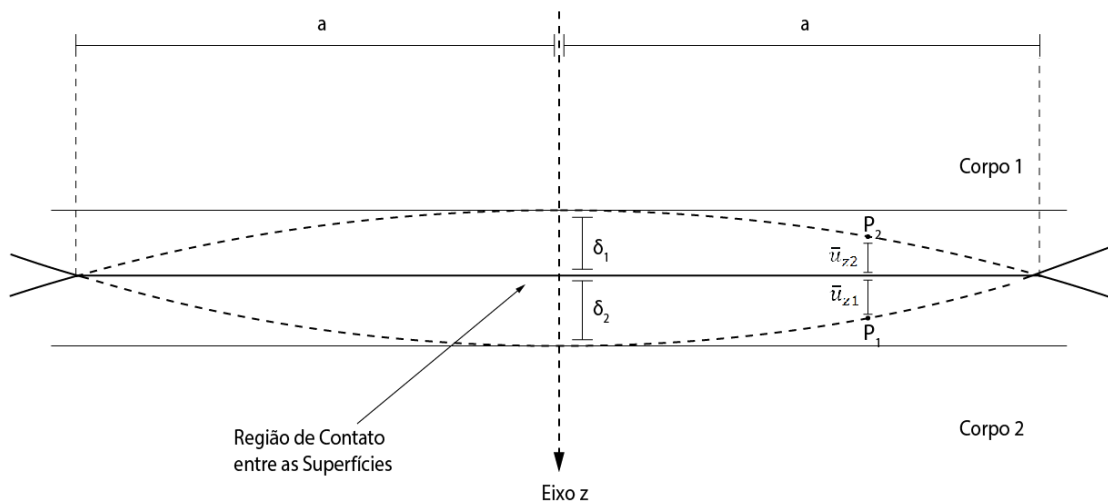


Figura 3.5 – Deslocamento dos pontos internos na região de contato.

Sendo P_1 e P_2 pontos das superfícies pertencentes aos corpos 1 e 2 respectivamente, pode-se observar que estes pontos são coincidentes dentro da região de contato se a seguinte condição é verificada:

$$\delta_1 + \delta_2 = \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} \quad (3.11)$$

Os pontos P_1 e P_2 estarão fora da zona de contato se a seguinte condição for verificada:

$$\delta_1 + \delta_2 < \bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} \quad (3.12)$$

3.2.2 HIPÓTESES DE HERTZ

Sendo a a dimensão da área de contato, R o raio relativo de curvatura, R_1 e R_2 os raios de ambos os corpos em contato e l as dimensões dos corpos tanto lateralmente como em profundidade, Hertz formulou sua teoria com as seguintes hipóteses:

1. As superfícies são contínuas e não conformes, com a área de contato bem menor que o raio relativo de curvatura ($a \ll R$);
2. As deformações são pequenas quando comparadas com as dimensões dos corpos em contato;
3. A área de contato é bem menor que os raios dos corpos 1 e 2 e as dimensões l ($R_{1,2} \gg a$ e $l \gg a$);
4. Não existe atrito entre as superfícies em contato.

3.2.3 EQUAÇÕES DO CONTATO DE HERTZ

As equações apresentadas nesta seção são para o caso geral de contato de Hertz sendo possível obter os valores esperados para a pressão máxima na região de contato e o valor do semieixo menor da elipse dentro desta região.

O contato entre dois corpos quaisquer forma uma região de pressão com formato elíptico de semieixo maior b e semieixo menor a . O valor de seus raios dependem do eixo x e y , pertencente ao plano de contato ilustrado na figura 3.4, sendo os raios denominados por R_{1x} , R_{1y} , R_{2x} e R_{2y} . A excentricidade e , elipsidade k , raio médio efetivo de curvatura R_m e raio equivalente de curvatura da região de contato são determinados por:

$$e^2 = 1 - k^2 \quad (3.13)$$

$$k = \left(\frac{a}{b}\right) \quad (3.14)$$

$$R_m = \frac{1}{A + B} \quad (3.15)$$

$$R_e = \left(\frac{1}{2}\right) (AB)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

onde as constantes A e B são soluções seguinte sistema:

$$(A + B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2x}} + \frac{1}{R_{2y}} \right) \quad (3.17 a)$$

$$(B - A) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{R_{1x}} - \frac{1}{R_{1y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_{2x}} - \frac{1}{R_{2y}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{R_{1x}} - \frac{1}{R_{1y}} \right) \left(\frac{1}{R_{2x}} - \frac{1}{R_{2y}} \right) \cos(2\alpha) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.17 b)$$

e α ângulo em relação ao eixo dos corpos em contato.

A teoria presente em (Thomas & Hoersch, 1930) fornece o valor do semieixo a e da pressão máxima na região de contato como:

$$a = \left(\frac{3E(e) P R_m}{2\pi E^* (1 - e^2)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.18)$$

$$p_0 = \frac{(3P)}{2\bar{A}_e} \quad (3.19)$$

onde,

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2} \quad (3.20)$$

$$\bar{A}_e = \pi ab \quad (3.21)$$

sendo \bar{A}_e a área de contato elástico, P a força de contato, E_i o módulo de elasticidade, $E(e)$ integral elíptica de primeira ordem e ν_i o coeficiente de Poisson de cada corpo i .

3.2.3 CONTATO BIDIMENSIONAL ENTRE CILINDROS COM EIXOS PARALELOS

A teoria de Hertz para o caso de contato entre cilindros bidimensionais com cargas distribuídas conforme ilustrado na Fig. 3.6 possui solução analítica e é apresentada nesta seção.

Neste caso específico, ambos cilindros sofrem pressão de cargas de mesma magnitude P por comprimento do cilindro l . Observando a Fig. 3.6, pode-se notar que a deformação na área de contato começa sobre uma linha paralela aos dois eixos dos cilindros e que conforme a pressão aumenta, a área

de contato entre os cilindros também aumenta, porém, devido as hipóteses de Hertz, esta área é pequena se comparada as dimensões dos corpos envolvidos.

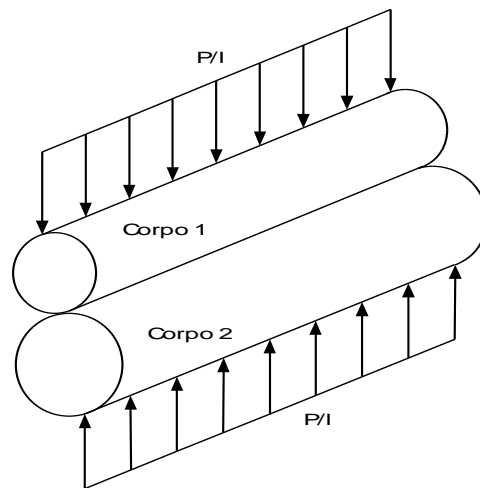


Figura 3.6 – Dois cilindros pressionados por duas cargas distribuídas.

O problema ilustrado pela figura 3.6 pode ser representado como um problema bidimensional vide Fig. 3.7.

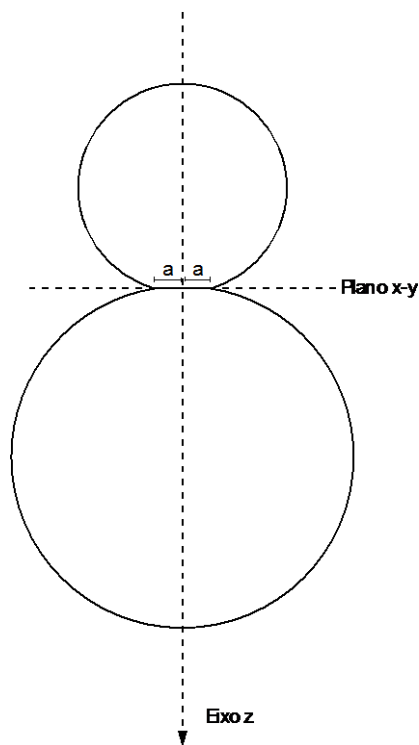


Figura 3.7 – Representação bidimensional do contato entre cilindros.

O eixo z tem sentido positivo apontado para o cilindro inferior e a região de contato é tangente ao plano x-y.

O raio relativo dos cilindros é dado por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.22)$$

A força P que atua sobre os dois cilindros é calculado por:

$$P = \frac{\pi a^2 E^*}{4R} \quad (3.23)$$

Sendo a dimensão a da área de contato dada por:

$$a = \left(\frac{4PR}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

A pressão na área de contato é dada por (Johnson,1985) como:

$$p(x) = \frac{2P}{\pi a^2} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

E pressão máxima na área de contato dada pela equação (3.18) para $x = 0$, sendo:

$$p(0) = p_0 = \frac{2P}{\pi a^2} a = \frac{2P}{\pi a} \quad (3.26)$$

Substituindo (3.24) em (3.26), tem-se:

$$p_0 = \left(\frac{PE^*}{\pi R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Só há pressão dentro da região de contato. O cálculo das tensões pode ser obtido substituindo a equação (3.26) nas equações (3.28) e (3.29) (Johnson,1985):

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2}{\{(x-s)^2 + z^2\}^2} ds \quad (3.28)$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{\{(x-s)^2 + z^2\}^2} ds \quad (3.29)$$

Resultando em:

$$\sigma_x = -\frac{p_0}{a} \left\{ (a^2 + 2z^2)(a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - 2z \right\} \quad (3.30)$$

$$\sigma_z = -p_0 a (a^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

Por se tratarem de tensões principais, o valor da tensão máxima de cisalhamento é dado através de:

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \quad (3.32)$$

O gráfico representado na Fig. 3.8 a seguir ilustra as soluções analíticas de (3.30), (3.31) e (3.32) que serão utilizadas para comparar os resultados obtidos pelo Abaqus no Capítulo 5.

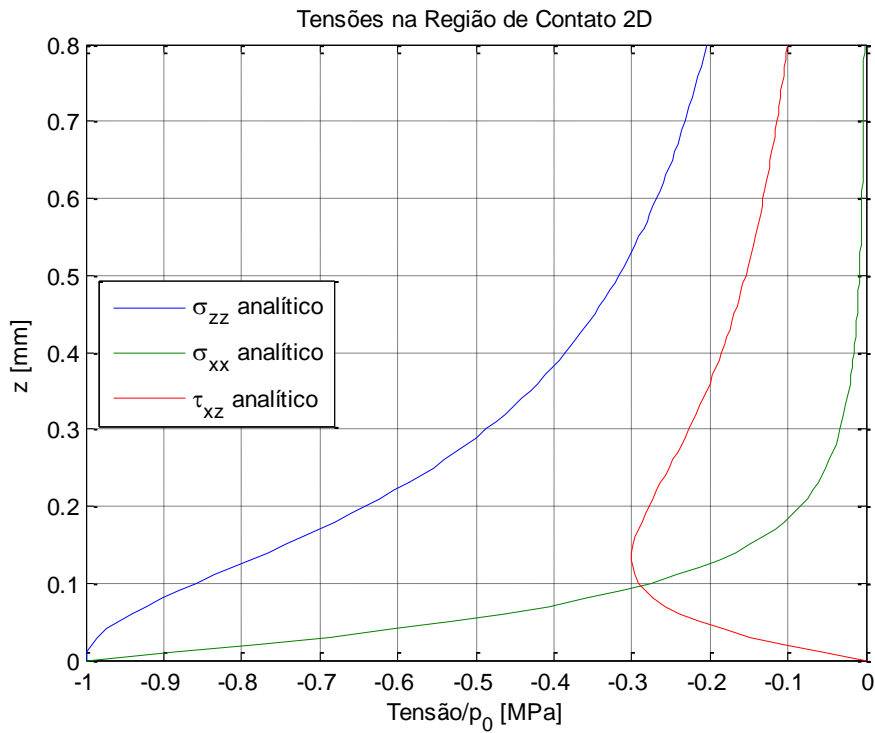


Figura 3.8 – Soluções analíticas das tensões.

3.3 PLASTICIDADE

As deformações plásticas em metais podem ser desejáveis, no caso de processos de conformação mecânica, ou podem comprometer a integridade ou o funcionamento correto de componentes mecânicos, devido a tensões residuais e deformações permanentes causadas após a remoção de um carregamento além do ponto de escoamento do material do componente. Estas tensões e deformações ocasionadas durante o processo de deformação não são proporcionais, necessitando de relações mais gerais que a Lei de Hooke para descrever corretamente o comportamento de tensão-deformação do material (Dowling, 2007).

Na plasticidade, considera-se que apenas a sequência dos carregamentos determina as deformações plásticas e outras variáveis de estado associadas, sendo a velocidade com a qual estes são aplicados irrelevante. Na prática, esta hipótese descreve satisfatoriamente uma classe de materiais, dentro de certos intervalos de temperatura e dentro de certos limites de taxas de carregamento. Sob temperaturas elevadas, relativamente próximas da temperatura de fusão do metal, por exemplo, a taxa de carregamento torna-se importante para a descrição do comportamento mecânico do material e modelos visco-elásticos e elasto-visco-plásticos devem ser considerados. Neste contexto, pseudo-tempo t descreve apenas a sequência de eventos, sem relação direta com o tempo efetivamente percebido e medido pelo ser humano.

Todo e qualquer modelo considerado para a descrição do comportamento elasto-plástico do material tem suas limitações. Modelos mais simples estão mais distantes da realidade física, mas podem ser

eventualmente efetivos e produzir análises mais rápidas quando há urgência nas avaliações que o engenheiro deve oferecer ao cliente. Em outras situações, por outro lado, modelos que descrevam o comportamento mecânico com maior aderência ao que se observa experimentalmente devem ser considerados. No que se segue, apresentam-se de maneira bastante sumária alguns modelos mais simples considerados para a descrição do comportamento elasto-plástico.

No modelo da *plasticidade ideal*, admite-se o comportamento elástico do material desde que a tensão assumida, em módulo, valor menor do que a tensão de escoamento, σ_y . Quando a tensão alcança este valor limite, o material pode plastificar, sem que se observe variação da tensão de escoamento (*encruamento*). Do ponto de vista microscópico e no contexto de metais, a deformação plástica está associada ao movimento de discordâncias (defeitos) nos planos da rede cristalina de cada grão. A Fig. 3.9 ilustra o comportamento elasto-plástico ideal.

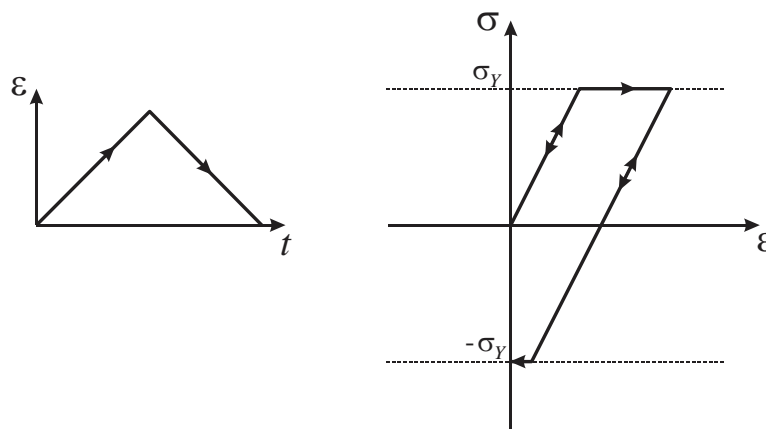


Figura 3.9– Comportamento elasto-plástico ideal.

O modelo de plasticidade ideal é simples mas bastante precário na descrição quantitativa da relação tensão-deformação. Sob carregamento monotônico ou durante os primeiros ciclos de um carregamento variável, observa-se um crescimento do domínio elástico à medida que a deformação plástica se acumula. Isto está associado a um aumento na densidade de discordâncias no material, exigindo-se um maior esforço para o movimento subsequente destes defeitos. O crescimento do domínio elástico como consequência do acúmulo da deformação plástica é denominado *encruamento isotrópico*. A Fig. 3.10 ilustra o comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico.

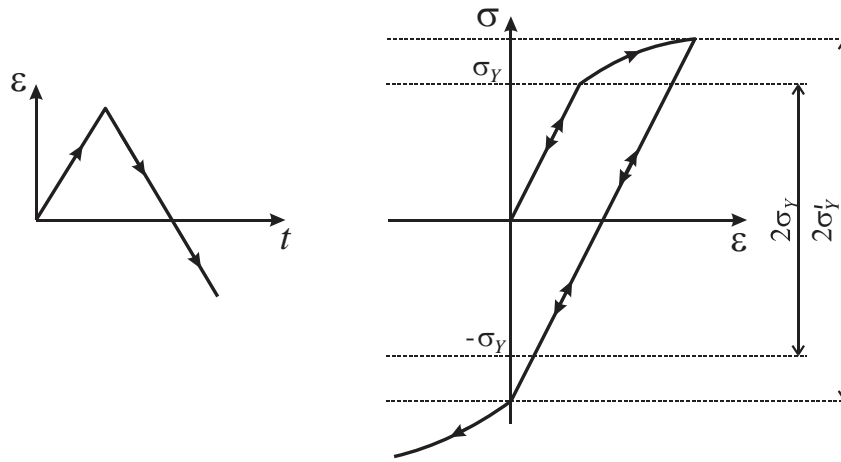


Figura 3.10 – Comportamento elasto-plástico com encruamento isotrópico.

Um outro tipo de encruamento observado pode ser caracterizado pela translação do domínio elástico, associado ao que costuma-se referir como *efeito Bauschinger*. Neste caso, tem-se o modelo elasto-plástico com *encruamento* cinemático. A Fig. 3.11 ilustra tal encruamento.

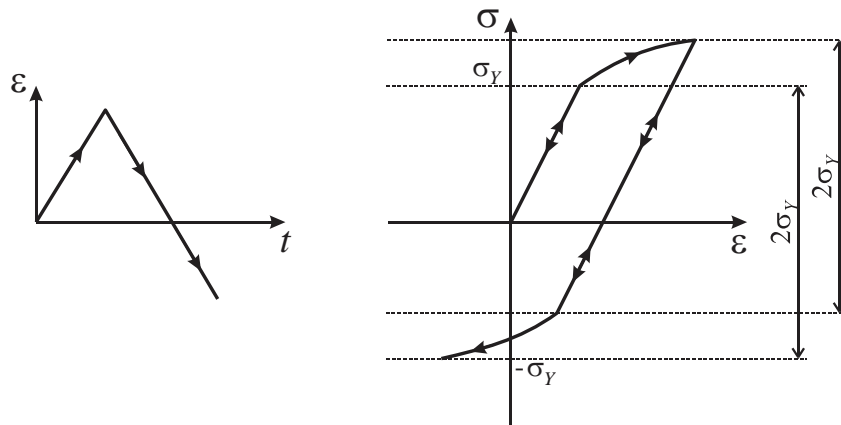


Figura 3.11– Comportamento elasto-plástico com encruamento cinemático.

Na prática, sob carregamentos monotônicos ou nos primeiros ciclos de carregamento variável, o comportamento mecânico do material metálico combina ambos os encruamentos, isotrópico e cinemático, enquanto que sob um número maior de ciclos de carregamentos periódicos, o encruamento cinemático predomina.

3.3.1 CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Será apresentado neste tópico dois tipos de representação de curvas reais de materiais: relação exponencial de plasticidade e relação de Ramberg-Osgood. Isto porque curvas de materiais reais requerem modelos matemáticos mais complexos para representação de seu comportamento.

3.3.1.1 RELAÇÃO EXPONENCIAL DE PLASTICIDADE

Neste modelo, assume-se que a tensão é proporcional a deformação elevada por um expoente. A relação (3.33) é aplicada dentro do regime elástico e (3.34) é aplicada somente quando a tensão ultrapassar a tensão de escoamento do material:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.33)$$

$$\sigma = H_1\varepsilon^{n_1} \quad (3.34)$$

onde n_1 é denominado expoente de deformação plástica e H_1 é uma constante do material.

A equação (3.34) pode ser expressa em termo da deformação:

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{H_1}\right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (3.35)$$

e o valor da tensão de escoamento pode ser obtido com as relações (3.33) e (3.34):

$$\sigma_0 = E \left(\frac{H_1}{E}\right)^{\frac{1}{1-n_1}} \quad (3.36)$$

3.3.1.2 RELAÇÃO DE RAMBERG-OSGOOD

Neste modelo, considera-se a deformação elástica e plástica separadamente e depois soma-se seus valores. A relação (3.34) é aplicada somente a parte plástica do material ao invés da deformação total sofrida conforme apresentado na relação exponencial de plasticidade:

$$\sigma = H\varepsilon_p^n \quad (3.37)$$

A deformação total sofrida pelo material é dada pela soma da parte elástica e plástica conforme (3.38):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{H}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.38)$$

A curva dada por (3.38) é representada na Fig. 3.12 e conforme pode-se notar, não há um ponto específico da tensão de escoamento, sendo diferente da relação exponencial de plasticidade, porém as

duas relações são equivalentes nos casos em que a deformação plástica prevalece sobre a deformação elástica. (Dowling, 2007)

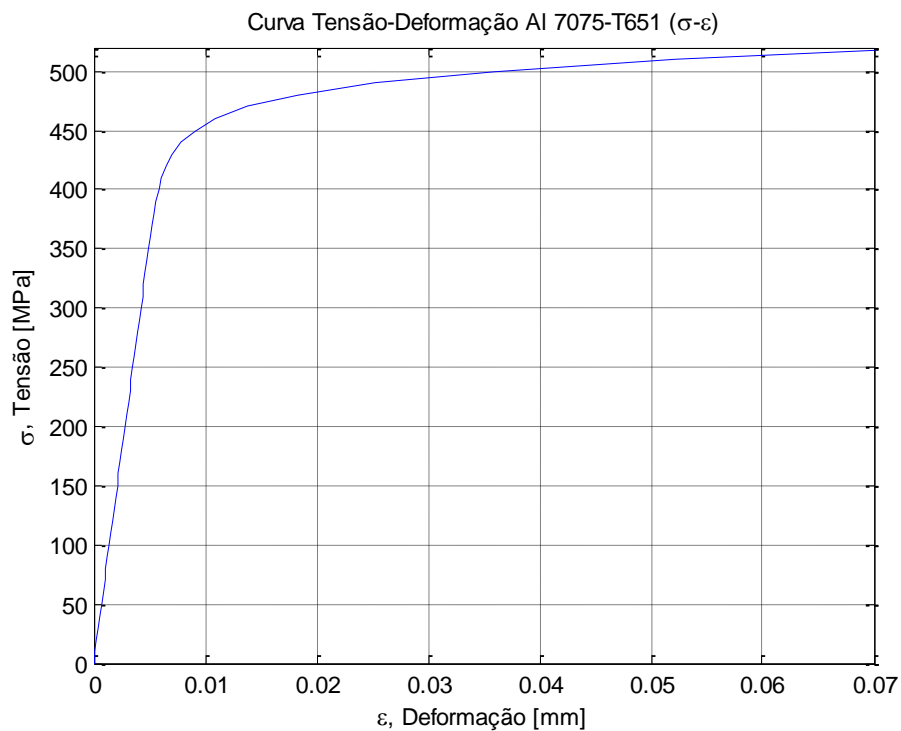


Figura 3.12 – Curva de tensão-deformação Al 7075-T651 (Dowling, 2007).

O modelo de Ramberg-Osgood é bastante eficiente para descrever quantitativamente a curva tensão-deformação elasto-plástica de materiais metálicos submetidos a carregamentos monotônicos de tração, compressão, cisalhamento ou combinação entre tais modos. Sob histórias de carregamento mais gerais, por outro lado, envolvendo sequencias de carregamento e descarregamento, ou ainda sob condições de carregamento não proporcional, um modelo com características mais gerais se faz necessário. Na seção a seguir, apresentam-se os elementos básicos da teoria incremental de plasticidade, na qual se baseiam a maior parte dos aplicativos comerciais de elementos finitos que descrevem o comportamento elasto-plástico de materiais metálicos. Da mesma forma que no resto do presente estudo, a teoria é apresentada no contexto da cinemática das deformações de pequena magnitude. Como referências básicas, considerou-se a monografia de Simo e Hughes (1998).

O modelo considera que a deformação plástica possa ser descrita por um conjunto de variáveis de estado que variam ao longo de uma história de carregamento. Descreve-se, no que se segue, um modelo de plasticidade com encruamento isotrópico não linear.

3.3.2 DECOMPOSIÇÃO ADITIVA DA DEFORMAÇÃO

Conforme já foi dito anteriormente, considera-se neste estudo a cinemática das deformações de pequena amplitude, na qual a deformação em cada ponto material pode ser descrita pelo *tensor de deformações lineares totais*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (3.39)$$

ou, em representação matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Admite-se que o tensor de deformações lineares totais possa ser decomposto em uma parcela elástica e em uma parcela plástica:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (3.41)$$

onde o *tensor de deformações elásticas* $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ e o *tensor de deformações plásticas* $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ admitem respectivamente as representações matriciais:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \begin{pmatrix} \varepsilon_{e x} & \varepsilon_{e xy} & \varepsilon_{e xz} \\ \varepsilon_{e xy} & \varepsilon_{e y} & \varepsilon_{e yz} \\ \varepsilon_{e xz} & \varepsilon_{e yz} & \varepsilon_{e z} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_{p x} & \varepsilon_{p xy} & \varepsilon_{p xz} \\ \varepsilon_{p xy} & \varepsilon_{p y} & \varepsilon_{p yz} \\ \varepsilon_{p xz} & \varepsilon_{p yz} & \varepsilon_{p z} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Como a deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$ é mensurável, diz-se que a mesma é uma *variável observável*. Por outro lado, diz-se que a deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ é uma *variável interna*, por não ser diretamente mensurável.

3.3.3 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Admite-se que o tensor *tensão de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$ seja uma função linear do tensor de deformações elásticas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbb{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (3.43)$$

onde \mathbb{C} é o *tensor de elasticidade*. Esta relação tensão-deformação estabelece que a deformação plástica não produz tensão. Se o material tem comportamento elástico isotrópico, então a relação tensão-deformação admite a representação específica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_e) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.44)$$

onde λ e μ são as *constantes de Lamé*, escritas em função do *módulo de elasticidade à tração* E e do *coeficiente de Poisson* ν como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.45)$$

3.3.4 DOMÍNIO ELÁSTICO

A relação tensão-deformação elástica tem validade para tensões definidas no que se denomina *domínio elástico*. O modelo de Mises caracteriza o domínio elástico por meio da desigualdade:

$$\phi = \|\mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_Y(\alpha) \leq 0 \quad (3.46)$$

onde:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (3.47)$$

é o *tensor tensão desviadora* e $\sigma_Y(\alpha)$ representa a *tensão de escoamento plástico sob carregamento axial*. A variável α é denominada *deformação plástica acumulada* e quantifica o encruamento isotrópico do material.

3.3.5 LEIS DE EVOLUÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO

Supõe-se que as variáveis de estado $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ e α evoluam de acordo com as leis:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (3.48)$$

$$\dot{\alpha} = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| = \dot{\gamma} \quad (3.49)$$

onde $\dot{\gamma} \geq 0$ é o *multiplicador plástico*.

3.3.4.5 CONDIÇÃO DE COMPLEMENTARIDADE

A condição de complementaridade é definida formalmente por meio das expressões:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \phi = 0 \quad (3.50)$$

e estabelece que não pode haver evolução da deformação plástica ϵ_p ou da variável de encruamento isotrópico α , $\dot{\gamma} \geq 0$, no interior do domínio elástico, $\phi < 0$. Por outro lado, havendo evolução destas variáveis de estado, $\dot{\gamma} > 0$, então necessariamente o estado de tensão está em algum ponto sobre o contorno do domínio elástico, $\phi = 0$. Observe-se que condição similar é estabelecida para o contato unilateral entre superfícies.

3.3.4.6 CONDIÇÃO DE PERSISTÊNCIA

A *condição de persistência* estabelece que, se o estado de tensão se encontra definido no contorno do domínio elástico, $\phi = 0$, então:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\phi} \leq 0, \quad \dot{\gamma} \dot{\phi} = 0 \quad (3.51)$$

Isto significa que, enquanto há evolução da deformação plástica, $\dot{\gamma} > 0$, o estado de tensão deve permanecer sobre o contorno do domínio elástico, $\dot{\phi} = 0$. Por outro lado, se o estado de tensão evolui para o interior do domínio elástico, $\dot{\phi} < 0$, então não pode se observar evolução das variáveis de estado que descrevem a deformação plástica, $\dot{\gamma} = 0$.

4 O ABAQUS

Neste capítulo, é realizada uma breve introdução ao uso do software comercial de elementos finitos Abaqus CAE. Os passos aqui apresentados serão importantes na simulação numérica do contato de Hertz e do atrito entre um bloco e uma superfície rígida. Aconselha-se, ainda, ao usuário ler a documentação disponível com o software para se familiarizar melhor com todos os recursos disponíveis pelo programa.

4.1 JANELA INICIAL DO ABAQUS

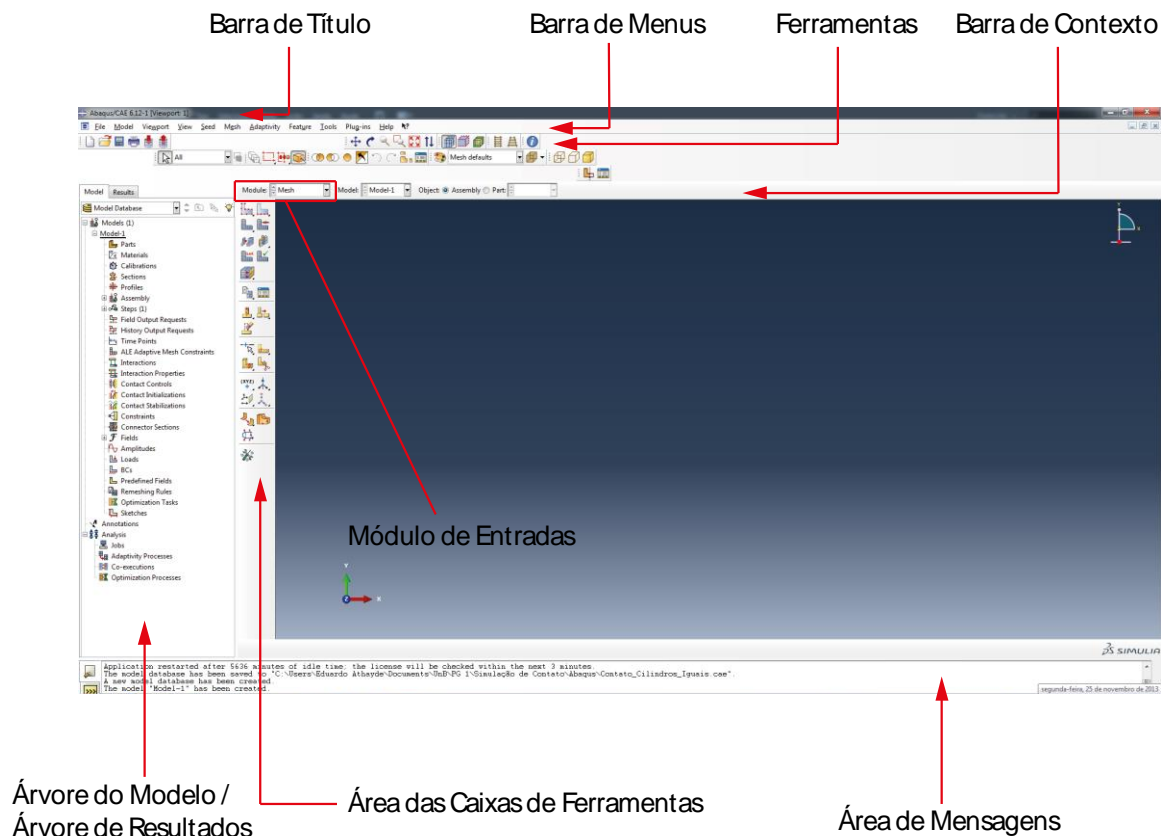


Figura 4.1 – Janela de início do Abaqus CAE.

Na Fig. 4.1, pode-se observar a janela de início e a denominação de cada área do Abaqus. Será abordado aqui somente o módulo de entrada, pois cada parte importante para a análise se encontra localizada nesta região. De forma alternativa, o usuário pode, também, utilizar a árvore do modelo para inserir dados para a análise de Elementos Finitos.

4.2 MÓDULO DE ENTRADA

O Abaqus CAE é dividido em unidades funcionais denominadas de módulos. Cada um destes contem ferramentas importantes para a análise do modelo proposto deixando o usuário selecionar diretamente o módulo desejado através do módulo de entrada destacado na Fig. 4.1.

A ordem dos módulos propostos pelo programa segue uma sequência lógica para criação do modelo a ser analisado e, em geral, deve ser seguido para a modelagem do problema.

A seguinte lista de módulos disponíveis no Abaqus CAE é descrita de maneira sucinta a seguir.

Part

Módulo para a criação do desenho de cada parte individual ou onde se pode importar a geometria de interesse criada pelo Abaqus ou nos seguintes formatos: 3D XML, ACIS, ANSYS, Assembly files, AutoCAD, CATIA V4, CATIA V5 Elysium Neutral File, CATIA V5 parts and assemblies, CATIA V6 parts and assemblies, I-DEAS Elysium Neutral File, IGES, Nastran, NX Elysium Neutral File, OBJ, Parasolid, Pro/ENGINEER Elysium Neutral File, STEP, VDA-FS e VRML.

Property

Responsável por criar a seção e a definição do tipo de material.

Assembly

Local onde se junta todas as partes a serem analisadas pelo software.

Step

Local aonde se cria e define os passos de análise para as saídas de dados de interesse.

Interaction

Local onde se especifica o tipo de interação entre as superfícies de contato do modelo.

Load

Local onde se define as forças atuantes no modelo a ser estudado e suas respectivas condições de contorno.

Mesh

Responsável pela criação da malha de elementos finitos.

Optimization

Local onde se pode criar e configurar uma tarefa para aperfeiçoar o modelo a ser estudado.

Job

Local onde se realiza a análise especificada pelo usuário.

Visualization

Onde os resultados obtidos pela análise podem ser observados.

Sketch

Local para a criação de esboços bidimensionais.

Neste capítulo, serão abordados somente os módulos e ferramentas necessários para a modelagem dos problemas propostos no presente relatório.

4.2.1 PART

O usuário usa o módulo *Part* para criar cada parte necessária para a modelagem do problema a ser realizada pelo software. A Fig. 4.2 ilustra a janela de criação de novas partes.

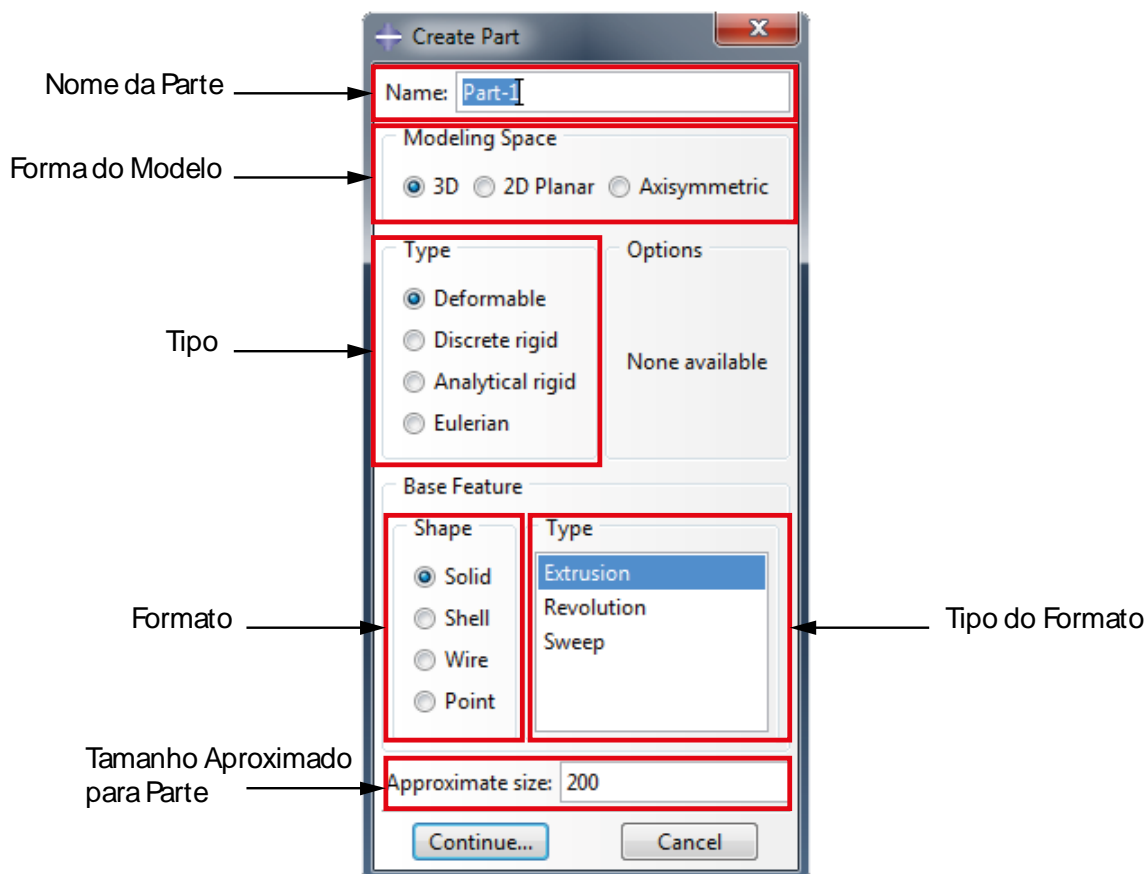


Figura 4.2 – Criação de novas partes.

Ao observar a Fig. 4.2, percebe-se que o Abaqus permite a criação de partes bidimensionais, tridimensionais e axisimétricas. Podendo a parte ser deformável, rígida ou euleriana. A parte pode, ainda, ter formato sólido, casca, fio ou pontual.

É recomendado ao usuário criar várias partes para caracterizar diferentes componentes do modelo.

4.2.2 PROPERTY

Neste módulo, o usuário define o tipo de material a ser analisado, a seção do corpo e atribui essas informações a parte correspondente. A Fig. 4.3 mostra a caixa de ferramenta do módulo *property* e os respectivos significados de seus ícones.

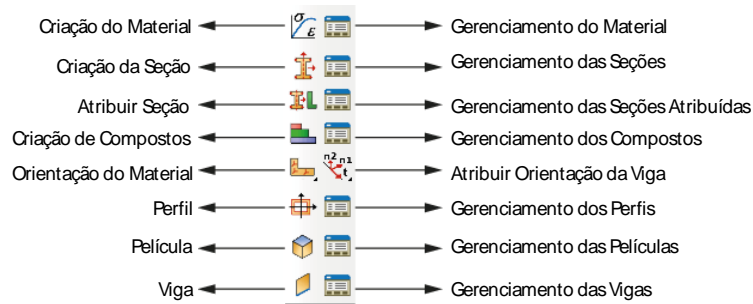


Figura 4.3 – Caixa de ferramentas do módulo *Property*.

O ícone de criação do material permite ao usuário definir o comportamento do material a ser analisado conforme ilustrado na Fig. 4.4.

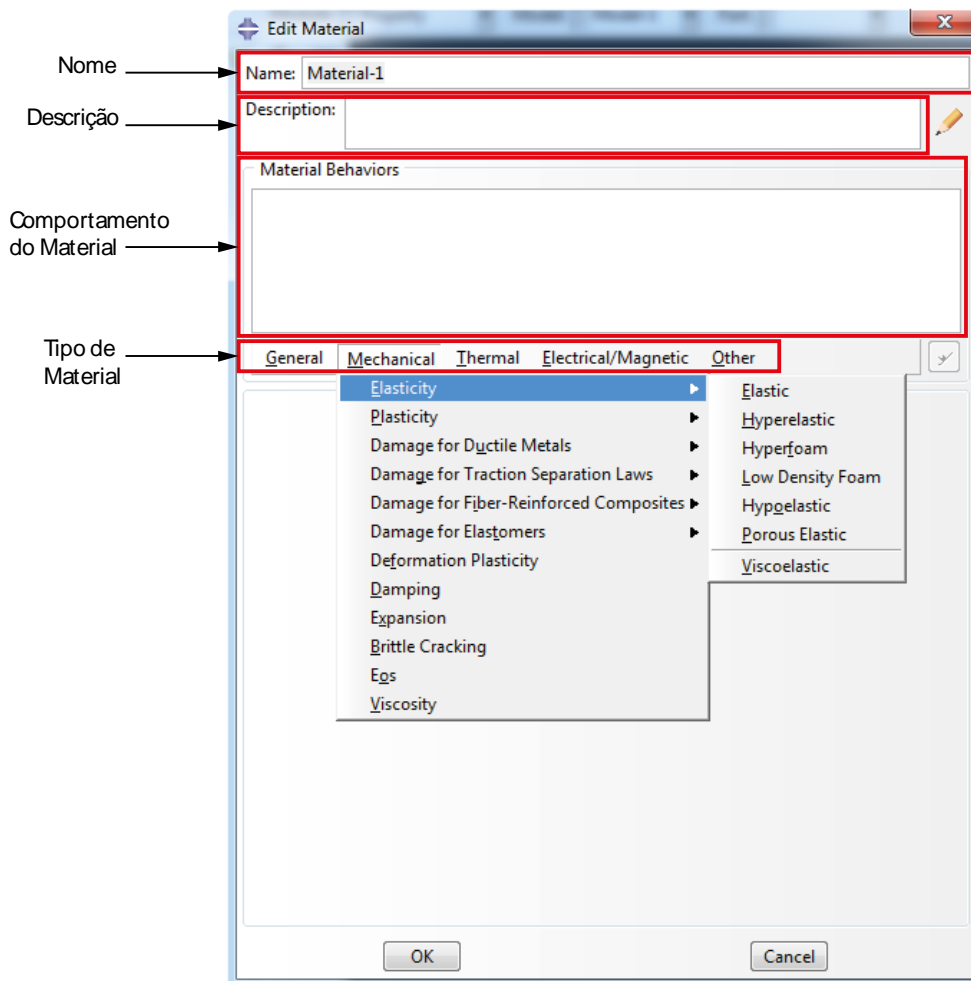


Figura 4.4 – Tipo de material analisado.

Os tipos de materiais podem ser divididos em:

- Geral;
- Mecânicos;
- Térmicos;

- Elétrico/Magnéticos;
- Outros.

Para a simulação do contato de Hertz e atrito seco, somente serão considerados materiais mecânicos isotrópicos com comportamento elástico, sendo necessárias as informações do módulo de Young e coeficiente de Poisson do material conforme pode ser observado na Fig. 4.5.

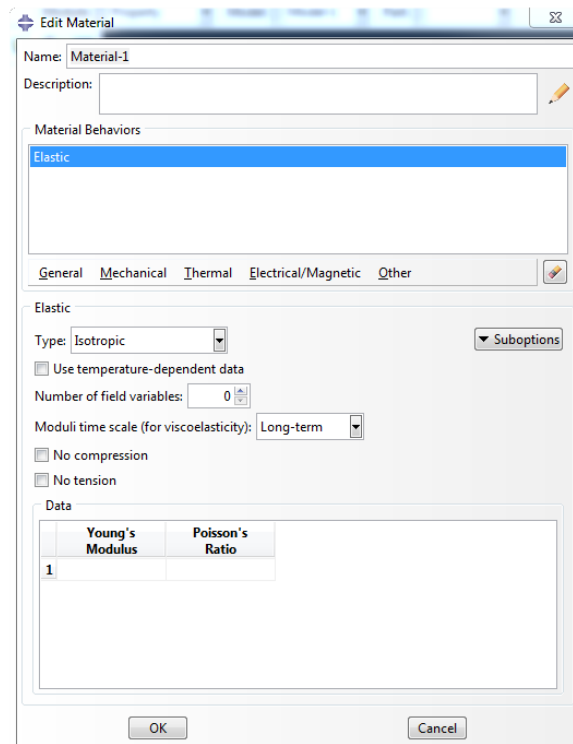


Figura 4.5 – Material mecânico com comportamento elástico.

Após a definição do tipo e comportamento do material, é necessário criar a seção do corpo a ser analisado. A Fig. 4.6 ilustra a categoria do corpo e seu respectivo tipo, sendo que para os fins propostos, somente serão levados em consideração corpos sólidos homogêneos.

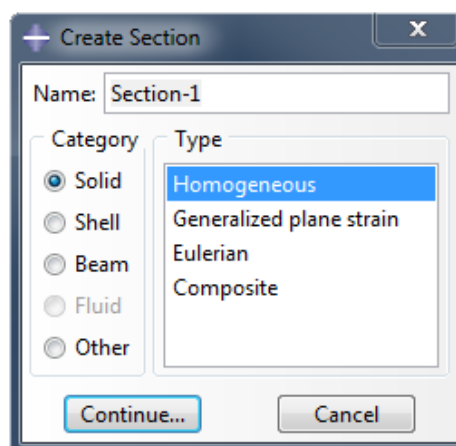


Figura 4.6 – Seção a ser criada para o corpo a ser analisado.

Apertando a tecla *Continue* mostrada na figura 4.6 será aberta outra janela pedindo informação do material da seção, e espessura do estado plano de tensão e deformação. A janela das informações da seção criada está ilustrada na Fig. 4.7.

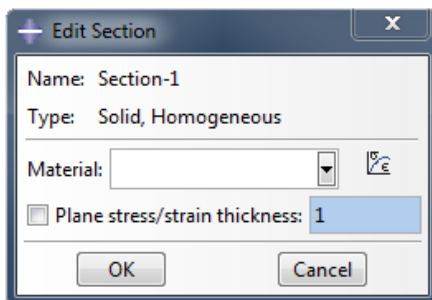


Figura 4.7 – Material e espessura para a seção criada.

Após a criação da seção e escolha do material e espessura, atribui-se a seção a parte desejada através do ícone Atribuir Seção mostrada na Fig. 4.3.

4.2.3 ASSEMBLY

Neste módulo, o usuário pode juntar todas as partes componentes do problema a ser analisado. Visando o melhor entendimento do funcionamento do módulo *Assembly*, pode-se observar a caixa de ferramentas básicas mostrada na Fig. 4.8 com o significado de cada um de seus ícones.

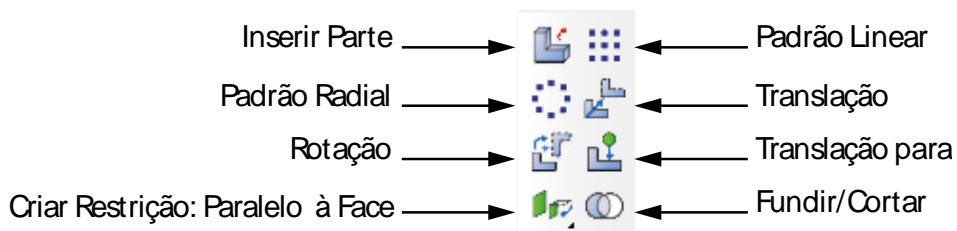


Figura 4.8 – Caixa de ferramenta módulo *Assembly*.

Entrando pelo ícone de Inserir Parte, o usuário pode adicionar as partes necessárias para a solução do problema a ser analisado. A Fig. 4.9 ilustra a janela de inserção das partes, escolhendo-se se a mesma é dependente ou independente da malha.

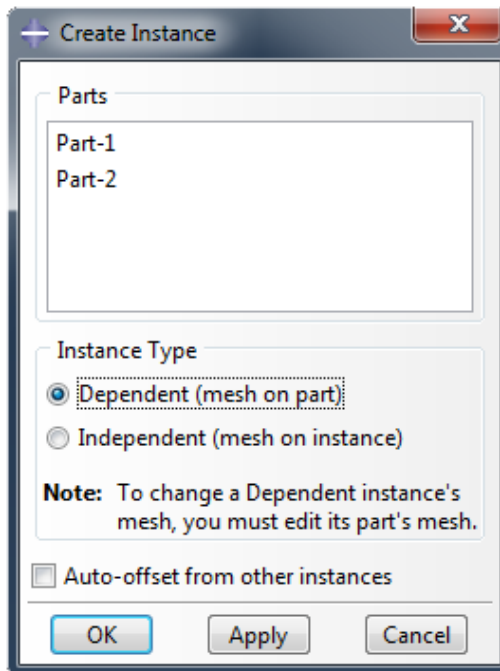


Figura 4.9 – Janela para determinar o tipo de instancia inserido.

O Abaqus sempre cria automaticamente a instancia como dependente de uma parte. Significando que a parte compartilha a geometria e a malha da parte original. No caso do usuário selecionar a instancia independente de uma parte, o usuário pode modificar a geometria e malha da mesma. Na janela ainda pode-se selecionar que o Abaqus distribua as partes de forma a não ficarem uma sobre as outras selecionando a opção *Auto-offset from other instances*.

E através do ícone de Translação na caixa de ferramentas, o usuário pode posicionar as partes conforme a modelagem do problema.

4.2.4 STEP

Em *Step*, a Fig. 4.10 ilustra as principais ferramentas para a modelagem do problema, como: Criar *Step*, Criar Campo de Saídas e Criar Histórico de Saídas.

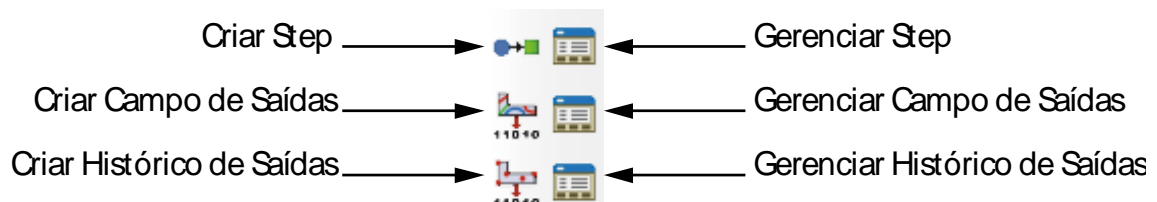


Figura 4.10 – Caixa de ferramentas do módulo *Step*.

O usuário selecionando o ícone de Criar *Step* pode configurar a ordem da análise a ser executada pelo Abaqus sendo que, por definição, o programa possui um passo denominado de passo Inicial,

conforme representado na Fig. 4.11. Pode-se ainda escolher o tipo de procedimento, sendo que para os fins propostos no trabalho, será utilizado somente o caso estático geral.

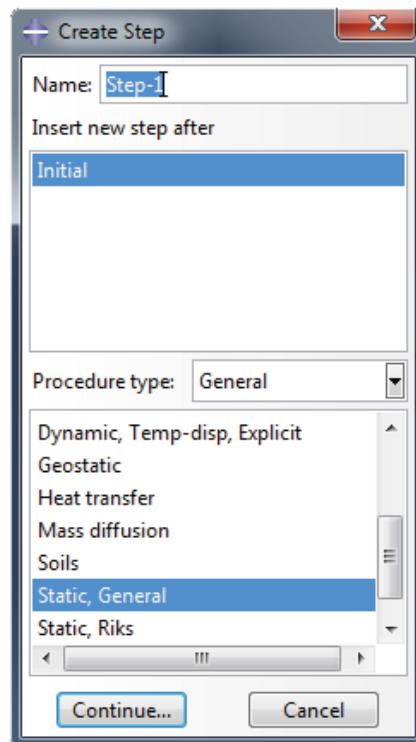


Figura 4.11 – Janela para criar um Step.

No caso estático geral, selecionado pelo usuário, a Fig. 4.12 mostra a aba correspondendo ao básico do *Step* criado. O usuário pode definir o período de tempo do *Step*, o controle para efeitos não lineares e de grandes deslocamentos em Nlgeom, o tipo de estabilização automática e se os efeitos de aquecimento adiabático devem ser incluídos.

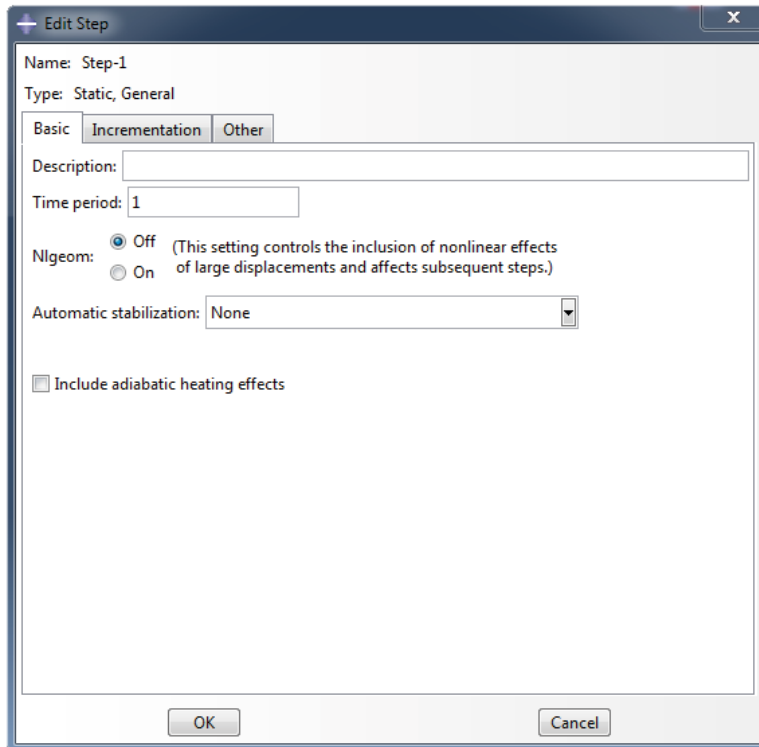


Figura 4.12 – Aba básica de edição do *Step*.

Na aba *Incrementation* mostrada na Fig. 4.13, o usuário pode escolher o tipo de incremento (automático ou fixo), o número máximo de incrementos e o tamanho inicial (definindo valor mínimo e máximo).

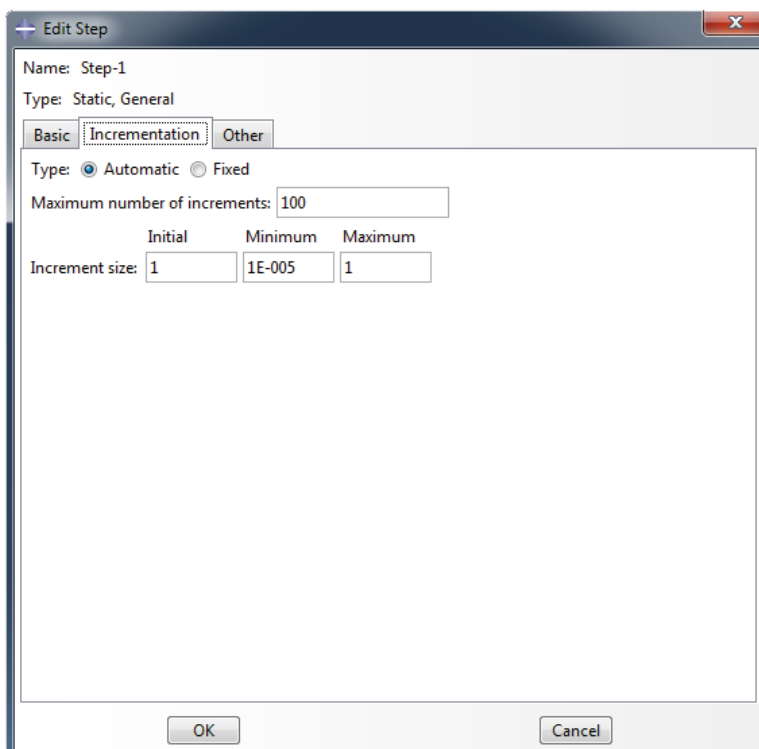


Figura 4.13 – Aba referente ao incremento do *Step*.

Já para a aba da Fig. 4.14, em Equation Solver, o usuário define o método de solução entre direto ou iterativo. Pode-se definir ainda a forma de armazenamento da matriz, podendo ser pré-definido, assimétrico ou simétrico. O método de solução pode ser *Full Newton* ou *Quasi-Newton*, sendo que para o último caso o número de iterações pode ser escolhido. O restante mostrado na Fig. 4.14 não é importante para o escopo do relatório e pode ser mantida como pré-definida pelo Abaqus.

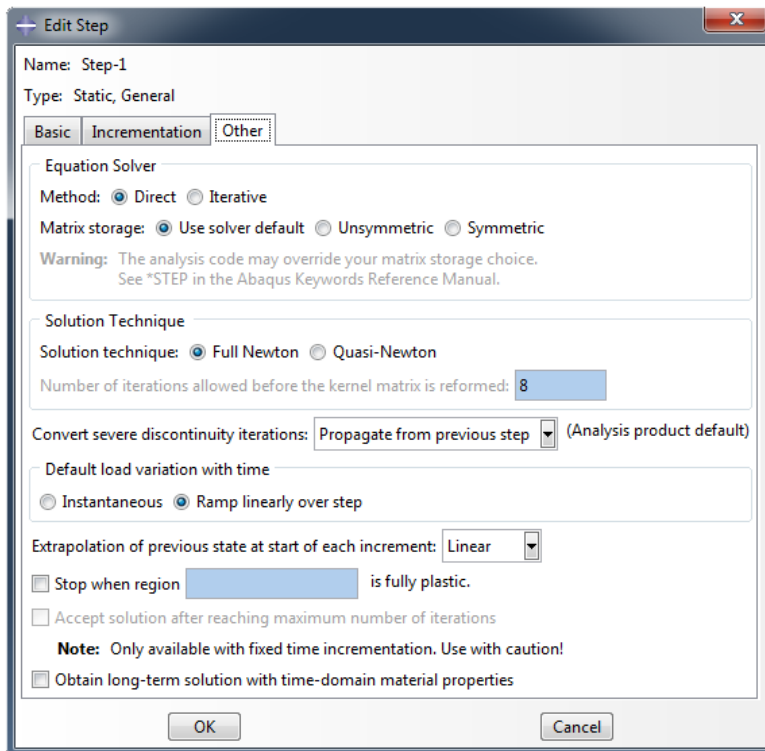


Figura 4.14 – Aba Other da edição do Step.

No menu de ferramentas pode ainda ser definido os dados que o usuário pretende extrair do problema a ser analisado após a definição do Step conforme mostrado na Fig. 4.15. Após a escolha do nome e do Step, a Fig. 4.16 mostra as opções de dados a serem obtidos do problema.

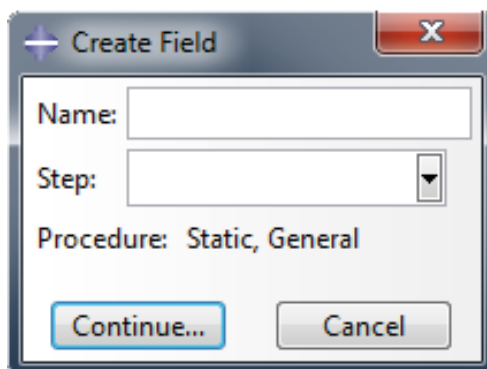


Figura 4.15 – Criação dos dados a serem extraídos para determinado Step.

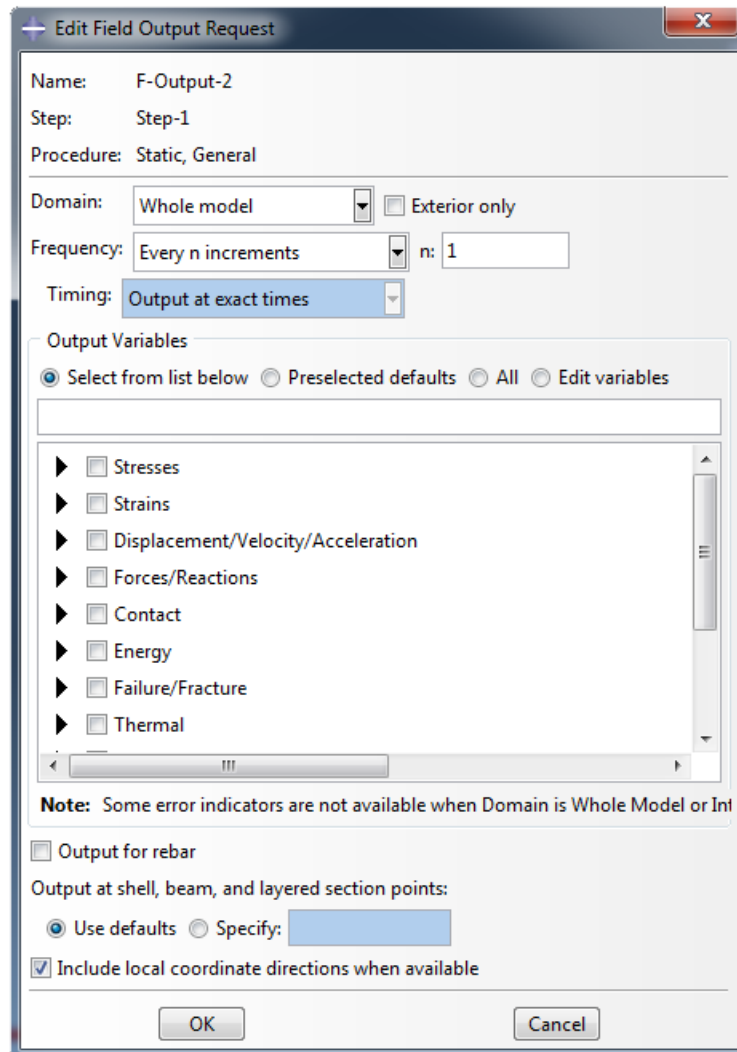


Figura 4.16 – Campo de resultados requeridos pelo usuário.

Analisando a Fig. 4.16, o domínio dos resultados pode variar para todo o modelo, a um conjunto determinado, a carga no parafuso, aos materiais compostos, entre outros. A frequência pode ser especificada de acordo com o número de incrementos. As variáveis podem ser selecionadas da lista mostrada com o usuário definindo o que importa na sua análise. Neste relatório os valores selecionados serão das reações e tensões na superfície de contato.

4.2.5 INTERACTION

No módulo *Interaction*, pode ser definido o contato entre superfícies de um mesmo corpo ou de corpos diferentes. A barra de ferramenta referente a este módulo está ilustrada na Fig. 4.17 com o significado de cada um de seus ícones.

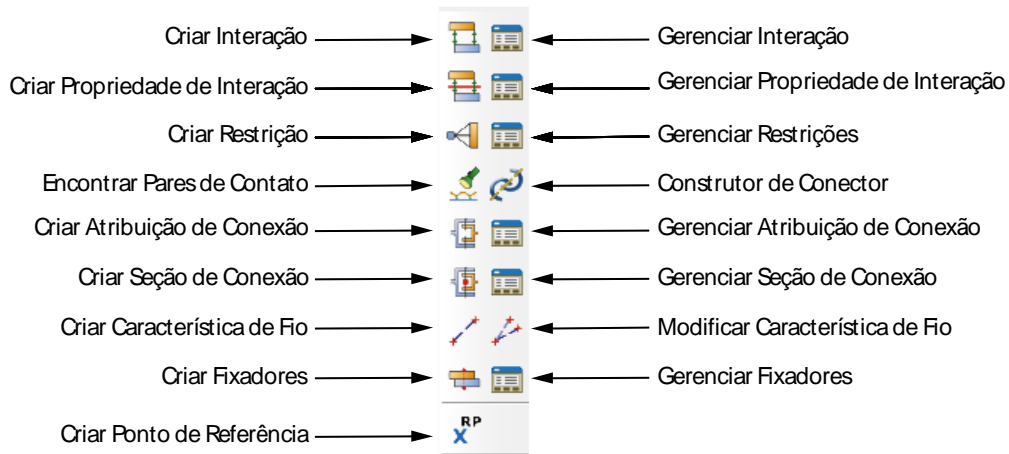


Figura 4.17 – Barra de ferramentas do módulo de *Interaction*.

Ao selecionar o ícone Criar Interação, pode-se escolher o nome, *Step* e o tipo de contato. O contato pode ser para o *Step* Inicial ou para o *Step* criado e, em qualquer caso, pode ser propagado para todos os demais *Steps*. Inicialmente, o contato escolhido para dois corpos de superfícies distintas será o de *Surface-to-Surface*, exigindo a seleção de uma superfície *master* e de outra *slave* e, após a escolha destas, uma janela de edição de interação será aberta conforme ilustrado na Fig. 4.18.

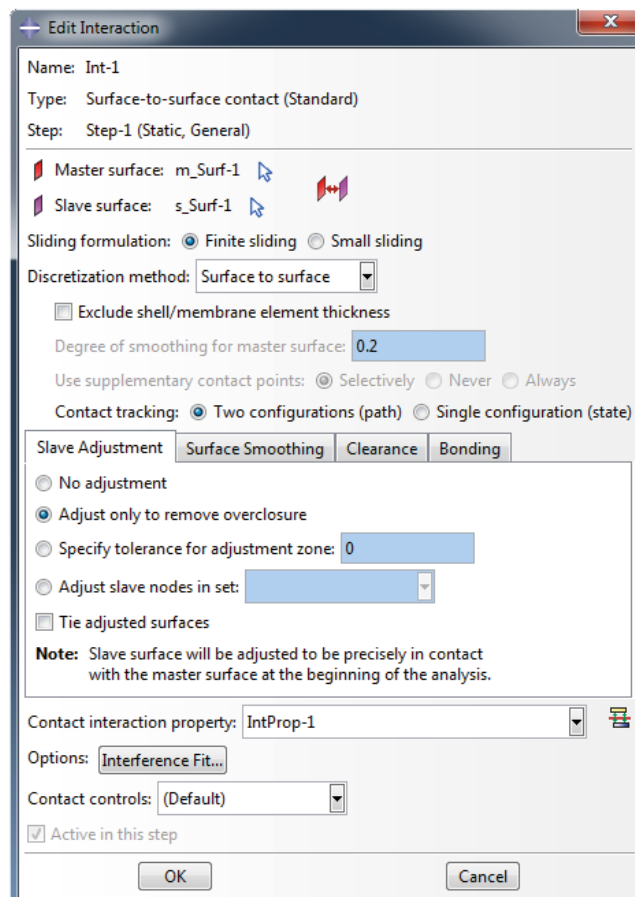


Figura 4.18 – Janela de edição de interação entre superfícies.

Conforme observado na Fig. 4.18, pode-se alterar a condição da superfície (*master* ou *slave*), o tipo da formulação de deslizamento (*Finite Sliding* ou *Small Sliding*), o método de discretização (*Surface-to-Surface* ou *Node-to-Surface*) e vários outros parâmetros que não precisam ser mencionados aqui, podendo-se deixar como pré-selecionados pelo Abaqus. Para uma melhor compreensão da janela de edição de interação entre superfícies, alguns de seus componentes serão explicados a seguir.

Aproximação Small-Sliding

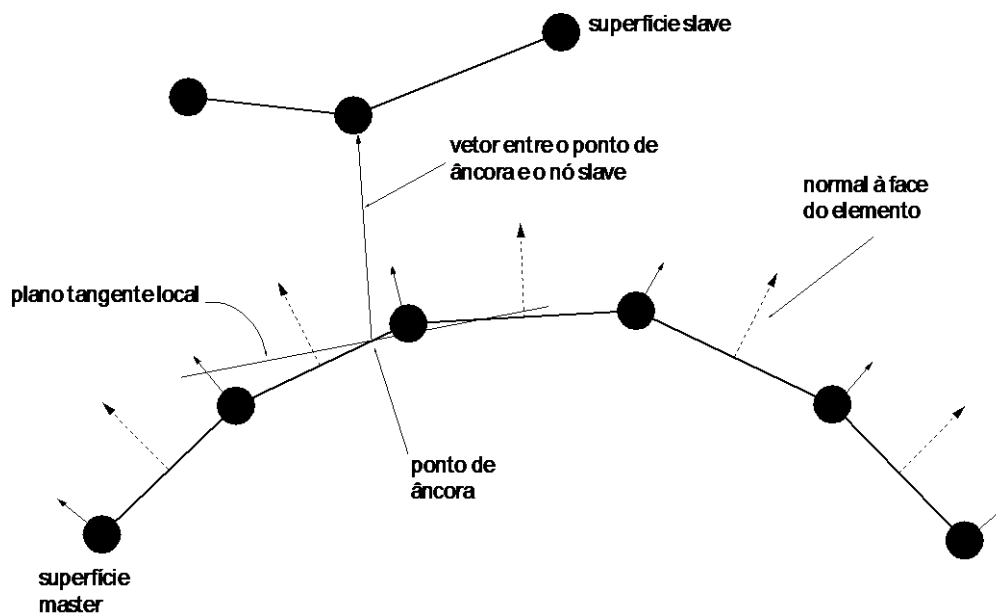


Figura 4.19 – Plano tangente local para Small-Sliding com discretização Node-to-Surface.

A aproximação *Small-Sliding* ocorre quando não houver um grande movimento relativo entre as superfícies envolvidas no contato. Aproximando a superfície mestre por um plano tangente local para cada nó da superfície slave. Observando a Fig. 4.19, pode-se notar que o plano tangente é definido por um ponto de âncora na superfície mestre e por um vetor direção. O vetor normal ao plano tangente passa através do respectivo nó na superfície slave definindo a direção de contato. O Abaqus utiliza um algoritmo para definir estes planos locais tangentes.

Este algoritmo é:

1. Definido pelas normais de cada nó da superfície mestre envolvida na definição do contato. E as faces normais dos elementos adjacentes ao contato são obtidas através de uma média.
2. O ponto de âncora é escolhido tal que o vetor entre o nó slave e o ponto sejam aproximadamente iguais a um dos vetores nodais normais.
3. O plano tangente local é ortogonal ao vetor entre o nó slave e o ponto de âncora.

Trata-se de uma aproximação menos dispendiosa do ponto de vista computacional, pois o Abaqus aproxima a interação e transferência de carga através de um nó e um plano tangente local, não forçando a análise através de toda superfície mestre definida para possíveis locais de contato.

Para o caso de grandes deformações, não é recomendado à utilização deste método de aproximação, pois a aproximação da superfície master por planos tangentes locais pode apresentar distorções.

Aproximação *Finite-Sliding*

É um método dispendioso do ponto de vista computacional, pois o Abaqus calcula todos os nós das superfícies master e slave em contato. Para evitar resultados errôneos, esse método é aplicado quando grandes deslocamentos entre as superfícies de contato ocorrerem.

Métodos de discretização

O Abaqus utiliza dois métodos de discretização:

- Discretização *Node-to-Surface*: Impõe o contato a um particular nó na superfície slave e um ponto de projeção na superfície master.
- Discretização *Surface-to-Surface*: Define uma área de possível contato entre a superfície slave e master.

De acordo com o manual do Abaqus, não justifica o uso do método de discretização *Node-to-Surface*, pois o erro é maior na região de pressão de contato, conforme mostrado na Tab. 4.1.

Tabela 4.1 – Erros associados ao método de discretização na pressão de contato.

Discretização	Superfície <i>Slave</i>	Erro máximo na pressão de contato
<i>Node-to-Slave</i>	Corpo Superior	13%
	Corpo Inferior	31%
<i>Surface-to-Surface</i>	Corpo Superior	~1%
	Corpo Inferior	~1%

De acordo com o manual do Abaqus, não justifica o uso do método de discretização *Node-to-Surface*, pois o erro é maior na região de pressão de contato, conforme mostrado na Tab. 4.1.

4.2.6 Load

Para a análise de Elementos Finitos, é importante definir o tipo de carregamento ao qual o modelo está submetido e suas condições de contorno. A Fig. 4.20 ilustra a barra de ferramenta utilizada para determinar o carregamento e as condições de contorno para os fins propostos neste relatório.

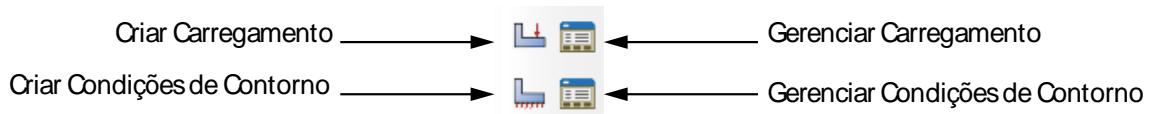


Figura 4.20 – Barra de ferramentas utilizadas no módulo *Load*.

Selecionando Criar Carregamento, o usuário pode escolher o nome do carregamento, *Step*, categoria e tipo de força vide Fig. 4.21. Serão consideradas, neste relatório, forças concentradas de categoria mecânica para o caso do Contato de Hertz e forças distribuídas da categoria mecânica para o caso referente ao atrito seco.

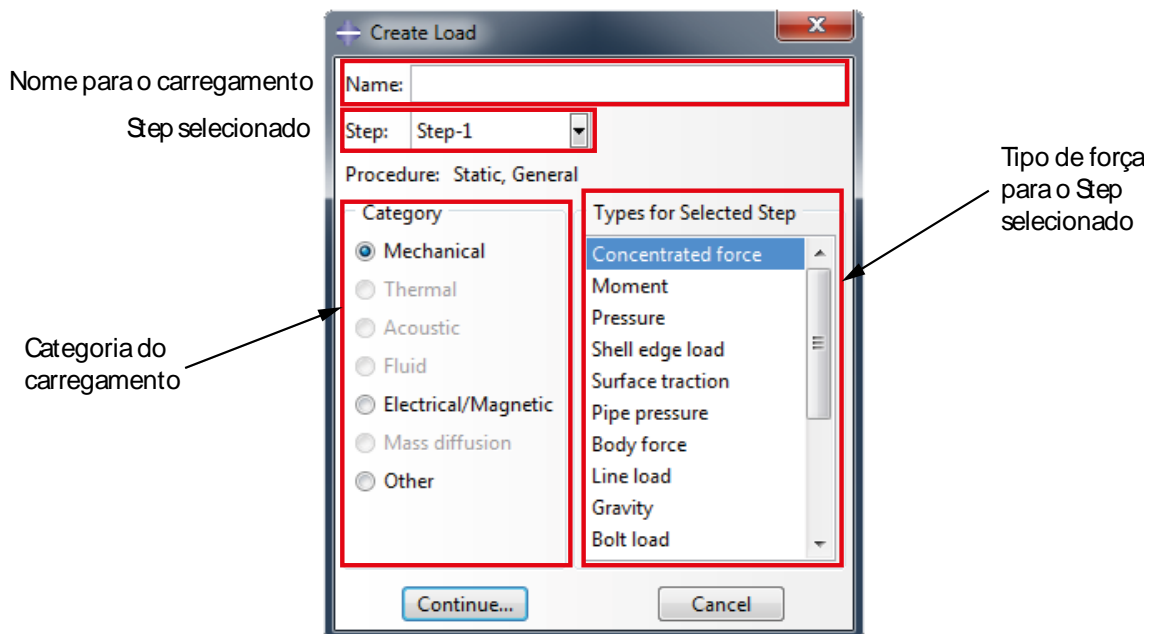


Figura 4.21 – Janela para definição do carregamento.

Após posicionar todas as forças ao qual o modelo será submetido, deve-se, agora, definir as condições de contorno do problema, selecionando Criar Condições de Contorno na barra de tarefas. O usuário tem liberdade para escolher o nome, categoria, *Step* e tipo de condição de contorno que caracterizam o objeto de estudo. A janela referente às condições está ilustrada na Fig. 4.22.

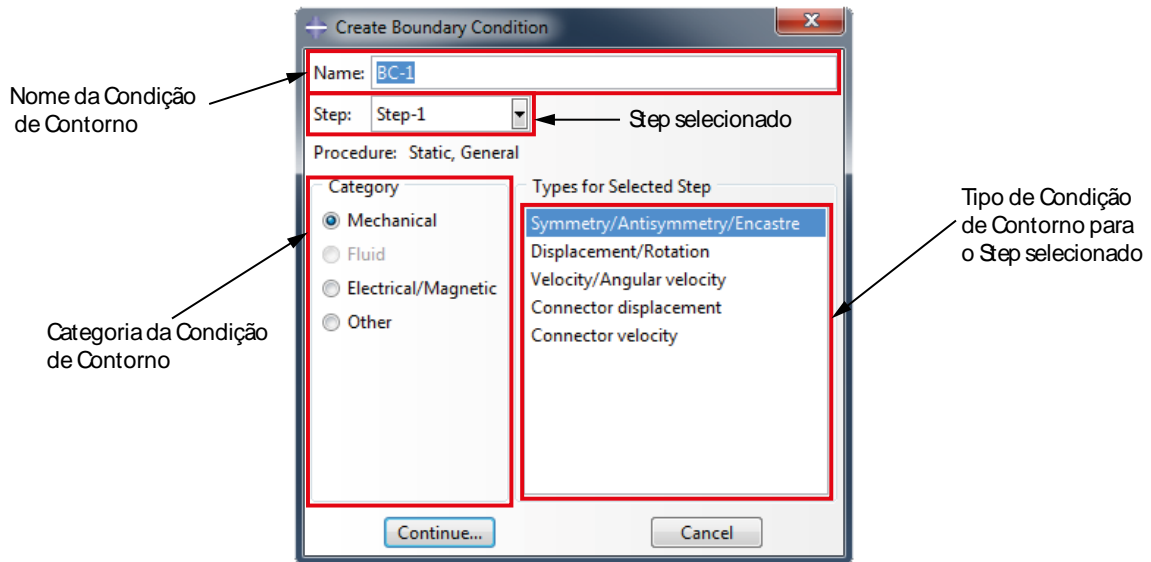


Figura 4.22 – Janela para a criação das condições de contorno.

4.2.7 Mesh

A discretização do problema é feita a partir do módulo *Mesh*. Neste módulo, o usuário poderá usar a seguinte barra de ferramentas ilustrada na Fig. 4.23 para o problema estudado neste relatório.

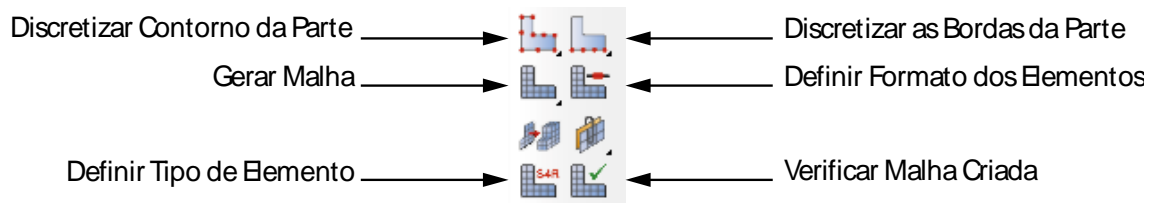


Figura 4.23 – Barra de ferramenta do módulo *Mesh*.

Pode-se Discretizar Contorno da Parte toda selecionando este ícone na barra de ferramentas ou a partir de determinadas bordas. Caso seja selecionado o ícone para Discretizar Contorno da Parte, pode-se observar na Fig. 4.24 que representa sua janela.

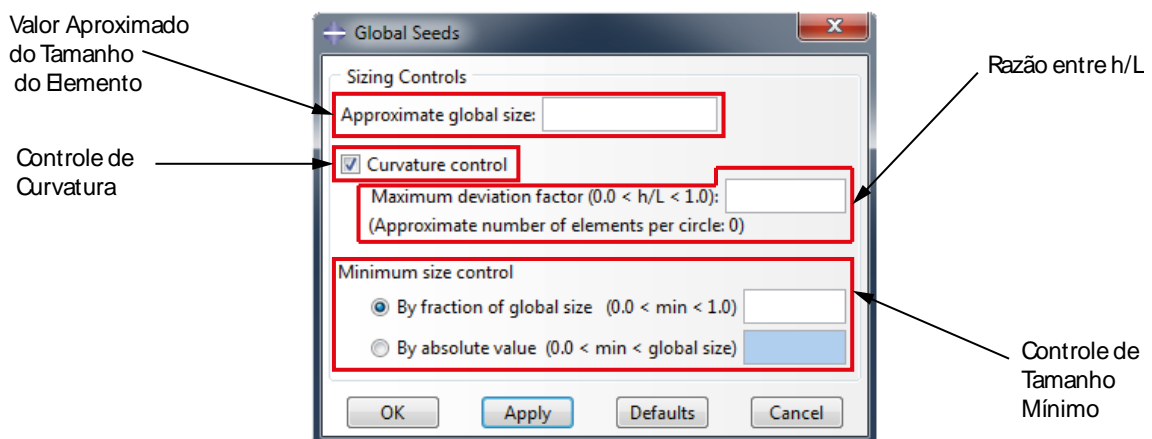


Figura 4.24 – Janela para discretização de toda parte.

Em Valor Aproximado do Tamanho do Elemento, é escolhido o tamanho que o elemento deve ter para o contorno da parte. Se a superfície de contorno for curva, é interessante deixar marcado *Curvature Control* para o Abaqus distribuir o elemento de maneira uniforme sobre esta superfície. A razão h/L é determinada conforme pode ser observado na Fig. 4.25, significando que quanto maior for o valor de h , maior será a razão, tendendo a 1. Para o caso de uma distância h próxima à curvatura, menor será a razão, tendendo próximo de zero. Em Controle de Tamanho Mínimo, pode-se evitar refinamento excessivo em locais de curvatura sem interesse para o problema.

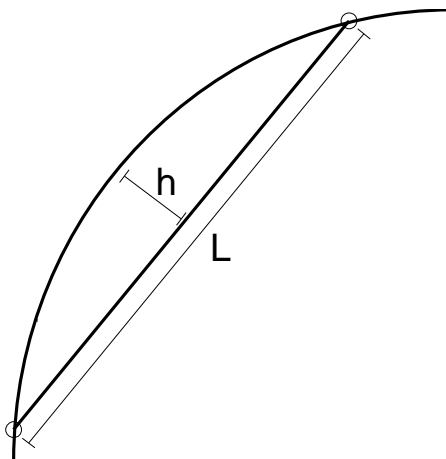


Figura 4.25 – Distância h do elemento L a superfície curva.

Para o caso de selecionar o ícone Discretizar Bordas da Parte, a Fig. 4.26 será aberta. Trata-se de uma forma de escolher os elementos para o contorno de cada parte da superfície do corpo. Todas as funções são parecidas com as explicadas para o caso representado na Fig. 4.25. Com a diferença de que se pode selecionar o número de elementos sobre o contorno desejado.

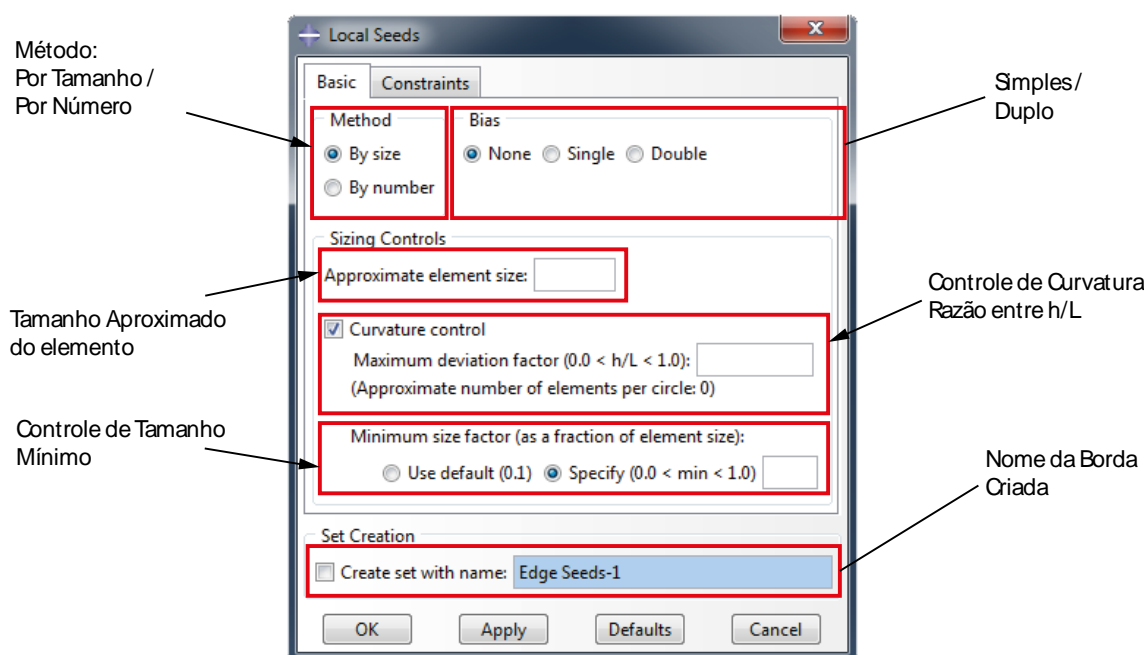


Figura 4.26 – Janela para discretização de bordas específicas da parte.

Após definir o tipo de discretização a ser realizada pelo Abaqus, pode-se escolher a forma do elemento finito através do ícone Definir Formato dos Elementos na barra de ferramenta. A figura 4.28 apresenta os tipos de elementos finitos usados para o Abaqus no caso bidimensional. O Abaqus permite o uso de elementos *Quad*, *Quad-Dominated* e *Tri*. Sendo que os elementos *Quad*, são de formato quadrilateral, os *Quad-Dominated* são quadrilaterais permitindo transição em elementos triangulares e *Tri* são elementos triangulares. Os três tipos são apresentados nas Figs. 4.27, 4.28 e 4.29 respectivamente.

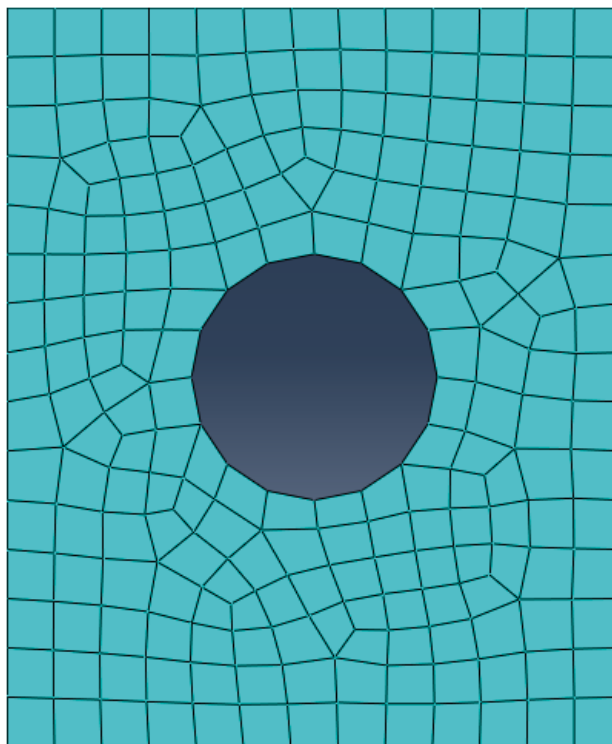


Figura 4.27 – Elementos *Quad*.

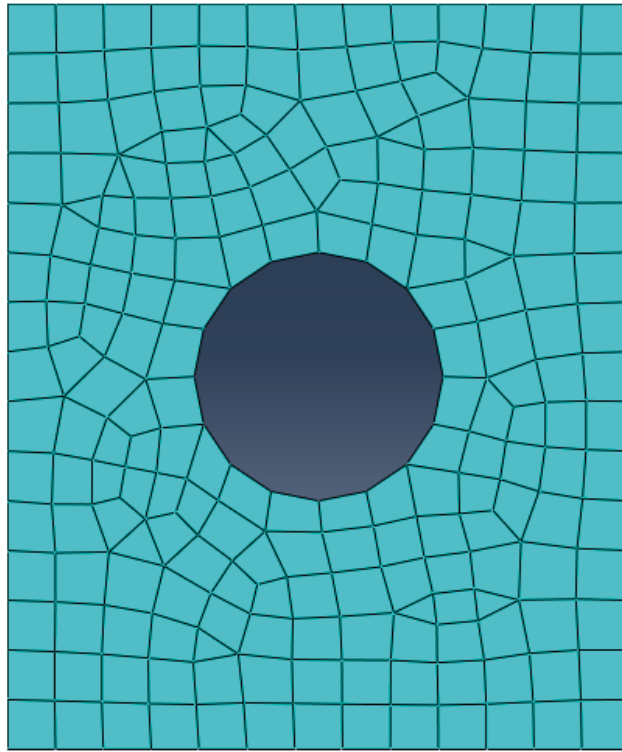


Figura 4.28 – Elementos *Quad-Dominated*.

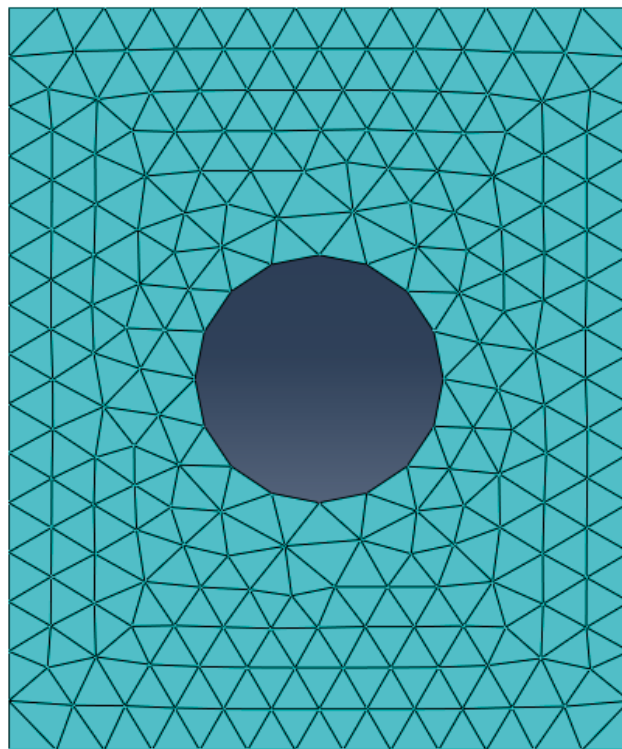


Figura 4.29 – Elementos *Tri*.

No módulo *Mesh*, ainda é possível definir se os elementos são lineares ou quadráticos através do ícone Definir Tipo de Elemento localizado na caixa de ferramentas. A Fig. 4.30 ilustra a janela para esta seleção e com outras funções explicadas conforme a necessidade para os fins propostos por este trabalho.

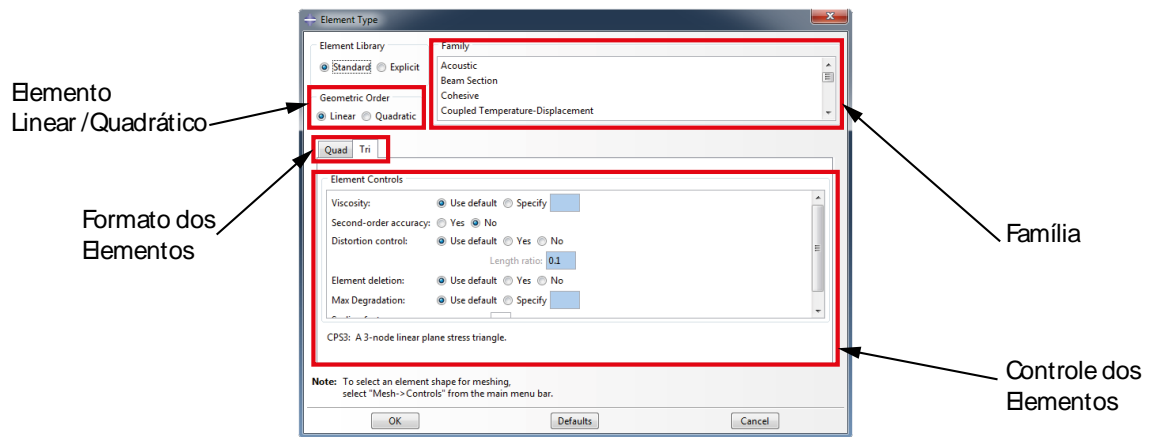


Figura 4.30 – Janela para escolha dos tipos de elementos.

Analisando a figura 4.31, o Abaqus permite a escolha da família de elementos, tipo (linear ou quadrático), formato (quadrilateral ou triangular) e controle dos elementos. Em geral, deve-se, para o problema de Contato de Hertz e atrito seco, manter o controle dos elementos pré-estabelecidos pelo programa, lembrando-se de retirar o ícone de integração reduzida.

4.2.8 JOB

Em *Job*, o Abaqus realizará a análise de Elementos Finitos pré-estabelecida pelos módulos anteriores. A caixa de ferramenta deste módulo é ilustrada pela figura 4.31.

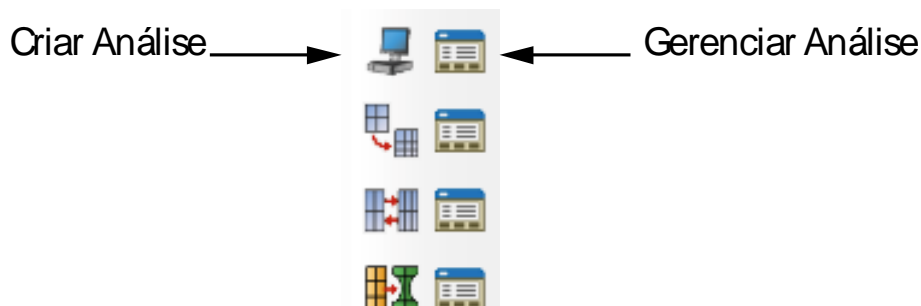


Figura 4.31 – Barra de ferramentas do módulo *Job*.

Selecionando o ícone Criar Análise ilustrada na figura 4.32, podem-se criar diferentes análises para diversas situações. Não há muito que ser explicado nesta seção, deixando pré-definida toda a configuração mostrada pelo Abaqus.

4.2.9 VISUALIZATION

No módulo *Visualization*, os resultados gerados pela análise podem ser observados e extraídos através dos dados de interesse. Para poder extrair os dados de alguma região específica, recomenda-se

o uso do comando *Path*, selecionado da seguinte forma: *Tools* → *Path* → *Create*. Após a seleção deste comando, a seguinte janela será apresentada, conforme ilustrado na Fig. 4.32.

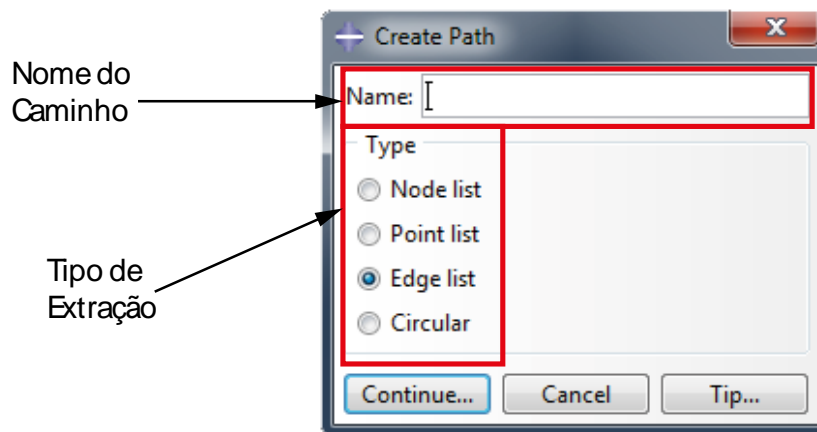


Figura 4.32 – Comando de *Path* para obtenção de dados.

Os dados podem ser extraídos através de uma lista com os nós, pontos, bordas ou circular. E após realizada a extração dos dados, pode-se plotar através de gráficos ou transportar para uma planilha do programa Excel, através da seguinte sequência de comandos: *Plug-ins*→*Tools*→*Excel Utilities...*, presente na barra de menus do Abaqus no módulo *Visualization*.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, apresentam-se as simulações numéricas via Abaqus CAE do problema elástico de contato de Hertz em cilindros no caso 2D e 3D com rotação de 0, 30 e 90 graus, a validação da curva de plasticidade do Al 7075-T651, o problema elasto-plástico para o contato de Hertz 3D com rotação de 30 graus e um problema envolvendo atrito seco.

Alguns dos problemas propostos possuem solução analítica, facilitando a comparação dos resultados obtidos com o resultado esperado. Com a validação destes resultados, pretende-se chegar neste capítulo a curva de tensão-deformação para o caso de contato entre cilindros com rotação de 30°, importante para o estudo de contato entre fios de cabos condutores de energia elétrica.

5.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO CONTATO DE HERTZ ELÁSTICO

Nesta seção é apresentada a simulação de contato de Hertz, condições de contorno utilizadas, dados do cabo analisado e discutido os resultados do contato elástico.

5.1.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema pode ser descrito como contato entre dois cilindros de material isotrópico, homogêneo e linear elástico em contato, comprimidos por um deslocamento uniforme d distribuído sobre o diâmetro de cada cilindro conforme Fig. 5.1.

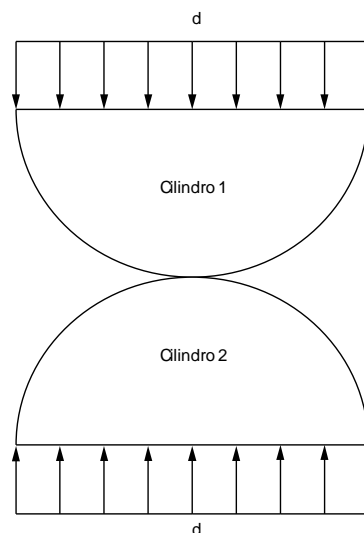


Figura 5.1 – Contato 2D entre cilindros comprimidos por um deslocamento uniforme d .

O contato foi simulado através de dois cilindros de alumínio com as características dimensionais apresentadas na Tab. 5.1 e construção de sua geometria pela Fig. 5.2. Observa-se que na tabela a variável d é o deslocamento de compressão submetido nos cilindros conforme Fig. 5.1.

Tabela 5.1 – Dados para contato entre cilindros.

d (mm)	0,0137
Módulo de Elasticidade (N/mm^2)	71.000
Coefficiente de Poisson	0,33
Raio R_1 do cilindro (mm)	4,27
Raio R_2 do cilindro (mm)	4,27

A geometria do problema possibilita o estudo de contato entre cilindros 3D com eixos de simetria paralelos através da simplificação do modelo para o caso 2D, devendo o valor de pressão máxima p_0 ser o mesmo (Johnson, 1985).

5.1.2 MODELAGEM DO PROBLEMA

O problema proposto foi analisado pelo Abaqus CAE e os resultados obtidos comparados graficamente com as soluções analíticas do contato de Hertz no Capítulo 3.

Através do módulo *Part* foi criado o cilindro com raio de 4,27 mm e particionado sua superfície conforme apresentado na Fig. 5.2 com o objetivo de gerar uma malha quadrilateral estruturada conforme observado na Fig. 5.4 do caso 2D.

A malha estruturada apresentada na Fig. 5.4 foi utilizada na criação de um modelo global como forma de primeira aproximação de resultados. Com posse dos valores do modelo global, é possível criar um submodelo dentro do Abaqus para o refinamento da região de interesse, sendo interessante do ponto de vista computacional do problema devido ao grande número de elementos gerados no modelo tridimensional.

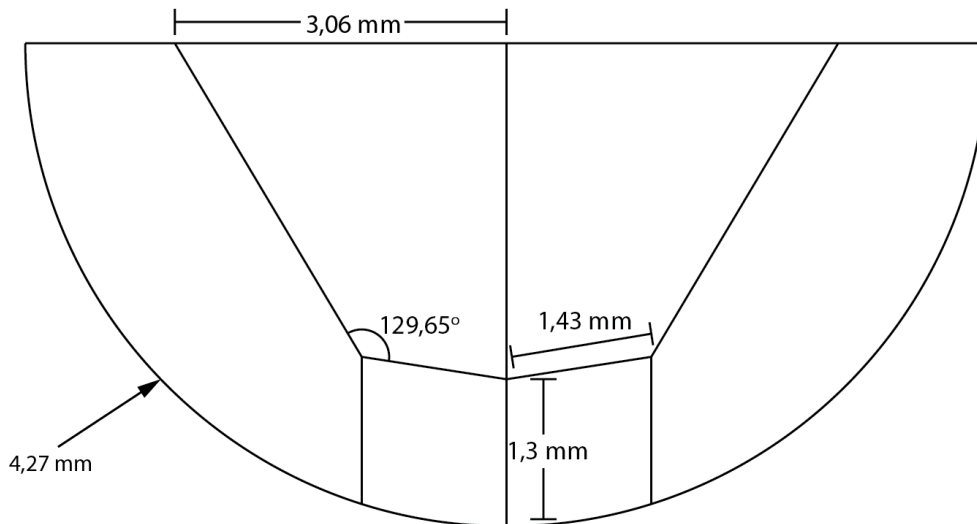


Figura 5.2 – Cilindro particionado e suas dimensões.

Os cilindros foram modelados como superfícies deformáveis em contato e montados através do módulo *Assembly*. A Fig. 5.3 ilustra a montagem do problema de contato realizada pelo programa.

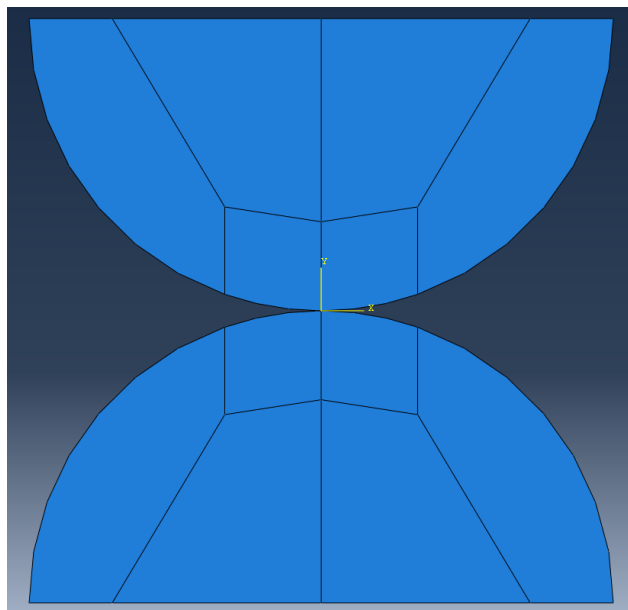


Figura 5.3 – Representação do problema 2D via Abaqus.

O valor do módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson (Tab. 5.1) foram inseridos no módulo *Property*. A interação entre as superfícies foi criada através do módulo *Interaction*, com comportamento normal e tangencial sem atrito conforme hipótese apresentada por Hertz com algoritmo de contato *surface-to-surface*.

A malha criada sobre o cilindro possui elementos do tipo CPE4R (elementos quadrilaterais para caso plano de deformação) e está representada na Fig. 5.4. Os deslocamentos de magnitude d foram posicionadas sobre cada nó da malha conforme Fig. 5.5.

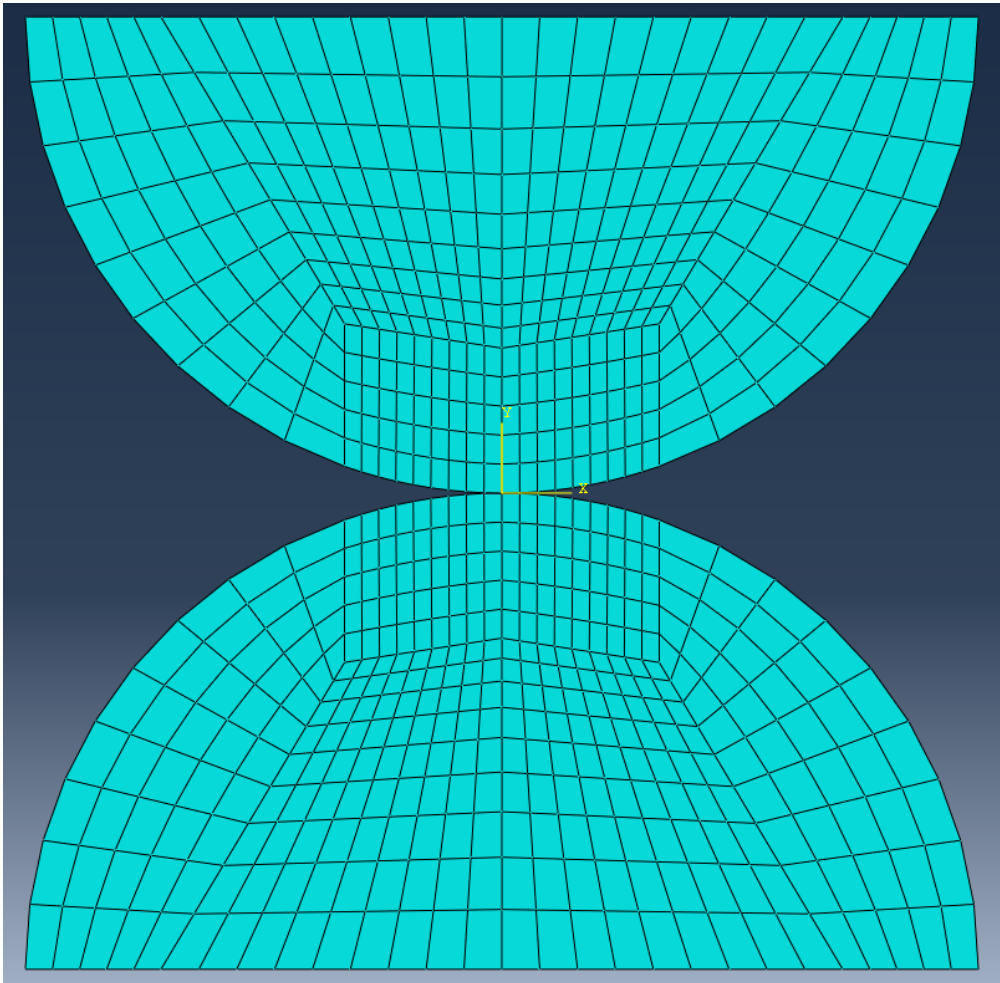


Figura 5.4 – Malha estrutura gerada sobre os cilindros.

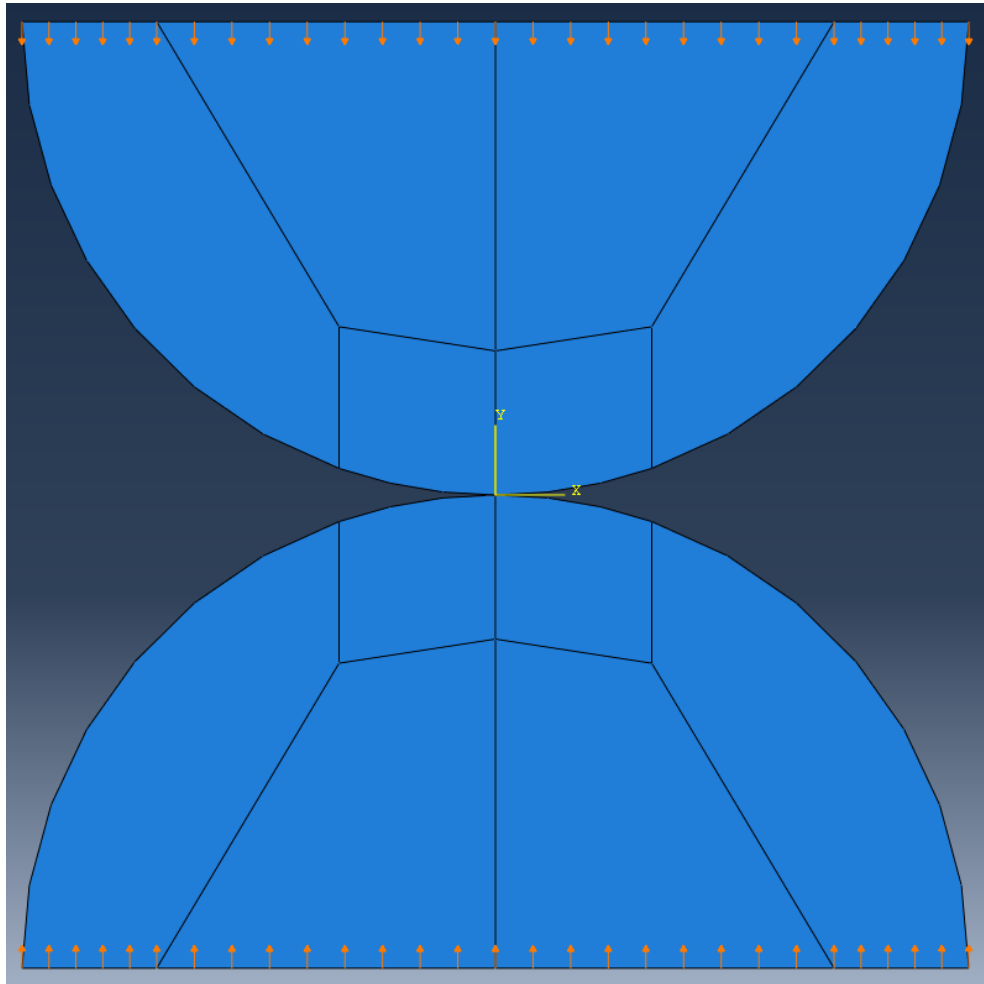


Figura 5.5 – Representação da posição dos deslocamentos sobre os diâmetros dos cilindros.

O problema foi analisado com o uso do Abaqus/Explicit, por este ser mais eficiente na análise do algoritmo de contato *master-slave*, dando uma solução estável neste caso. (Lévesque *et al*, 2011).

O caso de contato estudado foi analisado em dois passos. Primeiramente, foi feita uma análise global do problema com o uso de uma malha mais grosseira conforme apresentado na Fig. 5.4. Após esta primeira análise, foi criado um submodelo com o comando *Submodel* presente no Abaqus, com as condições de contorno destacadas por quadrados amarelos apresentada na Fig. 5.6 e malha estruturada na Fig. 5.7. A partir dos resultados apresentados no submodelo, pode-se refinar a malha com 60 e 120 elementos em contato para verificar a convergência da solução numérica para os resultados analíticos.

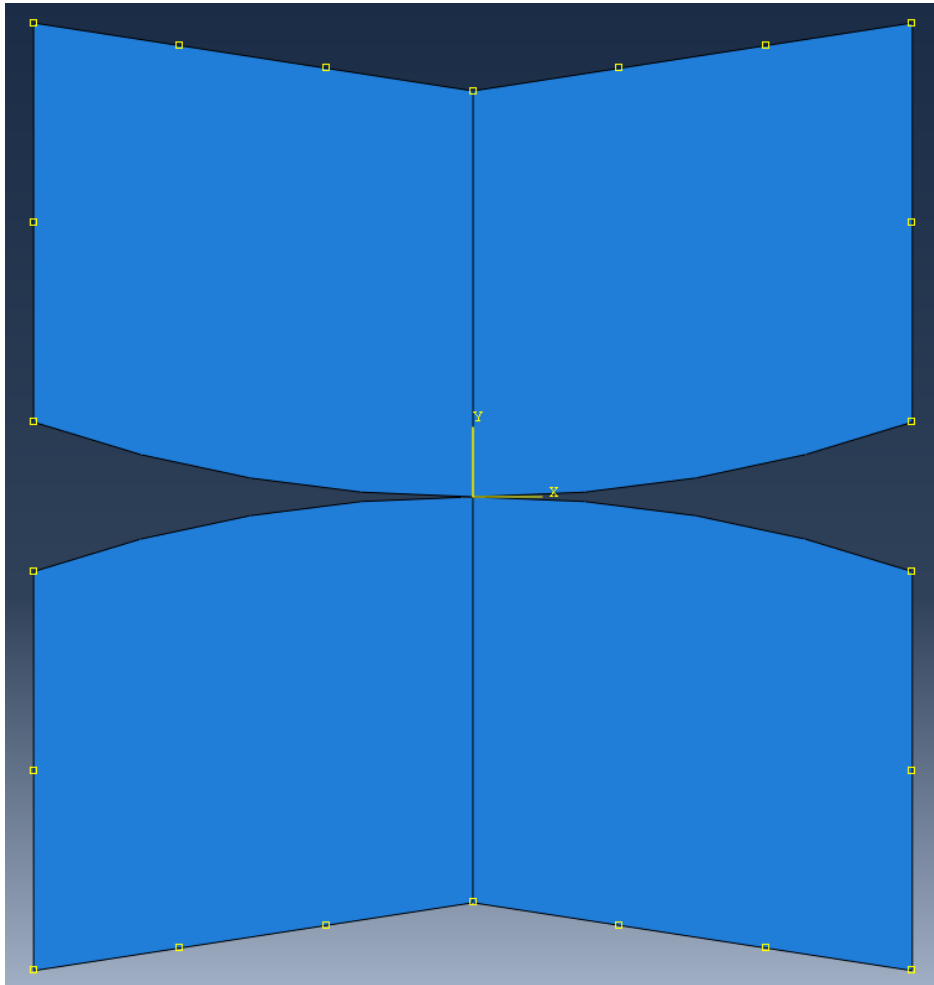


Figura 5.6 – Condições de contorno para o submodelo.

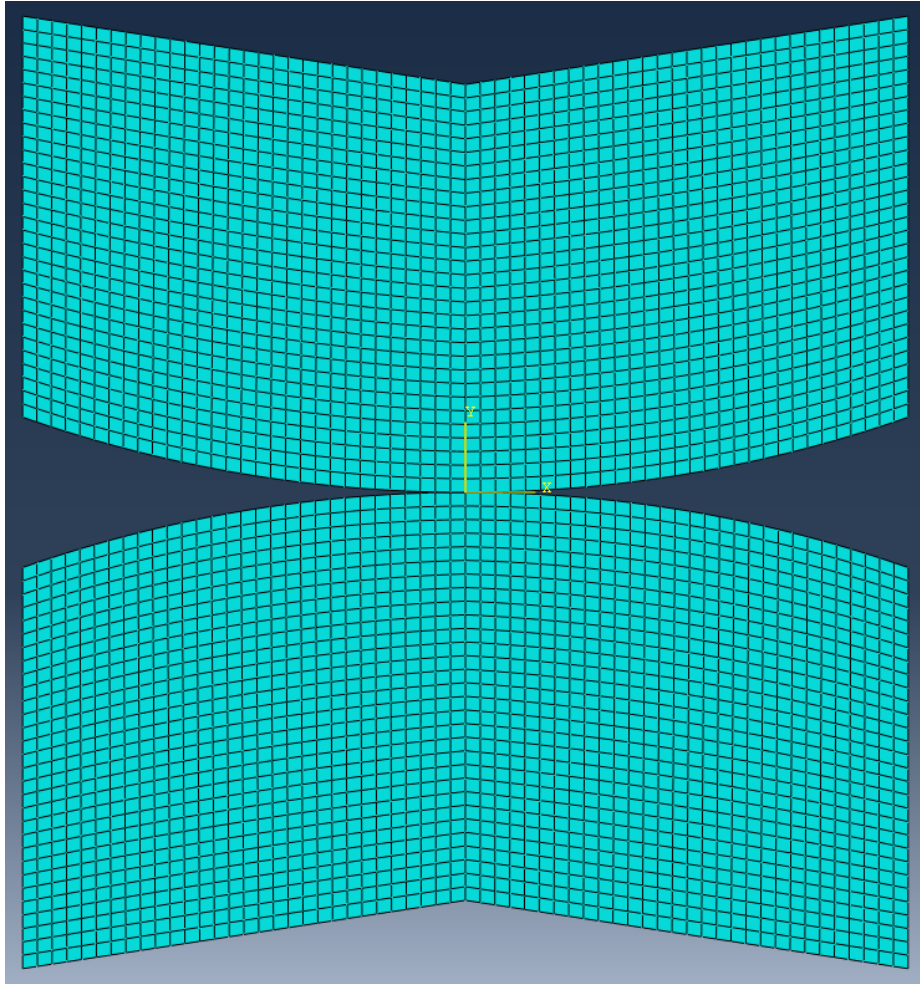


Figura 5.7 – Malha estruturada para o submodelo.

Os mesmos passos foram utilizados para a criação do modelo de contato entre cilindros 3D, sendo que para este caso os cilindros foram modelados com um comprimento de 12 mm. As condições de contorno foram aplicadas com restrição de deslocamento nas extremidades em relação ao eixo z, conforme ilustra a Fig. 5.8.

O submodelo foi gerado através de um corte da extremidade lateral esquerda do cilindro da figura 5.8 com direção no eixo z e sentido negativo e após realizado um corte com direção no eixo x e sentido negativo tomando como referência o plano yz. Com o submodelo resultante apresentado na figura 5.9, foi possível aplicar as condições de contorno com restrição de deslocamento das extremidades em relação ao eixo z e em todas as superfícies que fazem contato com o modelo global, sendo estas representadas pelos quadrados amarelos da figura.

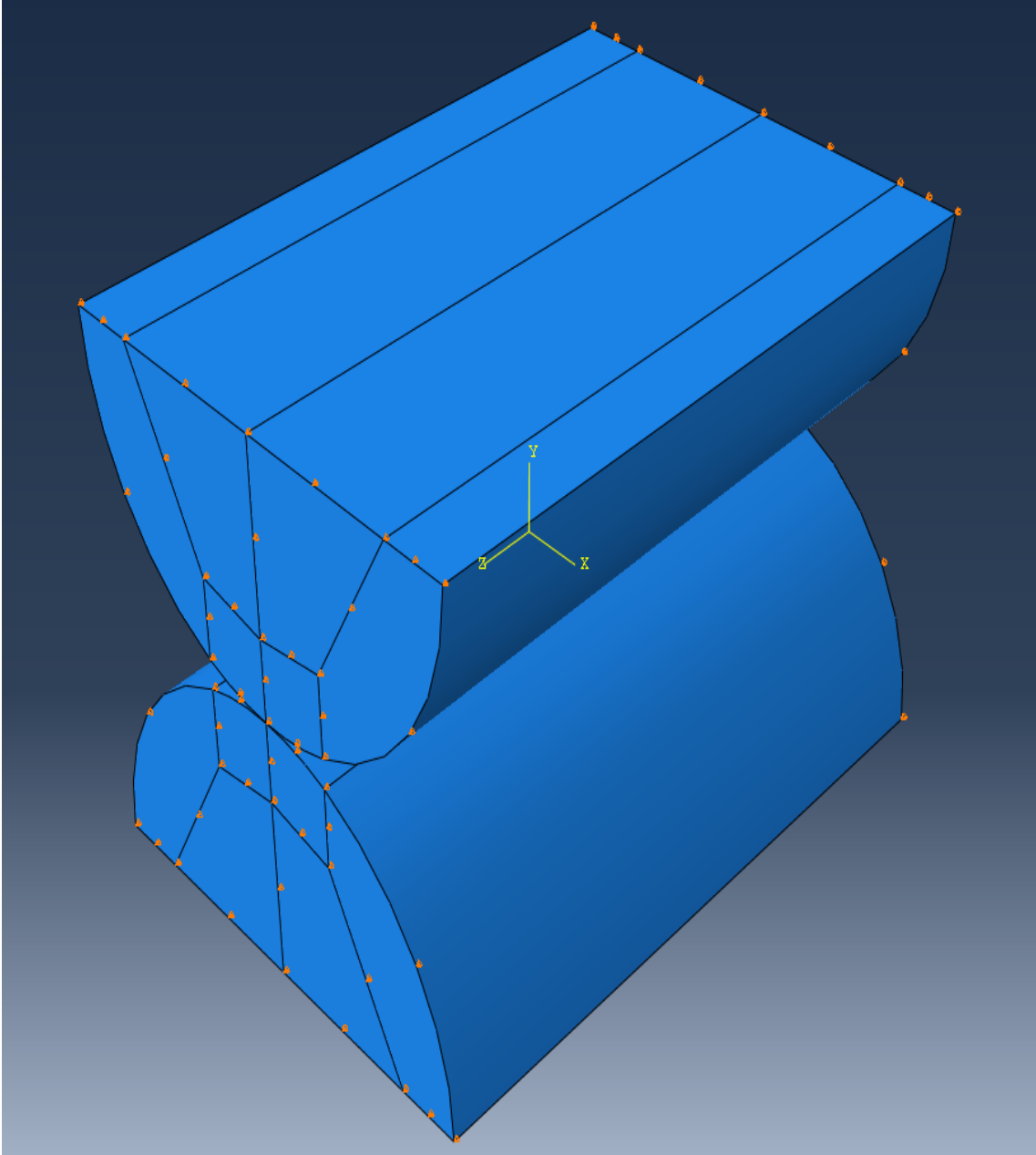


Figura 5.8 – Condições de contorno aplicadas ao caso 3D.

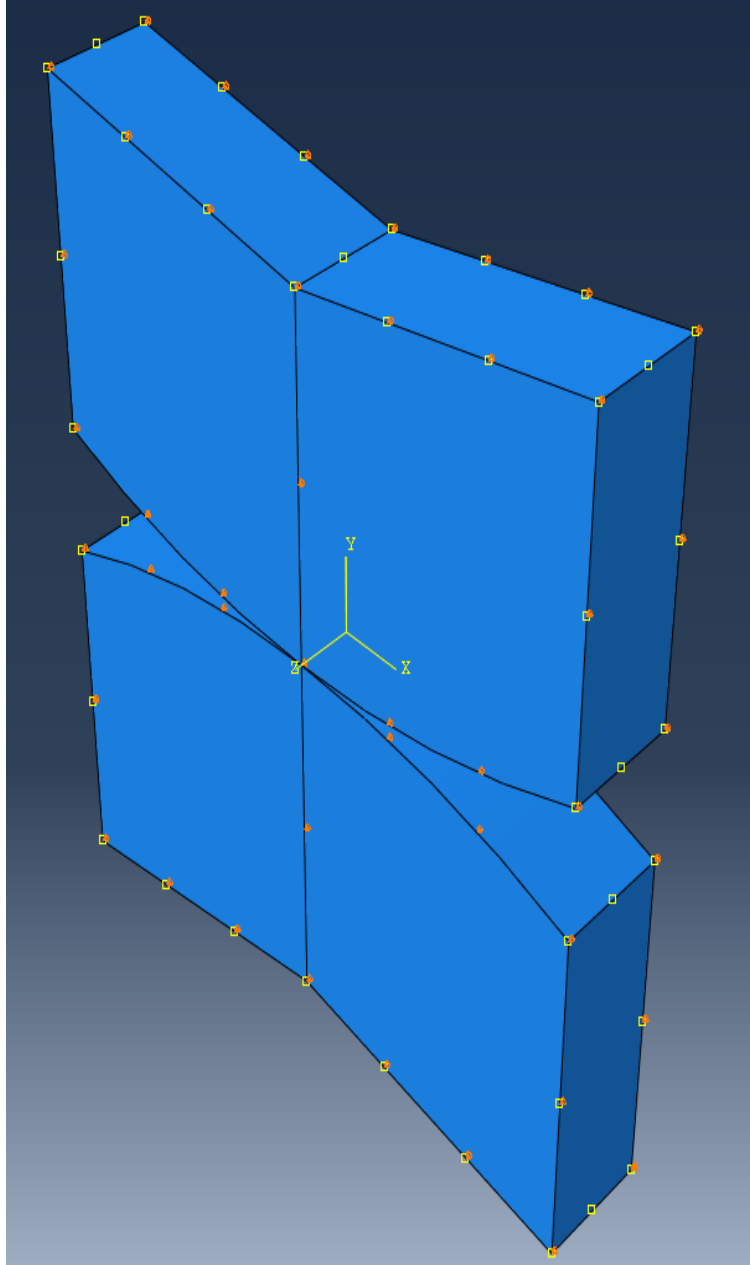


Figura 5.9 – Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D.

Para o contato com cilindros rotacionados por 30° apresentado na Fig. 5.10, as condições de contorno para deslocamento nas extremidades foram criadas através de um sistema de coordenadas auxiliar diferente para o cilindro rotacionado em relação ao sistema de coordenadas original. A Fig. 5.11 apresenta a visão superior e a Fig. 5.12 a visão lateral dos cilindros em contato rotacionados, podendo-se perceber o eixo de coordenada auxiliar marcado em vermelho localizado na superfície superior do cilindro.

As condições de contorno destacadas pelos quadrados em amarelo na Fig. 5.13 para o submodelo de 30° foram aplicadas a todas as superfícies em contato com o modelo global original da Fig. 5.10, sem a necessidade de uso do sistema de coordenadas auxiliar.

A Fig. 5.14 apresenta a representação das condições de contorno aplicadas ao modelo de contato 3D para cilindros rotacionados por 90° . Foi restringido o movimento das extremidades do cilindro superior em relação ao eixo x e das extremidades do cilindro inferior em relação ao eixo z em relação ao eixo de coordenadas de referência.

A Fig. 5.15 ilustra as condições de contorno aplicadas ao submodelo de contato entre cilindros rotacionados de 90° com destaque em quadrados amarelos das superfícies que faziam parte do cilindro global e das extremidades com restrição de movimento em relação ao eixo z.

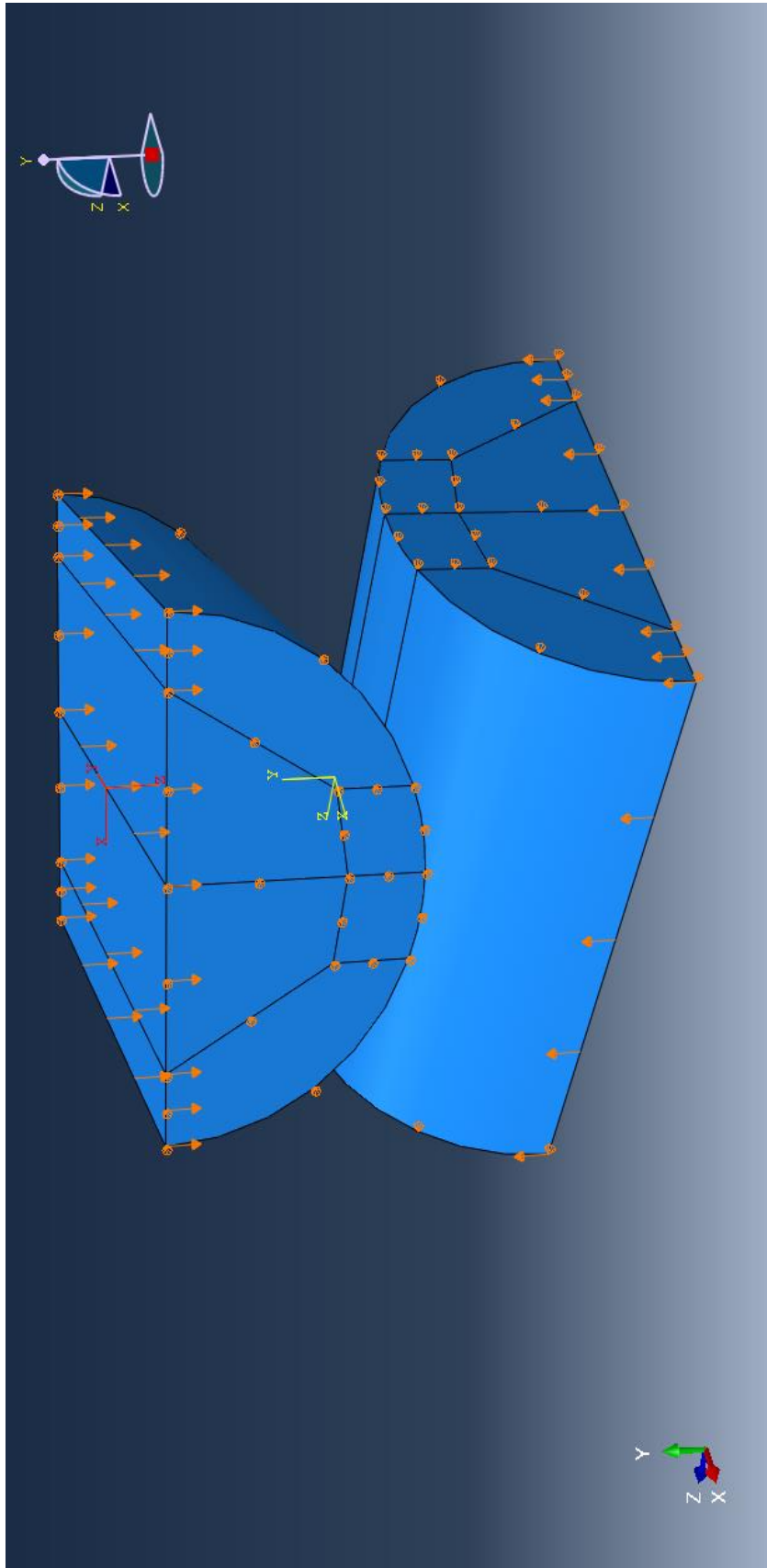


Figura 5.10 – Condições de contorno aplicadas aos cilindros 3D rotacionados por 30°.

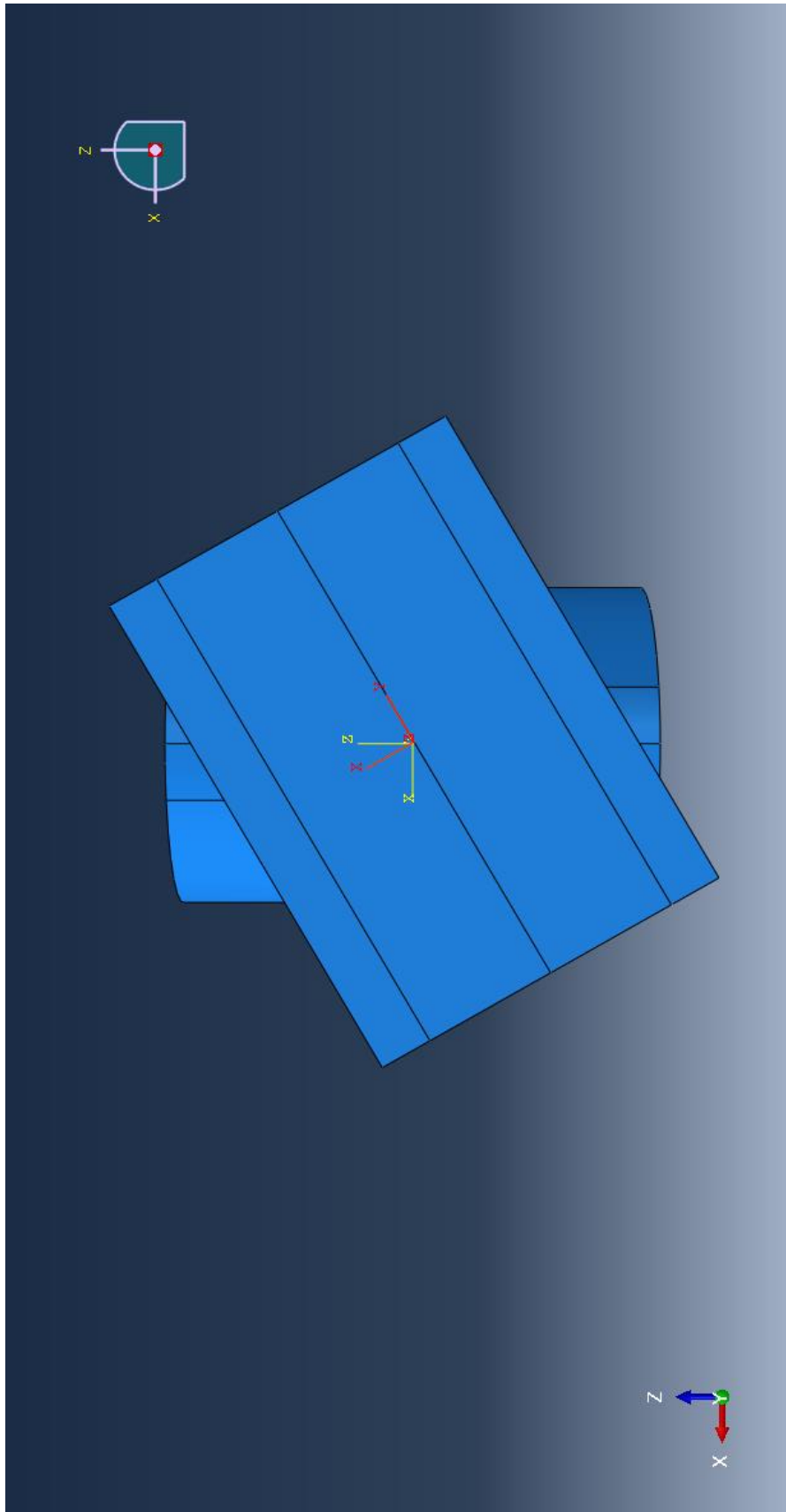


Figura 5.11 - Sistema de eixo coordenado auxiliar (vermelho) em relação ao eixo principal (amarelo) vista superior.

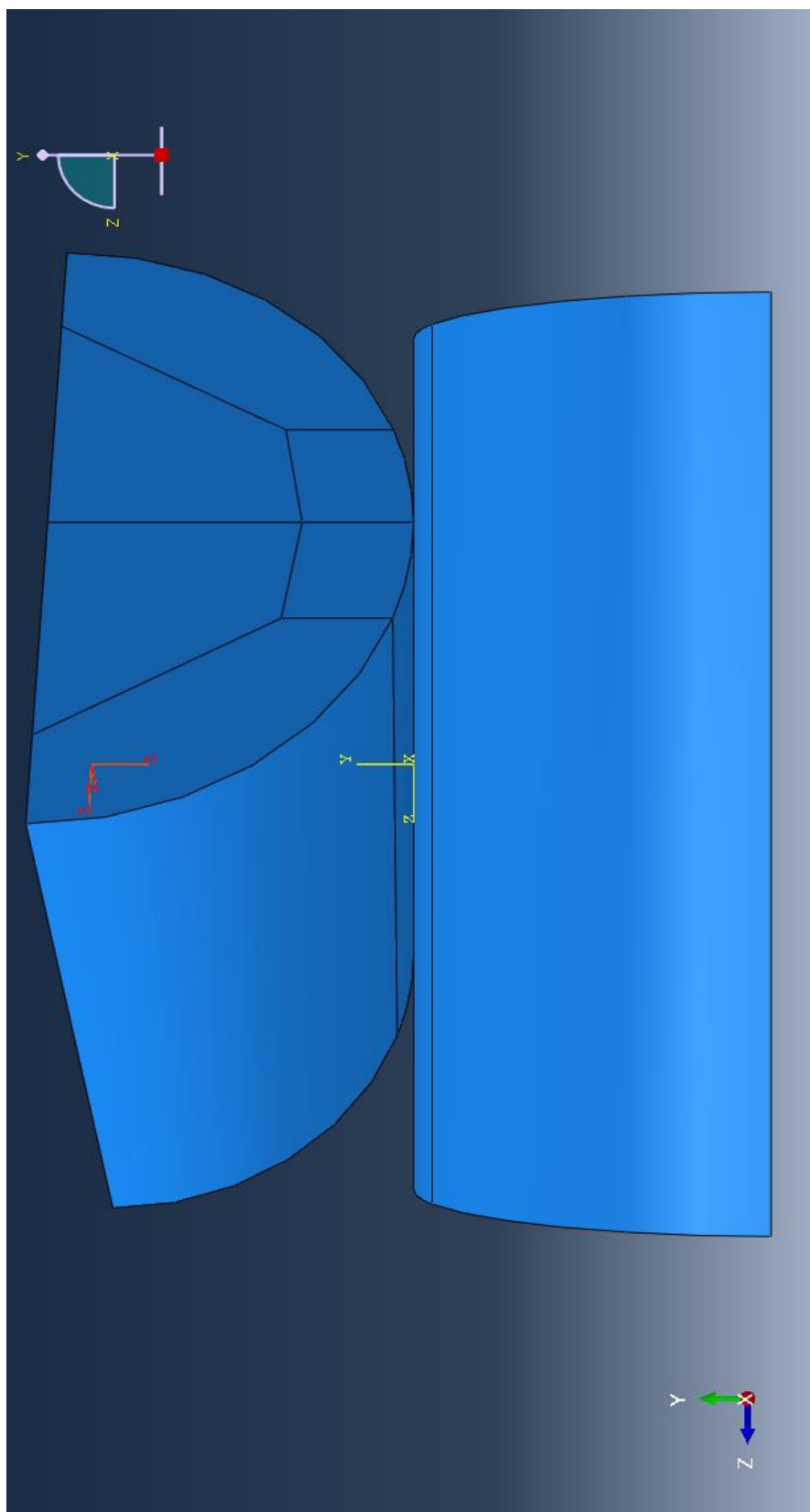


Figura 5.12 - Sistema de eixo coordenado auxiliar (vermelho) em relação ao eixo principal (amarelo) vista lateral.

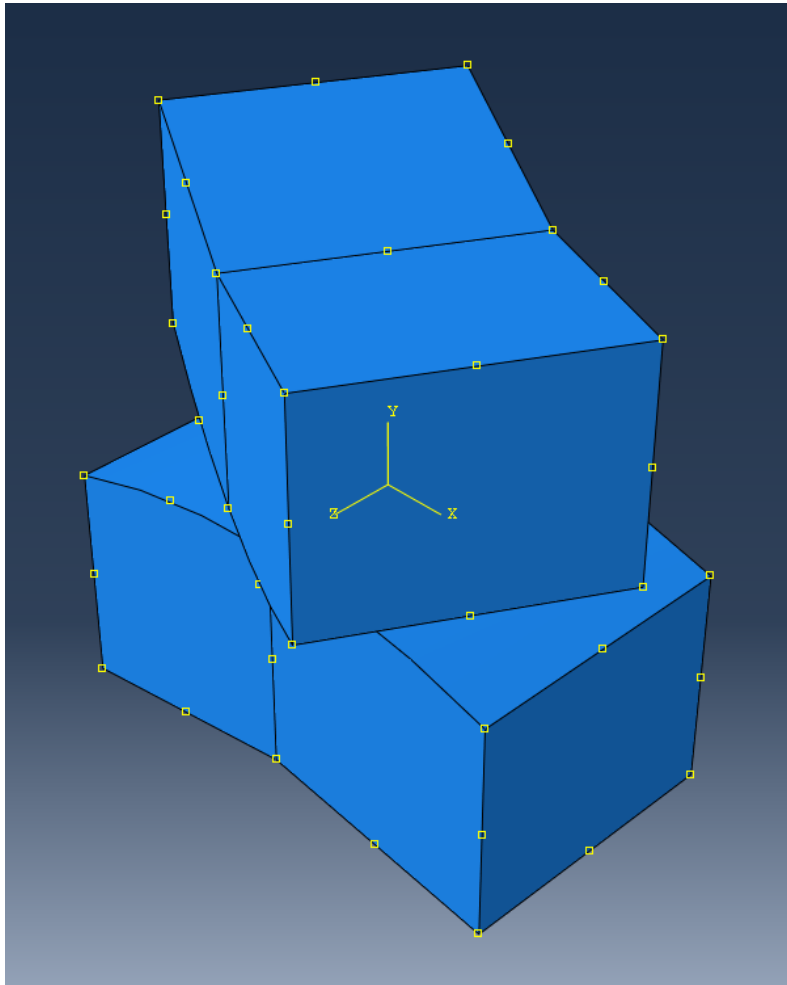


Figura 5.13 – Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D rotacionado por 30°.

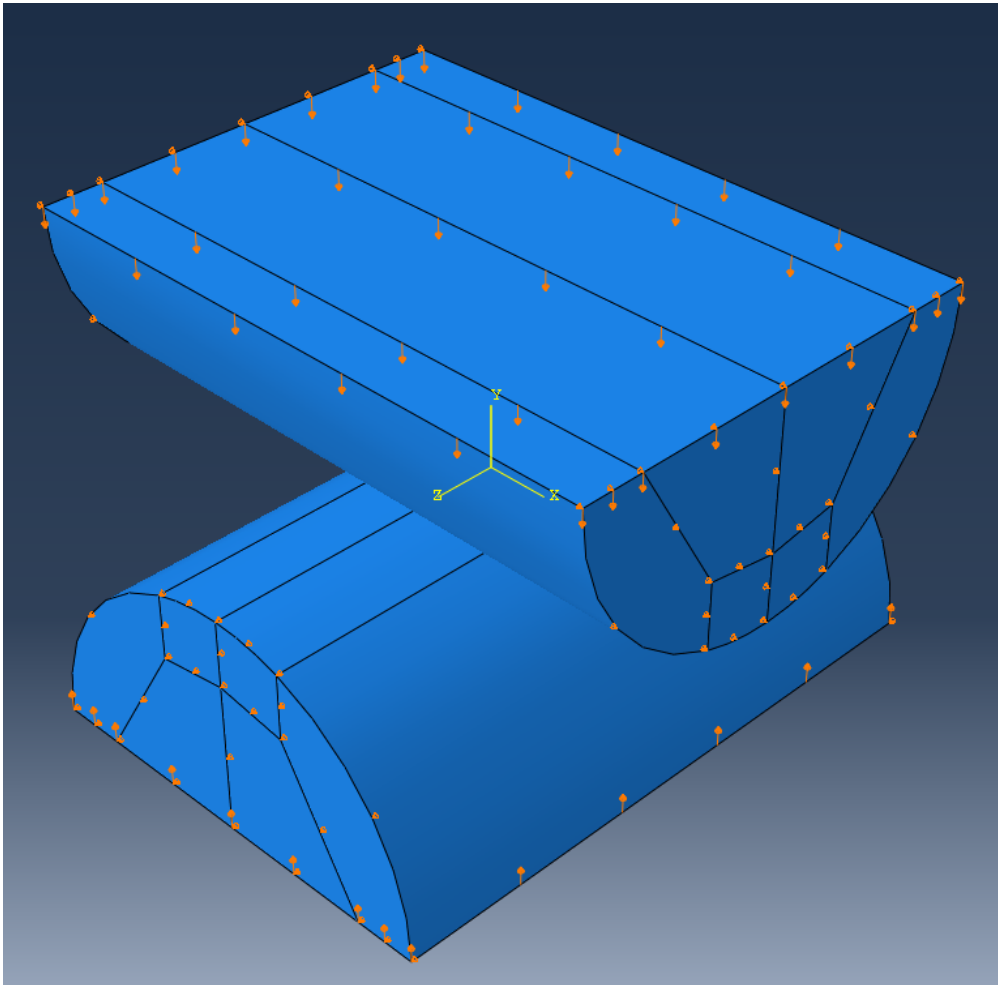


Figura 5.14 – Condições de contorno aplicadas aos cilindros 3D rotacionado por 90° .

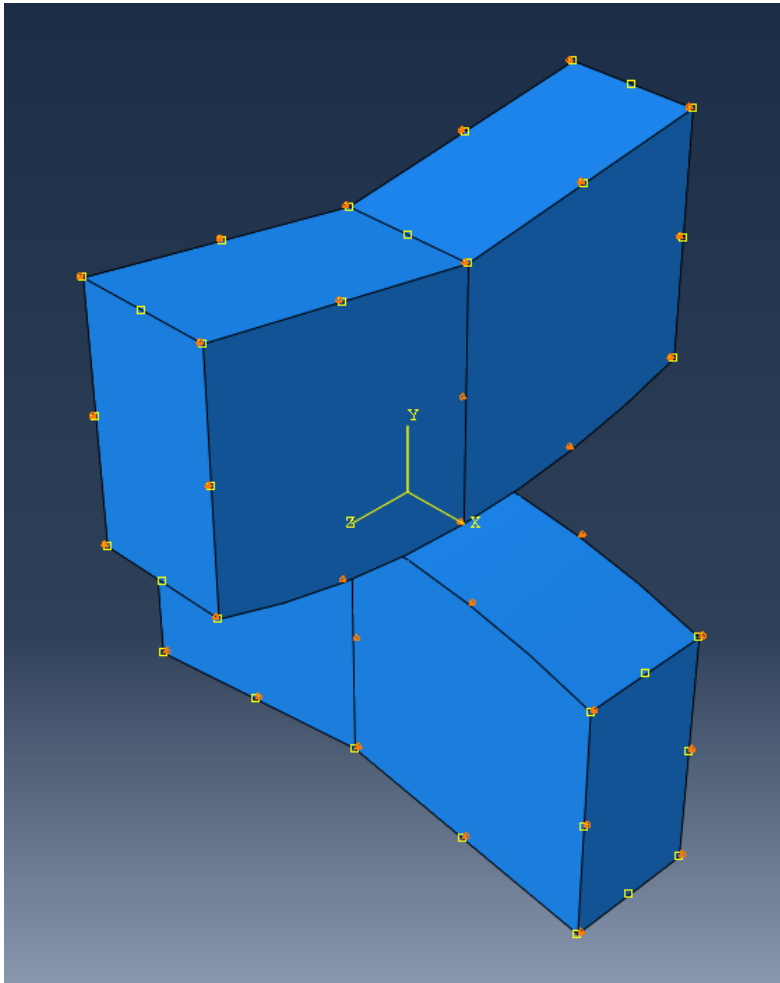


Figura 5.15 – Condições de contorno aplicadas ao submodelo 3D rotacionado por 90°

5.1.3 RESULTADOS

Antes de iniciar a análise dos resultados da simulação numérica, é necessário obter a força resultante aplicada sobre os diâmetros dos cilindros e para tal finalidade pode ser utilizado os resultados do modelo global de contato bidimensional da Fig. 5.4, pois será a mesma força aplicada nos demais casos de contato. O Abaqus permite a obtenção do valor da força aplicada sobre cada nó através da ferramenta *Path* no módulo de visualização.

Com os valores das forças sobre cada nó, foi possível criar o gráfico da Fig. 5.16 e obter a soma resultante das forças aplicadas, sendo importante na análise das soluções analíticas das equações apresentadas no capítulo 3 para o contato de Hertz.

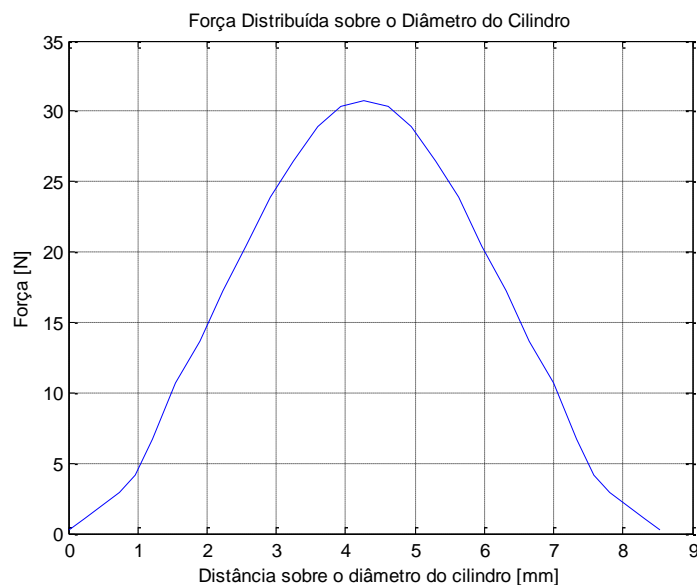


Figura 5.16 – Gráfico da força distribuída sobre o diâmetro do cilindro.

O valor total da força após a soma das forças em cada nó é de:

$$P = 408,3 \text{ N} \quad (5.1)$$

Foi possível obter os resultados da pressão de contato e tensões para os casos 2D, 3D e 3D com cilindro rotacionado por 90°. No caso de contato rotacionado por 30, não foi possível obter a solução analítica neste relatório, sendo realizado a análise numérica e depois comentado os resultados obtidos.

A comparação da pressão de contato numérico com os valores analíticos foi realizada na Fig. 5.17. E a Tab. 5.2, apresenta o erro entre a comparação entre o valor de pressão numérico e analítico (Tab. 5.2).

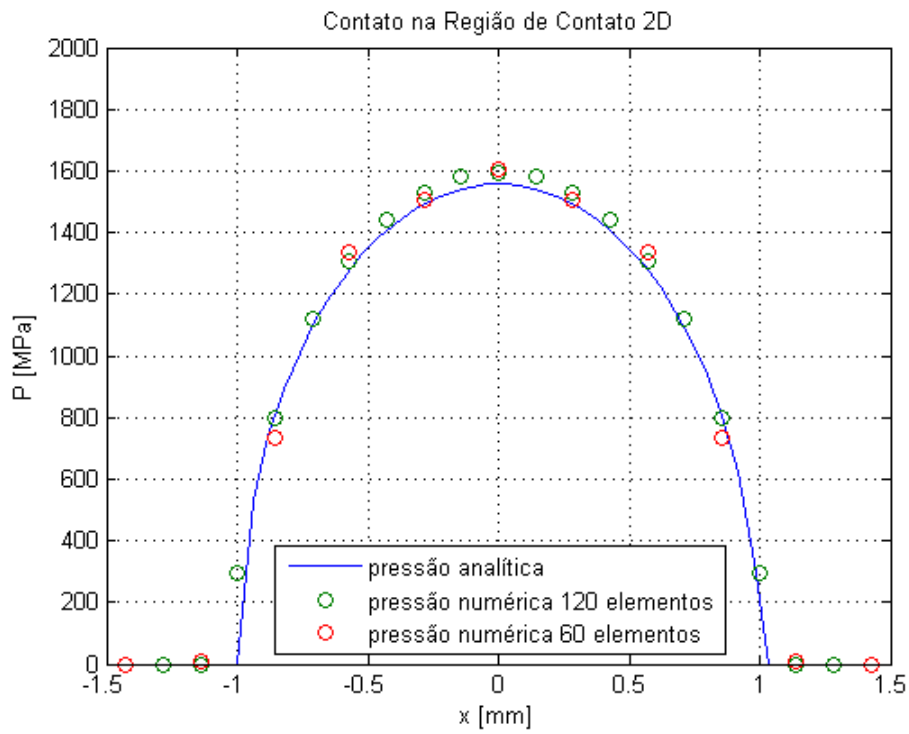


Figura 5.17 – Gráfico de comparação entre a pressão na região de contato analítica e os valores numéricos para 60 e 120 elementos na região de contato

Tabela 5.2 – Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 2D.

Número de Elementos	p_0 Analítico (MPa)	p_0 Numérico (MPa)	Erro (%)
60	1.557,2	1.603	2,94
120	1.557,2	1.595	2,43

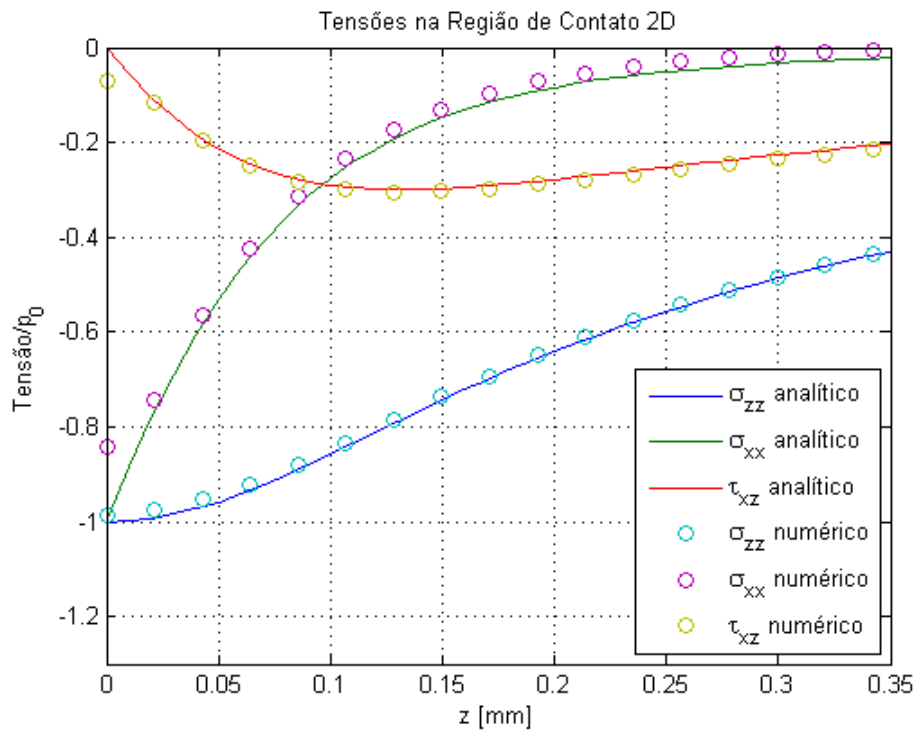


Figura 5.18 – Gráfico das tensões de Hertz para o caso 2D com 120 elementos em contato.

O formato da pressão de contato 2D de cilindros com eixos paralelos está ilustrada na figura 5.20 obtida pelo Abaqus, aonde pode ser observado a marca formada pelo contato entre eles sendo destacado a localização da pressão máxima de contato numérica. A Fig. 5.20 ilustra a tensão equivalente de Mises obtida pela simulação numérica no submodelo criado com a localização da tensão máxima e mínima.

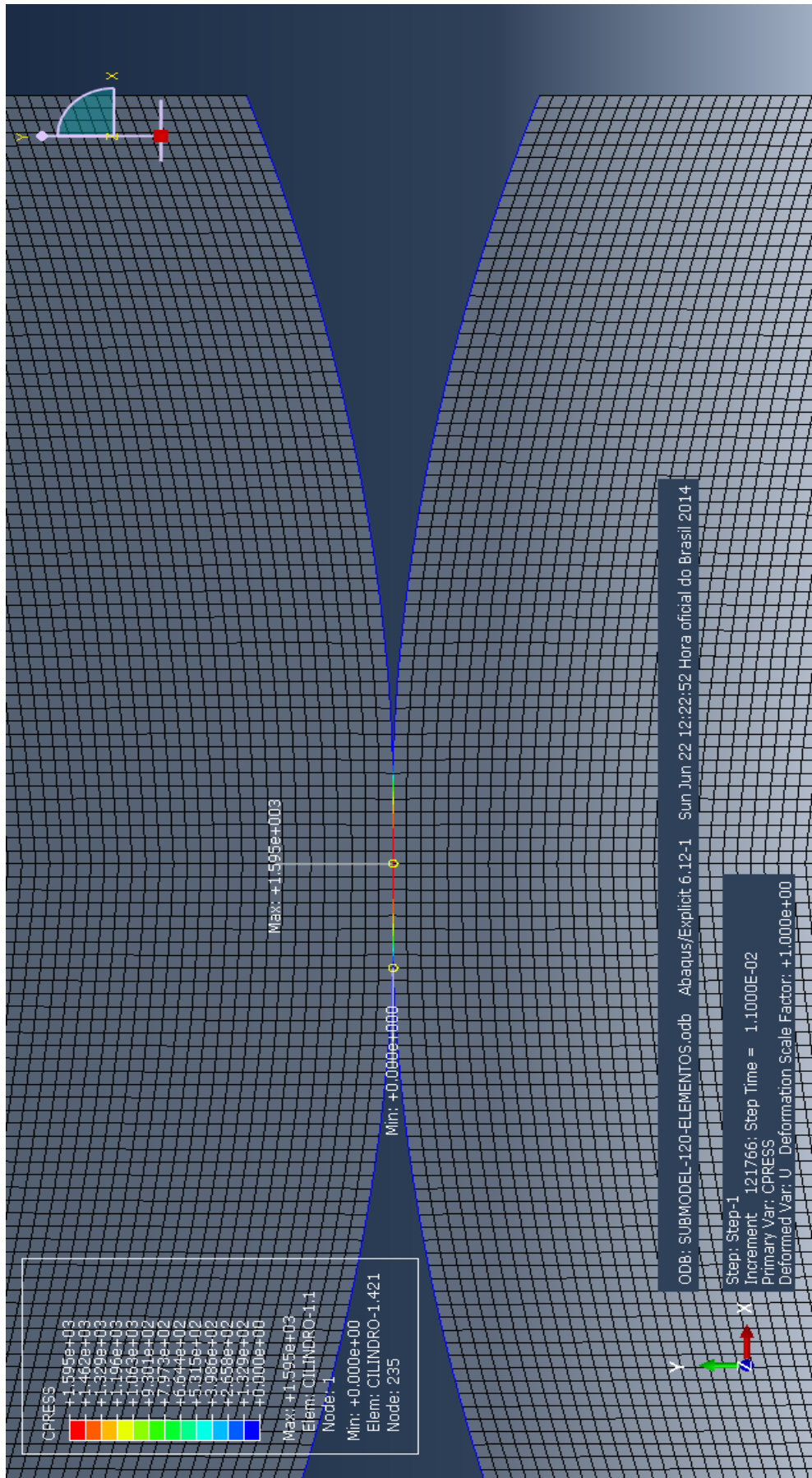


Figura 5.19 – Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 2D.

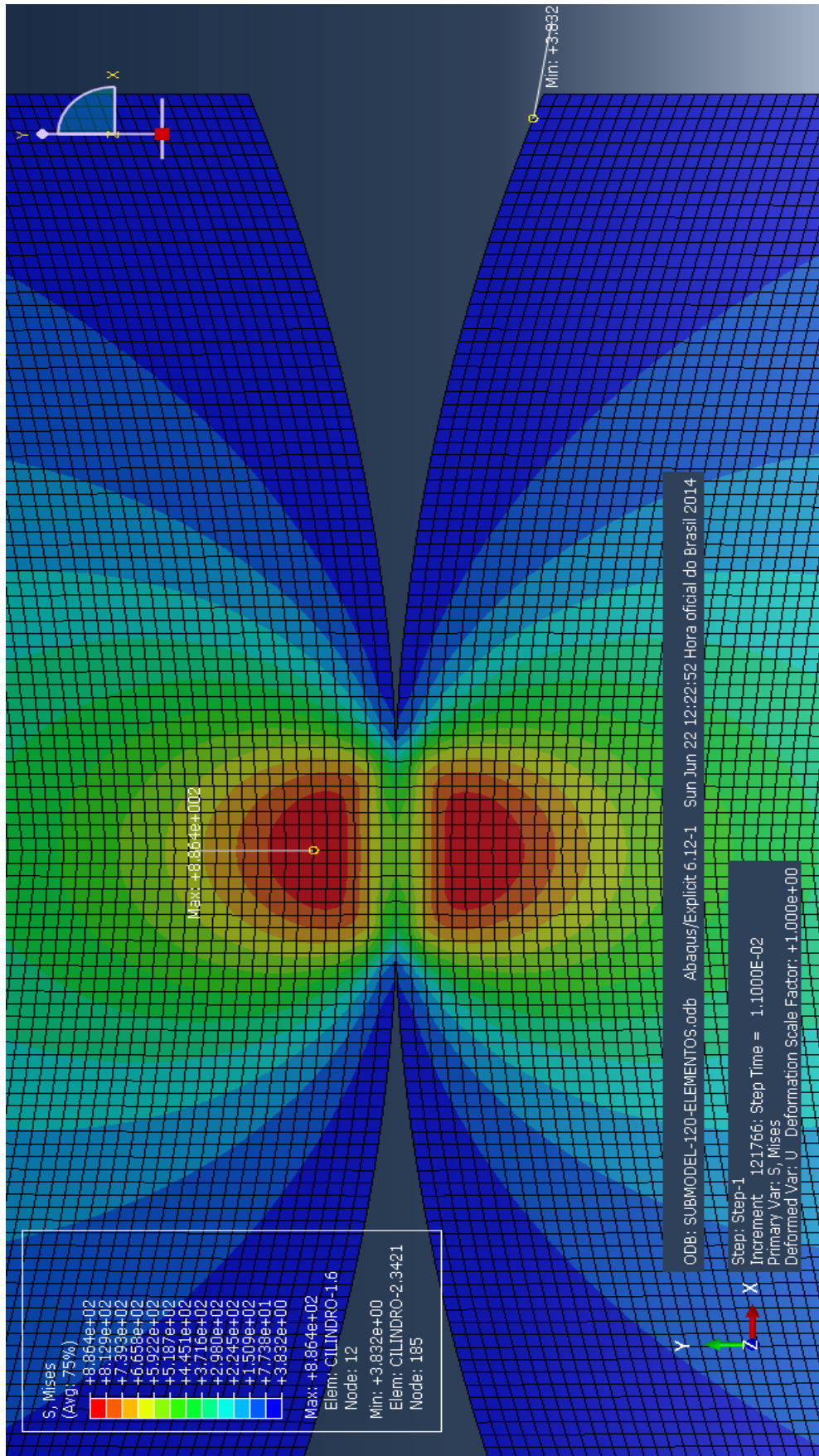


Figura 5.20 – Tensão de Mises no submodelo do contato 2D.

O gráfico da Fig. 5.21 apresenta uma comparação entre os resultados numéricos obtidos para os 1200 elementos da superfície de contato 3D com possibilidade participar do contato entre os cilindros e o valor da pressão de Hertz analítica.

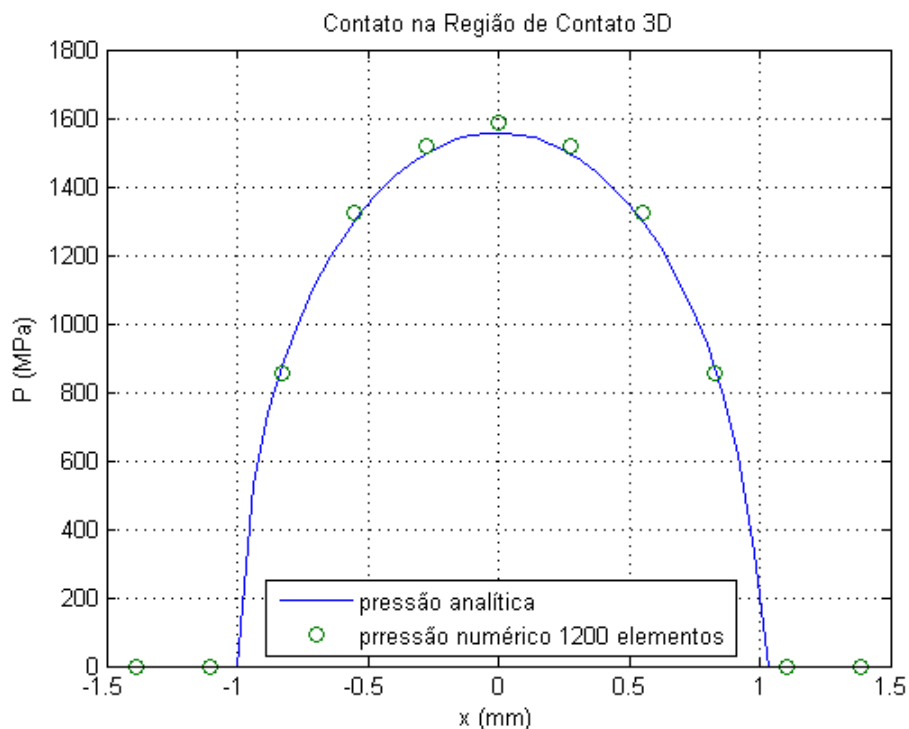


Figura 5.21 – Gráfico de comparação entre pressão de contato analítica e numérica na região de contato para o caso 3D com 1200 elementos em contato.

De posse dos dados numéricos, foi possível criar a Tab. 5.3, apresentando o número de elementos na região de contato, o valor da pressão máxima analítica, pressão numérica encontrada e o erro percentual entre ambos os resultados.

Tabela 5.3 - Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 3D.

Número de Elementos	p_0 analítico (MPa)	p_0 numérico (MPa)	Erro (%)
1200	1.557,2	1586	1,85

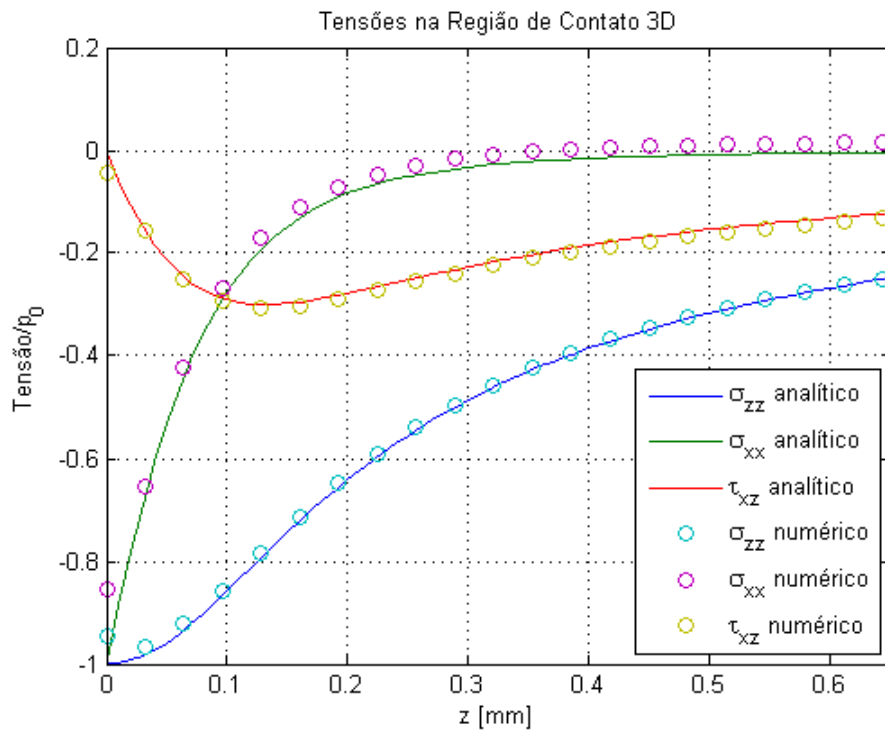


Figura 5.22 – Gráfico das tensões de Hertz caso 3D.

O formato da pressão de contato do submodelo 3D produzido pela simulação numérica do Abaqus está ilustrado pela Fig. 5.23. Pode-se observar, que no contato, a pressão tem formato retangular, com a semi-largura a do mesmo tamanho do caso 2D, porém o semi-eixo maior da elipse tem tamanho infinito, produzindo assim a forma retangular na região de contato. A Fig. 5.24 apresenta o formato da tensão de Mises no submodelo 3D.

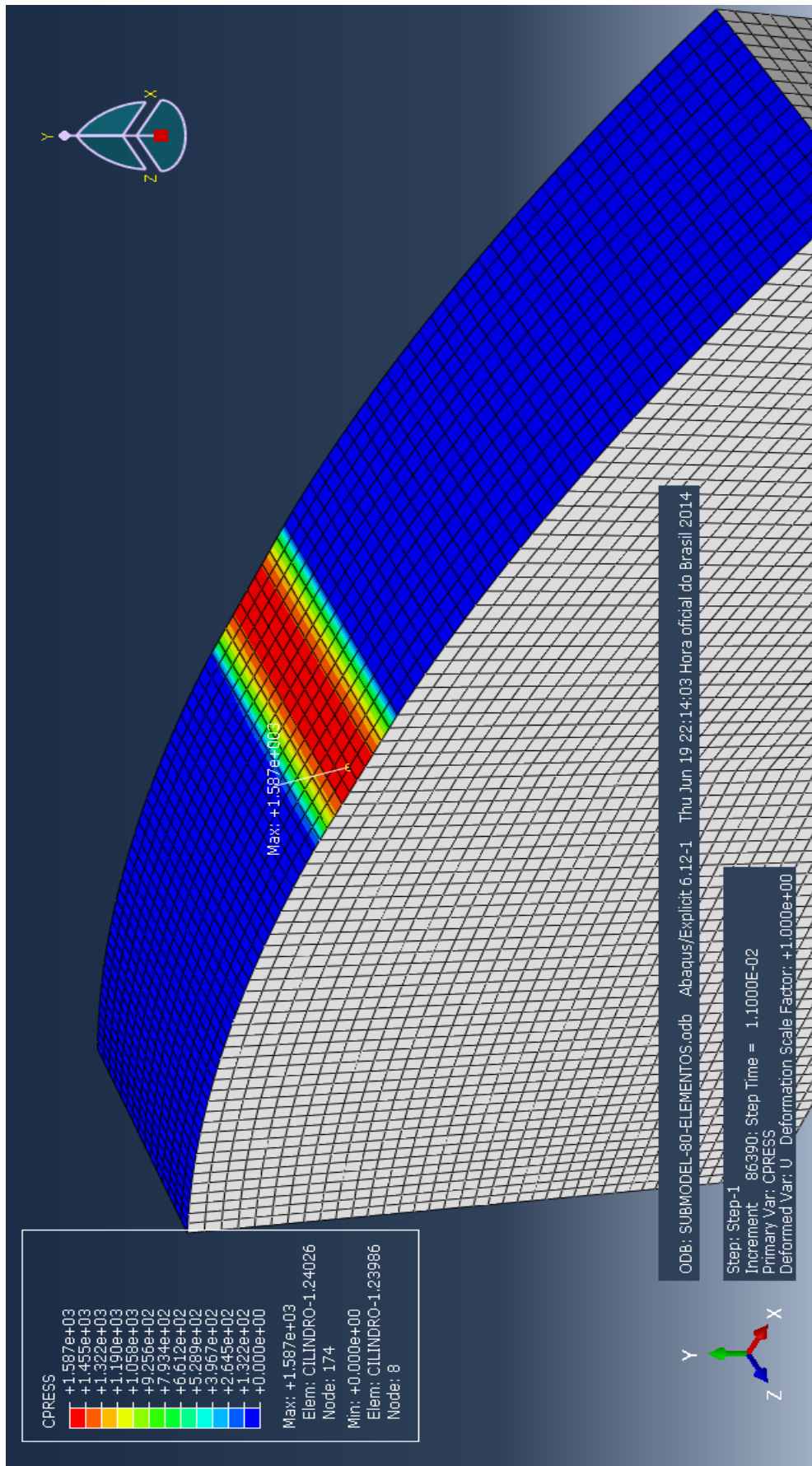


Figura 5.23 - Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D.

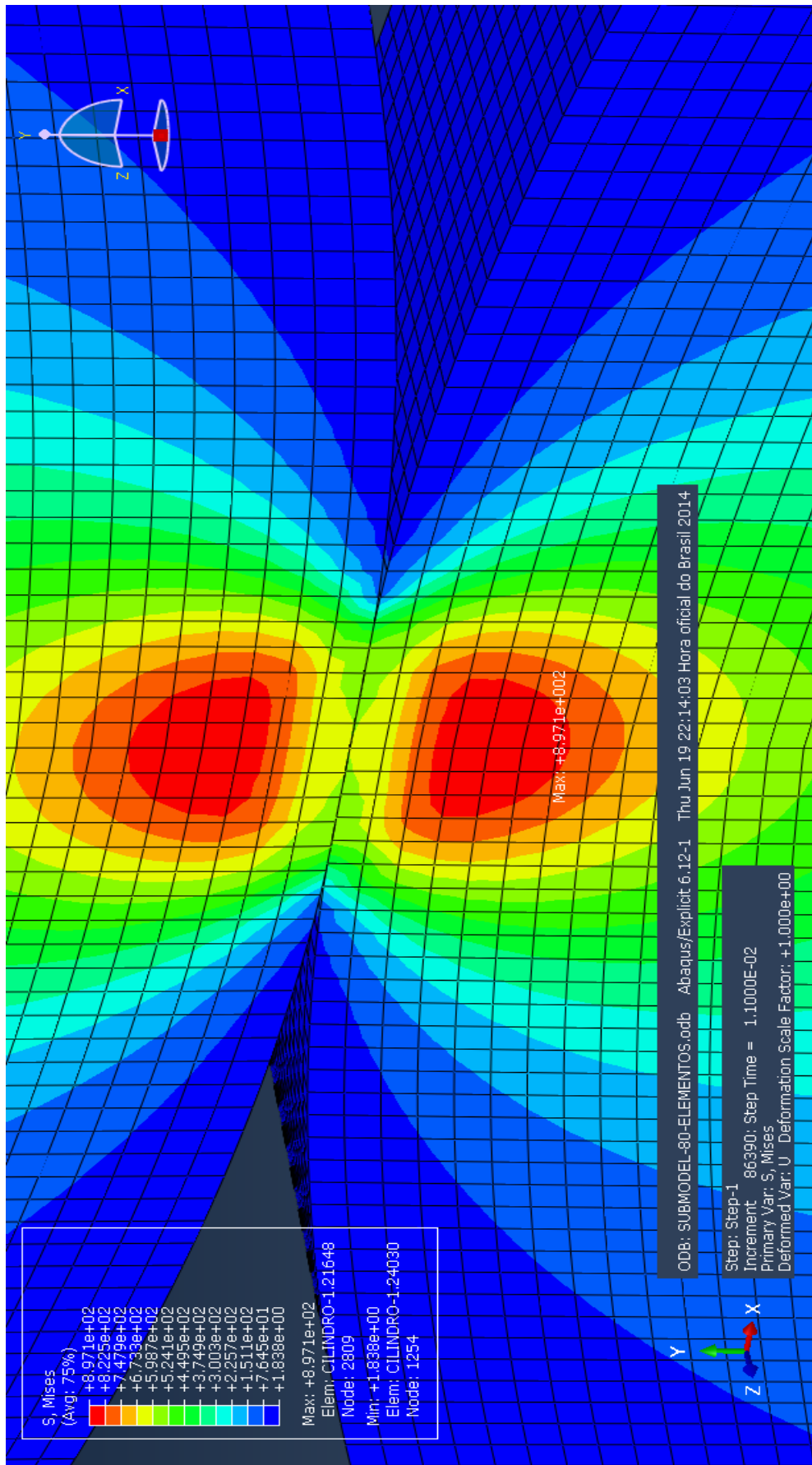


Figura 5.24 – Tensão de Mises no submodelo do contato 3D.

O gráfico da pressão de contato não foi criado para o caso rotacionado por 30°, pois não foi possível obter a resposta analítica para este caso específico, servindo o mesmo para as tensões, sendo apresentado somente os valores obtidos numericamente. A Tab. 5.4 apresenta o valor obtido da pressão máxima de contato para o número de elementos em possível contato juntamente.

Tabela 5.4 – Número de elementos na região de contato e o valor da pressão numérica para o caso 3D rotacionado por 30°.

Número de Elementos	p_0 numérico (MPa)
1.920	2.049

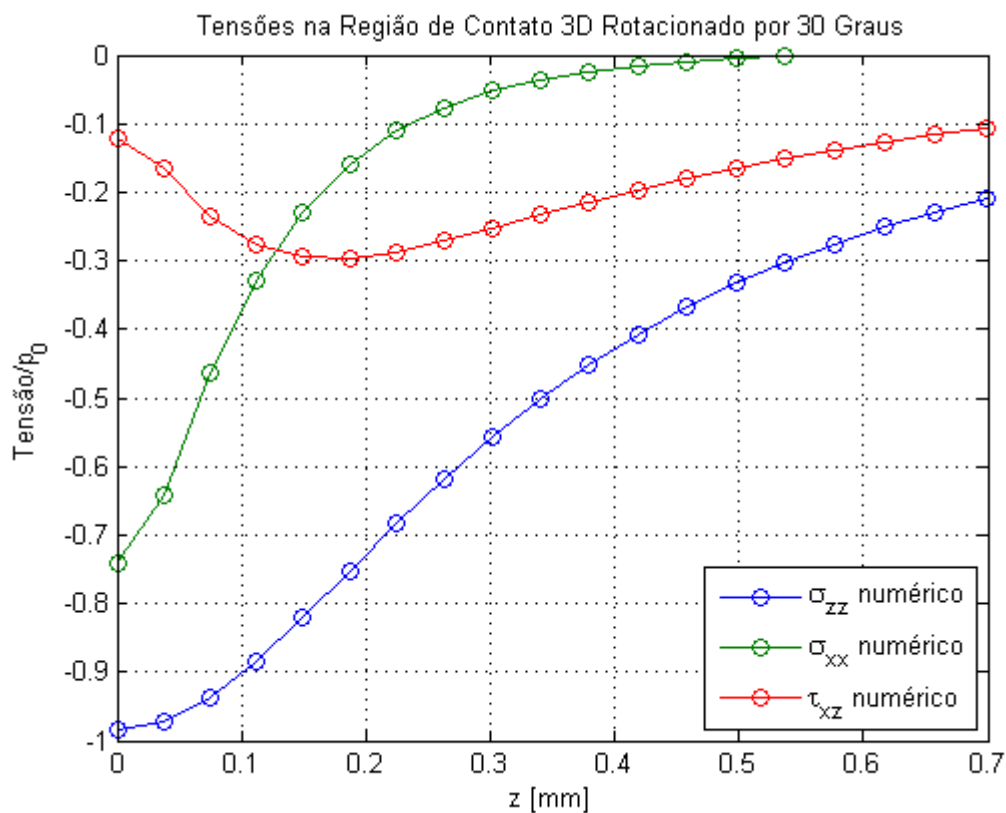


Figura 5.25 – Gráfico das tensões de Hertz caso 3D rotacionado por 30°.

A forma da pressão de contato para cilindros rotacionados por 30° está ilustrada na Fig. 5.26, podendo ser observado seu formato elíptico bem definido na região quando submetida pelo carregamento máximo.

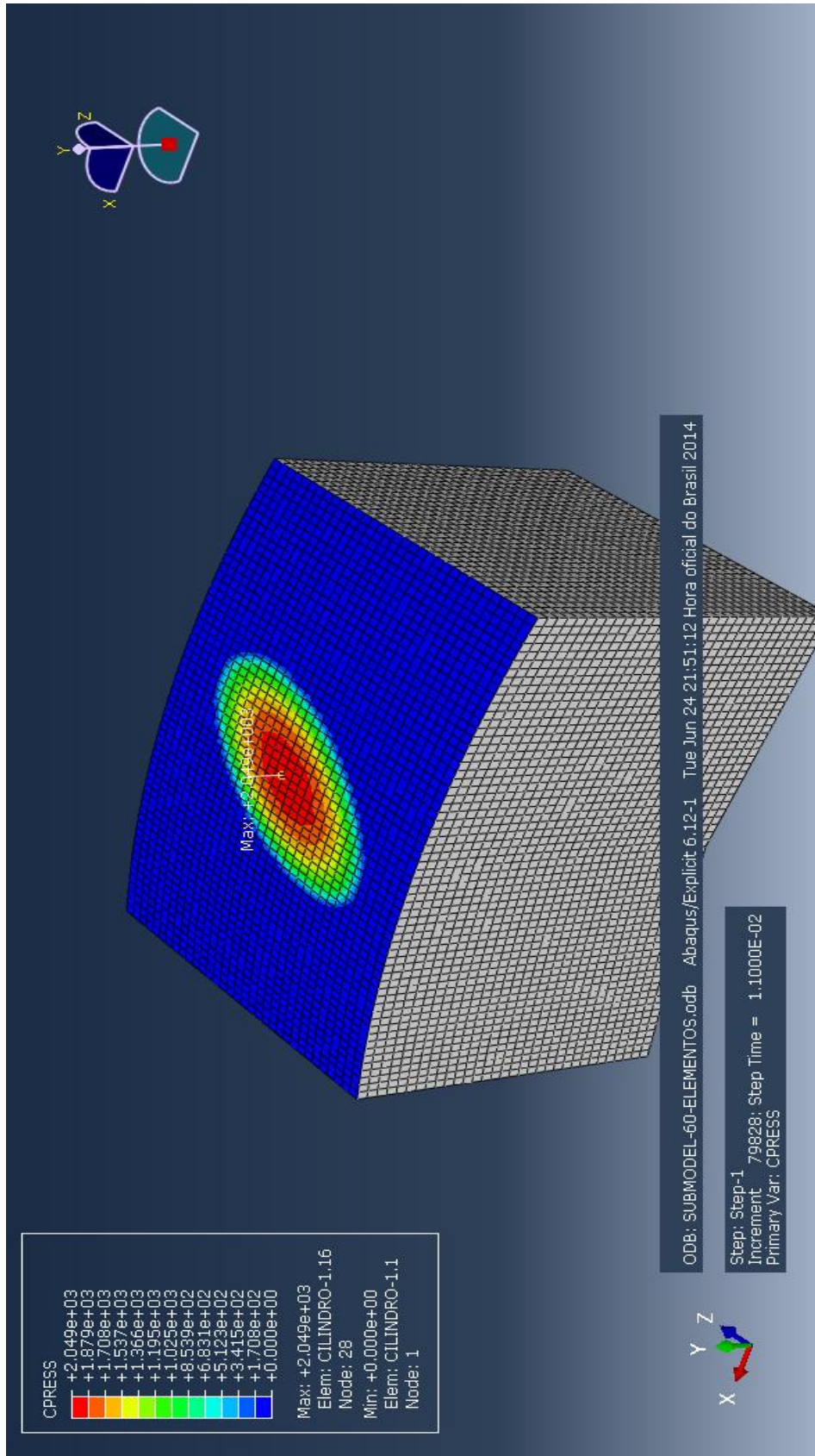


Figura 5.26 - Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D rotacionado por 30°.

A Tab. 5.5 apresenta os valores do número de elementos na região de contato, pressão analítica, pressão numérica e erro entre ambos resultados para o caso de contato com cilindros rotacionados por 90°.

Os gráficos das Fig. 5.27 e 5.28 foram obtidos graças ao formato circular da pressão na região de contato, sendo semelhante ao caso de contato entre corpos esférico presente na teoria de (Johnson, 1985). A semi-largura de contato a é definida como o raio da região de contato sendo de mesmo valor do semieixo b da elipse formada na região de contato.

Tabela 5.5 - Número de elementos na região de contato e o erro em relação a pressão analítica para caso 3D rotacionado por 90°.

Número de Elementos	p_0 analítico (MPa)	p_0 numérico (MPa)	Erro (%)
3.600	1.901,66	1.974	3,80

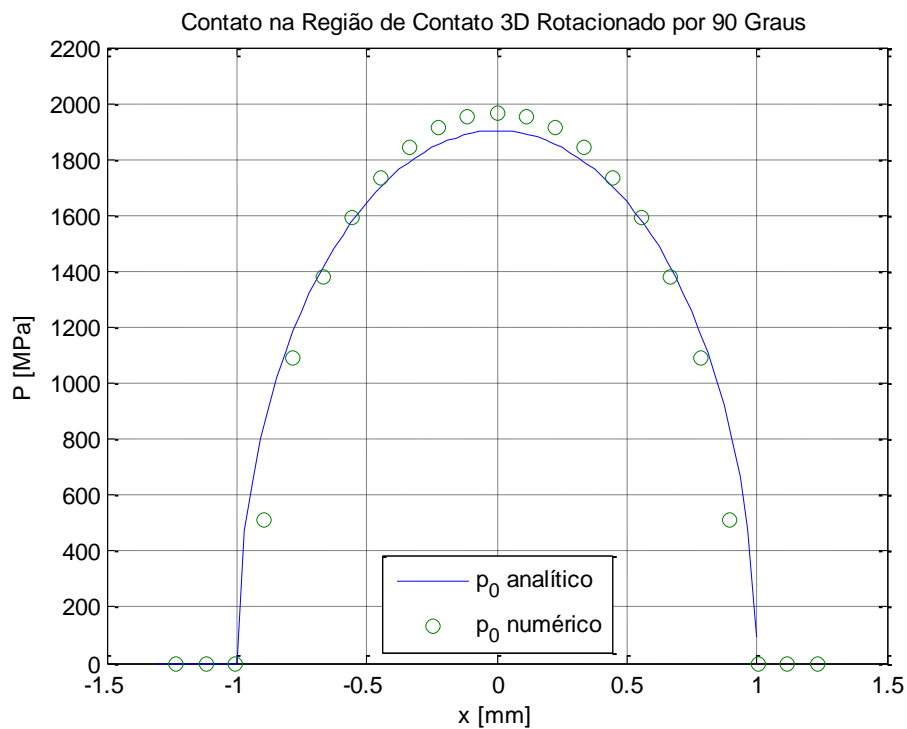


Figura 5.27 – Gráfico de pressão para cilindros rotacionados por 90°.

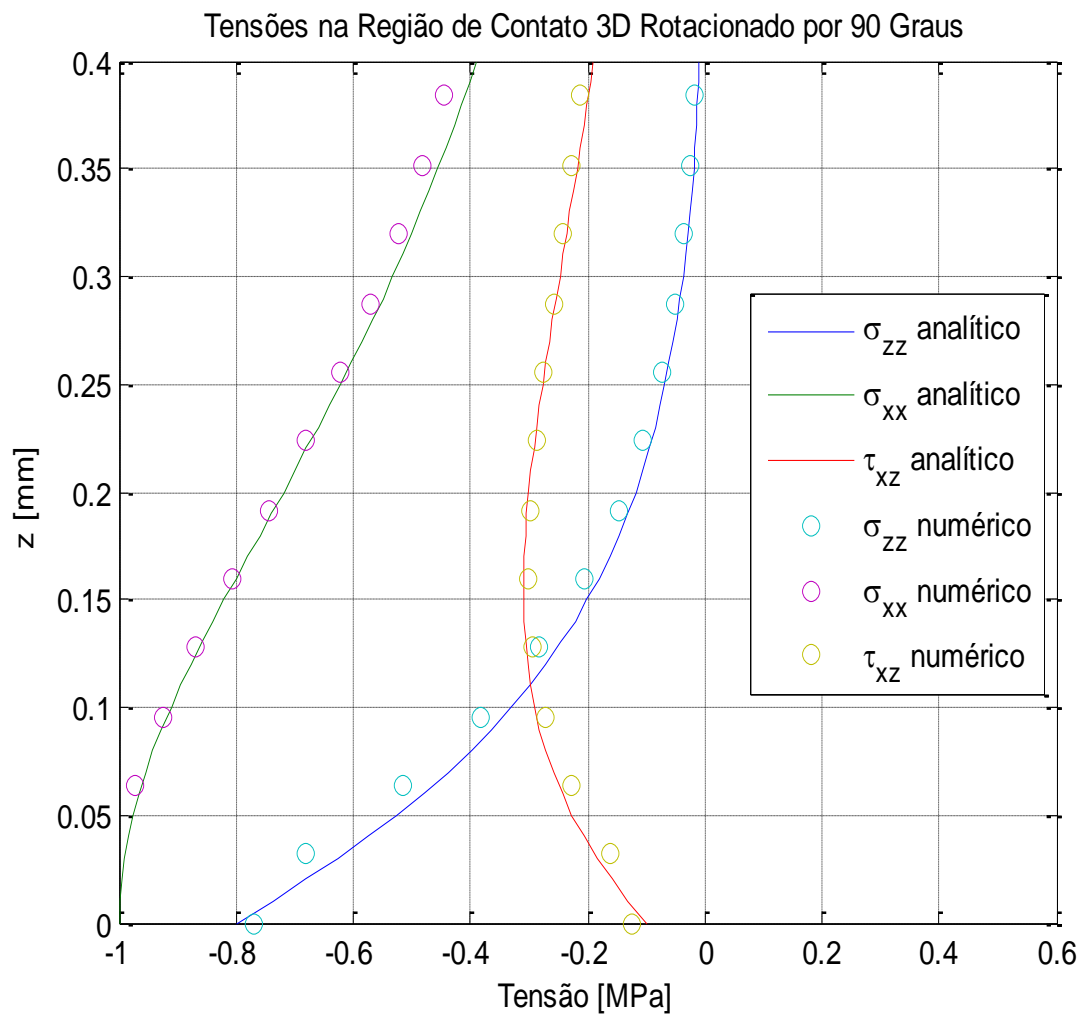


Figura 5.28 - Gráfico das tensões de Hertz caso 3D rotacionado por 90°.

O formato da pressão de contato para o caso de contato 3D rotacionado por 90° é apresentado na Fig. 5.29 e da tensão de Mises na Fig. 5.30.

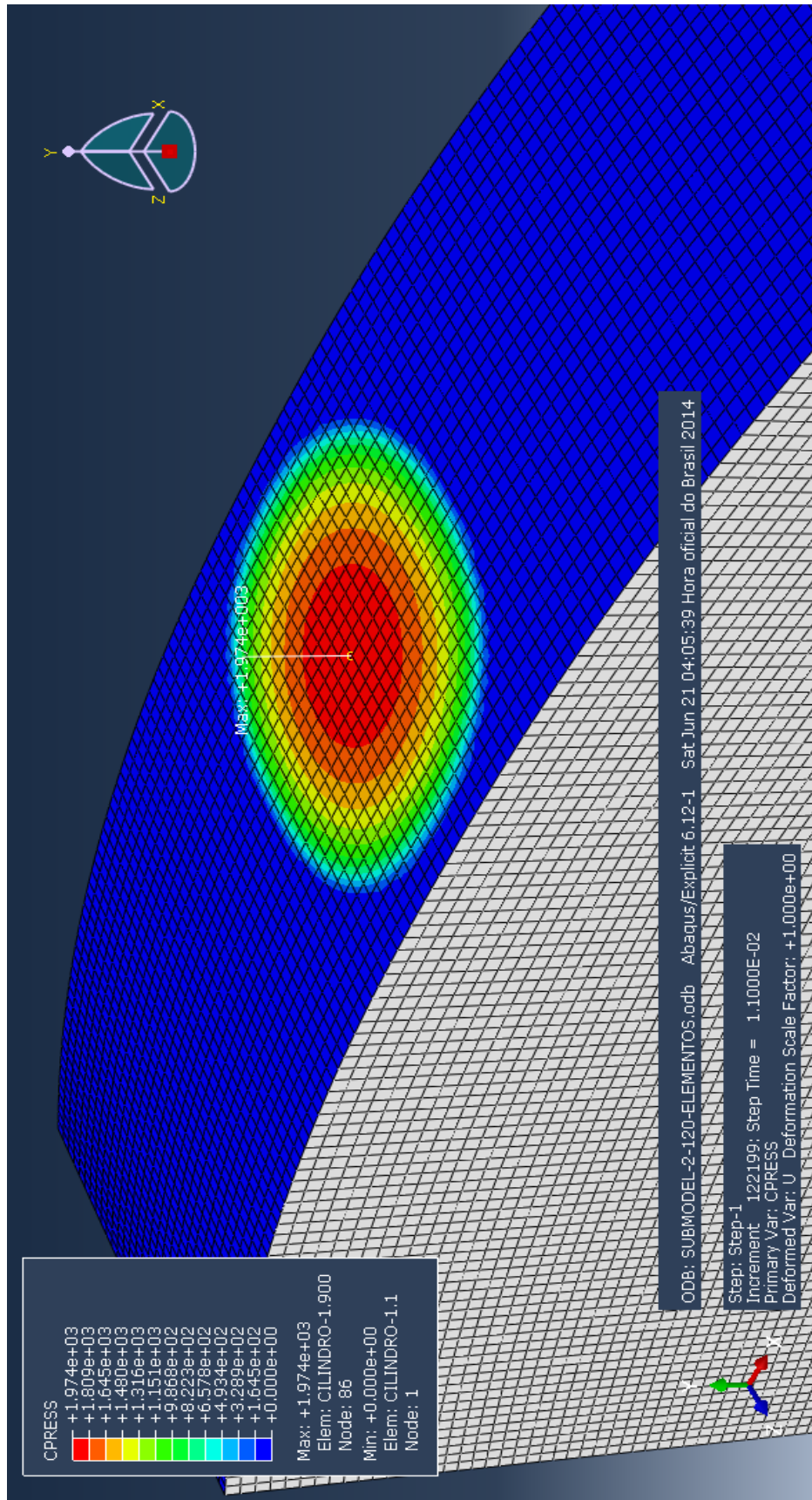


Figura 5.29 - Região de contato com os valores de pressão definida pelo Abaqus caso 3D rotacionado por 90°.

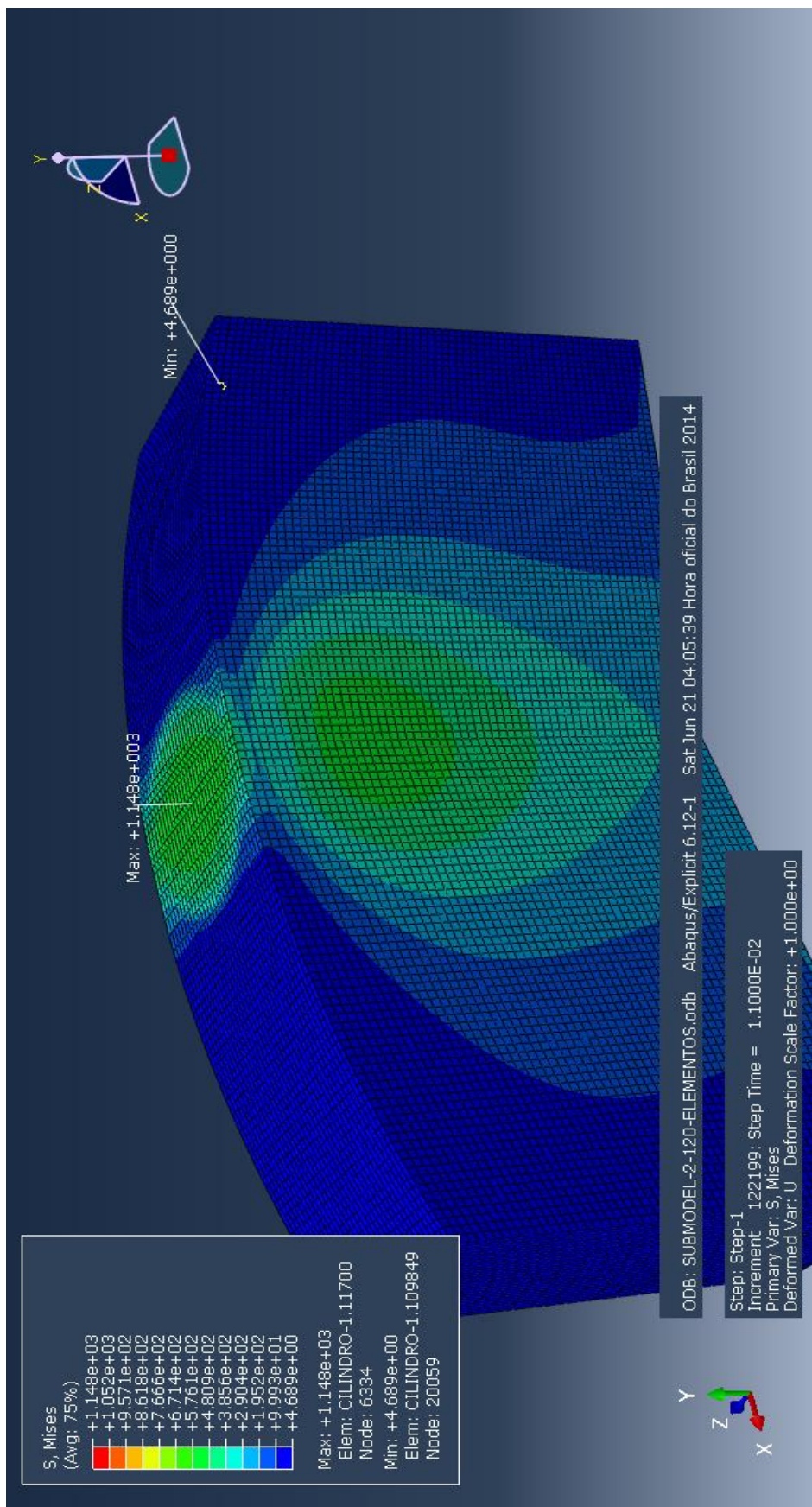


Figura 5.30 - Tensão de Mises no submodelo do contato 3D rotacionado por 90°.

5.1.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos pelo Abaqus e apresentados na forma de comparação gráfica apresentados na seção 5.1.3 foram próximos dos esperados pelas soluções analíticas representadas como linhas contínuas, validando-se, assim, as soluções numéricas para o caso do Contato de Hertz. .

Somente o valor de σ_{xx} , pertencente à região de contato, teve o ponto distante da curva das soluções analíticas com z igual a zero como pode ser observado nas figuras 5.19 e 5.23. Esse ponto deveria ser igual ao obtido para a pressão máxima através da equação (3.9), mas o Abaqus obteve um valor com erro de aproximadamente 13,8% no caso 2D e 12,9% no 3D na região onde a pressão de contato é máxima. Os resultados das tensões do caso rotacionado por 90° possuem solução analítica em (Johnson, 1985) sendo este o mesmo caso do contato entre corpos esféricos. Neste caso específico, a figura 5.29 mostra que os valores de σ_{zz} apresentaram uma pequena variação com os valores analíticos, mas que com o aumento da distância em relação ao eixo z os valores foram se aproximando do esperado.

Conforme pode, ainda, ser observado nas figuras 5.17, 5.18, 5.22 e 5.28 e nas tabelas 5.3, 5.4 e 5.6 o erro entre a relação das soluções obtidas numericamente com as respostas analíticas de Hertz possuíram um valor percentual de 2,43 para contato 2D, 1,85 para o 3D e 3,80 para 90° sendo, portanto, valores satisfatórios para a simulação numérica realizada para o caso de contato de Hertz. Todos os gráficos de comparação de resultados e dos resultados para o caso rotacionado por 30° pertencentes a seção 5.1.3 foram criados através do código em MATLAB nos anexos deste relatório.

Pode-se concluir que apesar do resultado discutido no parágrafo anterior para σ_{xx} em $z = 0$ e da pequena variação desta tensão para o caso rotacionado por 90° , o erro da pressão máxima submetida aos corpos foi pequeno, gerando bons resultados pela comparação com as curvas esperadas.

5.2. VALIDAÇÃO DA CURVA DE PLASTICIDADE DO Al 7075-T651

Nesta seção é apresentada a validação da curva de plasticidade da liga Al 7075-T651 e discutido seus resultados.

5.2.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para validar a curva de plasticidade do Al 7075-T651, foi modelado um corpo de prova 2D conforme apresentado na Fig. 5.31, junto com todas as suas dimensões.

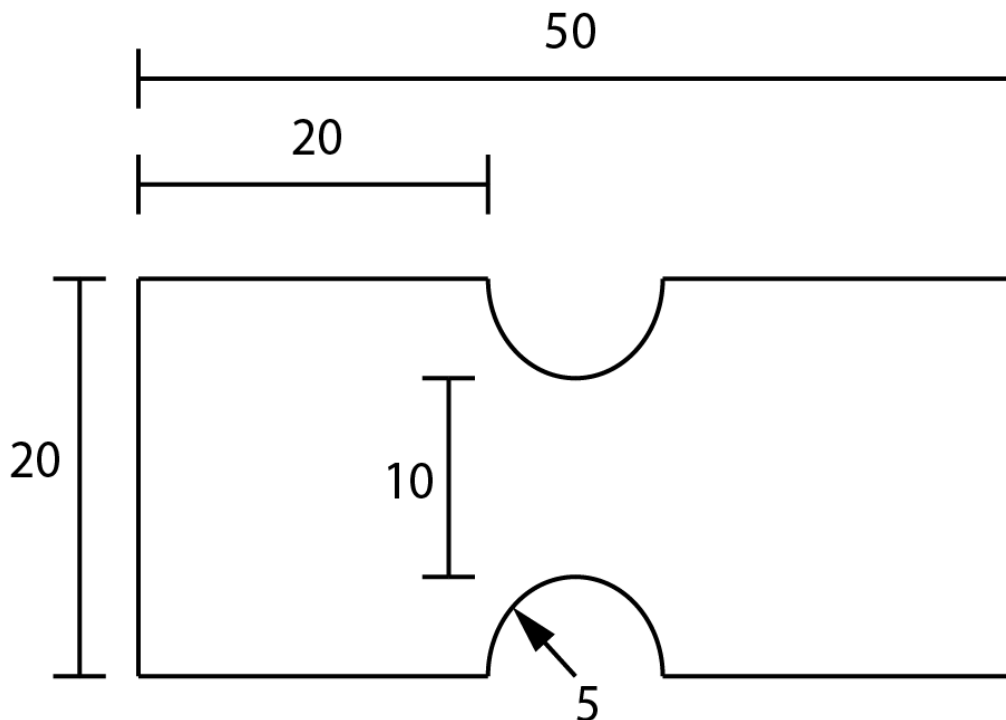


Figura 5.31 – Corpo de prova com dimensões em mm.

A ideia de realizar a análise sobre o corpo de prova da Fig. 5.31 se deve ao fato de que a obtenção de diagramas de tensão-deformação é, em geral, realizada com um ensaio de tração. (Beer, et al. 2008)

5.2.2 MODELAGEM DO PROBLEMA

O problema proposto na seção 5.2.1 foi modelado no Abaqus CAE com a tabela 5.7 contendo o módulo de elasticidade, densidade do material e coeficiente de Poisson do Al 7075-T651 a ser introduzido no módulo *Property* e a tabela 5.8 com os dados de tensão e deformação plástica do material conforme disponível no livro-texto de (Dowling, 2007). O modelo de plasticidade utilizado foi o isotrópico na simulação numérica foi de encruamento isotrópico.

Tabela 5.6 – Dados do material analisado.

Al 7075-T651	
Módulo de Elasticidade (MPa)	71.000
Densidade (g/cm ³)	2,81
Coefficiente de Poisson	0,33
H	585,5
n	0,0445

Tabela 5.7 – Dados para curva de deformação plástica para o Abaqus.

Tensão (MPa)	Deformação Plástica (mm)
370	0
390	0,0001
400	0,0002
410	0,0003
420	0,0006
430	0,001
440	0,0016
450	0,0027
460	0,0044
470	0,0072
480	0,0115
490	0,0183
500	0,0289
510	0,045

A curva de plasticidade do material analisado está representada na Fig. 5.32 criada por um código em MATLAB, levando em consideração os parâmetros H e n fornecidos do material.

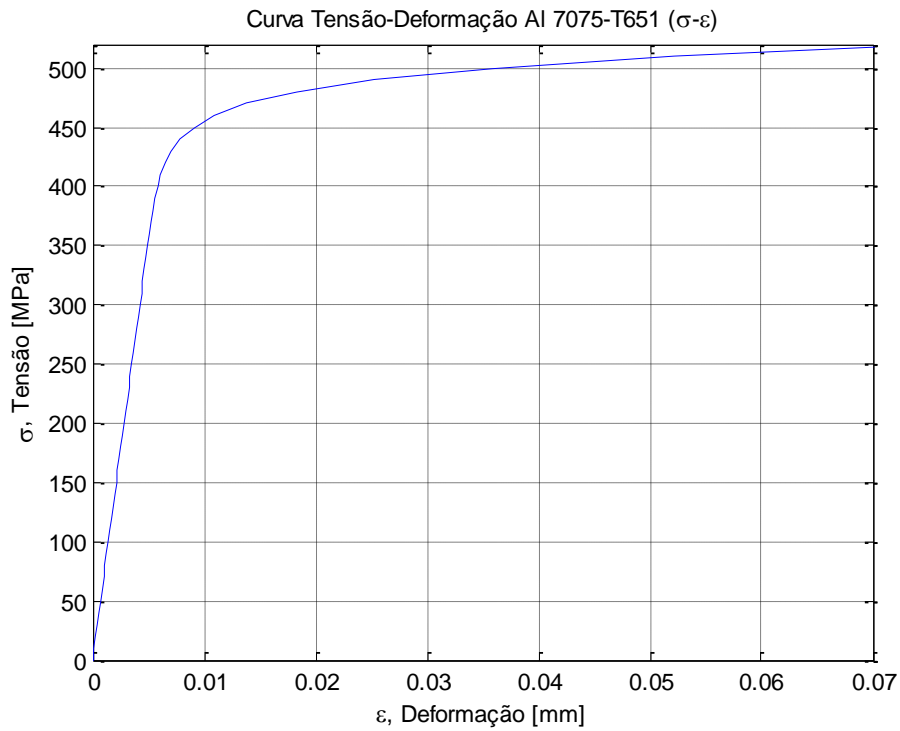


Figura 5.32 – Curva de plasticidade do Al 7075-T651.

A malha criada para o problema é representada na Fig. 5.33 e as condições de contorno na Fig. 5.34. A malha do corpo de prova é estruturada e apresenta 21.580 elementos para uma melhor precisão nas tensões submetidas durante o ensaio e nas tensões residuais após a aplicação da força. Na extremidade direita é representado a posição de aplicação da força distribuída sobre a extremidade de magnitude 25 N/mm e na esquerda o engastamento.

A força é aplicada com auxílio da ferramenta *Amplitude* no módulo *Step* com objetivo de descarregar o corpo de prova para observar as tensões residuais.

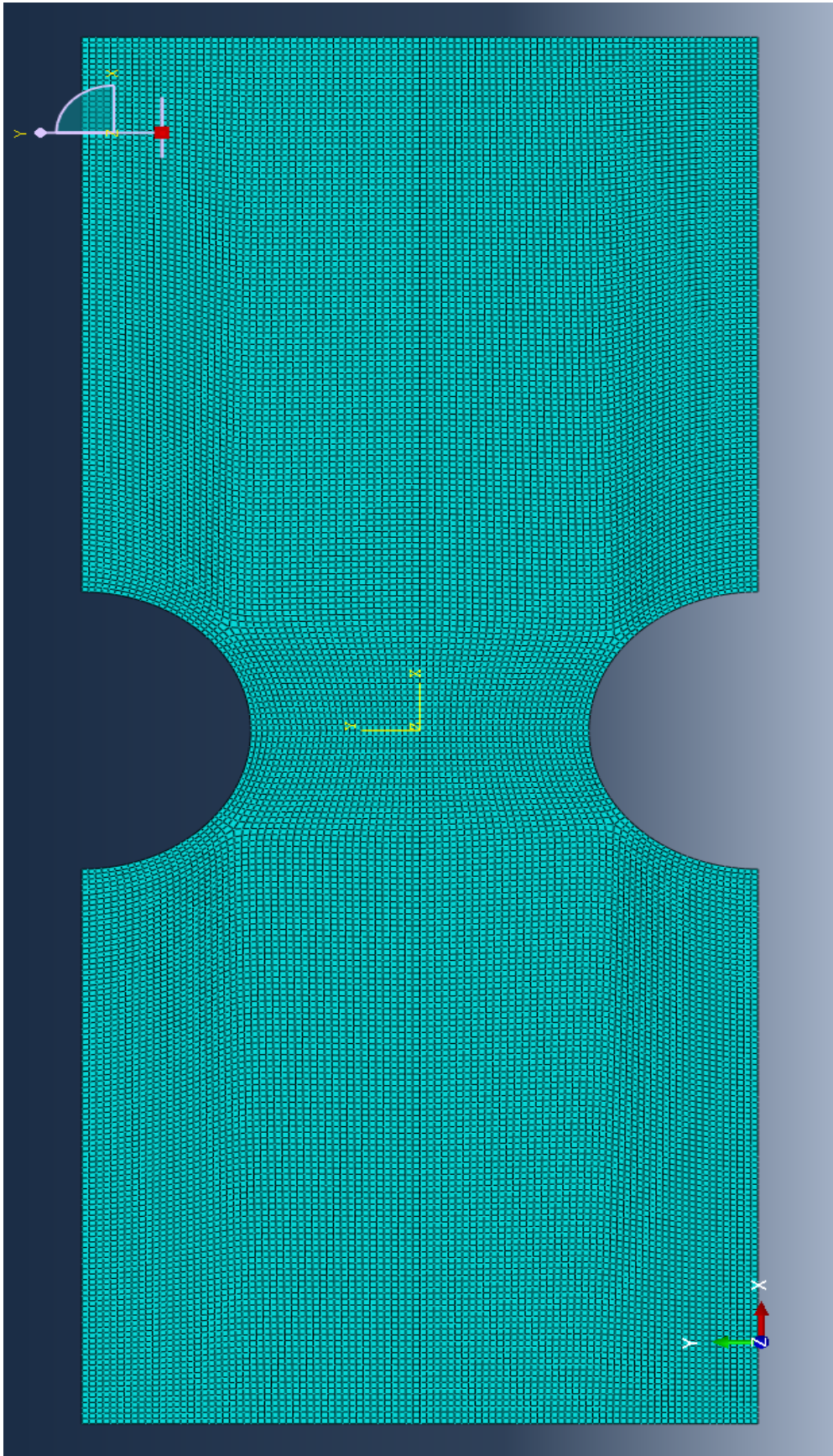


Figura 5.33 – Malha aplicada ao corpo de prova analisado.

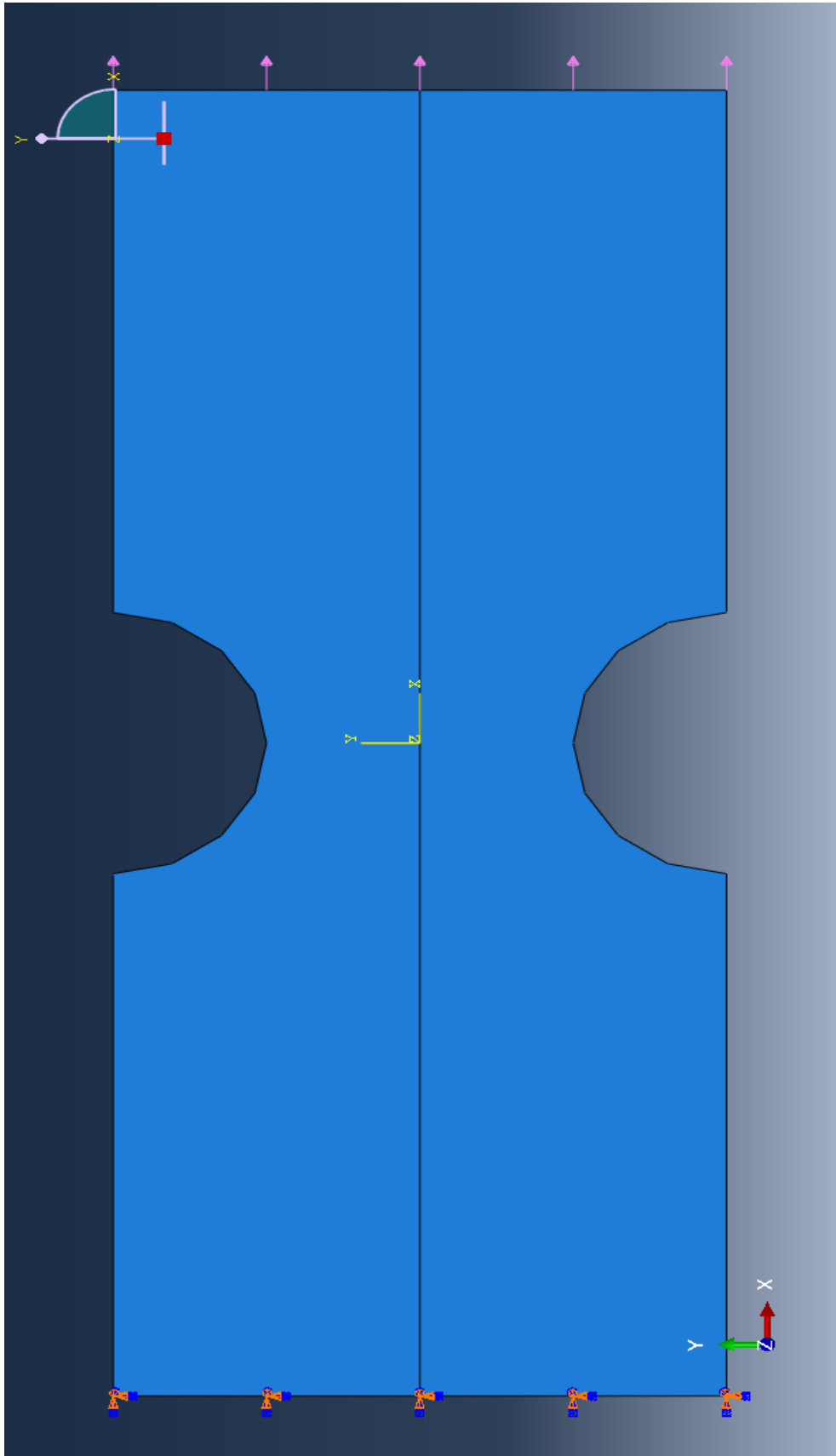


Figura 5.34 – Aplicação das condições de contorno ao problema.

5.2.3 RESULTADOS

A análise feita pelo Abaqus gerou a distribuição de deformações residuais no corpo de prova após o término do carregamento aplicado na extremidade direita representada na figura 5.35.

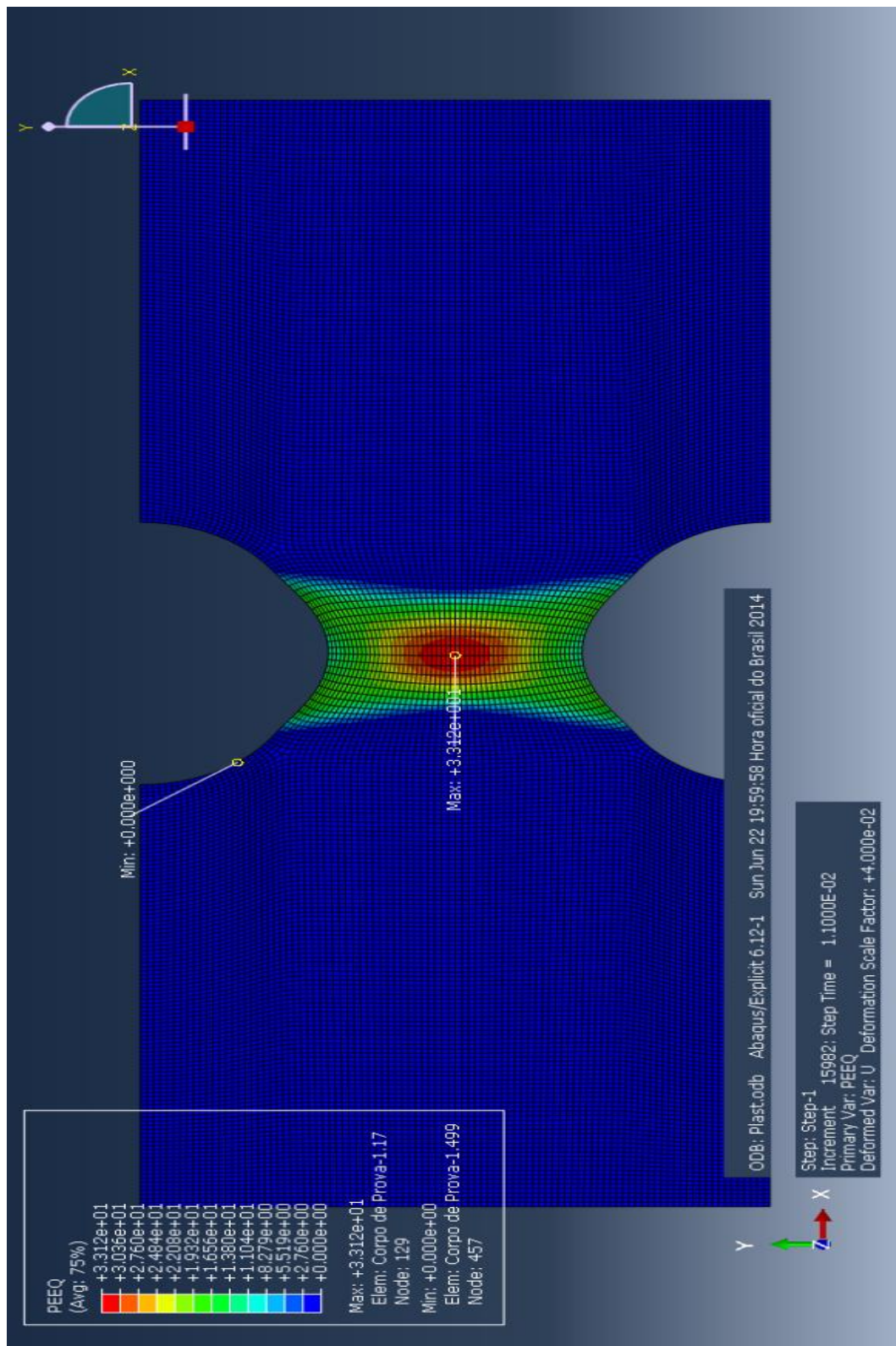


Figura 5.35 – Deformação plástica sobre o corpo de prova após o carregamento.

Observando a Fig. 5.35, pode-se notar que o corpo de prova sofreu deformação plástica bem localizada na região central do corpo de prova. A Fig. 5.36 ilustra a comparação entre os pontos obtidos e a curva de plasticidade do material.

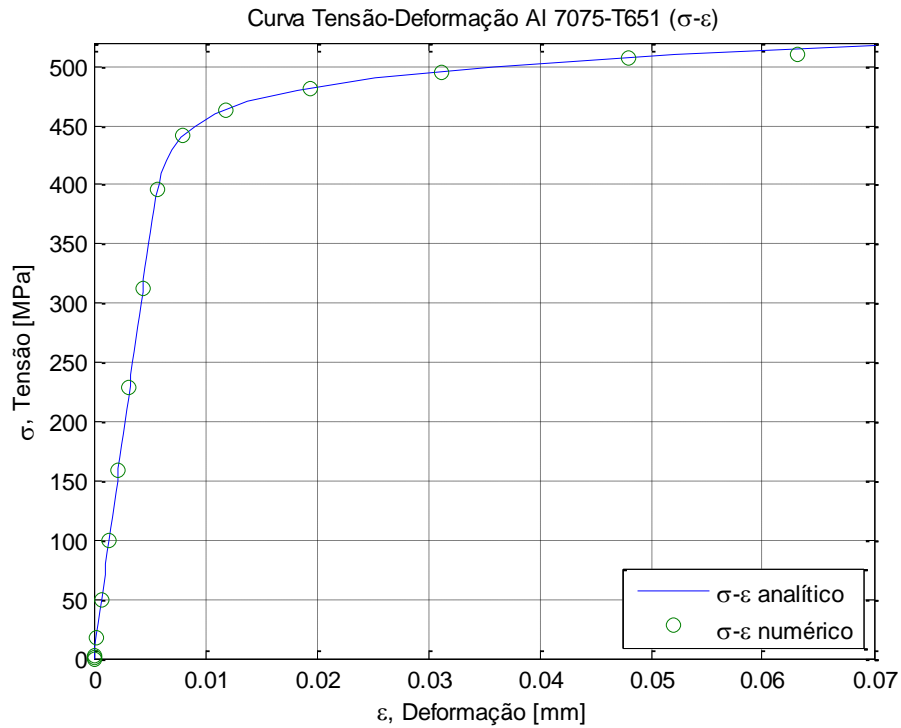


Figura 5.36 – Comparação entre os valores obtidos de tensão-deformação.

5.2.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos pelo Abaqus e apresentados na forma de comparação de gráficos apresentados na seção 5.2.3 foram próximos da curva de plasticidade do material analisado, validando, portanto, o Abaqus para o caso de contato entre fios rotacionados de 30°.

Pode ser observado ainda que as deformações residuais presentes na Fig. 5.36 após o descarregamento da força aplicada sobre o corpo de prova estão localizadas na região central, onde ocorre as maiores tensões devido as concentrações de tensões presentes nesta região.

5.3 CONTATO ELASTO-PLÁSTICO ENTRE CILINDROS ROTACIONADOS POR 30°

Nesta seção, apresenta-se o contato entre dois cilindros rotacionados por 30° em relação a seus eixos no caso de um material elasto-plástico, os resultados obtidos e a curva de plasticidade gerada.

5.3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de contato aqui formulado apresenta as mesmas características da seção 5.1 do presente capítulo, sendo que foi adicionado as informações de plasticidade do Al 7075-T651 presente na Tab. 5.7 da seção 5.2.2 no módulo *Property* do Abaqus para o modelo plástico isotrópico. A mesma análise com uso de submodelo realizado anteriormente foi aplicada para o contato elasto-plástico com objetivo de reduzir o custo computacional do Abaqus na obtenção das soluções numéricas.

5.3.3 RESULTADOS

Durante o carregamento dos cilindros, foram obtidas figuras que representam a tensão de Mises no momento de máximo carregamento (Fig. 5.37) e no final, sem carregamento, ilustrando as tensões plásticas residuais sobre a superfície do cilindro (Fig. 5.38).

A Fig. 5.39 tem a representação da pressão de contato quando o carregamento aplicado sobre os cilindros tem valor máximo (408,3 N).

Como resultados, foram obtidos a Fig. 5.40 que ilustra a tensão de Mises versus a deformação sofrida pelo corpo e a Fig. 5.41 que representa a pressão de contato versus a deformação.

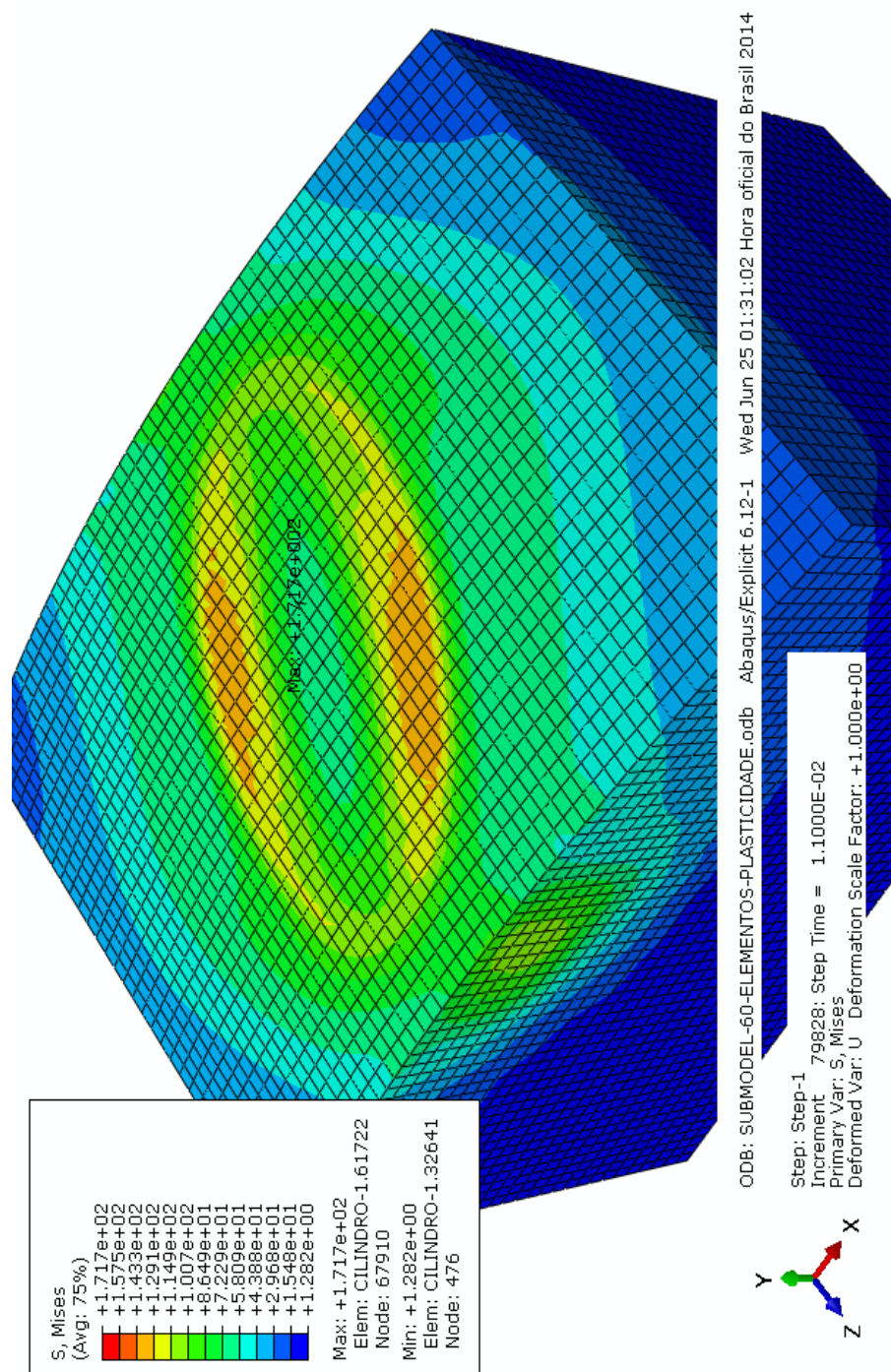


Figura 5.37 – Tensão de Mises no momento de carregamento máximo dos cilindros rotacionados por 30°.

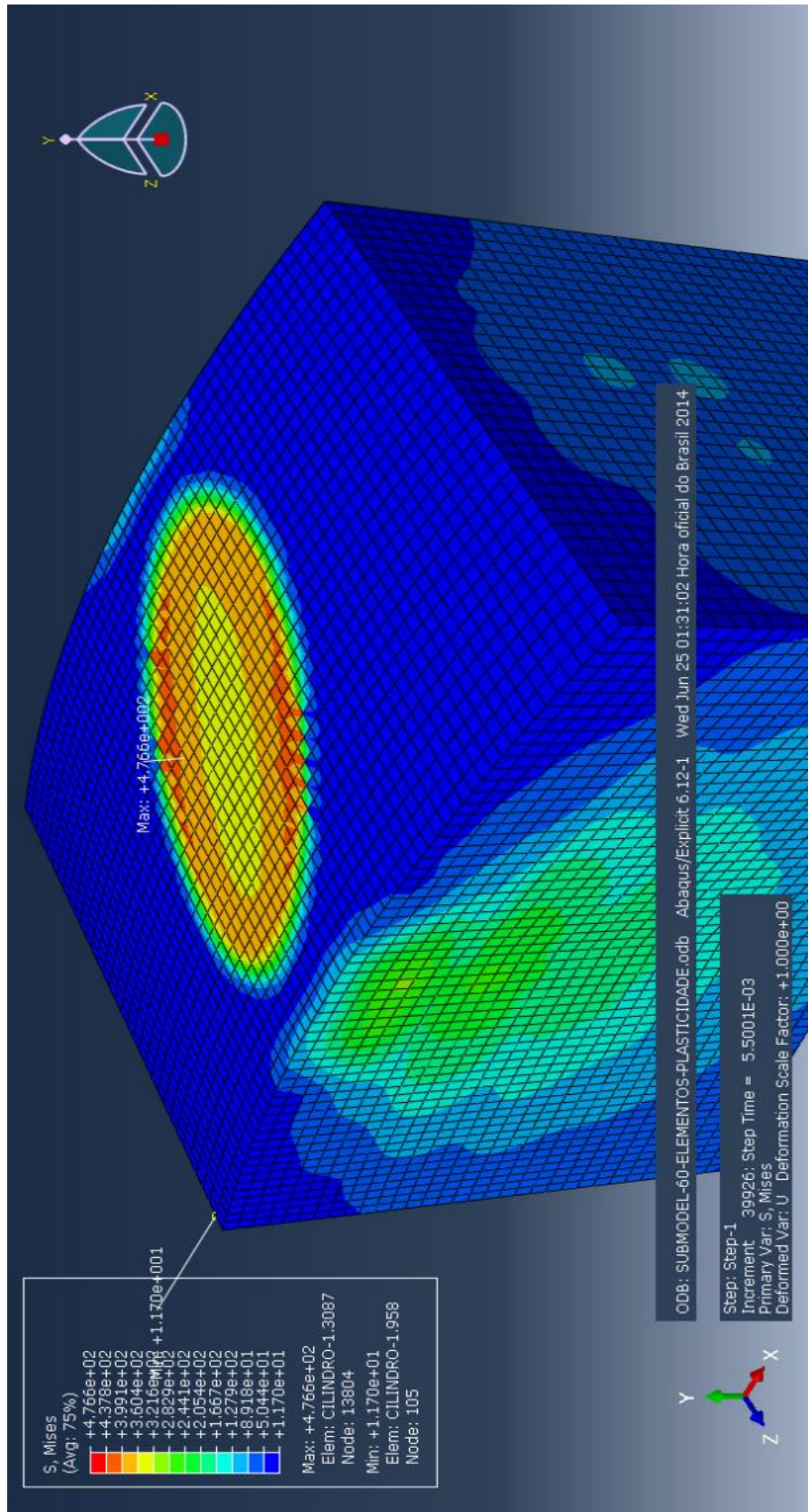


Figura 5.38 – Tensão de Mises residual sobre os cilindros rotacionados por 30°.

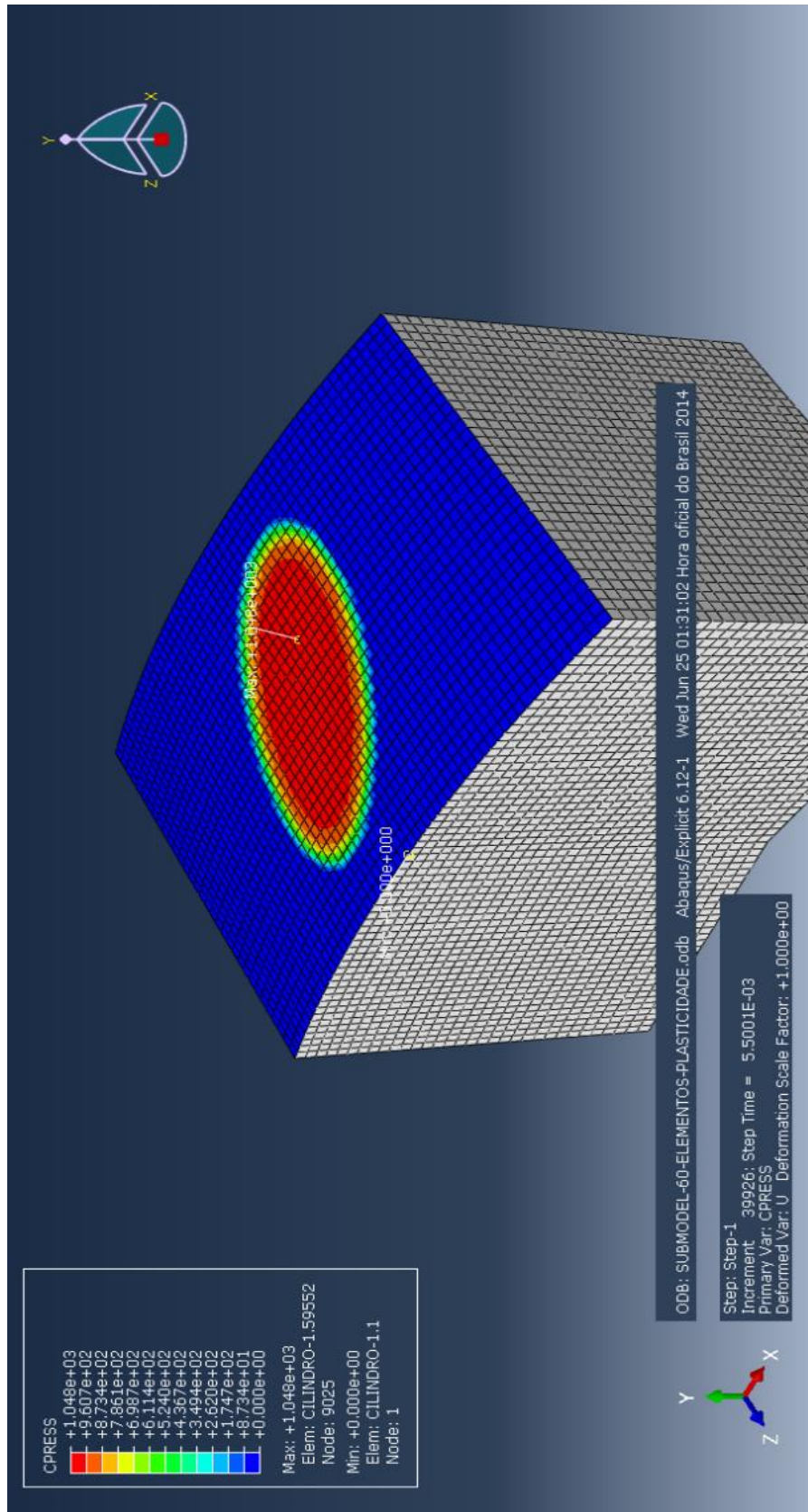


Figura 5.39 – Pressão de contato máxima sobre o cilindro rotacionados por 30°.

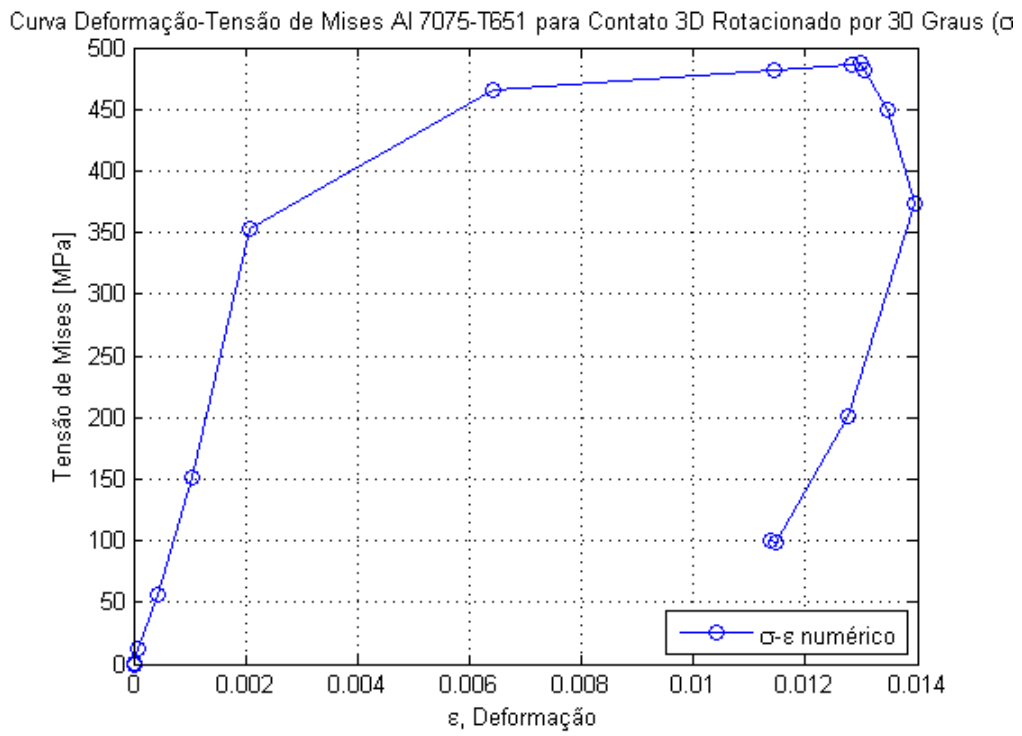


Figura 5.40 – Curva de plasticidade para contato 3D entre fios rotacionado por 30° do Al 7075-T651.

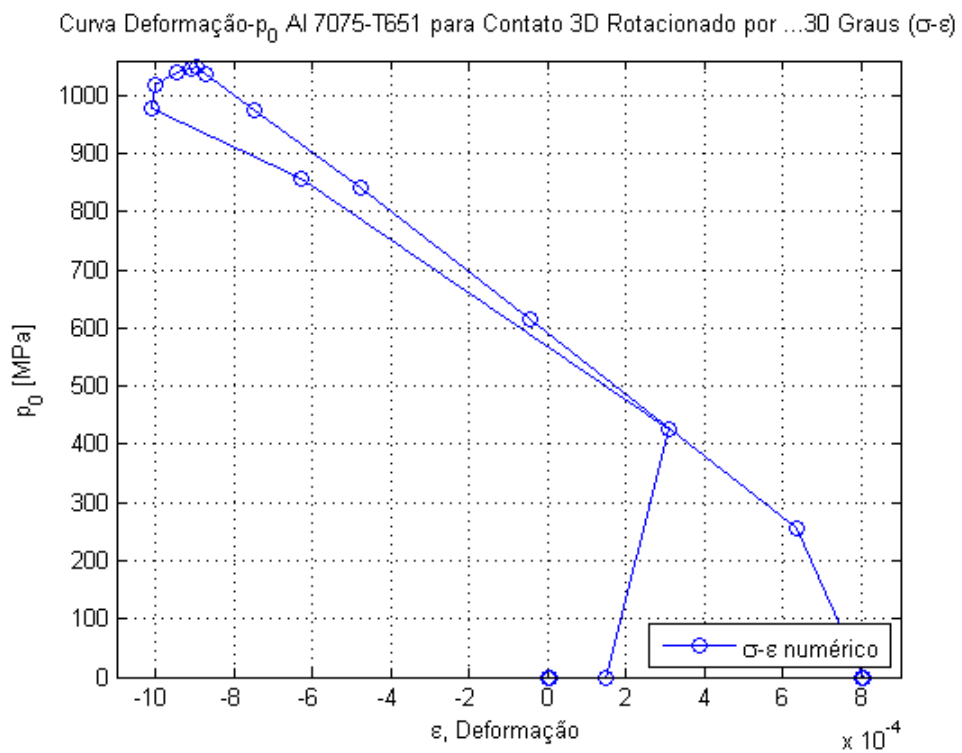


Figura 5.41 - Curva de deformação versus pressão de contato para o caso 3D entre fios rotacionados por 30° do Al 7075-T651

5.3.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Após a análise realizada na seção 5.2, pode-se notar que a aplicação de plasticidade no Abaqus possui aproximação considerável com a curva de plasticidade gerada para o material analisado. No caso apresentado nesta seção, a curva obtida para o contato elasto-plástico se apresentou de maneira semelhante ao da Fig. 5.36, sendo um resultado satisfatório depois das análises de pressão de contato e tensões apresentados na seção 5.1.3 para o caso 3D rotacionado por 30°.

5.3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ATRITO

Nesta seção, encontra-se a simulação para o caso apresentado por (Feijó et. al, 1988) comparando-se os seus resultados.

5.3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema pode ser descrito como um bloco de material isotrópico, homogêneo e linear elástico apoiado sobre uma superfície rígida, comprimido por duas cargas distribuídas f opostas de mesma magnitude e uma carga distribuída F sobre sua superfície conforme ilustrado na Fig. 5.42.

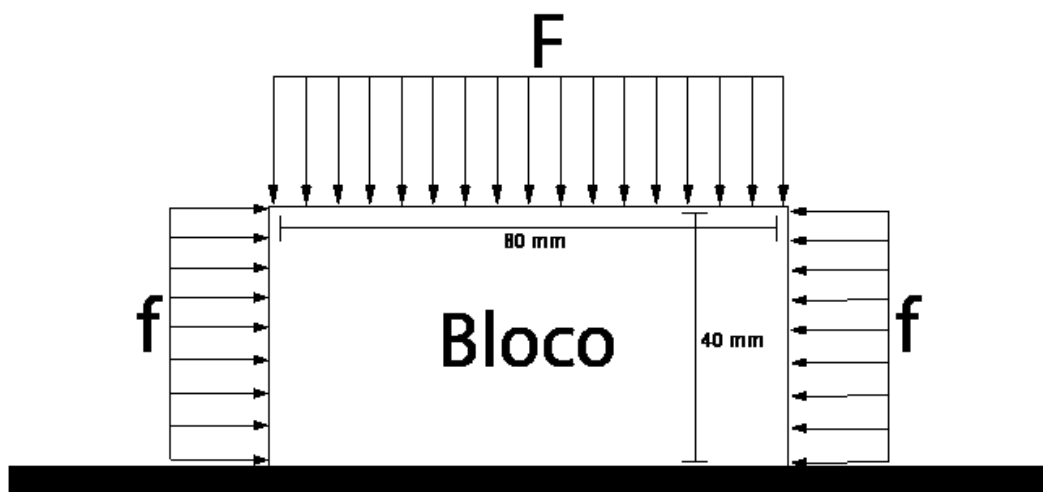


Figura 5.42 – Bloco apoiado em repouso com cargas distribuídas F e f .

Os dados analisados para situações com diferentes coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície de contato são:

Tabela 5.8 – Problema de atrito para $\mu = 1$.

Coeficiente de Atrito $\mu = 1$	
f (daN/mm ²)	5
F (daN/mm ²)	15
Módulo de Young (N/mm ²)	13.000
Coeficiente de Poisson	0,2

Tabela 5.9 – Problema de atrito para $\mu = 0,2$.

Coeficiente de Atrito $\mu = 0,2$	
f (daN/mm ²)	10
F (daN/mm ²)	15
Módulo de Young (N/mm ²)	13.000
Coeficiente de Poisson	0,2

Por simetria, o problema ilustrado na Fig. 5.42 pode ser dividido em dois blocos iguais com restrição de movimento em relação à x no eixo de simetria, conforme observado na Fig. 5.43.

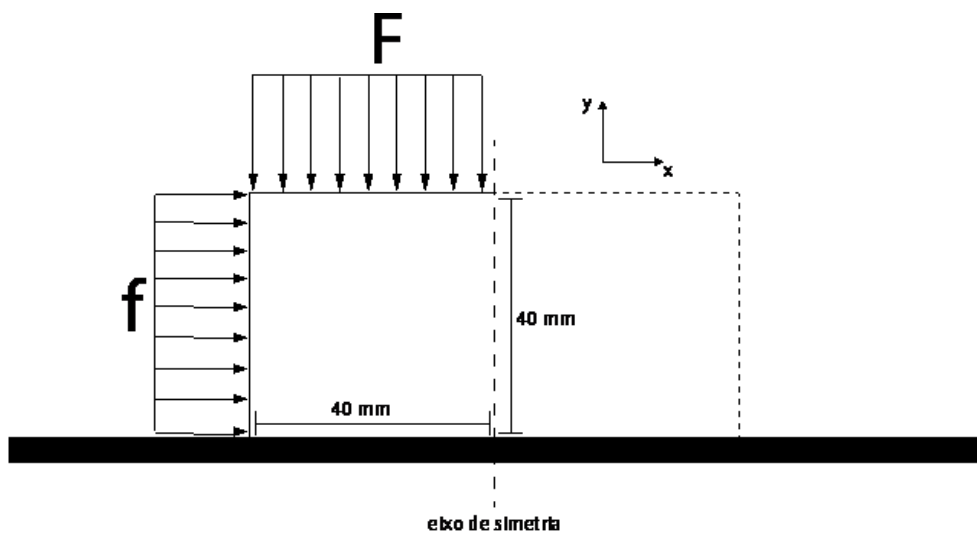


Figura 5.43 – Representação do problema em relação ao eixo de simetria.

5.3.2 MODELAGEM DO PROBLEMA

O bloco foi modelado como uma superfície deformável em contato com uma superfície rígida e, após o desenho no Abaqus, ambos foram montados com o uso do recurso *Assembly* explicado no capítulo 4.

A Fig. 5.44 ilustra a montagem do problema com o uso do software.

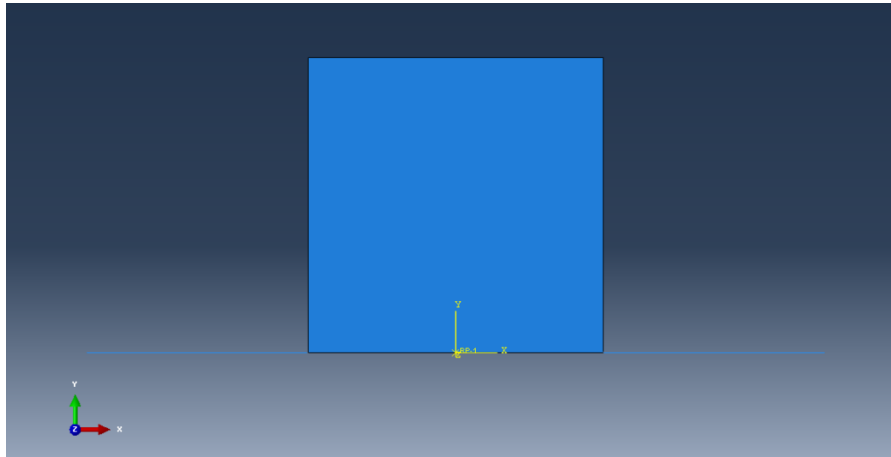


Figura 5.44 – Representação do problema via Abaqus.

O módulo de Young e o coeficiente de Poisson foram inseridos no módulo *Property* para as propriedades do material e determinados somente para o bloco, pois como a superfície de contato é rígida não há necessidade de determinar suas propriedades.

A interação entre as superfícies de contato foram modeladas através do módulo *Interaction* e colocadas com comportamento normal e tangencial. No contato tangencial foi inserido o coeficiente de atrito para cada um dos casos estudados e a fração característica da superfície foi dada no artigo como 0,0001. Deve-se observar que o Abaqus pede que a superfície rígida possua um ponto de referência aonde será colocada a condição de contorno.

As cargas e condições de contorno foram definidas conforme Fig. 5.45 sendo que a superfície rígida encontra-se engastada no seu ponto de referência e a lateral livre de carga possui restrição de deslocamento $u_x = 0$ devido ao eixo de simetria ilustrado pela Fig. 5.43.

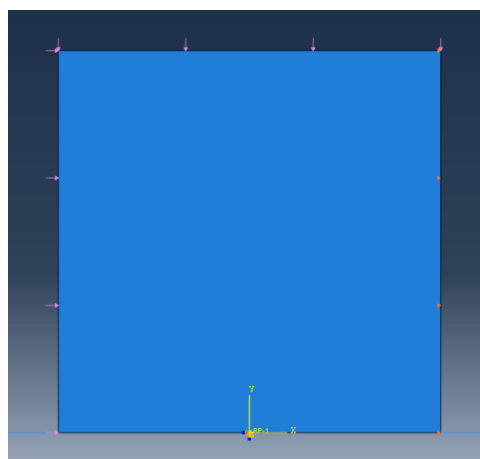


Figura 5.45 – Representação da posição das cargas e condições de contorno do bloco e superfície de contato.

A discretização do problema foi realizada como o módulo *Mesh*, para que no contato entre as superfícies existam 33 nós pertencentes a elementos lineares quadrilaterais, sendo a Fig. 5.46 ilustração da malha gerada.

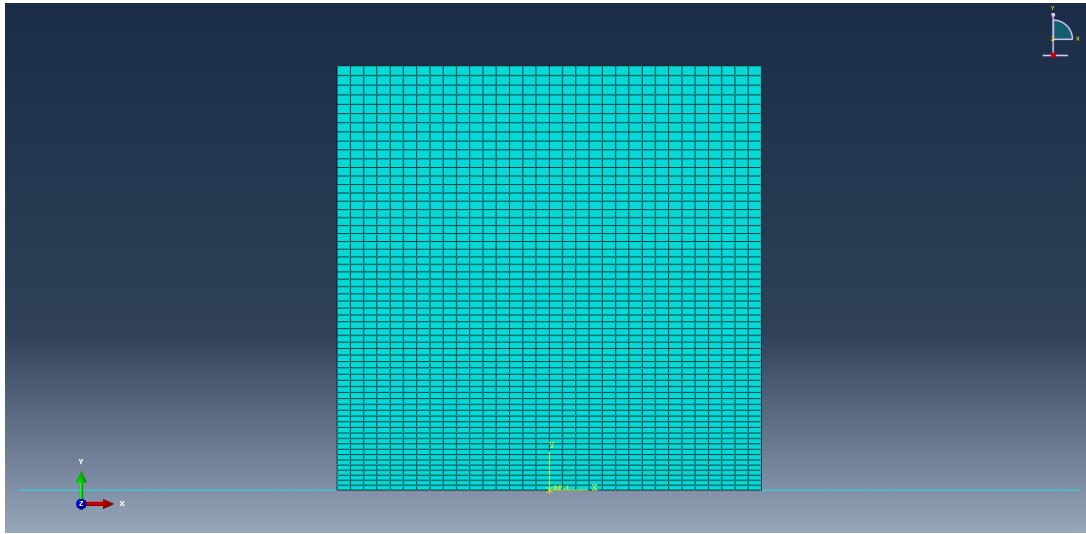


Figura 5.46 – Malha gerada pelo Abaqus.

5.3.3 RESULTADOS

Os resultados obtidos pela análise do Abaqus encontram-se na Tab. 5.10, sendo u_x e u_y os deslocamentos em relação à x e y e F_N e F_t as forças de contato normal e tangencial respectivamente.

Tabela 5.10 – Resultados do Abaqus para $\mu = 1$.

Distância do Nó	F_N	F_t	u_x	u_y
0	5,2253346	0,131187	-1,31E-37	-6E-05
1,249992371	10,446561	0,629549	7,11E-06	-6E-05
2,499984741	10,436733	1,265062	1,52E-05	-6E-05
3,749977112	10,420836	1,935779	2,30E-05	-6E-05
4,999968529	10,398142	2,655772	3,17E-05	-6E-05
6,249958992	10,365056	3,458454	4,12E-05	-6E-05
7,499947548	10,3285	4,401021	5,27E-05	-6E-05
8,749932289	10,277405	5,654887	6,77E-05	-6E-05
9,999931335	9,8483734	7,923283	6,87E-05	-6E-05
11,24965668	9,0111008	8,791985	0,0003	-5E-05
12,49908733	8,3173008	8,317301	0,0009	-5E-05
13,74837494	7,881403	7,881403	0,0016	-5E-05
14,99755955	7,5328603	7,53286	0,0024	-5E-05
16,24665833	7,2218223	7,221822	0,0033	-4E-05
17,49568558	6,9338932	6,933893	0,0043	-4E-05
18,74464989	6,6586623	6,658662	0,0054	-4E-05
19,99355698	6,390038	6,390038	0,0064	-4E-05
21,24241066	6,123085	6,123085	0,0076	-4E-05
22,49121666	5,8537307	5,853731	0,0088	-4E-05
23,73997688	5,5780973	5,578097	0,0100	-3E-05
24,98869514	5,2922082	5,292208	0,0113	-3E-05
26,23737335	4,991672	4,991672	0,0126	-3E-05
27,48601341	4,6712823	4,671282	0,0140	-3E-05
28,73461723	4,324739	4,324739	0,0154	-3E-05
29,98318672	3,9435542	3,943554	0,0168	-2E-05
31,23172379	3,5172136	3,517214	0,0183	-2E-05
32,48023224	3,0277519	3,027752	0,0198	-2E-05
33,72871399	2,4554474	2,455447	0,0213	-2E-05
34,97717667	1,7340008	1,734001	0,0228	-9E-06
36,22563934	0,7116556	0,711656	0,0244	-2E-05
37,47418976	0,0812755	0,081275	0,0258	7E-05
38,72281647	0	0	0,0272	0,000301
39,97143936	0	0	0,0286	0,000586

Tabela 5.11 – Resultados do Abaqus para $\mu = 0,2$.

Distância dos Nós	F_N	F_t	u_x	u_y
0	10,39	0,036	-3,6E-38	-3,3E-05
1,249994278	20,78	0,171739	4,92E-06	-7,4E-05
2,499990463	20,77	0,340631	1,03E-05	-8,7E-05
3,749984741	20,76	0,514714	1,55E-05	-9,3E-05
4,999979019	20,75	0,691846	2,08E-05	-9,9E-05
6,249973297	20,73	0,87412	2,63E-05	-0,0001
7,499967575	20,71	1,063292	3,2E-05	-0,00011
8,749961853	20,69	1,261605	3,8E-05	-0,00011
9,999955177	20,66	1,472038	4,44E-05	-0,00011
11,2499485	20,62	1,698685	5,13E-05	-0,00011
12,49994087	20,58	1,947879	5,89E-05	-0,00011
13,74993324	20,53	2,229623	6,75E-05	-0,00011
14,99992275	20,48	2,562593	7,77E-05	-0,00012
16,24991035	20,41	3,00716	9E-05	-0,00012
17,4998951	20,22	3,701201	0,000105	-0,00012
18,74979019	19,92	3,949615	0,000211	-0,00012
19,99960518	19,66	3,931501	0,000396	-0,00012
21,24937439	19,45	3,88991	0,000627	-0,00012
22,49910545	19,25	3,85023	0,000896	-0,00012
23,74880219	19,05	3,810639	0,0012	-0,00013
24,9984684	18,85	3,770072	0,001533	-0,00013
26,24810791	18,64	3,727345	0,001894	-0,00013
27,49772072	18,41	3,681273	0,002281	-0,00013
28,74730873	18,15	3,630439	0,002693	-0,00013
29,99687386	17,87	3,573031	0,003129	-0,00013
31,24641418	17,53	3,506483	0,003588	-0,00013
32,49592972	17,14	3,427181	0,004072	-0,00013
33,74542236	16,65	3,329099	0,00458	-0,00013
34,99488831	16,02	3,20325	0,005114	-0,00013
36,24432373	15,15	3,029546	0,005678	-0,00013
37,49372482	13,88	2,775229	0,006279	-0,00013
38,74308395	11,24	2,248078	0,006922	-0,00013
39,99232483	4,08	0,815904	0,007681	-0,00013

As Tab. 5.12 e 5.13 relacionam todos os resultados obtidos (Feijó et. al, 1988) para os valores das Tab. 5.10 e 5.11.

Tabela 5.12 – Resultados de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 1$.

x	F_N	F_t	u_x	u_y
0	5,23	0	0	0
1,25	10,47	0,64	0	0
2,5	10,47	1,28	0	0
3,75	10,46	1,96	0	0
5	10,44	2,69	0	0
6,25	10,41	3,52	0	0
7,5	10,38	4,48	0	0
8,75	10,31	5,75	0	0
10	9,8	8,57	0	0
11,25	8,93	8,93	0,0003	0
12,5	8,28	8,28	0,0009	0
13,75	7,86	7,86	0,0016	0
15	7,52	7,52	0,0025	0
16,25	7,21	7,21	0,0034	0
17,5	6,93	6,93	0,0043	0
18,75	6,66	6,66	0,0054	0
20	6,39	6,39	0,0065	0
21,25	6,13	6,13	0,0076	0
22,5	5,86	5,86	0,0088	0
23,75	5,59	5,59	0,0101	0
25	5,3	5,3	0,0113	0
26,25	5	5	0,0127	0
27,5	4,68	4,68	0,014	0
28,75	4,34	4,34	0,0154	0
30	3,96	3,96	0,0169	0
31,25	3,53	3,53	0,0183	0
32,5	3,04	3,04	0,0198	0
33,75	2,46	2,46	0,0213	0
35	1,72	1,72	0,0229	0
36,25	0,66	0,66	0,0244	0
37,5	0	0	0,0258	0,0001
38,75	0	0	0,0272	0,0003
40	0	0	0,0286	0,0006

Tabela 5.13 – Resultados de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 0,2$.

x	u_x	F_n	F_t
0	0	10,4	0
1,25	0	20,8	0,17
2,5	0	20,8	0,34
3,75	0	20,79	0,52
5	0	20,77	0,7
6,25	0	20,76	0,88
7,5	0	20,74	1,08
8,75	0	20,71	1,28
10	0	20,68	1,5
11,25	0	20,65	1,73
12,5	0	20,61	1,99
13,75	0	20,57	2,3
15	0	20,52	2,66
16,25	0	20,42	3,23
17,5	0,00003	20,17	4,03
18,75	0,00016	19,86	3,97
20	0,00036	19,63	3,93
21,25	0,0006	19,43	3,89
22,5	0,00088	19,24	3,85
23,75	0,00119	19,04	3,81
25	0,00153	18,84	3,77
26,25	0,00189	18,63	3,73
27,5	0,00228	18,4	3,68
28,75	0,0027	18,15	3,63
30	0,00314	17,86	3,57
31,25	0,0036	17,53	3,51
32,5	0,00409	17,14	3,43
33,75	0,00461	16,65	3,33
35	0,00515	16,03	3,21
36,25	0,00572	15,17	3,03
37,5	0,00633	13,88	2,78
38,75	0,00699	11,5	2,3
40	0,00776	3,64	0,73

E os gráficos de comparação entre os resultados obtidos pelo Abaqus e (Feijó et. al, 1988) foram gerados com auxílio do MATLAB, sendo que os resultados do artigo foram representados por uma linha

contínua e os da simulação do Abaqus representados por pontos com formato de pequenas circunferências.

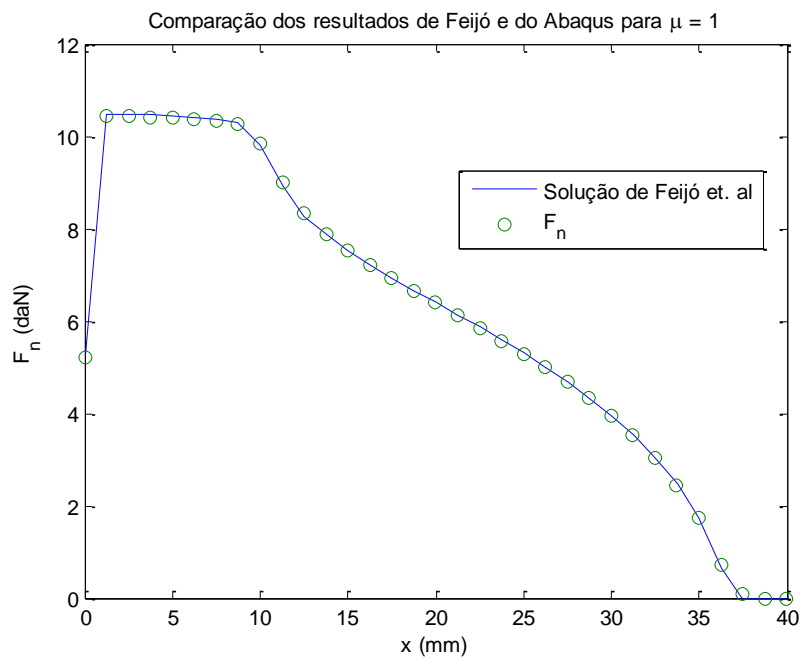


Figura 5.47 – Comparação entre a força normal nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$.

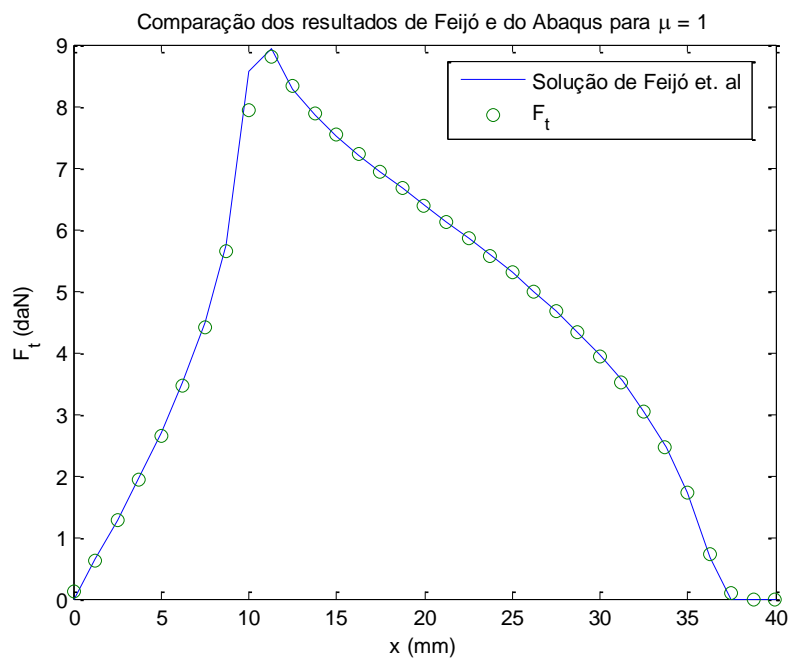


Figura 5.48 – Comparação entre a força tangencial nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$.

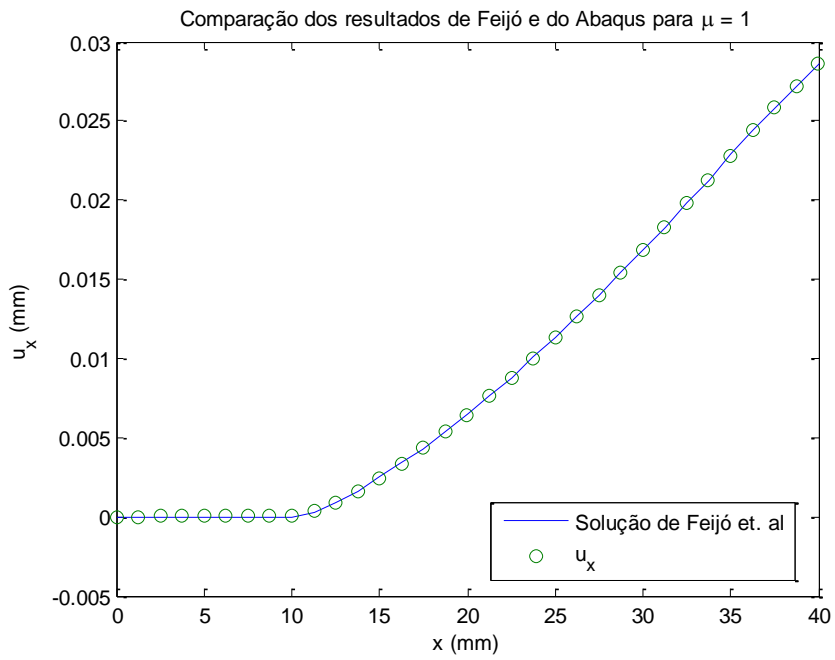


Figura 5.49 - Compara o entre o deslocamento em rela o ao eixo x dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$.

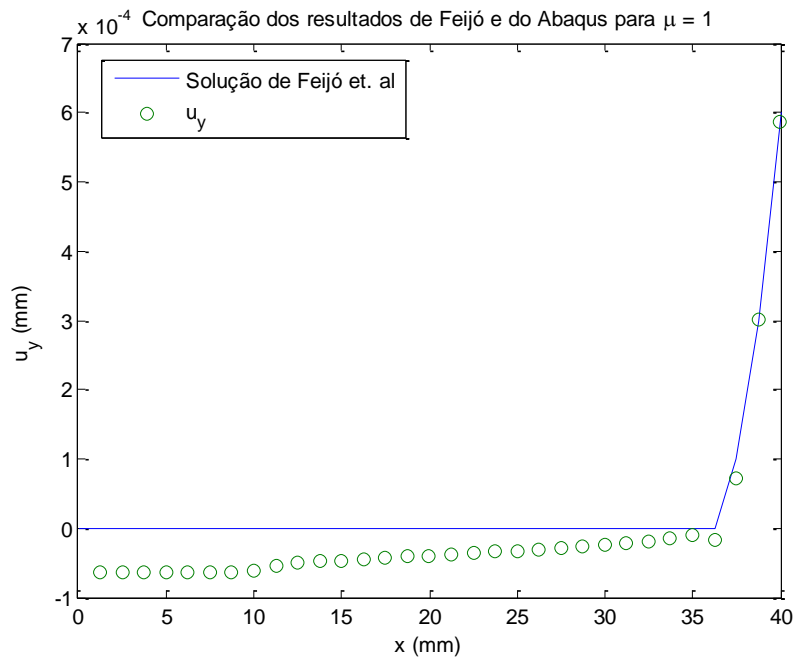


Figura 5.50 - Compara o entre o deslocamento em rela o ao eixo y dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 1$.

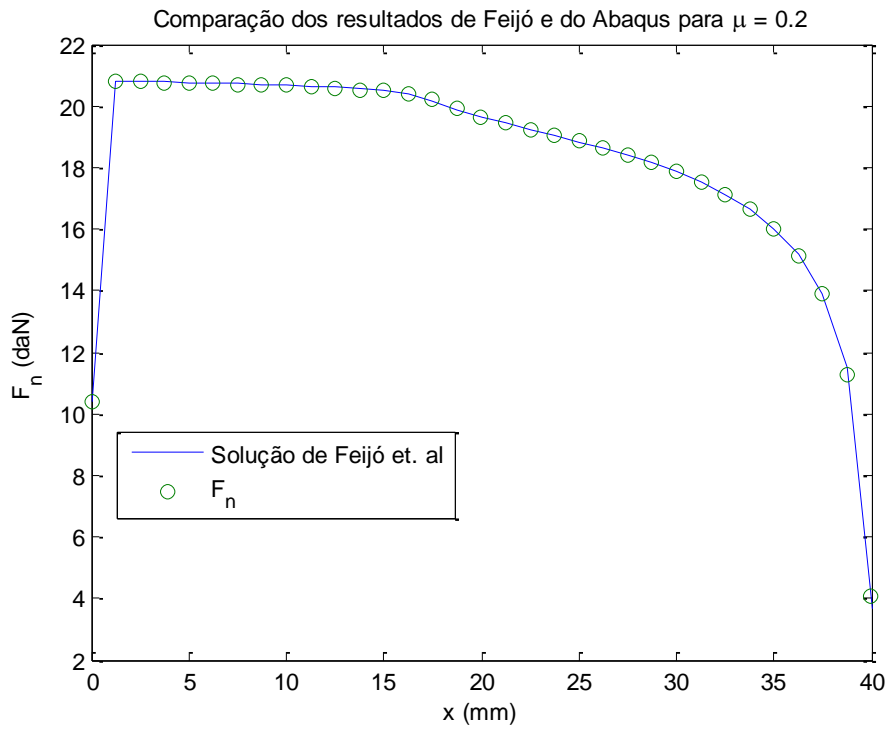


Figura 5.51 – Comparação entre a força normal nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$.

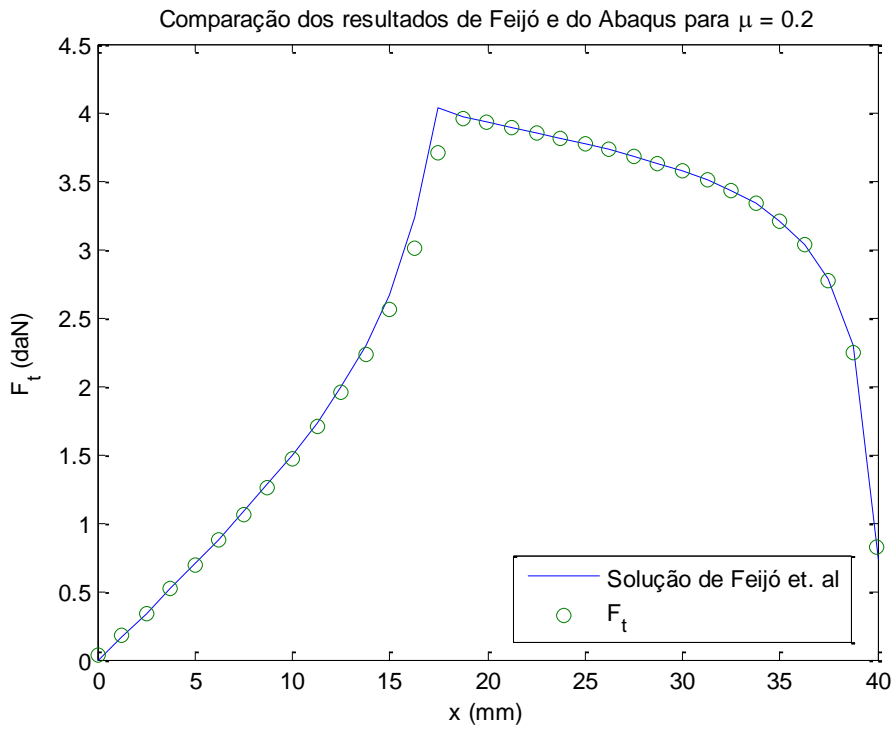


Figura 5.52 – Comparação entre a força tangencial nos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$.

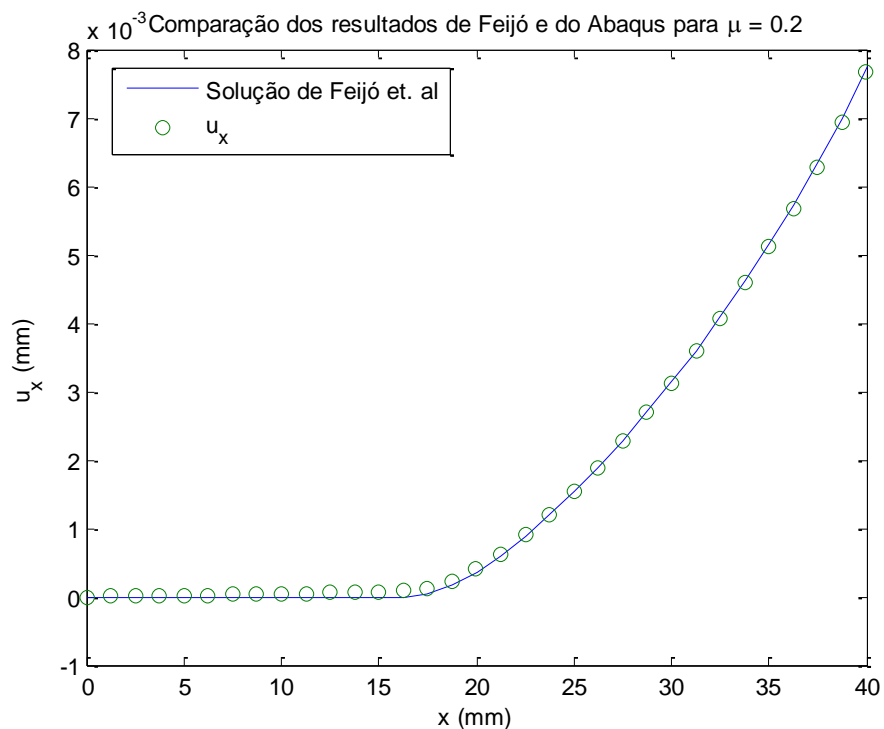


Figura 5.53 - Comparação entre o deslocamento em relação ao eixo x dos nós de (Feijó et. al, 1988) e o simulado pelo Abaqus para $\mu = 0,2$.

5.3.4 CONCLUSÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Os resultados obtidos na simulação do problema de atrito na seção 5.2.1 foram próximos dos valores obtidos por (Feijó et. al, 1988). Apresentando diferença somente no caso do deslocamento em relação ao eixo y que deveriam ter valor nulo para os pontos nodais em contato.

O deslocamento deveria ser nulo, pois a superfície de apoio do bloco escolhida para o problema de contato era rígida. Porém o deslocamento de cada nó para dentro da superfície rígida foi muito pequeno quando comparado com o valor do deslocamento dos nós sem contato com a superfície conforme pode ser observado pelas Tab. 5.10 e 5.11 e pelo gráfico da figura 5.50. Como no artigo os valores para deslocamento em relação a y, no caso de $\mu = 0,2$, não foram fornecidos pelos autores, acabou não sendo possível comparar os resultados, mas pode-se observar que também houve deslocamento para dentro da superfície rígida.

Portanto, pode-se concluir que os resultados obtidos pela simulação foram condizentes com os obtidos por (Feijó et. al, 1988), podendo-se, assim, validar os valores do Abaqus para atrito estático com coeficientes de atrito para $\mu = 0,2$ e $\mu = 1$.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O estudo do contato é importante para entender as tensões submetidas entre componentes mecânicos como engrenagens, parafusos, cames entre outros, que muitas vezes ocorre em uma pequena área amplificando o efeito das tensões na região de contato.

O objetivo do trabalho é entender o contato entre fios pela aplicação das hipóteses de Hertz no Abaqus e comparar os resultados obtidos com os resultados esperados pela relação de contato de Hertz. O material utilizado nas simulações foi o de alumínio nos regimes elásticos e elasto-plásticos em casos mostrados no capítulo 5.

Como resultados, observou-se que o Abaqus obteve análises com baixo erro para os casos simulados no capítulo 5, validando o caso de contato para fios com rotação de 30° do Al 7057-T651. Este alumínio foi utilizado devido à dificuldade de encontrar os parâmetros H e n do material do fio condutor de energia e por (Dowling,2007) possuir estes dados para o material simulado.

Em trabalhos futuros, será realizado a continuação das simulações para o contato entre fios submetidos a tração, atrito e a “*fretting*”.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Analysis User's Manual, ABAQUS 6.11, Volume V: **Prescribed Conditions, Constraints & Interactions**, D'S Simulia, 2011.
- Departamento de Engenharia de Materiais, DEMAR, Escola de Engenharia de Lorena (EEL), **Método dos Elementos Finitos**. Disponível em:<http://www.demar.eel.usp.br/metodos/mat_didatico/Metodo_dos_Elementos_Finitos.pdf>. Acesso em 30 Setembro 2013
- Hughes, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and dynamic finite element analysis**. Prentice-Hall, 1987.
- Khennaene, Amar. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus**. CRC Press, 2013.
- K.L. Johnson, K.Kenneth. **Contact Mechanics**. Cambrige University Press, 1987.
- H. Hertz. **On the contact of elastic solid**. Macmillan and Co. Ltd, London, 1896.
- R. A. Feijó, H. J. C. Barbosa. **Numerial formulation for contact problems with friction**. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, N.1, Vol.7, 1988.
- Shigley, J. E., Mischke, C. R., Bundaynas, R. G. **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7a Edição, Bookman, 2005.
- Simo, J.C.S, Hughes, T.J.R., **Computational Inelasticity**, Springer, 1998.
- Levésque, F., Goudreau, S., Cloutier, L.,. **Elastic-Plastic Microcontact Model for Elliptical Contact Areas and Its Application to a Treillis Point in Overhead Electrical Conductors**. Journal of Tribology, 1011.
- Dowling, N.E. **Mechanical Behaviour or Materials – Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. 3a Edição, Pretince-Hall, 2007.

ANEXOS

		Pág.
Anexo I	Código de MATLAB para o contato de Hertz 2D	111
Anexo II	Código de MATLAB para o contato de Hertz 3D	114
Anexo III	Código de MATLAB para o contato de Hertz 3D rotacionado por 30°	117
Anexo IV	Código de MATLAB para o contato de Hertz 3D rotacionado por 90°	119
Anexo V	Código de MATLAB para validação da curva de plasticidade de Al 7075-T651	121
Anexo VI	Código de MATLAB para o contato 3D com plasticidade rotacionado por 30°	122
Anexo VII	Código de MATLAB para o problema de atrito de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 0,2$	123
Anexo VIII	Código de MATLAB para o problema de atrito de (Feijó et. al, 1988) para $\mu = 1$	125
Anexo IX	Código de MATLAB para soluções analíticas de Hertz	127


```

clear all;
close all
clc;

% Dados:

v1 = 0.33;      % Dados para cabo de transmissão de energia ACSR BERSFORT
v2 = v1;      % de alumínio
R1 = 4.27; % mm
R2 = R1;
E1 = 71000; % MPa
E2 = E1;

% Força aplicada no cilindro:

fax = [0 0.2430 0.4860 0.7290 0.9721 1.22 1.55 1.89 2.23 2.57 2.91 3.25 ...
       3.59 3.93 4.27 4.61 4.95 5.29 5.63 5.97 6.31 6.65 6.99 7.33 7.57 ...
       7.81 8.06 8.30 8.54];

fay = [0.3042 1.03 1.96 2.95 4.14 6.75 10.7 13.7 17.2 20.4 23.9 26.5 ...
       28.9 30.3 30.8 30.3 28.9 26.5 23.9 20.4 17.2 13.7 10.7 6.75 4.14 ...
       2.95 1.96 1.03 0.3042];
fa = 0;

for i = 1:29
    fa = fa+fay(1,i);
end

P = fa;

% Gráfico da força aplicada no cilindro:

figure(1);
plot(fax,fay);
grid on;
xlabel('Distância sobre o diâmetro do cilindro [mm]');
ylabel('Força [N]');
title('Força Distribuída sobre o Diâmetro do Cilindro');

% Dados Extraídos Contato Cilindro com Cilindro 2D:

% Solução analítica para contato de Hertz entre cilindros:

% Raio Equivalente:


$$R = ((1/R1)+(1/R2))^{-1};$$


% Módulo de Elasticidade Equivalente:


$$E = (((1-\nu1^2)/E1)+((1-\nu2^2)/E2))^{-1};$$


% Pressão Máxima na Região de Contato:

```

```

p0 = ((P*E)/(pi*R))^(1/2);

% Semi-largura na Região de Contato:

a = ((4*P*R)/(pi*E))^(1/2);

% Solução numérica para contato de Hertz entre cilindros obtidos pelo
% Abaqus:

% Pressão na Região de Contato:

x_cpress_2Dsub_120 = [-0.2861 -0.2622 -0.2382 -0.2143 -0.1903 ...
-0.1664 -0.1425 -0.1187 -0.0950 -0.0712 -0.0475 -0.0237 0 ...
0.0237 0.0475 0.0712 0.0950 0.1187 0.1425 0.1664 0.1903 ...
0.2143 0.2382 0.2622 0.2861];

x_cpress_2Dsub_60 = [-0.2383 -0.1903 -0.1425 -0.0950 -0.0475 0 ...
0.0475 0.0950 0.1425 0.1903 0.2383];

cpress_2Dsub_120 = [0 0 0 0 0 298 797 1121 1308 1442 1529 1579 ...
1595 1579 1529 1442 1308 1121 797 298 0 0 0 0];

cpress_2Dsub_60 = [0 5.97 733 1335 1505 1603 1505 1335 733 5.97 0];

% Tensões na Região de Contato:

z_2D = [0 0.0214 0.0428 0.0642 0.0855 0.1069 0.1282 0.1496 ...
0.1710 0.1924 0.2138 0.2352 0.2566 0.2781 0.2995 0.3210 ...
0.3424 0.3639 0.3854 0.4069 0.4284 0.4499 0.4714 0.4930 ...
0.5145 0.5360 0.5576 0.5791 0.6006 0.6222 0.6437 0.6653];

S11 = [-0.8409 -0.7420 -0.5636 -0.4227 -0.3146 -0.2336 -0.1735 ...
-0.1293 -0.0965 -0.0721 -0.0537 -0.0397 -0.0288 -0.0204 ...
-0.0137 -0.0084 -0.0042 -0.0007 0.0021 0.0045 0.0064 0.0080 ...
0.0094 0.0105 0.0115 0.0124 0.0131 0.0137 0.0143 0.0147 ...
0.0151 0.0155];

S22 = [-0.9849 -0.9763 -0.9533 -0.9199 -0.8786 -0.8326 -0.7847 ...
-0.7373 -0.6919 -0.6494 -0.6101 -0.5740 -0.5411 -0.5111 ...
-0.4837 -0.4588 -0.4360 -0.4151 -0.3961 -0.3785 -0.3624 ...
-0.3475 -0.3337 -0.3210 -0.3091 -0.2981 -0.2878 -0.2782 ...
-0.2692 -0.2608 -0.2529 -0.2454];

taul2_2D = (S22-S11)/2;

% Gráficos comparativos entre solução analítica e numérica do contato de
% Hertz entre cilindros:

% Pressão na Região de Contato:

figure(2);
x = -a:0.01:a+0.02;
xs = x./a;
x_cpress_2Dsubs_120 = x_cpress_2Dsub_120./a;
x_cpress_2Dsubs_60 = x_cpress_2Dsub_60./a;
p = ((2*P)/(pi*a^2))*(a^2-x.^2).^(1/2);
plot(xs,p,x_cpress_2Dsubs_120,cpress_2Dsub_120,'o',...
x_cpress_2Dsubs_60,cpress_2Dsub_60,'o');
title('Contato na Região de Contato 2D');

```

```

grid on;
xlabel('x [mm]');
ylabel('P [MPa]');
legend('pressão analítica','pressão numérica 120 elementos',...
       'pressão numérica 60 elementos','Location','South');
axis([-1.5 1.5 0 2000]);

figure(3);
x = -a:0.01:a+0.02;
xs = x./a;
p = ((2*P)/(pi*a^2))*(a^2-x.^2).^(1/2);
plot(xs,p,x_cpress_2Dsub_120,cpress_2Dsub_120,'o');
title('Contato na Região de Contato 2D');
grid on;
xlabel('x [mm]');
ylabel('P [MPa]');
legend('pressão analítica','pressão numérica 120 elementos', ...
       'Location','South');
axis([-1.5 1.5 0 2000]);

% Tensões na Região de Contato:

figure(4);
z = 0:0.01:0.6;
sigmax = -(1/a)*((a^2+2*z.^2).*(a^2+z.^2).^(-1/2)-2.*z);
sigmaz = -1*a*(a^2+z.^2).^(-1/2);
tau12 = (sigmaz-sigmax)/2;
plot(z,sigmaz,z,sigmax,z,tau12,z_2D,S22,'o',z_2D,S11,'o',...
     z_2D,tau12_2D,'o');
grid on;
title('Tensões na Região de Contato 2D');
xlabel('z [mm]');
ylabel('Tensão/p_0');
legend('\sigma_{zz} analítico','\sigma_{xx} analítico',...
       '\tau_{xz} analítico','\sigma_{zz} numérico',...
       '\sigma_{xx} numérico','\tau_{xz}
numérico','Location','SouthEast');
axis([0 0.35 -1.3 0]);

% Erro entre da pressão de contato máxima entre a solução analítica e
% numérica para o contato de Hertz entre cilindros

erro_120 = abs(1-cpress_2Dsub_120(1,13)/p0)*100;
erro_60 = (abs(1-cpress_2Dsub_60(1,6)/p0))*100;
disp(['O erro da pressão de contato para 120 elementos é de: ', ...
     num2str(erro_120)]);
disp(['O erro da pressão de contato para 60 elementos é de: ', ...
     num2str(erro_60)]);

```

ANEXO II: Código de MATLAB para o contato de Hertz 2D

```
clear all;
clear all;
close all
clc;

% Dados:

v1 = 0.33;      % Dados para cabo de transmissão de energia ACSR BERSFORT
v2 = v1;       % de alumínio
R1 = 4.27;     % mm
R2 = R1;
E1 = 71000;   % MPa
E2 = E1;

% Força aplicada no cilindro:

fax = [0 0.2430 0.4860 0.7290 0.9721 1.22 1.55 1.89 2.23 2.57 2.91 3.25 ...
       3.59 3.93 4.27 4.61 4.95 5.29 5.63 5.97 6.31 6.65 6.99 7.33 7.57 ...
       7.81 8.06 8.30 8.54];

fay = [0.3042 1.03 1.96 2.95 4.14 6.75 10.7 13.7 17.2 20.4 23.9 26.5 ...
       28.9 30.3 30.8 30.3 28.9 26.5 23.9 20.4 17.2 13.7 10.7 6.75 4.14 ...
       2.95 1.96 1.03 0.3042];
fa = 0;

for i = 1:29
    fa = fa+fay(1,i);
end

P = fa;

% Dados Extraídos Contato Cilindro com Cilindro 3D:

% Solução analítica para contato de Hertz entre cilindros:

% Raio Equivalente:


$$R = ((1/R1)+(1/R2))^{-1};$$


% Módulo de Elasticidade Equivalente:


$$E = (((1-v1^2)/E1)+((1-v2^2)/E2))^{-1};$$


% Pressão Máxima na Região de Contato:


$$p0 = ((P*E)/(pi*R))^{1/2};$$


% Semi-largura na Região de Contato:


$$a = ((4*P*R)/(pi*E))^{1/2};$$


% Solução numérica para contato de Hertz entre cilindros obtidos pelo
% Abaqus:
```

```

% Pressão na Região de Contato:

x_cpress_3Dsub_60 = [-0.2771 -0.2308 -0.1844 -0.1381 -0.0920 ...
    -0.0460 0.0000 0.0460 0.0920 0.1381 0.1844 0.2308 0.2771];

cpress_3Dsub_60 = [0 0 0 855 1325 1521 1586 1521 1325 855 0 0 0];

% Tensões na Região de Contato:

z_3D = [0 0.0321 0.0642 0.0962 0.1282 0.1603 0.1924 0.2245 ...
    0.2566 0.2888 0.3210 0.3532 0.3854 0.4177 0.4500 0.4822 ...
    0.5145 0.5468 0.5792 0.6115 0.6438];

S11 = [-0.8543 -0.6533 -0.4234 -0.2697 -0.1718 -0.1104 -0.0714 -
0.0458 -0.0287 -0.0169 -0.0084 -0.0024 0.0021 0.0056 0.0081 0.0101 0.0116
0.0129 0.0140 0.0148 0.0156];

S22 = [-0.9455 -0.9683 -0.9223 -0.8581 -0.7858 -0.7144 -0.6485 -
0.5902 -0.5393 -0.4950 -0.4566 -0.4231 -0.3939 -0.3680 -0.3453 -0.3250 -
0.3069 -0.2907 -0.2760 -0.2628 -0.2507];

tau12_3D = (S22-S11)/2;

% Gráficos comparativos entre solução analítica e numérica do contato
% Hertz entre cilindros:

% Pressão na Região de Contato:

figure(1);
x = -a:0.01:a+0.02;
xs = x./a;
x_cpress_3Dsubs_60 = x_cpress_3Dsub_60./a;
p = ((2*P)/(pi*a^2))*(a^2-x.^2).^(1/2);
plot(xs,p,x_cpress_3Dsubs_60,cpress_3Dsub_60,'o');
title('Contato na Região de Contato 3D');
grid on;
xlabel('x (mm)');
ylabel('P (MPa)');
legend('pressão analítica','pressão numérico 1200 elementos', ...
    'Location','South');
axis([-1.5 1.5 0 1800]);

% Tensões na Região de Contato:

figure(2);
z = 0:0.01:0.65;
sigmax = -(1/a)*((a^2+2*z.^2).*(a^2+z.^2).^(-1/2)-2.*z);
sigmaz = -1*a*(a^2+z.^2).^(-1/2);
tau12 = (sigmaz-sigmax)/2;
plot(z,sigmaz,z,sigmax,z,tau12,z_3D,S22,'o',z_3D,S11,'O',...
    z_3D,tau12_3D,'O');
grid on;
title('Tensões na Região de Contato 3D');
xlabel('z [mm]');
ylabel('Tensão/p_0');
legend('\sigma_{zz} analítico','\sigma_{xx} analítico',...

```

```

        '\tau_{xz} analítico', '\sigma_{zz} numérico', ...
        '\sigma_{xx} numérico', '\tau_{xz}
numérico', 'Location', 'SouthEast');
    axis([-0 0.65 -1 0.2]);

% Erro entre da pressão de contato máxima entre a solução analítica e
% numérica para o contato de Hertz entre cilindros

erro_60 = abs(1-cpress_3Dsub_60(1,7)/p0)*100;
disp(['O erro da pressão de contato para 10 elementos é de: ', ...
    num2str(erro_60)]);

```

```

clear all;
close all;
clc;

% Dados:

v1 = 0.33;
v2 = v1;
E1 = 71000;
E2 = E1;
R1 = 4.27;
R2 = R1;
d1 = 2*R1;
d2 = 2*R2;

% Força aplicada no cilindro:

fax = [0 0.2430 0.4860 0.7290 0.9721 1.22 1.55 1.89 2.23 2.57 2.91 3.25 ...
       3.59 3.93 4.27 4.61 4.95 5.29 5.63 5.97 6.31 6.65 6.99 7.33 7.57 ...
       7.81 8.06 8.30 8.54];

fay = [0.3042 1.03 1.96 2.95 4.14 6.75 10.7 13.7 17.2 20.4 23.9 26.5 ...
       28.9 30.3 30.8 30.3 28.9 26.5 23.9 20.4 17.2 13.7 10.7 6.75 4.14 ...
       2.95 1.96 1.03 0.3042];
fa = 0;

for i = 1:29
    fa = fa+fay(1,i);
end

P = fa;

F = fa;

% Contato Cilindros Inclinação por 30 graus:

% Semi-largura de Contato:

a = 0.2296;

% Pressão máxima de contato:

p0 = 1784.78;

% Gráfico de Distribuição das Tensões:

z = [0 0.0372 0.0745 0.1119 0.1494 0.1872 0.2251 0.2633 0.3018 0.3404
     0.3793 0.4185 0.4578 0.4974 0.5373 0.5773 0.6176 0.6581 0.6989];

S11 = [-0.7418 -0.6422 -0.4645 -0.3294 -0.2307 -0.1602 -0.1109 -0.0765 -
        0.0525 -0.0356 -0.0237 -0.0153 -0.0093 -0.0050 -0.0019 0.0003 0.0019 0.0030
        0.0037];

```

```

S22 = [-0.9830 -0.9710 -0.9359 -0.8833 -0.8204 -0.7525 -0.6840 -0.6183 -
0.5573 -0.5018 -0.4520 -0.4075 -0.3681 -0.3331 -0.3022 -0.2749 -0.2506 -
0.2292 -0.2101];

tau12 = (S22-S11)/2;
figure(2);
plot(z,S22,'-o',z,S11,'-o',z,tau12,'-o');
grid on;
title('Tensões na Região de Contato 3D Rotacionado por 30 Graus');
xlabel('z [mm]');
ylabel('Tensão/p_0');
legend('\sigma_{zz} numérico','\sigma_{xx} numérico'...
, '\tau_{xz} numérico','Location','SouthEast');
axis([0 0.7 -1 0]);

```



```

clear all;
close all;
clc;

% Dados:

v1 = 0.33;
v2 = v1;
E1 = 71000;
E2 = E1;
R1 = 4.27;
R2 = R1;
d1 = 2*R1;
d2 = 2*R2;

% Força aplicada no cilindro:

fax = [0 0.2430 0.4860 0.7290 0.9721 1.22 1.55 1.89 2.23 2.57 2.91 3.25 ...
       3.59 3.93 4.27 4.61 4.95 5.29 5.63 5.97 6.31 6.65 6.99 7.33 7.57 ...
       7.81 8.06 8.30 8.54];

fay = [0.3042 1.03 1.96 2.95 4.14 6.75 10.7 13.7 17.2 20.4 23.9 26.5 ...
       28.9 30.3 30.8 30.3 28.9 26.5 23.9 20.4 17.2 13.7 10.7 6.75 4.14 ...
       2.95 1.96 1.03 0.3042];
fa = 0;

for i = 1:29
    fa = fa+fay(1,i);
end

P = fa;

F = fa;

% Contato Cilindros Inclinados por 90 graus:

% Semi-largura de Contato:

a = 0.3202;

% Pressão máxima de contato:

p0 = 1901.66

% Gráfico de pressão de contato:

figure(1);
cpress_x = [-0.3943 -0.3584 -0.3223 -0.2863 -0.2504 -0.2145 -0.1787 ...
           -0.1430 -0.1072 -0.0715 -0.0357 0 0.0357 0.0715 0.1072 0.1430 ...
           0.1787 0.2145 0.2504 0.2863 0.3223 0.3584 0.3943];
cpress_y = [0 0 0 513 1091 1383 1589 1736 1842 1911 1953 1966 1953 1911 ...
           1842 1736 1589 1383 1091 513 0 0 0];
r = -0.1-a:0.01:a;
rs = r./a;

```

```

cpress_x = cpress_x./a;
p = p0*(1-(r/a).^2).^(1/2);
plot(rs,p,cpress_x,cpress_y,'o');
title('Contato na Região de Contato 3D Rotacionado por 90 Graus');
grid on;
xlabel('x [mm]');
ylabel('P [MPa]');
legend('p_0 analítico','p_0 numérico','Location','South');
axis([-1.5 1.5 0 2200]);

% Gráfico de Distribuição das Tensões:

z = [0 0.0320 0.0640 0.0959 0.1278 0.1597 0.1916 0.2235 0.2555 0.2876 ...
      0.3196 0.3517 0.3839 0.4160 0.4482 0.4804 0.5126 0.5449 0.5771 ...
      0.6094 0.6417 0.6740 0.7063 0.7386 0.7709 0.8032 0.8355];

S11 = [-0.7711 -0.6806 -0.5162 -0.3842 -0.2816 -0.2040 -0.1465 -0.1046 ...
        -0.0742 -0.0524 -0.0366 -0.0253 -0.0171 -0.0112 -0.0070 -0.0041 ...
        -0.0021 -0.0008 0.0000 0.0003 0.0003 0.0000 -0.0005 -0.0012 -0.0021 ...
        -0.0031 -0.0042];

S22 = [-1.02 -1.00 -0.9713 -0.9254 -0.8690 -0.8066 -0.7424 -0.6800 ...
        -0.6218 -0.5689 -0.5219 -0.4805 -0.4445 -0.4131 -0.3858 -0.3620 ...
        -0.3412 -0.3230 -0.3069 -0.2926 -0.2799 -0.2685 -0.2582 -0.2490 ...
        -0.2405 -0.2328 -0.2257];

tau12 = (S22-S11)/2;
figure(2);
v = 0.3;
za = 0:0.01:0.9;
sigmax = -((1+v)*(1-abs(za./a).*atan(abs(a./za)))-
(1./(2*((za.^2./a^2)+1))));
sigmaz = -((za.^2./a^2)+1).^(-1);
tau12a = (sigmaz-sigmax)/2;
plot(sigmax,za,sigmaz,za,tau12a,za,S11,z,'o',S22,z,'o',tau12,z,'o');
grid on;
title('Tensões na Região de Contato 3D Rotacionado por 90 Graus');
xlabel('Tensão/p_0 [MPa]');
ylabel('z [mm]');
legend('\sigma_{zz} analítico','\sigma_{xx} analítico',...
        '\tau_{xz} analítico','\sigma_{zz} numérico',...
        '\sigma_{xx} numérico','\tau_{xz} numérico','Location','East');
axis([-1 0.6 0 0.4]);

% Erro:

erro = abs(1-cpress_y(1,12)/p0)*100;
disp(['O erro da pressão de contato máxima é: ',num2str(erro),' %']);

```

```
close all;
clear all;
clc;

% Gráfico de Plasticidade

figure(1)
sigma = 0:5:700;
eps = sigma/71000+(sigma/585.5).^(1/0.04453);
sigma1 = [0 2.97454 45.8927 141.522 274.471 465.276 521.7 554.723 565];
eps1 = [0 4.23E-05 0.000651479 0.00200891 0.00388193 0.0118804 0.0772183 ...
        0.284519 0.781203];
plot(eps,sigma,eps1,sigma1,'o');
title('Curva Tensão-Deformação Al 7075-T651 (\sigma-\epsilon)');
xlabel('\epsilon, Deformação [mm]');
ylabel('\sigma, Tensão [MPa]');
grid on;
legend('\sigma-\epsilon analítico', '\sigma-\epsilon numérico', 'Location'...
        , 'SouthEast');
axis([0 0.3 0 600]);
```

```

close all;
clear all;
clc;

% Gráfico de Plasticidade Deformação X Tensão de Contato

figure(1)
sigma1 = [0 0 0 427.306 857.932 976.609 1018.43 1040.14 1047.4 1048.59 ...
          1036.85 975.071 840.554 615.341 257.147 0 0 0 0 0];
eps1 = [1.19E-07 4.53E-06 0.000149608 0.000310302 -0.000629723 ...
        -0.00101018 -0.00100189 -0.000946582 -0.000910342 -0.00089401 ...
        -0.000872731 -0.000748754 -0.000478089 -4.34E-05 6.37E-04 ...
        0.000803947 0.000807881 0.000807524 0.000801802 0.000804901 ...
        0.000801087];
plot(eps1,sigma1,'-o');
title('Curva Deformação-p_0 Al 7075-T651 para Contato 3D Rotacionado por ...30 Graus (\sigma-\epsilon)');
xlabel('\epsilon, Deformação');
ylabel('p_0 [MPa]');
grid on;
legend('\sigma-\epsilon numérico','Location'...
      , 'SouthEast');
axis([-0.0011 0.0009 0 1060]);

% Curva de Plasticidade Deformação x Tensão Equivalente de Mises:

figure(2)
sigma2 = [0 0.799631 11.9832 56.7623 151.586 353.159 465.013 482.177 ...
          486.112 486.898 481.148 448.902 372.933 201.325 98.1171 100.123 ...
          100.181 100.361 100.506 100.396 100.518];
eps2 = [3.58E-07 6.32E-06 9.54E-05 0.000434637 0.00105488 0.002087 ...
        0.00642383 0.0114559 0.0128299 0.0129877 0.013052 0.0134654 ...
        0.0139623 0.0127648 0.0114888 0.0113758 0.0113804 0.0113772 ...
        0.0113807 0.0113786 0.0113801];
plot(eps2,sigma2,'-o');
title('Curva Deformação-Tensão de Mises Al 7075-T651 para Contato 3D Rotacionado por 30 Graus (\sigma-\epsilon)');
xlabel('\epsilon, Deformação');
ylabel('Tensão de Mises [MPa]');
grid on;
legend('\sigma-\epsilon numérico','Location'...
      , 'SouthEast');

```

```
clear all;
close all;
clc;

% Dados de Feijó:

x_Feijo = 0:1.25:40;
U1_Feijo = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.00003 0.00016 0.00036 0.0006
0.00088 0.00119 0.00153 0.00189 0.00228 0.0027 0.00314 0.0036 0.00409
0.00461 0.00515 0.00572 0.00633 0.00699 0.00776];
FN_Feijo = [10.4 20.8 20.8 20.79 20.77 20.76 20.74 20.71 20.68 20.65 20.61
20.57 20.52 20.42 20.17 19.86 19.63 19.43 19.24 19.04 18.84 18.63 18.4
18.15 17.86 17.53 17.14 16.65 16.03 15.17 13.88 11.5 3.64];
FT_Feijo = [0 0.17 0.34 0.52 0.7 0.88 1.08 1.28 1.5 1.73 1.99 2.3 2.66 3.23
4.03 3.97 3.93 3.89 3.85 3.81 3.77 3.73 3.68 3.63 3.57 3.51 3.43 3.33 3.21
3.03 2.78 2.3 0.73];

% Dados do Abaqus:

x_Feijo_atrito_02 = 0:1.25:40;
U1_Feijo_atrito_02 = [0 0.00000492 0.00001 0.000016 0.000021 0.000026
0.000032 0.000038 0.000044 0.000051 0.000059 0.000068 0.000078 0.00009
0.000105 0.000211 0.000396 0.000627 0.000896 0.0012 0.001533 0.001894
0.002281 0.002693 0.003129 0.003588 0.004072 0.00458 0.005114 0.005678
0.006279 0.006922 0.007681];
U2_Feijo_atrito_02 = 0.001*[-0.0332 -0.0738 -0.0873 -0.0933 -0.0988 -0.1024
-0.1054 -0.1078 -0.1098 -0.1115 -0.1131 -0.1145 -0.1158 -0.1170 -0.1182 -
0.1194 -0.1206 -0.1221 -0.1243 -0.1255 -0.1257 -0.1261 -0.1263 -0.1266 -
0.1268 -0.1270 -0.1271 -0.1273 -0.1274 -0.1275 -0.1275 -0.1276 -0.1276];
FN_Feijo_atrito_02 = [10.39 20.78 20.77 20.76 20.75 20.73 20.71 20.69 20.66
20.62 20.58 20.53 20.48 20.41 20.22 19.92 19.66 19.45 19.25 19.05 18.85
18.64 18.41 18.15 17.87 17.53 17.14 16.65 16.02 15.15 13.88 11.24 4.08];
FT_Feijo_atrito_02 = [ 0.0360 0.1717 0.3406 0.5147 0.6918 0.8741 1.0633
1.2616 1.4720 1.6987 1.9479 2.2296 2.5626 3.0072 3.7012 3.9496 3.9315
3.8899 3.8502 3.8106 3.7701 3.7273 3.6813 3.6304 3.5730 3.5065 3.4272
3.3291 3.2032 3.0295 2.7752 2.2481 0.8159];

% Gráficos de comparação:

figure;
plot(x_Feijo,FN_Feijo,x_Feijo_atrito_02,FN_Feijo_atrito_02,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('F_n (daN)');
legend('Solução de Feijó et. al','F_n',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 0.2');
hold on;
figure;
plot(x_Feijo,FT_Feijo,x_Feijo_atrito_02,FT_Feijo_atrito_02,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('F_t (daN)');
legend('Solução de Feijó et. al','F_t',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 0.2');
hold on;
figure;
plot(x_Feijo,U1_Feijo,x_Feijo_atrito_02,U1_Feijo_atrito_02,'o');
xlabel('x (mm)');
```

```
ylabel('u_x (mm)');  
legend('Solução de Feijó et. al','u_x',0);  
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 0.2');  
hold on;  
figure;  
plot(x_Feijo_atrito_02,U2_Feijo_atrito_02,'-o');  
xlabel('x (mm)');  
ylabel('u_y (mm)');  
legend('u_y',0);  
title('Resultado de u_y do Abaqus para \mu = 0.2');  
hold on;
```

```

clear all;
close all;
clc;

% Dados de Feijó:

x_Feijo = 0:1.25:40;
FN_Feijo = [5.2300 10.4700 10.4700 10.4600 10.4400 10.4100 10.3800 10.3100
9.8000 8.9300 8.2800 7.8600 7.5200 7.2100 6.9300 6.6600 6.3900 6.1300
5.8600 5.5900 5.3000 5.0000 4.6800 4.3400 3.9600 3.5300 3.0400 2.4600
1.7200 0.6600 0 0 0];
FT_Feijo = [0 0.6400 1.2800 1.9600 2.6900 3.5200 4.4800 5.7500 8.5700
8.9300 8.2800 7.8600 7.5200 7.2100 6.9300 6.6600 6.3900 6.1300 5.8600
5.5900 5.3000 5.0000 4.6800 4.3400 3.9600 3.5300 3.0400 2.4600 1.7200
0.6600 0 0 0];
U1_Feijo = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.0003 0.0009 0.0016 0.0025 0.0034 0.0043
0.0054 0.0065 0.0076 0.0088 0.0101 0.0113 0.0127 0.0140 0.0154 0.0169
0.0183 0.0198 0.0213 0.0229 0.0244 0.0258 0.0272 0.0286];
U2_Feijo = 1.0e-03.*[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0.1000 0.3000 0.6000];

% Dados do Abaqus:

x_Feijo_atrito_1 = 0:1.25:40;
FN_Feijo_atrito_1 = [5.2253 10.4466 10.4367 10.4208 10.3981 10.3651 10.3285
10.2774 9.8484 9.0111 8.3173 7.8814 7.5329 7.2218 6.9339 6.6587 6.3900
6.1231 5.8537 5.5781 5.2922 4.9917 4.6713 4.3247 3.9436 3.5172 3.0278
2.4554 1.7340 0.7117 0.0813 0 0];
FT_Feijo_atrito_1 = [0.1312 0.6295 1.2651 1.9358 2.6558 3.4585 4.4010
5.6549 7.9233 8.7920 8.3173 7.8814 7.5329 7.2218 6.9339 6.6587 6.3900
6.1231 5.8537 5.5781 5.2922 4.9917 4.6713 4.3247 3.9436 3.5172 3.0278
2.4554 1.7340 0.7117 0.0813 0 0];
U1_Feijo_atrito_1 = [-0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0001
0.0001 0.0001 0.0003 0.0009 0.0016 0.0024 0.0033 0.0043 0.0054 0.0064
0.0076 0.0088 0.0100 0.0113 0.0126 0.0140 0.0154 0.0168 0.0183 0.0198
0.0213 0.0228 0.0244 0.0258 0.0272 0.0286];
U2_Feijo_atrito_1 = 1.0e-03.*[-0.0642 -0.0641 -0.0641 -0.0640 -0.0638 -
0.0637 -0.0632 -0.0638 -0.0614 -0.0549 -0.0506 -0.0483 -0.0462 -0.0443 -
0.0426 -0.0409 -0.0393 -0.0376 -0.0360 -0.0343 -0.0325 -0.0307 -0.0287 -
0.0266 -0.0243 -0.0217 -0.0187 -0.0155 -0.0095 -0.0158 0.0723 0.3012
0.5857];

% Gráficos de comparação:
figure;
plot(x_Feijo,FN_Feijo,x_Feijo_atrito_1,FN_Feijo_atrito_1,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('F_n (daN)');
legend('Solução de Feijó et. al','F_n',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 1');
hold on;
figure;
plot(x_Feijo,FT_Feijo,x_Feijo_atrito_1,FT_Feijo_atrito_1,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('F_t (daN)');
legend('Solução de Feijó et. al','F_t',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 1');
hold on;

```

```
figure;
plot(x_Feijo,U2_Feijo,x_Feijo_atrito_1,U2_Feijo_atrito_1,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('u_y (mm)');
legend('Solução de Feijó et. al','u_y',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 1');
hold on;
figure;
plot(x_Feijo,U1_Feijo,x_Feijo_atrito_1,U1_Feijo_atrito_1,'o');
xlabel('x (mm)');
ylabel('u_x (mm)');
legend('Solução de Feijó et. al','u_x',0);
title('Comparação dos resultados de Feijó e do Abaqus para \mu = 1');
hold on;
```



```
clear all;
close all;
clc;

% Variáveis
E1 = 210000; % MPa
E2 = E1;
v1 = 0.3;
v2 = v1;
R1 = 200; % mm
R2 = 10^20; % mm
P = 1000; % N

% Cálculos
R = ((1/R1)+(1/R2)) ^ (-1);
E = (((1-v1^2)/E1)+((1-v2^2)/E2)) ^ (-1);
p0 = sqrt(((P*E)/(pi*R)));
a = sqrt(((4*P*R)/(pi*E)));

% Gráfico:
z = 0:0.01:4;
sigmaxx_p0 = -(1/a)*((a^2+2*z.^2).*(a^2+z.^2).^(-1/2)-2.*z);
sigmazz_p0 = -a*(a^2+(z).^2).^(-1/2);
tau_max_p0 = (sigmazz_p0-sigmaxx_p0)/2;
figure;
plot(sigmaxx_p0,-z,'r',sigmazz_p0,-z,'b',tau_max_p0,-z,'g');
axis([-1.2 0 -4 0]);
xlabel('Tensões sobre Pressão Máxima');
ylabel('z');
legend('\tau_{xz}/p_0','\sigma_x/p_0','\sigma_z/p_0',0);
grid on;
```