

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE NUMÉRICA VIA MEC E EXPERIMENTAL VIA IMAGENS TÉRMICAS PARA PREDIÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

Por,

Matheus Barbosa Andrade Moser Oberg

Brasília, 03 de Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ANÁLISE NUMÉRICA VIA MEC E EXPERIMENTAL VIA IMAGENS TÉRMICAS PARA PREDIÇÃO DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

POR,

Matheus Barbosa Andrade Moser Oberg

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Profa. Carla Tatiana Mota Anflor, UnB/ FGA
(Orientadora)

Prof. Eder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM
(Co-orientador)

Prof. Luciano Mendes Bezerra, UnB/ ENC

Prof. Jhon Nero Vaz Goulart, UnB/ FGA

Brasília, 03 de Dezembro de 2013

Dedicatória

*Aos meus pais, Fausto e Miriam, a quem
devo tudo o que hoje sou.*

Matheus Barbosa Andrade Moser Oberg

Agradecimentos

À professora Carla Tatiana Mota Anflor pela dedicação, incentivo e liberdade durante todo esse tempo de pesquisa. Obrigado por todas as orientações, não apenas em relação a esse e outros trabalhos que produzimos, mas também em relação ao futuro. És um exemplo para mim.

Aos professores Éder Lima de Albuquerque, Luciano Mendes Bezerra e Jhon Nero Vaz Goulart pelas significativas contribuições ao trabalho. Foi uma honra poder contar com o apoio dos senhores.

A todos os integrantes e ex-integrantes da equipe “Piratas do Cerrado” de Baja SAE da Universidade de Brasília com os quais tive o privilégio de conviver durante quase toda graduação. Se minha formação é completa, devo isso a vocês.

Aos meus colegas de curso com quem sempre pude contar nas horas de desespero antes das provas e, também, nas de alegria. Valeu, time!

E especialmente a minha namorada, Susu, por estar sempre do meu lado. Obrigado por todo o cuidado, carinho e paciência durante todo esse tempo. Seria impossível chegar aonde cheguei sem todo o seu apoio.

Matheus Barbosa Andrade Moser Oberg

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre a condutividade térmica efetiva de materiais de composição heterogênea em duas dimensões. O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é empregado para resolver as equações diferenciais que regem os problemas potenciais em regime permanente. A técnica de subregiões foi utilizada no modelamento para considerar o efeito destas inclusões dentro da matriz. Na implementação numérica, as inclusões são geradas aleatoriamente no domínio de um Elemento de Volume Representativo (EVR). O método do EVR aplica a Teoria de Campos Médios para encontrar as propriedades efetivas (macroscópicas) deste material de composição heterogênea. O material é caracterizado por uma fração de volume pré-determinada, assim como os diâmetros das inclusões. Cada conjunto de amostras é submetido à análise um número suficiente de vezes, a fim de garantir estabilidade estatística dos resultados. São analisados EVR's para diversas frações de volume cujas propriedades efetivas são obtidas e analisadas. A metodologia desenvolvida empregando o MEC mostrou-se bastante eficiente, principalmente para casos com um grande número de inclusões, sugerindo uma alternativa aos métodos tradicionais de solução numéricos, como elementos finitos e volumes finitos. Para a parte experimental foi desenvolvido um aparato para reproduzir o problema estudado numericamente. O experimento permitiu avaliar o campo de temperatura utilizando-se imagens termográficas. Por fim, os resultados experimentais foram comparados com os obtidos numericamente. Neste sentido a metodologia proposta mostrou-se satisfatória para prever a condutividade térmica efetiva de materiais de composição heterogênea.

ABSTRACT

This work presents a study on the effective thermal conductivity in material with heterogeneous composition in two dimensions. The Boundary Elements Method is used to solve the steady state potential equations. The sub regions technique was implemented in order to take into account the effects of these inclusions inside the domain. In the numerical implementation, the inclusions are randomly generated in a Representative Volume Element (RVE) domain. The Average Field Theory is used to predict the effective properties (macroscopic) of the material with heterogeneous composition. The material is characterized by a specified volume fraction as well as the inclusion's size. Each set of samples is analyzed several times in order to guarantee statistical stability of the results. RVE's for several cases of volume fraction are analyzed and discussed. The developed methodology is very efficient, particularly for samples containing a large number of inclusions, suggesting an alternative solution to the traditional numerical methods, such as finite element and finite volume method. Regarding to the experimental part it was developed an apparatus in order to reproduce the same problem studied numerically. This experiment allowed evaluating the temperature field due to the employment of thermographic imaging. Finally both results obtained via numerical and experimental methods were compared showing good agreement. In this sense the purposed methodology showed feasible for predicting the effective thermal conductive for material with heterogeneous composition.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	7
3.1 ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS	7
3.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA CONDUÇÃO DE CALOR	8
3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO.....	12
3.4 DISCRETIZAÇÃO DA INTEGRAL DE CONTORNO.....	14
3.5 CÁLCULO DAS SOLUÇÕES NO CONTORNO	16
3.5.1 Elementos de contorno constantes.....	16
3.5.2 Elementos de contorno lineares e quadráticos.....	17
3.5.2 Montagem das matrizes H e G.	17
4 ELEMENTOS DE CONTORNO COM SUB-REGIÕES	19
4.1 MODELAGEM DO PROBLEMA COM SUB-REGIÕES.....	20
5 ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (EVR)	23
5.1 MODELAGEM NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE UM EVR COM INCLUSÕES MATERIAIS... 25	
5.1.1 Geração do domínio com inclusões em posições aleatórias.....	25
5.2 CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA	29
5.3 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS PARA O MEC	30
5.3.1 Número de elementos empregados.....	30
5.3.1.1 Número de elementos nas inclusões	31
5.3.1.2 Número de elementos no contorno externo	31
5.3.2 Número de amostras coletadas.	34
5.4 DETERMINAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EVR	36
6 ANÁLISE EXPERIMENTAL	47
6.1 MONTAGEM EXPERIMENTAL	47
6.1.1 Materiais e equipamentos utilizados	47
6.1.2 Construção do equipamento de aquecimento	48
6.1.3 Corpos de prova	51
6.1.4 Refrigeração	53
6.1.5 Refrigeração	53
6.2 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	54
6.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISES	55
6.4 VERIFICAÇÃO DA METODOLOGIA NUMÉRICA	59
7 CONCLUSÕES	62

LISTA DE FIGURAS

3.1	Representação clássica do ponto fonte e ponto campo.....	9
3.2	Representação de um corpo arbitrário no plano de coordenadas cartesianas x-y..	12
3.3	Discretização do contorno de um corpo arbitrário em "n" segmentos distintos	15
3.4	Aproximação do contorno original por elementos de contorno	15
3.5	Quadrilátero composto por 4 elementos de contorno constantes	17
4.1	Representação de um domínio composto por duas sub-regiões.....	19
4.2	Ilustração do problema de sub-regiões	20
5.1	Possíveis EVR's de mesmo tamanho selecionados em diferentes regiões de uma microestrutura periódica idealizada.	23
5.2	Aumento da escala de observação de um domínio com inclusões	24
5.3	Procedimento para avaliação da propriedade de condução térmica efetiva e definição da condição de EVR alterando-se as características da distribuição das inclusões no interior do domínio	25
5.4	Definição da área de criação	26
5.5	Processo de criação de inclusões com centros em coordenadas aleatórias	27
5.6	Diagrama de funcionamento da rotina de criação das inclusões	27
5.7	Exemplo de um domínio para análise gerados utilizando-se o código elaborado ...	28
5.8	Caso de transferência de calor unidimensional	29
5.9	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva do domínio com uma única inclusão em função do número de elementos utilizados para discretização de cada um dos quatro segmentos desta inclusão	31
5.10	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva do domínio com uma única inclusão em função do número de elementos utilizados para discretização de cada aresta do contorno externo.....	33
5.11	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de amostras com geração aleatória utilizadas para o cálculo	35
5.12	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 20% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	38
5.13	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 10% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	39
5.14	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 15% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	40
5.15	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 25% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	41
5.16	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 25% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio	42
5.17	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 10% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio	43
5.18	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 15% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio	44
5.19	Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 20% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio	45

5.20 Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média, calculado supondo-se a condição de EVR com 37 inclusões, em função da área percentual ocupada pelas inclusões. Inclusões com coeficiente de condutividade térmica igual a 25 W/m.K, e o restante do domínio com 100W/m.K	46
5.21 Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média, calculado supondo-se a condição de EVR com 37 inclusões, em função da área percentual ocupada pelas inclusões. Inclusões com coeficiente de condutividade térmica igual a 100 W/m.K, e o restante do domínio com 25 W/m.K	46
6.1 Esquema do circuito elaborado para o sistema de aquecimento do experimento ..	49
6.2 Montagem da resistência na peça usinada para aumentar a superfície de contato	50
6.3 Montagem do conjunto no suporte refratário	50
6.4 Corpos de prova fabricados: inteiramente em aço 1020 e com inclusões de nylon simulando a condição de EVR	52
6.5 Montagem do corpo de prova no isolamento proposto	52
6.6 Montagem completa do equipamento experimental principal	54
6.7 Imagem termográfica do corpo de prova inteiramente de aço	57
6.8 Gráficos das distribuições de temperaturas sobre as linhas traçadas na Fig. 6.6...	57
6.9 Imagem termográfica do corpo de prova inteiramente de aço com inclusões de nylon	58
6.10 Gráficos das distribuições de temperaturas sobre as linhas traçadas na Fig. 6.8...	58
6.11 Esquema do posicionamento dos pontos de tomada de temperatura sobre os contornos aquecido e resfriado	60

LISTA DE TABELAS

5.1	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva em função do número de elementos utilizados para discretização do contorno da inclusão	32
5.2	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva em função do número de elementos utilizados para discretização do contorno externo do domínio	34
5.3	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de amostras simuladas	36
5.4	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,2 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	38
5.5	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,1 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	39
5.6	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,15 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	40
5.7	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,15 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio	41
5.8	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,25 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.	42
5.9	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,10 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.	43
5.10	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,15 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.	44
5.11	Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,20 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.	45
6.1	Queda de potencial e corrente medidas na resistência durante o experimento	59
6.2	Dados relativos ao corpo de prova inteiramente em aço SAE 1020	59
6.3	Dados relativos ao corpo de prova de aço SAE 1020 com inclusões de nylon	59
6.4	Comparação dos resultados para o coeficiente de condutividade térmica efetiva do EVR calculados a partir dos dados experimentais.	61

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

K	Coeficiente de condutividade térmica	[W/m.K]
U, T	Temperatura	[°C]
q	Fluxo de calor	[W]
w	Função peso	
C	Fator de forma	
V	Diferença de potencial elétrico	[V]
i	Corrente elétrica	[A]
R	Resistência elétrica	[Ω]
P	Potência dissipada pela resistência elétrica	[W]
A	Área da seção transversal do corpo de prova	[m ²]

Símbolos Gregos

Ω	Domínio
Γ	Contorno do domínio
δ	Delta de Dirac
η	Direção normal

Subscritos

0	Relativo ao ponto fonte
x	Componente na direção “x”
y	Componente na direção “y”
q	Relativo ao contorno aquecido
f	Relativo ao contorno resfriado
eff	Indica valor efetivo
exp	Indica valor obtido com base em dados experimentais

Sobrescritos

*	Solução fundamental
-	Condição de contorno prescrita
→	Vetor

Siglas

MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDF	Método das Diferenças Finitas
MVF	Método dos Volumes Finitos
EVR	Elemento de Volume Representativo

1 INTRODUÇÃO

Os avanços tecnológicos alcançados nos últimos tempos evidenciam cada vez mais a demanda por materiais avançados que proporcionem alto desempenho e eficiência aos projetos. O desenvolvimento de materiais otimizados voltados para situações nas quais são exigidos valores específicos elevados de certas propriedades mecânicas tem sido um campo de pesquisa bastante requisitado nos últimos tempos. Um exemplo de aplicação dessas pesquisas é a fabricação de ferramentas de corte para usinagem. Cada tipo de usinagem demanda da ferramenta um conjunto específico de propriedades para execução de um processo otimizado. O mesmo é válido para diversas outras situações como na fabricação de componentes eletrônicos de alta performance, materiais compósitos com elevada resistência mecânica para aplicações aeronáuticas ou no meio competitivo, discos e pastilhas de freio com elevada capacidade dissipativa, entre vários outros.

Um projeto pode ser otimizado macroscopicamente buscando-se topologias e configurações geométricas mais eficientes para as condições de projeto exigidas. Porém, um outro caminho que tem ganhado força atualmente consiste na análise e na otimização do material em si. As propriedades mecânicas dos materiais a nível macroscópico possuem íntima relação com a sua composição e arranjo estrutural a nível microscópico. Tal fato associado ao crescente desenvolvimento da capacidade computacional disponível possibilita a elaboração de modelos numéricos das microestruturas de materiais, a partir dos quais é possível a predição das suas propriedades macroscópicas.

A nível micro-estrutural, os materiais são tipicamente heterogêneos, sendo compostos por diversos elementos constituintes com propriedades físicas distintas. Porém quando aumentada a escala de observação ocorre uma redução da influência das propriedades individuais de cada elemento nas propriedades físicas efetivas do domínio. Este fenômeno persiste até que as propriedades físicas efetivas do domínio converjam para as propriedades macroscópicas do material. Em Terada e Kikuchi (1996) é proposto um método de homogeneização de uma microestrutura heterogênea a partir da definição de um comprimento característico do domínio de observação para o qual as propriedades microscópicas se aproximem das macroscópicas. Este método ficou conhecido como teoria dos campos médios ou método do elemento de volume representativo.

O método dos elementos de contorno (MEC) representa uma ferramenta bastante eficiente para modelagem de problemas lineares como troca de calor ou mesmo comportamento mecânico de materiais dentro do regime elástico. Pelo fato da sua formulação ser baseada em integrais avaliadas no contorno, a discretização é realizada apenas no contorno, reduzindo o número de elementos necessários em comparação a outros métodos numéricos como o método dos elementos finitos (MEF), que demandaria a discretização do domínio completo. O MEC apresenta alta compatibilidade com o método do EVR pelo fato de serem necessárias apenas informações no contorno do domínio.

Com o MEC associado ao EVR é possível a modelagem de microestruturas visando à análise do impacto da constituição micro-estrutural nas propriedades macroscópicas de materiais. Esse tipo de modelagem é utilizada em Buroni e Marczak (2008) e em Zarichta (2008) para análise de materiais micro-porosos.

O presente trabalho surge de uma sugestão apresentada em Zarichta (2008) voltando-se para a análise da transferência de calor por condução de microestruturas compostas por diferentes materiais ao invés de um único domínio uniforme micro-poroso.

Para possibilitar a modelagem computacional eficiente é utilizada uma formulação para o MEC com sub-regiões, também conhecida como “multi-zona”. Nesta formulação é possível modelar-se um domínio composto por diversas regiões com propriedades distintas, discretizando-se o contorno individual de cada uma. As soluções obtidas no contorno do domínio mais geral, são calculadas levando-se em conta o acoplamento de cada sub-região através da continuidade das condições de contorno. Isto é, a conservação do potencial nos pontos de interface e continuidade do fluxo que atravessa de uma sub-região para outra.

Neste trabalho é realizada a análise de um domínio bidimensional com distribuições aleatórias de inclusões circulares compostas de um material com propriedades termomecânicas distintas das do meio em que estão inseridas, caracterizando-se, assim, como um problema de sub-regiões. São utilizadas como variáveis do problema a área percentual ocupada pelas inclusões e também a sua quantidade. Deste modo, analisa-se a influência destas variáveis na convergência da propriedade efetiva de condutividade térmica até que seja atingida a condição de EVR. Por fim, é proposta uma análise experimental baseada em imagens termográficas para verificação dos resultados numéricos.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O principal objetivo deste trabalho consiste no estudo da condutividade térmica efetiva de materiais com inclusões em seus domínios submetidos à transferência de calor. Neste sentido serão consideradas análises numéricas e experimentais para demonstrar e validar os campos de temperatura frente à influência das inclusões. Para o modelamento numérico será utilizado o Método dos Elementos de Contorno onde será empregada a técnica de sub-regiões para modelar as inclusões. No estudo do comportamento da condutividade térmica efetiva, devido à inserção das inclusões no domínio, será utilizado o conceito de EVR. Este conceito, segundo a literatura, permitirá a avaliação estatística da dispersão de resultados promovidos pela disposição aleatória destas inclusões no domínio. Por fim, deve ser desenvolvido um procedimento experimental para a verificação e complementação dos resultados obtidos numericamente.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com os constantes avanços tecnológicos é cada vez maior a demanda por materiais de alta eficiência e desempenho. Tal fato acaba por impulsionar o desenvolvimento de pesquisa voltada à análise de microestruturas e a relação das suas propriedades com as propriedades macroscópicas do material como um todo.

Em Samantray et al. (2006) estuda-se o desenvolvimento de relações de correlação para estimar-se a condutividade térmica efetiva de materiais bifásicos. Foram realizadas análises variando-se a concentração da fase dispersa entre 10 e 90%, a fim de estabelecer-se relações de correlação para os casos em que a solução de Maxwell não é aplicável. Da análise dos resultados experimentais, foram desenvolvidas três relações de correlação aplicáveis para condições específicas de problemas bifásicos tratados no artigo. Este trabalho mostra que os problemas de predição de propriedades térmicas, entre outras, de materiais com características heterogêneas é antigo e ainda carece de métodos mais precisos e eficientes.

Em um trabalho mais recente, Kwon et al. (2009) realizam um estudo da condutividade térmica efetiva dos principais materiais utilizados na construção de painéis para isolamento térmico “a vácuo”: fibras, espumas e pós específicos. A análise proposta se baseia na construção microestrutural de cada um dos materiais citados, utilizando simplificações e idealizações para a modelagem do fenômeno de condução sólida para cada caso. Além da condução sólida, é levada em conta a condução gasosa, devido aos gases confinados nas porosidades, e também à radiação. Verifica-se, ao final, que a condutividade térmica efetiva é função da porosidade, da condutividade sólida pura e das propriedades mecânicas do material. As modelagens propostas concordam de maneira relativamente precisa com os resultados experimentais apresentados, exceto no caso da modelagem dos pós, refletindo as limitações de hipóteses idealizadas.

Wang e Pan (2008) evidencia justamente a necessidade de desenvolvimento de modelos mais precisos, uma vez que os modelos existentes são, em grande parte, baseados em construções microestruturais periódicas idealizadas. É proposta uma análise de espumas de células abertas por modelagem computacional com geração e crescimento aleatórios de células, tornando possível a construção de microestruturas heterogêneas e porosas mais complexas, aproximando-se melhor da realidade. Dos resultados obtidos, tem-se que, quando adicionado o efeito da transferência de calor por radiação, os resultados numéricos concordam bem com os dados experimentais.

No trabalho de Terada e Kikuchi (1996) é proposto um método de homogeneização de uma microestrutura heterogênea a partir da definição de uma região cujo comprimento característico é tal que o comportamento de uma dada propriedade microscópica se aproxime do seu comportamento macroscópico. O método é chamado de Elemento de Volume Representativo (EVR). Este conceito é

aplicado juntamente com ferramentas de modelagem geométrica por análise de imagens digitais e a análise de elementos finitos, possibilitando a simulação e análise de uma situação real. Essa nova metodologia apresentada constitui uma poderosa ferramenta, tanto para análise e determinação de propriedades efetivas de materiais, quanto para uma otimização muito mais profunda de projetos, sendo possível otimizar-se as microestruturas de um dado material, maximizando-se ou minimizando-se suas propriedades de acordo com a demanda do projeto.

Lançando mão do conceito de EVR, Yao et al. (2004) apresenta uma modelagem utilizando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) para materiais compósitos. O material em análise é composto por uma matriz com inclusões sólidas. Na modelagem em MEC, tem-se um problema de sub-regiões, no qual o EVR é considerada a região principal e cada uma das inclusões é uma sub-região a ser analisada, bem como a matriz que os abriga. Este tipo de problema demanda uma formulação especial para o MEC, na qual devem ser consideradas as conectividades entre as sub-regiões, isto é, pontos comuns que ligam as sub-regiões e que, portanto, dividem as mesmas condições de contorno. Dentre os resultados apresentados, destaca-se a grande compatibilidade e eficiência do MEC para análises bidimensionais lineares com EVR's com grande número de inclusões de materiais distintos. O melhor desempenho computacional observado, nesse caso, em comparação a outros métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), se deve ao fato de o EVR requerer apenas informações em seu contorno. Por fim, os resultados obtidos numericamente através desta metodologia apresentam grande concordância com resultados de modelagens analíticas, servindo, inclusive, como ferramenta de verificação destas.

Em Buroni e Marczak (2008) é apresentada uma nova modelagem micro-estrutural para estimar-se propriedades efetivas de materiais com distribuição aleatória de poros cilíndricos empregando o MEC. Um dos destaques deste trabalho é o desenvolvimento e aplicação de um único elemento capaz de representar furos e inclusões, aumentando significativamente a eficiência computacional do método e permitindo repetidas simulações com números muito elevados de furos. Também é aplicado o conceito de EVR em conjunto com análises estatísticas para definição das curvas de convergência das propriedades de elasticidade e razão de Poisson, obtendo-se resultados consistentes com resultados apresentados em outros trabalhos. Mostra-se a possibilidade de expansão desta metodologia para modelar-se inclusive problemas de comportamentos não-lineares onde os modelos analíticos disponíveis não são aplicáveis.

Seguindo a mesma linha de projeto, Zarichta (2008) apresenta um estudo das propriedades de condutividade térmica efetiva de materiais micro-porosos em problemas potenciais permanentes bidimensionais. É empregada uma metodologia semelhante à de Buroni e Marczak (2008) onde o MEC é utilizado em conjunto ao conceito de EVR e ferramentas estatísticas para determinação da condutividade térmica efetiva. São analisados tanto materiais isotrópicos quanto ortotrópicos, lançando mão de técnicas de mapeamento do domínio ortotrópico em um novo domínio de comportamento

isotrópico. Dos resultados, nota-se que o problema de transferência de calor é bem menos sensível à presença de furos que o problema voltado para análises de elasticidade, apresentado em Buroni e Marczak (2008).

No trabalho de Dondero et al. (2011) também é proposta uma modelagem bidimensional de transferência de calor em uma placa plana contendo furos, gerados de maneira aleatória para simular condições de micro-porosidades, aplicando MEC em um EVR. No MEC é utilizada uma formulação especial, desenvolvida recentemente, denominada de “Fast Multipole”, que aumenta significativamente a eficiência computacional e permite que as análises sejam mais rapidamente executadas. Além da análise numérica computacional, é apresentado um experimento baseado em análise de imagens termográficas para validação dos resultados obtidos. As soluções obtidas aproximam-se relativamente bem dos resultados numéricos e concordam muito bem com resultados analíticos. A discrepância entre os dados experimentais e os obtidos numericamente não ultrapassam 5% e são atribuídas às perdas na superfície superior da placa devido à radiação e convecção.

O MEC tem se mostrado um método bastante versátil, possibilitando inúmeros tipos distintos de análises e soluções para problemas como o apresentado em Huang e Shih (2005). Neste, estuda-se a identificação de formas em um domínio com múltiplas regiões, ou seja, tem-se um domínio com três regiões distintas e busca-se a determinação do formato das fronteiras entre cada uma das regiões a partir da análise das condições de contorno. O MEC é utilizado juntamente com o método dos gradientes conjugados e, a partir do posicionamento de sensores de temperatura ao longo da placa em estudo, é capaz de determinar o formato das fronteiras entre cada uma das regiões. O método se provou bastante eficiente sendo capaz de detectar o formato das regiões de fronteira de inúmeras construções distintas.

Em outra aplicação, Kanarachos e Provatidis (1992) analisam a aplicabilidade do MEC com formulação para sub-regiões para a solução de problemas potenciais de propagação de ondas. É utilizada uma aproximação considerando o método da continuidade “ $u - q$ ”, que prevê a continuidade dos potenciais (u) e fluxos (q) ao longo da fronteira entre as regiões. O trabalho trata ainda da perda de precisão que este método pode vir a trazer para a análise. Verifica-se a importância do emprego da quantidade adequada de elementos de contorno e o efeito que isso pode acarretar na precisão dos resultados, dependendo da teoria na qual a formulação do MEC se baseou. No caso, para a formulação de Brebbia-Nardini, houve grande perda de precisão com números reduzidos de elementos, enquanto a formulação de Dirichlet mostrou-se indiferente a este parâmetro.

Outros métodos numéricos largamente utilizados atualmente, principalmente em pacotes comerciais, são o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF). Cada uma dessas técnicas possui aplicações particulares onde pode ser superior às demais. Bialecki et al. (2001) aproveita-se do fato que geralmente o domínio computacional pode ser dividido em sub-regiões de maneira arbitrária e propõe o acoplamento de métodos numéricos, no caso MEF e MEC,

sob a hipótese de que em 3 casos específicos o uso conjunto destes métodos mostra-se mais vantajoso. São eles: Problemas com não-linearidades locais, otimizações de forma e em problemas com mudança de dimensionalidade, presença de domínios infinitos e de singularidades. Além dessas opções cada método pode ainda ser acoplado à própria solução analítica ou ao próprio método (MEC – MEC ou MEF – MEF). São discutidas também algumas situações práticas em que cada tipo de acoplamento é vantajoso. O acoplamento como apresentado é capaz de extrair o melhor de ambos os métodos, apresentando-se como uma solução mais eficiente, em termos computacionais, para diversos problemas que o uso individual de cada método.

Em um exemplo bastante recente de aplicação de os métodos em conjunto pode ser vista em Mulliken e Rizos (2011). Neste é elaborado uma metodologia eficiente e estável para acoplamento do MEC ao MEF que permite discretizações temporais independentes entre os “solvers”. O problema é abordado inicialmente para solucionar problemas de interação dinâmica entre solo e estrutura, mas, devido à generalidade com a qual a metodologia é construída, pode ser facilmente estendido para qualquer problema transiente de multi-domínios ou multi-fases. Quando comparados a soluções exatas e outras análises de solução, nota-se que se trata de um método bastante preciso e estável. Apresenta ainda a vantagem de comportar múltiplas interfaces conexões entre BEM e FEM, podendo ser acoplado a soluções analíticas e semi-analíticas.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE MÉTODOS NUMÉRICOS

Problemas reais de engenharia geralmente recaem em domínios não triviais ou em problemas não-lineares, nos quais é bastante complicada, ou mesmo impossível a aplicação de soluções analíticas de maneira direta. Tais problemas são regidos por equações diferenciais parciais não facilmente solucionáveis. São bastante comuns casos em que os projetos envolvem geometrias complicadas, construções com diversos tipos constituintes num mesmo domínio ou mesmo fenômenos complexos não lineares, a exemplo do próprio comportamento plástico. Esses problemas sempre existiram no meio da engenharia e serviram como instrumento impulsionador para o desenvolvimento de métodos numéricos que, associados ao crescimento do poder computacional disponível, são capazes de fornecer soluções para casos como os citados com boa precisão.

Atualmente, como apontado por Bialecki et al. (2001) métodos como o MEF, o MEC, o MVF e o Método das Diferenças Finitas são largamente utilizados, estando, inclusive, presentes em inúmeros pacotes comerciais. Cada um dos métodos possuem aplicações particulares onde seu desempenho é superior aos demais.

O MDF, é tido como um dos primeiros métodos desenvolvidos e consiste em uma técnica para cálculo de derivadas parciais presentes nas equações diferenciais que regem a maioria dos problemas físicos. Embora funcional, o trabalho requerido para aplicação das condições de contorno acaba penalizando seu uso em relação aos demais métodos.

O MVF é amplamente utilizado para soluções de problemas de dinâmicas dos fluídos (“CFD”). Neste o domínio contínuo é discretizado em volumes de controle, originando um sistema de equações constituído pelas variáveis localizadas nas interfaces dos volumes de controle.

O MEF é uma ferramenta bastante atrativa para análises de comportamentos altamente não-lineares e corpos de geometria complexas em domínios finitos. Aqui é realizada a discretização do domínio em elementos de dimensões finitas. Cada elemento representa uma pequena partição do corpo assumindo, de maneira aproximada, o comportamento mecânico da região em questão. As análises via MEF demandam a discretização do corpo inteiro, gerando malhas com elevados números de elementos.

O MEC por sua vez se mostra uma ferramenta bastante eficiente para análises lineares, principalmente quando os domínios envolvidos apresentam caráter infinito. A sua formulação promove a transformação das equações diferenciais que regem o problema em equações integrais avaliadas apenas na superfície, ou contorno do corpo. Sendo assim, há apenas a necessidade de

discretizar-se o contorno (ou a superfície, tratando-se de problemas tridimensionais), reduzindo significativamente o tamanho da malha e a quantidade de elementos necessários.

Como apresentado em Białecki et al. (2001) há problemas para os quais a solução mais eficiente é alcançada através da divisão do domínio em sub-regiões e o acoplamento dos métodos numéricos. Por exemplo, em casos de não-linearidades locais é possível discretizar-se a maior região do problema em elementos de contorno e discretizar-se apenas a região não linear em elementos finitos. A mesma ideia pode ser utilizada para modelagem de uma estrutura imersa em um meio infinito.

3.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA CONDUÇÃO DE CALOR

Uma das peças chaves para o método dos elementos de contorno é o conhecimento acerca das soluções fundamentais das equações diferenciais governantes dos problemas desenvolvidos. Para o caso do problema potencial de transferência de calor corresponde à resposta da temperatura em um meio infinito quando a fonte de calor concentra-se em um único ponto. Desta maneira, a solução fundamental do potencial deve ser capaz de satisfazer a seguinte expressão:

$$\nabla^2 U = -\frac{\delta(x-d)}{K} \quad (3.1)$$

Na qual $\delta(x, d)$ corresponde à função Delta de Dirac, d representa a posição do ponto no qual a fonte de calor é concentrada e x , o ponto onde se deseja calcular o valor da temperatura.

Uma função possível, que satisfaz a relação apresentada na Eq. (3.1), é da forma:

$$U^* = A \cdot \ln(R) \quad (3.2)$$

Na função apresentada, R corresponde à distância do ponto sobre o qual a fonte de calor é concentrada (ponto fonte) até o ponto sobre o qual se deseja calcular o valor da temperatura (ponto campo). A figura (3.1) ilustra essas relações.

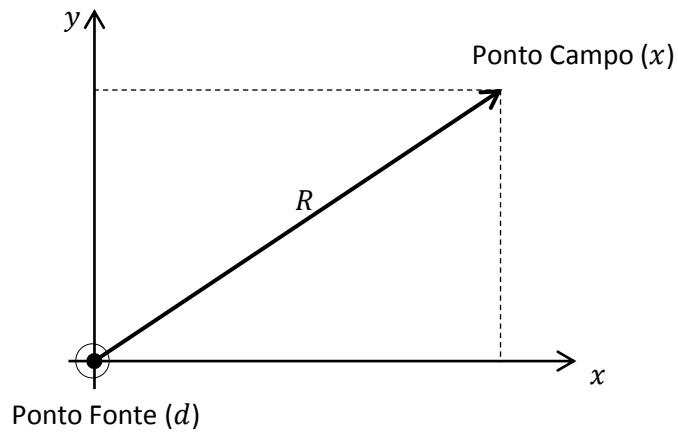


Figura 3.1. Representação clássica do ponto fonte e ponto campo.

Expressando-se R , como mostrado na Fig. (3.1), em coordenadas cartesianas, tem-se:

$$R = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Para o caso bidimensional é possível tratar-se as coordenadas individualmente, uma vez que as soluções tanto para x quanto para y são similares. Sendo assim, derivando-se a Eq. (3.2) em relação a apenas x , obtém-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = A \frac{\partial [\ln(R)]}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \quad (3.4)$$

Olhando-se exclusivamente para o termo da derivada de R em relação a x , conclui-se que:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial [(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}]}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{R} \quad (3.5)$$

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial [\ln(R)]}{\partial R} = \frac{1}{R} \quad (3.6)$$

A Eq. (3.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = A \frac{x}{R^2} \quad (3.7)$$

E da mesma maneira, para a coordenada y :

$$\frac{\partial U^*}{\partial y} = A \frac{y}{R^2} \quad (3.8)$$

Seguindo da Eq. 3.7, deriva-se uma segunda vez em relação a x :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{x}{R^2} \right) = \frac{A}{R^2} - \frac{2Ax}{R^4} \quad (3.9)$$

Analogamente para a coordenada y :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} = \frac{A}{R^2} - \frac{2Ay}{R^4} \quad (3.10)$$

Somando-se as Eqs. (3.9) e (3.10), é obtida :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} = \nabla^2 U^* = 2A \left[\frac{1}{R} - \frac{(x^2+y^2)}{R^4} \right] \quad (3.11)$$

Que equivale a:

$$\nabla^2 U^* = 2A\delta(x - d) \quad (3.12)$$

Comparando-se esta última equação com a Eq. (3.2), conclui-se que:

$$A = \frac{1}{2K} \quad (3.13)$$

Esse resultado foi obtido utilizando-se como base a hipótese de que intensidade da fonte é unitária.

Em Kane (1994) é apresentada uma análise utilizando a expressão logarítmica para distribuição de temperatura, apresentada na Eq. 3.2., associada à lei de Fourier para condução de calor em um cilindro de raio R centrado na origem. Considera-se, assim, que a energia térmica gerada pela fonte é unitária. Neste caso, mostra-se que uma melhor avaliação de A é tal que:

$$A = \frac{1}{2\pi K} \quad (3.14)$$

Substituindo a Eq. (3.14) na Eq. (3.2) conclui-se que:

$$U^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln(R) \quad (3.15)$$

O raio em questão pode ser definido para um sistema de coordenadas cuja origem reside em uma posição arbitrária qualquer. Neste caso utiliza-se uma expressão mais completa para R:

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte.

A solução fundamental do fluxo é obtida a partir da derivação direta da solução fundamental do potencial, exibida na Eq. (3.6), em relação à direção normal.

$$q^* = -\frac{K \partial U^*}{\partial n} = -K \nabla U^* \cdot \vec{\eta} \quad (3.17)$$

Sendo \vec{n} o vetor normal, a equação acima pode ser reescrita como:

$$q^* = \frac{1}{2\pi K} \left[\frac{\partial \ln(R)}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \ln(R)}{\partial y} \eta_y \right] \quad (3.18)$$

Deste modo, a solução fundamental para o fluxo é dada por:

$$q^* = \frac{1}{2\pi KR^2} [(x - x_0) \eta_x + (y - y_0) \eta_y] \quad (3.19)$$

3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A modelagem do problema potencial de transferência de calor em elementos de contorno é, talvez, a modelagem em elementos de contorno mais amplamente difundida, sendo observada em inúmeros livros, artigos e teses acerca do assunto.

Assume-se, inicialmente um corpo arbitrário de domínio cartesiano Ω e contorno Γ como o ilustrado abaixo na Fig. (3.2).

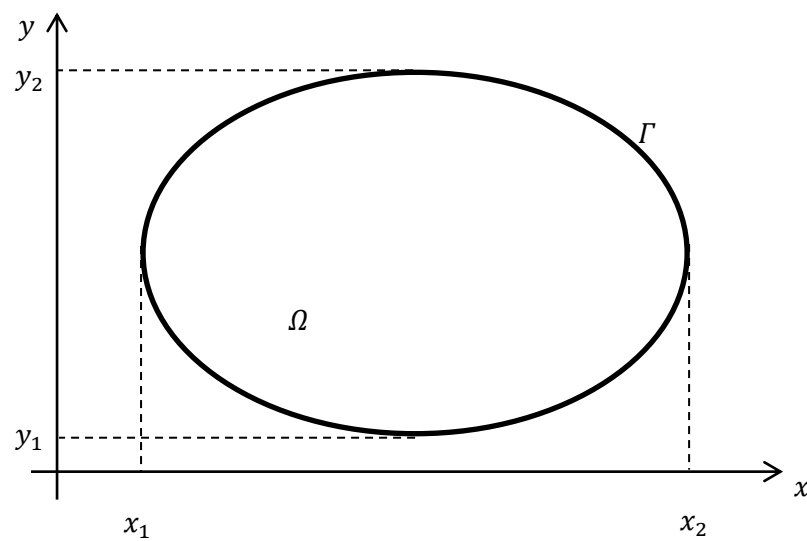


Figura 3.2 . Representação de um corpo arbitrário no plano de coordenadas cartesianas x-y

Considerando-se o problema de um domínio Ω no qual não há geração de calor interna, ou seja, em que a equação de Fourier é tal que:

$$\nabla^2 U = 0 \quad (3.20)$$

Onde U representa o potencial.

Considera-se agora a terceira identidade de Green com uma função peso arbitrária $w(x, y)$.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 U) w d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

O próximo passo consiste na integração por partes da Eq. (3.21) que tem como resultado:

$$\int_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right\} d\Omega + \int_{\Gamma} -\frac{\partial U}{\partial \eta} w d\Gamma = 0 \quad (3.22)$$

Integrando-se novamente por partes:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} U + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} U \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial \eta} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial \eta} U d\Gamma = 0 \quad (3.23)$$

Que pode ser reescrita de forma mais compacta na forma:

$$\int_{\Omega} (U \nabla^2 w) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(w \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) d\Gamma = 0 \quad (3.24)$$

O objetivo fundamental da manipulação matemática é obter-se uma formulação integral exclusivamente no contorno, eliminando-se a integral de domínio presente na Eq. (3.24). Deste modo, deve se escolher uma função peso tal que $\nabla^2 w = 0$. Faz-se então $w(x, y) = U^*$, onde U^* representa a própria solução fundamental do problema. Tal escolha justifica-se devido ao fato de que o Laplaciano da solução fundamental é função de delta de Dirac, sendo portanto nulo em todos os pontos do domínio exceto no próprio ponto fonte.

Assumindo-se então a função peso como sendo a própria solução fundamental, surge a seguinte igualdade:

$$\nabla^2 w = \nabla^2 U^* = -\frac{\delta(x-d)}{K} \quad (3.25)$$

Substituindo-se a Eq. (3.25) na integral de domínio da Eq. (3.24):

$$\int_{\Omega} (U \nabla^2 w) d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ U - \left[\frac{\delta(x-d)}{K} \right] \right\} d\Omega = -\frac{C U(d)}{K} \quad (3.26)$$

Onde a “C” se dá o nome de função de forma. Trata-se de uma constante que depende da posição do ponto “d” em relação ao domínio e da geometria do próprio contorno. Caso “d” seja interior ao domínio, $C = 1$. Caso seja externo, $C = 0$. Mas caso seja coincidente com o contorno, então $0 < C < 1$. Neste último caso, considerando-se o contorno suave, assume-se $C = 1/2$.

A partir do resultado apresentado na Eq. (3.26) é possível reescrever-se a equação integral exibida na Eq. (3.24) na forma:

$$\int_{\Gamma} \left(U^* \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(U \frac{\partial U^*}{\partial \eta} \right) d\Gamma - \frac{c U(d)}{K} = 0 \quad (3.27)$$

Podendo ser escrita na forma mais enxuta:

$$C U(d) = K \int_{\Gamma} (U^* q - U q^*) d\Gamma \quad (3.28)$$

Uma vez que o fluxo de calor na direção normal ao contorno é descrito pela equação:

$$q = -K \frac{\partial U}{\partial n} \quad (3.29)$$

E de maneira análoga:

$$q^* = -K \frac{\partial U^*}{\partial n} \quad (3.30)$$

Por fim, manipulando-se a Eq. (3.27) chega-se na formulação mais clássica para a integral de contorno para transferência de calor:

$$C U(d) = K \int_{\Gamma} (U q^* - U^* q) d\Gamma \quad (3.31)$$

3.4 DISCRETIZAÇÃO DA INTEGRAL DE CONTORNO

Estabelecidas as soluções fundamentais e obtida a integral de contorno o passo seguinte é a discretização do contorno. A discretização consiste em uma segmentação virtual do contorno de um corpo bidimensional ou da superfície de um corpo tridimensional em um número determinado de segmentos. A integral de contorno, vista na Eq. (3.31), passa a ser escrita como um somatório de integrais relativas a cada um dos segmentos discretos, como mostra a Eq. (3.32) abaixo. A figura (3.3) exemplifica a discretização do contorno de um corpo arbitrário.

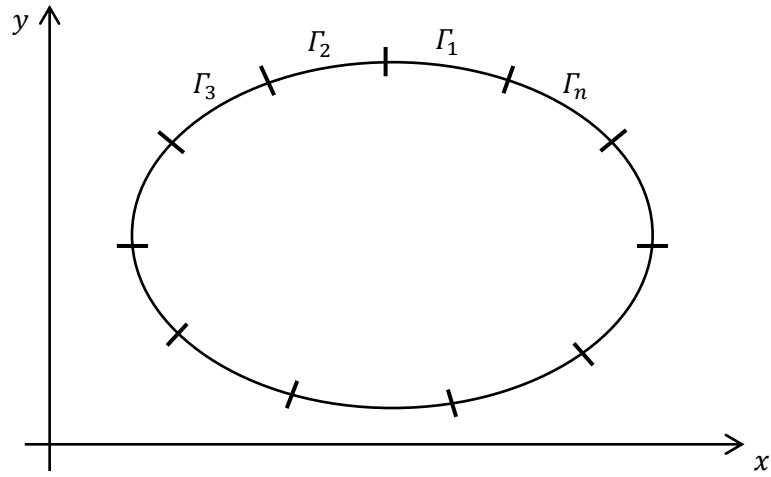


Figura 3.3. Discretização do contorno de um corpo arbitrário em “n” segmentos distintos.

$$C T(d) = K \left[\sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} (Uq^* d\Gamma_i) - \sum_{i=1}^n (\int_{\Gamma_i} U^* q d\Gamma_i) \right] \quad (3.32)$$

A modelagem numérica do problema implica em aproximações de cada um desses segmentos por formas mais simples, geralmente regidas por polinômios. Essas formas que assumem o lugar de cada parte do contorno original no modelo recebem o nome de elementos de contorno. A melhor aproximação da modelagem com o contorno original pode ser obtida de duas maneiras: Ou aumenta-se o número de elementos utilizados, reduzindo-se os seus tamanhos, ou aumenta-se o grau do polinômio utilizado no elemento. A solução obtida a partir do modelo composto por elementos de contorno melhora conforme este se aproxima do contorno original. A figura (3.4) apresenta uma modelagem teórica do contorno discretizado mostrado na Fig. (3.3) utilizando elementos de contorno lineares.

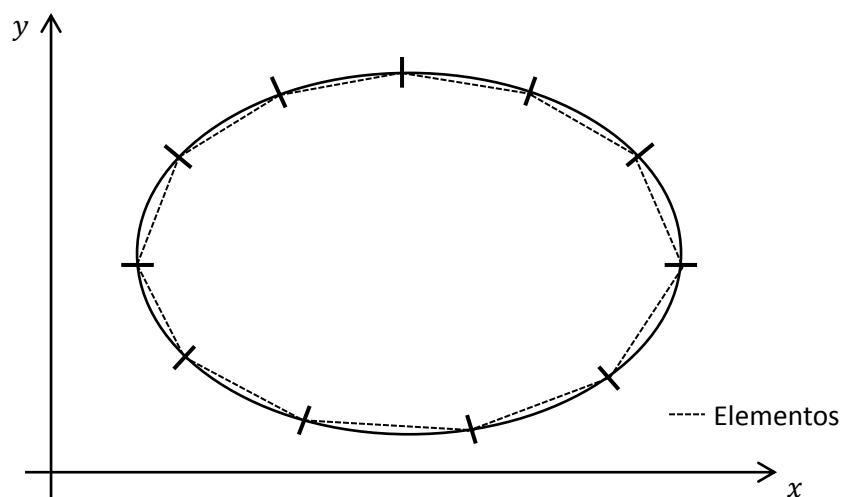


Figura 3.4. Aproximação do contorno original por elementos de contorno

Vale ressaltar que tanto aumentar o número de elementos quanto a elevação do grau dos polinômios implica em maiores gastos computacionais, sendo este um fator limitador a se considerar na condução deste tipo de análise.

3.5 CÁLCULO DAS SOLUÇÕES NO CONTORNO

3.5.1 Elementos de contorno constantes

É bastante comum a utilização de uma discretização linear, aproximando-se a geometria original do segmento por uma reta. Este elemento retilíneo conta com um nó central ao qual é atribuído um valor de potencial e um de fluxo que se faz constante ao longo de toda a sua extensão.

Como o nó está sempre ao centro dos elementos, assume-se que, para todos os elementos, a constante atribuída ao fator de forma (“C”) presente na Eq. (3.32), é sempre igual a $\frac{1}{2}$. Sendo assim, para uma discretização utilizando-se elementos constantes, a Eq. (3.32) pode ser reduzida a:

$$\frac{1}{2}U(d) = K \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_{\Gamma_i} U q^* d\Gamma_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Gamma_i} U^* q d\Gamma_i \right) \right] \quad (3.33)$$

Reordenando-se a equação acima obtém-se:

$$-\frac{1}{2}U(d) + K \sum_{i=1}^n U_i \left(\int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma_i \right) = K \sum_{i=1}^n (q_i \int_{\Gamma_i} U^* d\Gamma_i) \quad (3.34)$$

Como apresentado em Braga (2012), define-se:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma_i \quad (3.35)$$

Se $i \neq j$. Ou:

$$H_{ij} = -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_i} q^* d\Gamma_i \quad (3.36)$$

Se $i = j$.

Além disso, define-se também:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_i} U^* d\Gamma_i \quad (3.37)$$

Deste modo, a Eq. (3.34) é reescrita da maneira a seguir:

$$\sum_{i=1}^n [H_{ij} U_i] = \sum_{i=1}^n [G_{ij} q_i] \quad (3.38)$$

3.5.2 Elementos de contorno lineares e quadráticos

Um elemento de contorno linear difere do constante por possibilitar que sejam realizadas aproximações por funções lineares. Isto é possível ao utilizar-se dois nós por elemento. O desenvolvimento para obtenção da estrutura das matrizes H e G se dão de maneira similar ao apresentado para os elementos constantes, porém deve-se considerar a presença de dois nós por elemento, o que acaba por modificar o tamanho das matrizes e vetores utilizados. Braga (2012) mostra que dado um problema com um número “n” qualquer de elementos, a matriz H conserva a dimensão “n por n”, porém a matriz G passa a apresentar dimensões “n por 2n”.

Por sua vez, elementos quadráticos são bastante utilizados para representação de curvas, para as quais, a utilização de elementos lineares acaba por exigir a presença de muitos elementos para a obtenção de uma boa aproximação. Esse tipo de elemento exige a presença de três pontos nodais por elemento. O seu equacionamento detalhado também pode ser observado em Braga (2012).

3.5.3 Montagem das matrizes H e G

Definida a Eq. (3.38), é necessário agora montar-se as matrizes H e G. Este passo da análise consiste basicamente na alocação correta das condições de contorno do problema a ser desenvolvido. Para ilustrar melhor o procedimento, utiliza-se um exemplo clássico de transferência de calor por condução em placa quadrilátera, onde cada lado é composto por um único elemento de contorno constante. A figura (3.5) ilustra o problema exemplo.

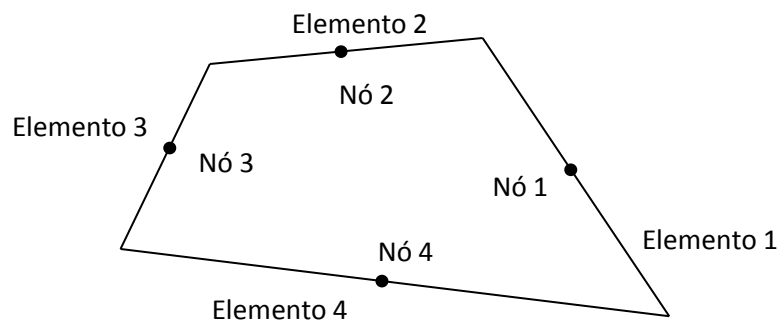


Figura 3.5. Quadrilátero composto por 4 elementos de contorno constantes.

Na figura (3.5), é mostrado um quadrilátero no qual cada lado é composto por um único elemento de contorno constante com um único nó central. O passo seguinte é determinar as condições de contorno conhecidas e desconhecidas a serem atribuídas a cada um dos nós. Seguindo a notação utilizada em Kane (1994) aos fluxos conhecidos, atribui-se a notação \bar{q} e, da mesma maneira, aos potenciais conhecidos \bar{U} .

Desta maneira, são atribuídas as condições de contorno de modo que os fluxos nos elementos 2 e 4 sejam conhecidos, assim como os potenciais nos nós 1 e 3. Sendo assim, adotando-se o nó 1 como ponto fonte, tem-se a seguinte expressão:

$$H_{11}\bar{U}_1 + H_{12}U_2 + H_{13}\bar{U}_3 + H_{14}U_4 = G_{11}q_1 + G_{12}\bar{q}_2 + G_{13}q_3 + G_{14}\bar{q}_4 \quad (3.39)$$

O mesmo é feito utilizando cada outro elemento como ponto fonte, o que resulta em um sistema linear de 4 incógnitas e 4 equações. Esse sistema é reescrito na forma matricial como mostra a equação abaixo.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ U_2 \\ \bar{U}_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ q_3 \\ \bar{q}_4 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Isolam-se os termos conhecidos:

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} & -G_{13} & H_{14} \\ -G_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{24} \\ -G_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} \\ -G_{41} & H_{42} & -G_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ U_2 \\ q_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} & -H_{13} & G_{14} \\ -H_{21} & G_{22} & -H_{23} & G_{24} \\ -H_{31} & G_{32} & -H_{33} & G_{34} \\ -H_{41} & G_{42} & -H_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{U}_3 \\ \bar{q}_4 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

Que remete à típica equação:

$$[A](x) = [B] \quad (3.42)$$

Facilmente solucionável fazendo-se:

$$(x) = [A]^{-1}[B] \quad (3.43)$$

4 ELEMENTOS DE CONTORNO COM SUB-REGIÕES

A modelagem em MEC com sub-regiões é uma ferramenta utilizada quando o objeto de estudo possui regiões do domínio com propriedades físicas diferentes. Microestruturas de materiais metálicos, entre outros, são compostas por agrupamentos de diferentes tipos de grão, cada um com suas respectivas propriedades.

Em um caso mais simplificado, considera-se um problema bidimensional cujo objeto em análise possui apenas duas sub-regiões com propriedades físicas distintas, como mostra a figura (4.1).

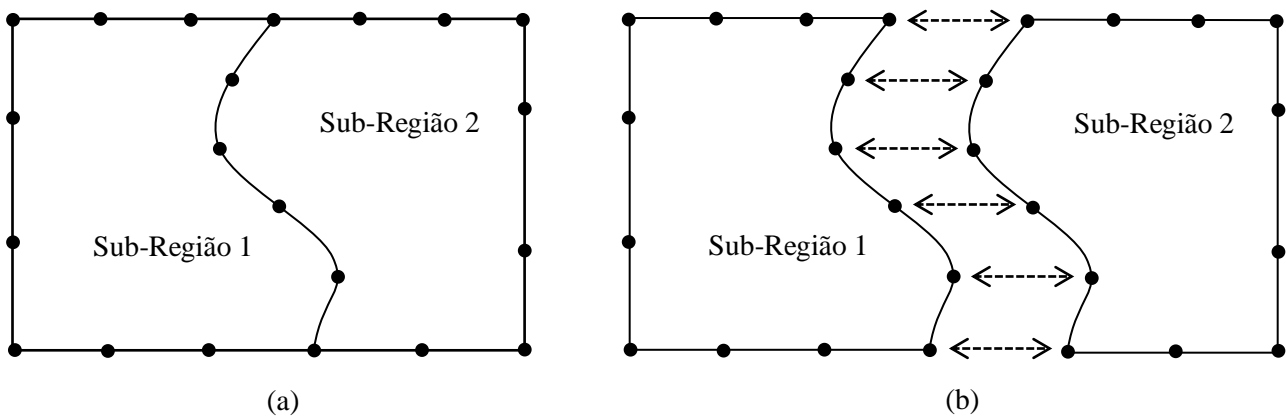


Figura 4.1. Representação de um domínio composto por duas sub-regiões

No domínio ilustrado, é possível visualizar a região de interface na fronteira entre cada uma das duas sub-regiões. Os elementos dispostos nesta região são solidários tanto à sub-região 1 quanto à sub-região 2, garantindo a continuidade das condições de contorno. Deste modo, para a análise de um problema potencial, os nós da interface devem apresentar valores de potencial, ou seja, temperatura comuns à sub-região 1 e à sub-região 2, e o fluxo de calor normal saindo da sub-região 1 deve ser igual ao fluxo de calor normal entrando na sub-região 2.

A análise de elementos de contorno é implementada, então, quebrando-se o domínio em análise nas sub-regiões distintas que o compõem, transformando um problema de domínio heterogêneo em dois ou mais problemas de domínios homogêneos, cujas análises são bem conhecidas. Cada sub-região definida apresenta contornos fechados com nós exclusivos, não comuns, mas também nós comuns nas interfaces como mostrado na Fig. (4.1(b)). Essa quebra permite que as integrais de contorno governantes sejam aplicadas a cada sub-região individualmente tratando-as como corpos homogêneos.

4.1 MODELAGEM DO PROBLEMA COM SUB-REGIÕES

Assume-se um problema potencial em um corpo cujo domínio é composto por duas sub-regiões retangulares, ilustrados na Fig. (4.2).

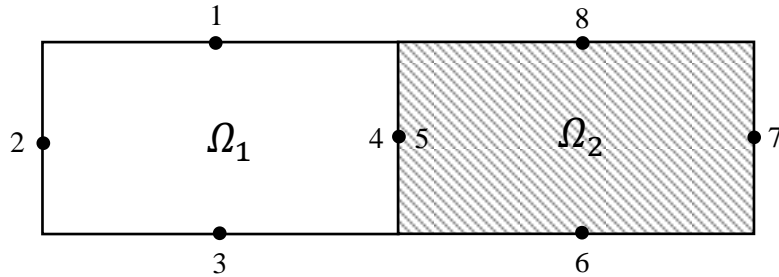


Figura 4.2. Ilustração do problema de sub-regiões. Sub-região 1 (branca) a esquerda sub-região 2 (hachurada) a direita.

Cada sub-região retangular é composta por 4 elementos constantes, sendo que o elemento 5 da sub-região 4 coincide com o elemento 4 da sub-região 1. Desse elemento, geralmente não se conhece nem o fluxo nem o potencial, adicionando duas variáveis desconhecidas, além das típicas, ao problema em questão.

Apenas para caracterizar-se de maneira correta, são conhecidos os valores dos potenciais nos nós 2 e 7. Nos demais nós, excluindo-se o de interface, são conhecidos os fluxos.

As relações matriciais para cada sub-região envolvida são obtidas tratando-se cada uma como um problema homogêneo individual.

Partindo da construção apresentada na Eq. (3.40), para o subdomínio Ω_1 , tem-se que:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \bar{U}_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ q_2 \\ \bar{q}_3 \\ q_4 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

E, da mesma maneira, para o subdomínio Ω_2 ,

$$\begin{bmatrix} H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_5 \\ U_6 \\ \bar{U}_7 \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_5 \\ \bar{q}_6 \\ q_7 \\ \bar{q}_8 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Juntando-se as expressões de cada sub-região em uma única equação para o problema todo obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \overline{U_2} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ \overline{U_7} \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{q_1} \\ q_2 \\ \overline{q_3} \\ q_4 \\ q_5 \\ \overline{q_6} \\ q_7 \\ \overline{q_8} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Observando-se o problema como um sistema linear, tem-se 8 equações com 10 incógnitas. Porém no nó de interface tem-se as equações que garantem a continuidade das condições de contorno, já comentadas:

$$U_4 = U_5 \rightarrow U_4 - U_5 = 0 \quad (4.4)$$

$$q_4 = -q_5 \rightarrow q_4 + q_5 = 0 \quad (4.5)$$

As equações (4.4) e (4.5) possuem a função de acoplar as sub-regiões em estudo. Para representá-las na forma matricial acoplando os subdomínios Ω_1 e Ω_2 , são adicionadas novas linhas às matrizes $[H]$ e $[G]$, apresentadas da Eq. (4.3). Segue a equação resultante.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \overline{U_2} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ \overline{U_7} \\ U_8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & G_{56} & G_{57} & G_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & G_{66} & G_{67} & G_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{75} & G_{76} & G_{77} & G_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{85} & G_{86} & G_{87} & G_{88} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overline{q_1} \\ q_2 \\ \overline{q_3} \\ q_4 \\ q_5 \\ \overline{q_6} \\ q_7 \\ \overline{q_8} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Posto o problema desta maneira, a Eq. (4.6) equivale, de maneira geral, a:

$$[H](U) = [G](q) \quad (4.7)$$

O procedimento seguinte é análogo ao apresentado anteriormente na seção 3.5.3.

O próximo passo consiste na separação das variáveis conhecidas e das desconhecidas, obtendo-se uma situação como a apresentada na Eq. (3.42). Após realizada a separação das variáveis, para o problema em questão, tem-se:

$$[A] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & -G_{12} & -G_{14} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{23} & H_{24} & 0 & 0 & 0 & -G_{22} & -G_{24} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{33} & H_{34} & 0 & 0 & 0 & -G_{32} & -G_{34} & 0 & 0 \\ H_{41} & H_{43} & H_{44} & 0 & 0 & 0 & -G_{42} & -G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{55} & H_{56} & H_{58} & 0 & 0 & -G_{55}-G_{57} & \\ 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{66} & H_{68} & 0 & 0 & -G_{65}-G_{67} & \\ 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{76} & H_{78} & 0 & 0 & -G_{75}-G_{77} & \\ 0 & 0 & 0 & H_{65} & H_{86} & H_{88} & 0 & 0 & -G_{85}-G_{87} & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10} \quad (4.8)$$

$$(x) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_8 \\ q_2 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_7 \end{pmatrix}_{10 \times 1} \quad (4.9)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} G_{11}G_{13} & 0 & 0 & -H_{12} & 0 \\ G_{21}G_{23} & 0 & 0 & -H_{22} & 0 \\ G_{31}G_{33} & 0 & 0 & -H_{32} & 0 \\ G_{41}G_{43} & 0 & 0 & -H_{42} & 0 \\ 0 & 0 & G_{56}G_{58} & 0 & -H_{57} \\ 0 & 0 & G_{66}G_{68} & 0 & -H_{67} \\ 0 & 0 & G_{76}G_{78} & 0 & -H_{77} \\ 0 & 0 & G_{78}G_{88} & 0 & -H_{87} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_6 \\ q_8 \\ U_2 \\ U_7 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Utilizando-se, por fim, a Eq. (3.43) com as matrizes mostradas nas Eqs. (4.8), (4.9) e (4.10), chega-se na solução para o problema.

5 ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (EVR)

Do ponto de vista macroscópico, materiais metálicos como o aço apresentam propriedades com características predominantemente isotrópicas. Porém quando reduz-se a escala de observação ao nível micro-estrutural, a homogeneidade da amostra, observada macroscopicamente, deixa de existir. Microestruturas de materiais metálicos, entre outros, são compostas por agrupamentos de diferentes tipos de grãos, cada um com suas respectivas propriedades. Nessa escala, a amostra apresenta uma natureza tipicamente heterogênea, e a geometria, o posicionamento, e também a frequência com a qual as heterogeneidades se fazem presentes apresentam grande impacto nas suas propriedades físicas. Quanto menor a escala de observação maior será esse impacto.

A teoria dos campos médios, também conhecida como método de análise de elemento de volume representativo, consiste justamente na busca pela escala de observação para a qual as propriedades físicas efetivas de diferentes sub-amostras de uma mesma amostra material deixam de oscilar, convergindo para um comportamento isotrópico. Deste modo, é possível estimar-se as propriedades físicas efetivas do material em estudo a partir das propriedades médias avaliadas no EVR.

A não periodicidade da constituição micro-estrutural de materiais reais faz com que observações de sub-amostras em escalas muito pequenas de uma mesma amostra material possam apresentar propriedades físicas efetivas muito diferentes.

Nos casos de modelagens de microestruturas periódicas ideais também verifica-se a oscilação das propriedades físicas médias dos possíveis EVR's em função da região selecionada. A figura (5.1) ilustra essa situação.

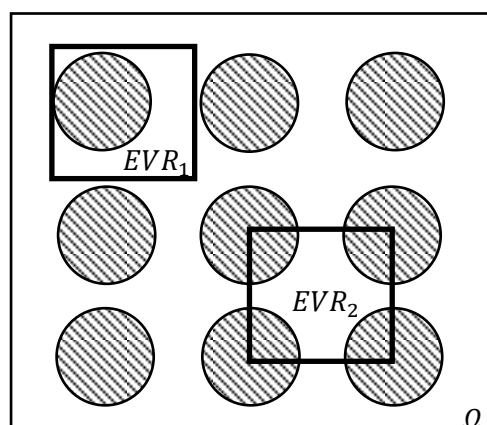


Figura 5.1. Possíveis EVR's de mesmo tamanho selecionados em diferentes regiões de uma microestrutura periódica idealizada. As regiões hachuradas representam inclusões de materiais com propriedades distintas da região não-hachurada.

Embora os EVR's apresentados na Fig. (5.1) apresentem as mesmas dimensões, as suas propriedades físicas médias serão bastante diferentes em razão da maneira como as inclusões encontram-se dispostas nestes.

Tomando ainda como exemplo o caso com distribuição uniforme de inclusões, o aumento da escala de observação é uma maneira de aumentar a quantidade de inclusões no interior do domínio de análise como exhibe a Fig (5.2). Neste caso, o aumento da quantidade de inclusões no interior do domínio e também a diminuição de seus tamanhos característicos em relação ao tamanho do próprio domínio acaba provocando uma redução da influência individual de cada inclusão na propriedade térmica efetiva do domínio como um todo, conseqüentemente, fazendo com que esta apresente um comportamento cada vez mais uniforme, mais estável. Na figura (5.2), o domínio de análise (a) apresenta uma única inclusão em seu interior, logo seu posicionamento apresenta grande influência na propriedade de condução de calor deste domínio. No caso do domínio contido no retângulo (b), consideravelmente maior que (a), o maior número de inclusões reduz a influência individual de cada inclusão na propriedade de condução de calor deste domínio como um todo. Este fenômeno se repete conforme é aumentada até que seja atingida a condição de EVR.

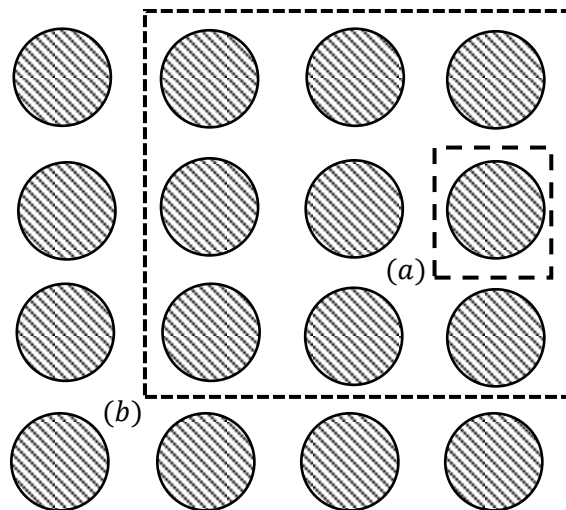


Figura 5.2. Aumento da escala de observação de um domínio com inclusões

Na análise com EVR, as propriedades médias efetivas do micro-volume selecionado são avaliadas em função de respostas no seu contorno. Essa característica contribui para uma boa compatibilidade desse método de análise com o MEC. Além disso, o tipo de discretização empregado no MEC permite a avaliação eficiente de microestruturas relativamente complexas.

Zarichta (2008) apresenta uma análise acerca da convergência da propriedade de condutividade térmica de um material poroso a partir da análise de EVR's gerados aleatoriamente. É realizada uma análise estatística para avaliar o comportamento desta propriedade em função da escala do EVR

empregado, verificando-se rápida convergência. Uma análise semelhante é exibida em Buroni, 2006, porém voltando-se para propriedades elásticas do material. Nas análises apresentadas nestes trabalhos, ao invés de alterar-se o comprimento característico do domínio em análise, são realizadas alterações da distribuição das inclusões, aumentando cada vez mais o número de inclusões, porém mantendo-se fixa a fração de área ocupada por estas. Como resultado do aumento do número de inclusões, o diâmetro de cada uma é reduzido, alcançando, assim, um efeito análogo ao da variação do comprimento característico. Este procedimento é retratado na Fig (5.3), no qual a fração de área ocupada pelas inclusões é mantida em 0,2, porém o número de inclusões é aumentado de 3 para 10 e, por fim, para 15.

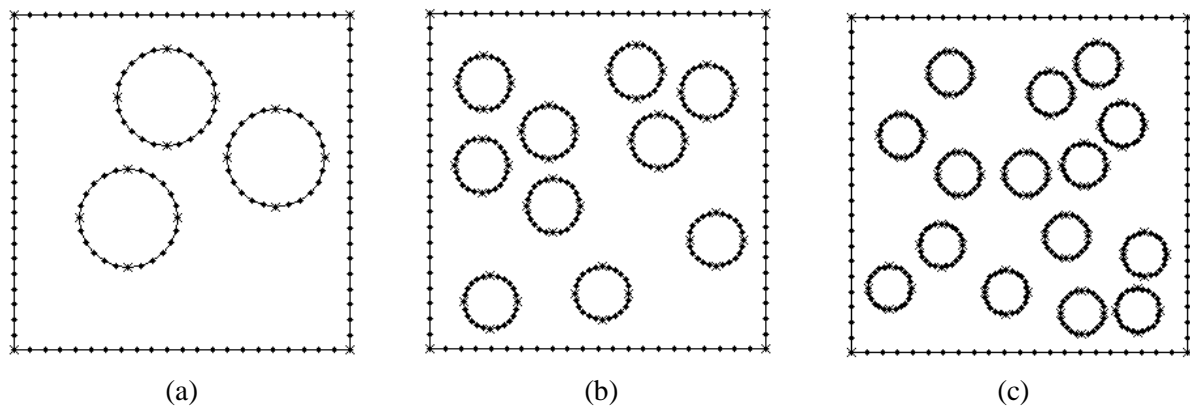


Figura 5.3. Procedimento para avaliação da propriedade de condução térmica efetiva e definição da condição de EVR alterando-se as características da distribuição das inclusões no interior do domínio.

O diâmetro “D” de cada uma das inclusões é calculado com base na Eq. (5.1), onde “ f_r ” é a fração de área ocupada pelas inclusões, “ A_d ” é a área total do domínio em análise e “ N_{inc} ” é o número de inclusões inseridas

$$D = \sqrt{2 \cdot f_r \cdot A_d / (\pi \cdot N_{inc})} \quad (5.1)$$

5.1 MODELAGEM NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DE UM EVR COM INCLUSÕES MATERIAIS.

5.1.1 Geração do domínio com inclusões em posições aleatórias

Os trabalhos de Zarichta (2008) e Buroni et al. (2008) apresentam modelagens numéricas de EVR's com distribuições de furos aleatórias para simular condições de porosidade do material. Nestes

trabalhos destacam-se dois pontos de controle principais que relacionam-se diretamente com as flutuações dos resultados obtidos: A quantidade de furos a serem inseridos e a porcentagem de área implementada, ou seja, a dimensão dos furos inseridos uma vez que todos apresentam as mesmas dimensões. Sendo assim, ao invés de variar a escala da área em estudo, variam-se esses dois fatores até que as propriedades efetivas em análise apresentassem um comportamento médio convergente com flutuações estáveis .

Para a análise com inclusões materiais, segue-se uma abordagem semelhante. Definidas as dimensões de largura e comprimento do domínio em estudo, foi elaborado um código computacional para geração de um número definido de inclusões ocupando uma área percentual também definida. O posicionamento das inclusões respeita os limites impostos pelas dimensões do domínio em análise, estando todas contidas em seu interior . É ainda imposta uma distância limite de segurança entre as inclusões e o contorno externo do domínio, preservando a sua configuração. Esse controle do afastamento das inclusões do contorno externo é realizado limitando-se a área sobre a qual o centro de inclusão pode ser criado, como exibido na Fig. (5.4). O perímetro da área de criação é calculado de acordo com o diâmetro das inclusões a serem inseridas e também com a distância de segurança definida.

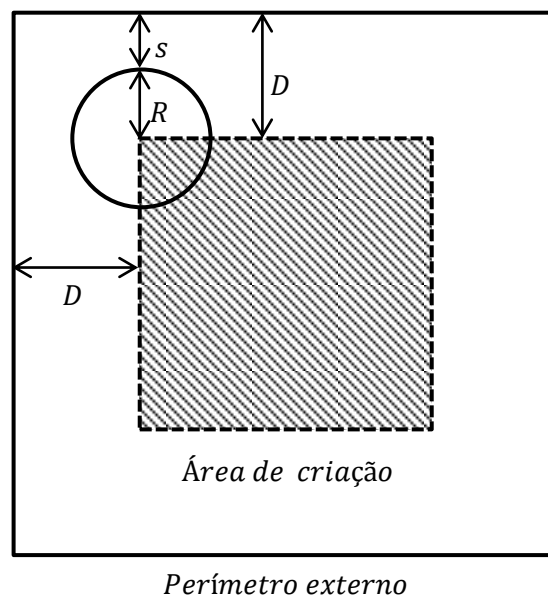


Figura 5.4. Definição da área de criação (região hachurada) sobre a qual podem ser gerados os centros das inclusões. A distância "D" representa a distância entre o perímetro externo e o perímetro da área de criação e é dado pela soma do raio da inclusão ("R") com a distância de segurança arbitrada ("s").

Definida a região de criação dos centros das inclusões, o próximo passo é a geração de um número definido de inclusões de maneira que não haja qualquer região de interseção entre duas ou mais

inclusões. Visando-se evitar essas interseções, fez-se necessário o estabelecimento de uma distância mínima entre os centros de cada inclusão que deve ser igual à soma dos raios de cada círculo mais uma distância de segurança para evitar o contato entre os contornos de cada inclusão. Sendo assim, sempre que um novo centro é criado, calcula-se, primeiramente a distância entre esse novo centro e os centros já existentes, dando origem a um vetor com todos os valores de distância para este centro. Caso o valor mínimo de distância armazenado neste vetor seja inferior à distância pré-estabelecida, este ponto deve ser descartado criando um novo em outra posição. Este processo é repetido até que sejam criadas todas as inclusões solicitadas. A figura (5.5) ilustra esse procedimento de aceitação ou rejeição do posicionamento de novas inclusões, enquanto a Fig. (5.6) exibe um diagrama do funcionamento da rotina de criação de inclusões com coordenadas aleatórias elaborada.

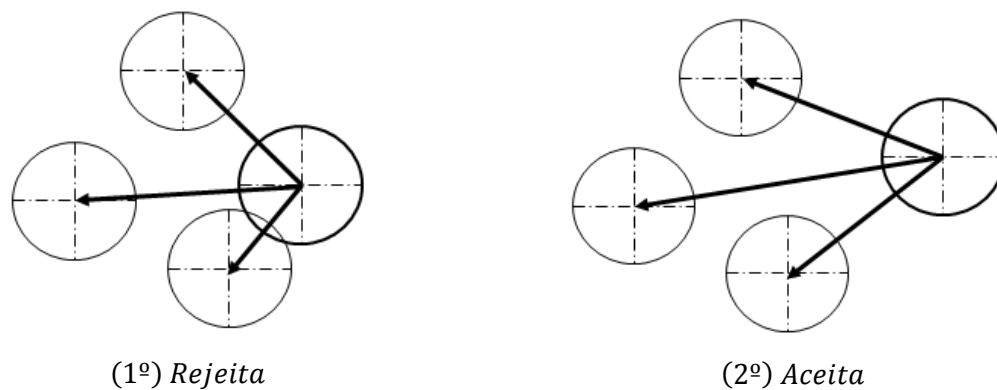


Figura 5.5. Processo de criação de inclusões com centros em coordenadas aleatórias de maneira a evitar interseções entre contornos.

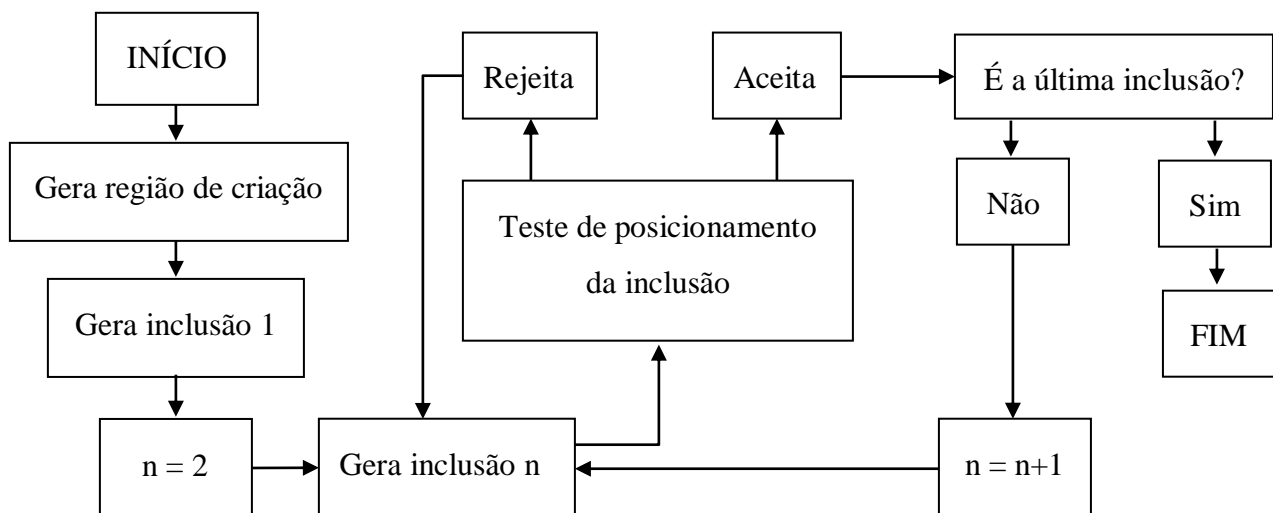


Figura 5.6. Diagrama de funcionamento da rotina de criação e posicionamento das inclusões.

Por fim, os domínios resultantes do código de geração aleatória são compatibilizadas com o código para cálculo de transferência de calor via MEC com formulação para domínios com inclusões. Nesta compatibilização, os dados gerados pelo código, que são meramente geométricos, são convertidos em dados de entrada para a geração da malha a ser utilizada no MEC. A figura (5.7) apresenta um exemplo de domínio resultante do código de geração já compatibilizado, isto é, com contornos já discretizados.

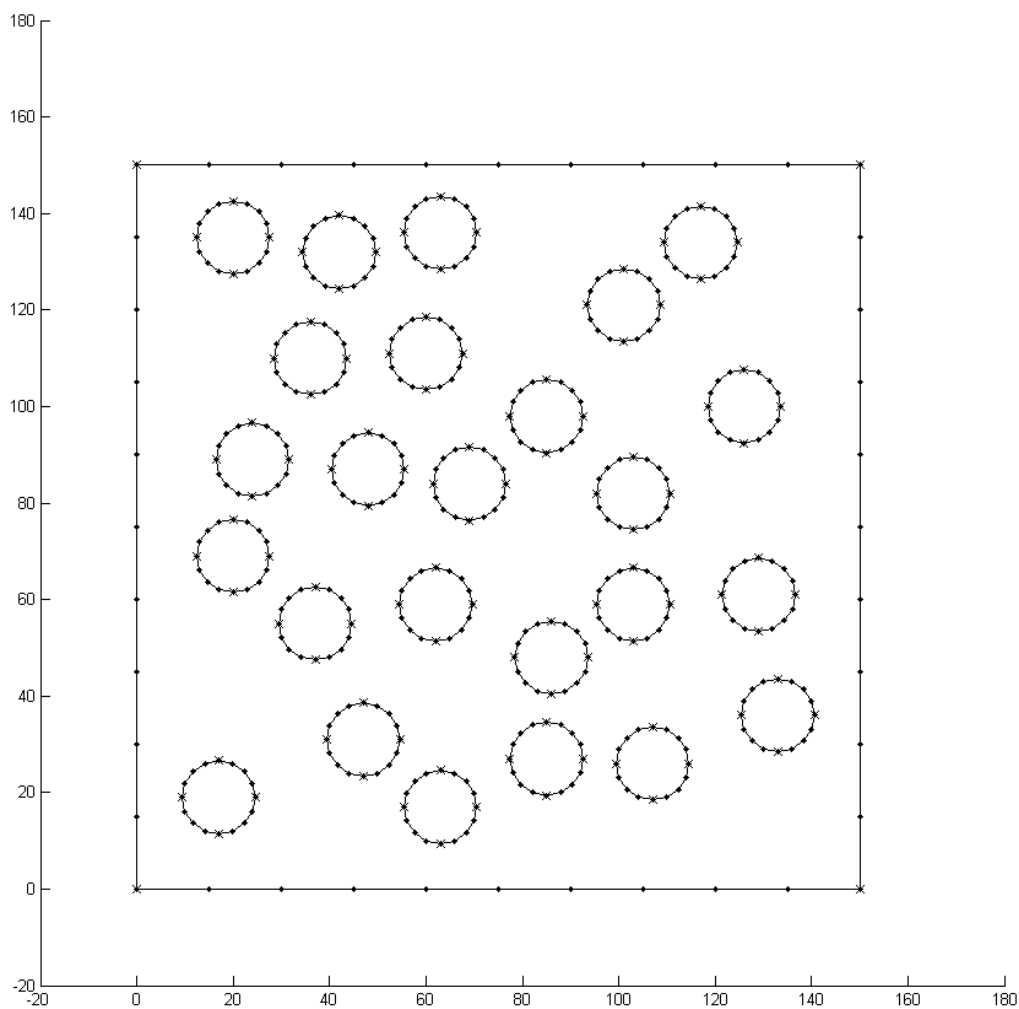


Figura 5.7. Exemplo de um dos domínios para análise gerados utilizando-se o código desenvolvido. Foram estipuladas 25 inclusões ocupando uma porcentagem de área equivalente a 20 % do domínio.

5.2 CONDUTIVIDADE TÉRMICA EFETIVA

Seguindo uma abordagem semelhante à empregada em Zarichta (2008), para determinação da condutividade térmica efetiva do corpo com inclusões em análise, considera-se o caso de condução de calor unidimensional alcançado impondo-se a condição de isolamento em duas arestas opostas, enquanto uma das restantes é aquecida de maneira uniforme e a outra é resfriada, também uniformemente, como exibido na Fig. (5.8).

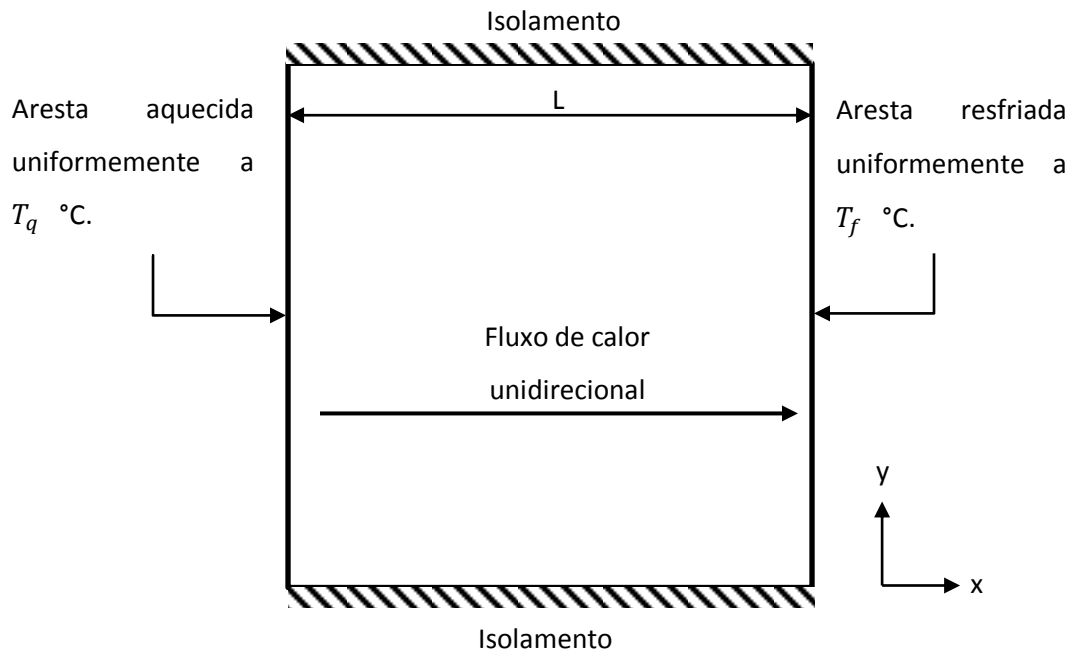


Figura 5.8. Caso de transferência de calor unidimensional. Assumindo-se a hipótese de isolamento perfeito nas arestas superior e inferior e, dado o gradiente de temperatura, é possível assumir-se um fluxo de calor unidimensional no sentido positivo do eixo “x”. A medida “L” representa a distância entre a face aquecida e a face resfriada.

Para este caso, é possível calcular-se a condutividade térmica efetiva (K_{eff}) na direção “x” através da Eq. (5.2), também utilizada em Zarichta (2008) e em Wang & Pan (2008).

$$K_{eff} = q \cdot L / (T_q - T_f) \quad (5.2)$$

Na qual, “q” corresponde ao fluxo de calor por unidade de área entre as arestas não isoladas, T_q e T_f são, respectivamente, as temperaturas das arestas aquecida e resfriada, e, por fim L é a distância entre essas duas arestas.

Esta equação, como posta, pressupõe uma condição de fluxo de calor constante em relação ao eixo y , o que deixa de ser verdade com a presença de inclusões de um material que pode ser mais ou menos condutor que o material que compõe o restante do domínio. Para levar em conta este fenômeno, calcula-se a condutividade térmica efetiva a partir do somatório da contribuição de cada elemento em uma das faces não isoladas. Sendo assim, assumindo-se uma discretização com elementos constantes, utiliza-se a Eq. (5.3).

$$K_{eff} = \sum_{i=1}^{NE} q_i \cdot \left(\frac{L}{NE} \right) / (T_q - T_f) \quad (5.3)$$

Onde “NE” corresponde ao número de elementos utilizados para discretizar a aresta em análise, e “ q_i ” representa o fluxo de calor no “ i -ésimo” elemento desta aresta calculado pelo MEC por unidade de área.

5.3 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS PARA O MEC

Com toda a implementação para geração de distribuições aleatórias de inclusões e cálculo do coeficiente de condutividade térmica efetiva preparados, o passo seguinte é a determinação dos parâmetros a serem utilizados no MEC para garantir-se uma análise correta e eficiente.

Nesta etapa é seguido o procedimento utilizado em Zarichta (2008) para determinação do número otimizado de elementos a serem empregados na discretização dos contornos de cada inclusão, assim como para determinação do número ideal de amostras com geração aleatória a serem coletadas para cada caso.

5.3.1 Número de elementos empregados

O número de elementos empregados, tanto para discretização do contorno externo do domínio quanto dos contornos das inclusões, tem direta relação com a qualidade dos resultados obtidos. Aumentando-se o número de elementos empregados, tem-se, juntamente com o possível aumento da qualidade, um aumento considerável do custo computacional da análise. E, conforme são inseridas mais inclusões, maiores capacidades computacionais e tempo de processamento são demandadas. Deste modo, é necessária a análise da relação de custo-benefício ao aumentar-se o número de elementos envolvidos para garantir a eficiência computacional da simulação

Para definição da quantidade ideal de elementos a serem empregados, utiliza-se o mesmo método proposto em Zarichta (2008) para uma placa com furos. Neste, é analisado o caso de uma placa quadrada com apenas uma inclusão circular em uma posição fixa, variando-se a quantidade de

elementos empregados tanto no contorno externo quanto no contorno da inclusão. O ponto principal consiste na verificação da influência das quantidades de elementos empregadas no resultado da condutividade térmica efetiva calculada.

5.3.1.1 Número de elementos nas inclusões

Dado o caso de uma placa quadrada com uma inclusão fixa, considera-se, o contorno externo discretizado com uma quantidade relativamente grande de elementos. Essa discretização mais fina visa garantir que o contorno externo não influencie no resultado da condutividade térmica efetiva. A discretização da inclusão, por sua vez, é realizada inicialmente com um único elemento por segmento, totalizando quatro para o contorno completo da inclusão. A placa é então submetida à condição apresentada na Fig (5.8), e a condutividade térmica efetiva calculada a partir da Eq. (5.2). O mesmo procedimento é repetido diversas vezes aumentando-se gradativamente o número de elementos em cada segmento da inclusão. Para esta etapa, assumiu-se o caso no qual a aresta aquecida encontra-se a 100°C, enquanto a resfriada a 0°C. Além disso, foi definida uma condutividade térmica de 100 W/m.K para a placa e 25 W/m.K para a inclusão. O diâmetro do furo foi mantido fixo de maneira que a inclusão ocupasse uma fração de 20% da área total do domínio e o número de elementos por aresta do contorno externo foi mantido em 50. A influência da discretização do contorno da inclusão sobre o resultado da condutividade térmica efetiva é visível através do gráfico apresentado na Fig (5.9), construído a partir dos dados apresentados na Tab. (5.1).

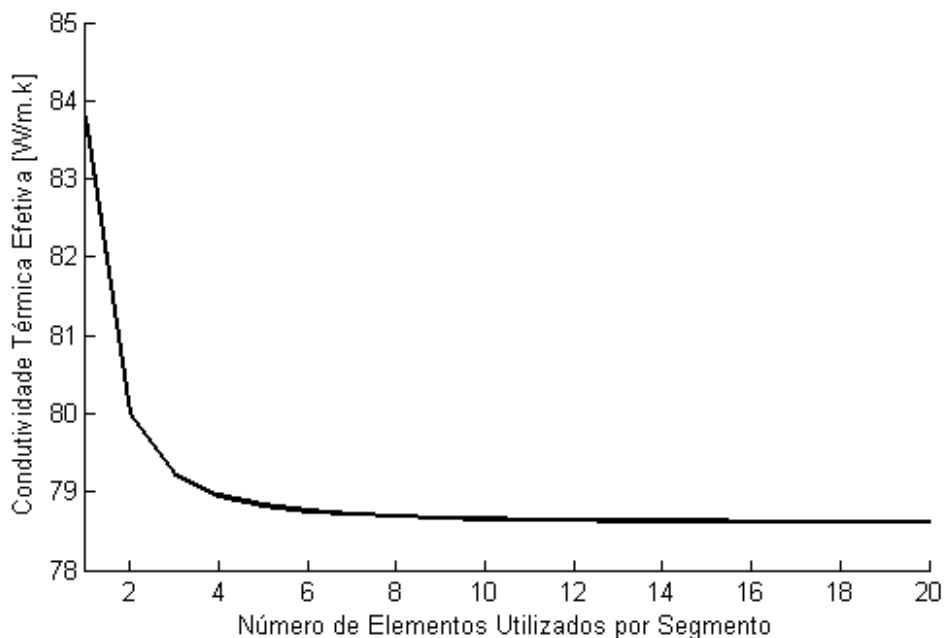


Figura 5.9. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva do domínio com uma única inclusão em função do número de elementos utilizados para discretização de cada um dos quatro segmentos desta inclusão.

Tabela 5.1. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva em função do número de elementos utilizados para discretização do contorno da inclusão.

Número de elementos por segmento	Condutividade térmica efetiva calculada [W/m.K]	Variação devido ao aumento do número de elementos [%]
1	83.7858	-
2	79.9913	4.5288
3	79.2217	0.9621
4	78.9487	0.3446
5	78.8218	0.1607
6	78.7528	0.0875
7	78.7111	0.0529
8	78.6841	0.0343
9	78.6655	0.0236
10	78.6522	0.0169
11	78.6424	0.0124
12	78.6350	0.0094
13	78.6291	0.0075
14	78.6245	0.0058
15	78.6208	0.0047
16	78.6178	0.0038
17	78.6152	0.0033
18	78.6131	0.0026
19	78.6113	0.0022

Da análise gráfica, nota-se que a partir de certo número de elementos, o ganho na qualidade do resultado passa a ser muito pequeno. Este ganho é apresentado na forma percentual na terceira coluna da Tab. (5.1). Desta, tem-se que para a partir de 6 elementos por segmento, o aumento do número de elementos empregados promove uma variação percentual do valor médio calculado para condutividade de ordem de apenas 0.05%. Diante disto, conclui-se que uma discretização mais refinada não representa uma variação significativa da condutividade térmica efetiva, e portanto, o número ideal de elementos a serem utilizados deve ser 6 por segmento, ou seja, 24 por inclusão.

5.3.1.2 Número de elementos no contorno externo

Definido o número de elementos a serem utilizados na discretização das inclusões, utiliza-se um procedimento análogo para definição do número de elementos a serem utilizados na discretização das arestas do contorno externo do domínio.

Para esta etapa, é utilizado o mesmo caso com uma única inclusão central apresentado no passo anterior. Porém, agora, o número de elementos para a discretização do contorno externo é mantido constante e igual ao definido como ideal enquanto varia-se a quantidade de elementos empregados

para discretização de cada uma das quatro arestas que compõem o contorno externo do domínio em análise. As condições de simulação são mantidas idênticas às impostas no passo anterior. O gráfico exibido na Fig. (5.8), construído a partir dos dados apresentados parcialmente na Tab. (5.2), evidencia a influência da discretização do contorno externo sobre o resultado da condutividade térmica efetiva calculada.

Como esperado, o comportamento apresentado pelo gráfico exibido na Fig. (5.10) apresenta um comportamento similar ao da Fig (5.9), indicando que a partir de certo número de elementos, o uso de uma discretização mais refinada implica em um ganho bastante reduzido, ou seja, em um baixo custo-benefício do ponto de vista computacional. Da análise da Tab. (5.2), define-se que uma análise com 22 elementos por aresta proporciona uma boa qualidade de resultado.

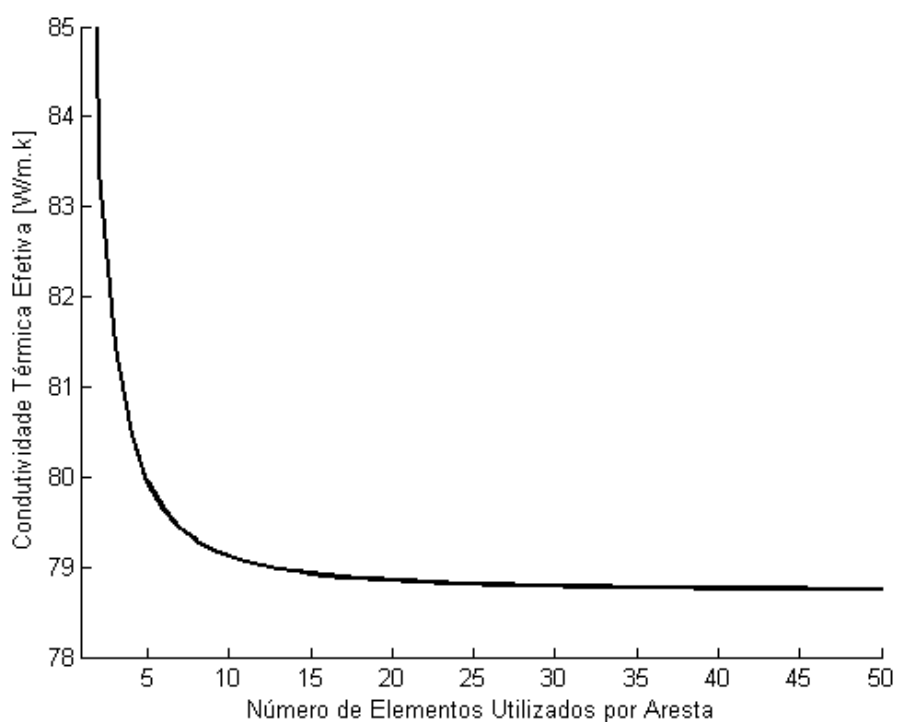


Figura 5.10. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva do domínio com uma única inclusão em função do número de elementos utilizados para discretização de cada aresta do contorno externo.

Tabela 5.2. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva em função do número de elementos utilizados para discretização do contorno externo do domínio.

Número de elementos por aresta	Condutividade térmica efetiva calculada [W/m.K]	Variação devido ao aumento do número de elementos [%]
1	95.4217	-
2	83.4125	12.585
3	81.4518	2.3506
4	80.4608	1.2166
5	79.9434	0.6430
6	79.6334	0.3877
7	79.4326	0.2521
8	79.2943	0.1741
9	79.1947	0.1256
10	79.1203	0.0939
11	79.0631	0.0722
12	79.0181	0.0569
13	78.9820	0.0456
14	78.9525	0.0373
15	78.9281	0.0309
16	78.9076	0.0259
17	78.8902	0.0220
18	78.8754	0.0187
19	78.8625	0.0163
20	78.8514	0.0140
21	78.8416	0.0124
22	78.8330	0.0109
23	78.8253	0.0097
24	78.8185	0.0086
25	78.8124	0.0077

5.3.2 Número de amostras coletadas

Uma amostra corresponde a uma simulação de uma condição definida de número de inclusões e fração de área por estas ocupada. Dada uma condição definida, devido ao posicionamento aleatório das inclusões, duas ou mais simulações dificilmente apresentarão resultados de condutividade térmica efetiva idênticos. Faz-se, então, necessário o uso de ferramentas estatísticas para a análise dos resultados de condutividade efetiva do conjunto de amostras simulado para uma mesma condição. Para a análise da distribuição de resultados do conjunto de amostras, são calculados o valor médio ($K_{médio}$) dos resultados e também o desvio padrão (σ) associado.

$$K_{médio} = \sum_{i=1}^n K_i / n \quad (5.4)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (K_i - K_m)^2 / (n - 1)} \quad (5.5)$$

Portanto, seguindo ainda o procedimento proposto em Zarichta (2008) e também a proposta de eficiência computacional, procura-se analisar a influência do número de amostras com geração aleatória de uma mesma condição (mesmo número de inclusões e mesma fração de área ocupada pelas inclusões) sobre os valores médios de condutividade térmica efetiva e seus respectivos desvios padrões associados. Por fim, a partir dos resultados desta análise, define-se um número ideal de amostras a serem tomadas para garantia de resultados consistentes.

Utilizando uma condição de simulação com uma fração de área ocupada pelas inclusões de 0,2, 10 inclusões geradas em coordenadas aleatórias, e um espaçamento mínimo entre os contornos das inclusões de 5 mm. A figura (5.11) exibe o gráfico, produzido a partir dos dados apresentados na Tab. (5.3), que exibe a variação dos valores médios de condutividade térmica efetiva e respectivos desvios padrões associados em função do número de amostras utilizados.

Da análise gráfica, e também dos dados apresentados na Tab. (5.3), percebe-se que, para o intervalo no qual foram utilizados entre 30 e 36 amostras simuladas com geração aleatória, os resultados médios calculados apresentam comportamento relativamente uniforme. Diante destes dados, assume-se que um conjunto amostral com 34 amostras é suficiente para a obtenção de resultados médios capazes de refletir a influência das condições de distribuição de inclusões impostas de maneira relativamente consistente.

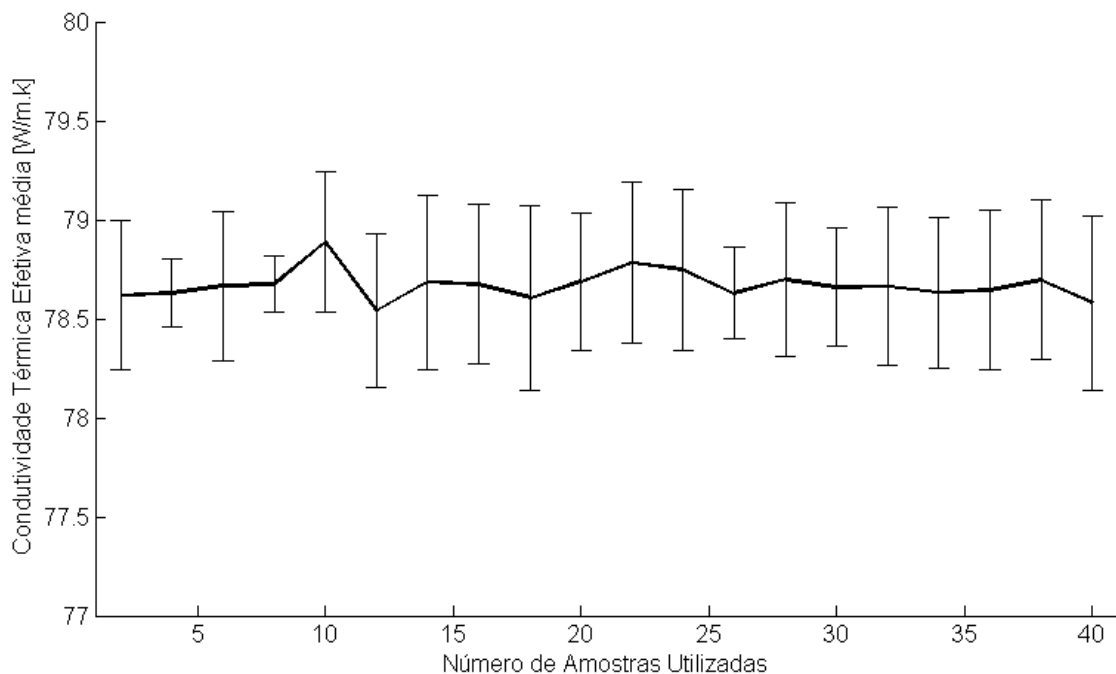


Figura 5.11. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de amostras com geração aleatória utilizadas para o cálculo.

Tabela 5.3. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de amostras simuladas.

Número de amostras	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Variação do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
2	78.6172	0.3766	-
4	78.6294	0.1696	0.0452
6	78.6651	0.3743	0.0110
8	78.6737	0.1419	0.2706
10	78.8867	0.3532	0.4383
12	78.5408	0.3892	0.1809
14	78.6829	0.4388	0.0113
16	78.6740	0.405	0.0880
18	78.6048	0.4679	0.1076
20	78.6894	0.3475	0.1170
22	78.7814	0.4071	0.0445
24	78.7464	0.4072	0.1492
26	78.6288	0.2305	0.0874
28	78.6976	0.3916	0.0482
30	78.6597	0.2967	0.0027
32	78.6618	0.3988	0.0394
34	78.6308	0.3833	0.0183
36	78.6452	0.4016	0.0651
38	78.6964	0.4040	0.1484

5.4 DETERMINAÇÃO DA CONDIÇÃO DE EVR

Definidos os parâmetros da parte relativa à análise pelo MEC e também para quantidade amostral para definição da condutividade térmica efetiva como uma propriedade média, o passo seguinte é a determinação da configuração de EVR em função da fração de área ocupada pelas inclusões. Para tal fixa-se a esta fração de área ocupada, variando-se a quantidade de inclusões inseridas no domínio. Para cada condição estabelecida de número de inclusões e fração de área ocupada, a propriedade de condutividade térmica efetiva é calculada a partir da média dos resultados de 34 simulações, como determinado no passo anterior, sendo também levado em consideração o respectivo desvio padrão associado.

Inicialmente, nas simulações é mantida a condição na qual o material das inclusões apresenta coeficiente de condutividade térmica de 25 W/m.k, enquanto o material do restante do domínio apresenta um coeficiente de condutividade térmica de 100 W/m.k. Visando aumentar a liberdade de posicionamento das inclusões no interior dos domínios gerados e, conseqüentemente, reduzir o tempo computacional requerido pela rotina de geração aleatória, foi adotada a distância mínima entre os

contornos das inclusões de 3mm. O mesmo limite foi utilizado para a distância entre os contornos das inclusões e os contornos externos do domínio.

A partir dos resultados de condutividade térmica efetiva obtidos para cada uma das diversas quantidades de inclusões utilizadas a uma dada fração de área constante, é realizada uma análise de convergência a fim de determinar-se a condição de EVR, a partir da qual a propriedade efetiva em questão apresenta um comportamento relativamente uniforme independente do aumento do número de inclusões presentes no domínio. A figura (5.12) apresenta o gráfico dos valores médios e desvios padrões associados em função do número de inclusões presentes para uma fração de área ocupada por inclusões igual a 0,2 em relação à área total do domínio. Este gráfico foi produzido a partir dos dados contidos na Tab. (5.4).

Da análise dos resultados apresentados na tabela e também do gráfico construído, nota-se que para pequenas quantidades de inclusões o resultado médio de condutividade térmica efetiva já apresenta pouca variação. Porém, esses valores médios para poucas inclusões encontram-se associados a grandes valores de desvios padrões, apontando para um grande intervalo de possibilidade. Conforme mais inclusões são inseridas, os valores de desvio padrão associados são cada vez menores. A partir de cerca de 37 inclusões inseridas, o desvio padrão associado passa a apresentar pouca variação diante do acréscimo de mais inclusões. Portanto, diante deste comportamento relativamente estabilizado, assume-se que é possível definir a configuração com 37 inclusões como EVR.

Este procedimento foi repetido utilizando as frações de área de 0,1, 0,15 e também de 0,25 em relação à área total do domínio. Os resultados para estes casos podem ser observados através dos gráficos apresentados nas Figs. (5.12), (5.13), (5.14) e (5.15) construídos a partir dos resultados contidos nas Tabs. (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) respectivamente.

Da análise destes três novos casos, percebe-se que a condição de EVR também é atingida quando utilizada uma quantidade de inclusões próxima a 37, confirmando a primeira hipótese assumida considerando a fração de área ocupada pelas inclusões igual a 0,2 da área total.

Em um novo passo, o mesmo procedimento é repetido porém invertendo-se os valores das constantes de condutividade térmica dos materiais envolvidos, isto é, as inclusões passam a possuir condutividade térmica igual a 100 W/m.K e o material que compõe o restante do domínio passa a possuir uma constante de condutividade térmica igual a 25 W/m.K. Este procedimento é também realizado para as mesmas frações de área ocupadas pela inclusões utilizada no caso anterior. As figuras (5.16), (5.17), (5.18) e (5.19) apresentam os gráficos construídos com base nos resultados contidos nas Tabs. (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11).

Por fim, em posse de todos os dados, é construído um gráfico (Fig. (5.20)) da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões envolvidas sendo utilizado para tal os valores encontrados nas condições de EVR com inclusões menos condutoras que o restante do domínio, e outro (Fig (5.21)) para a condição com as inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

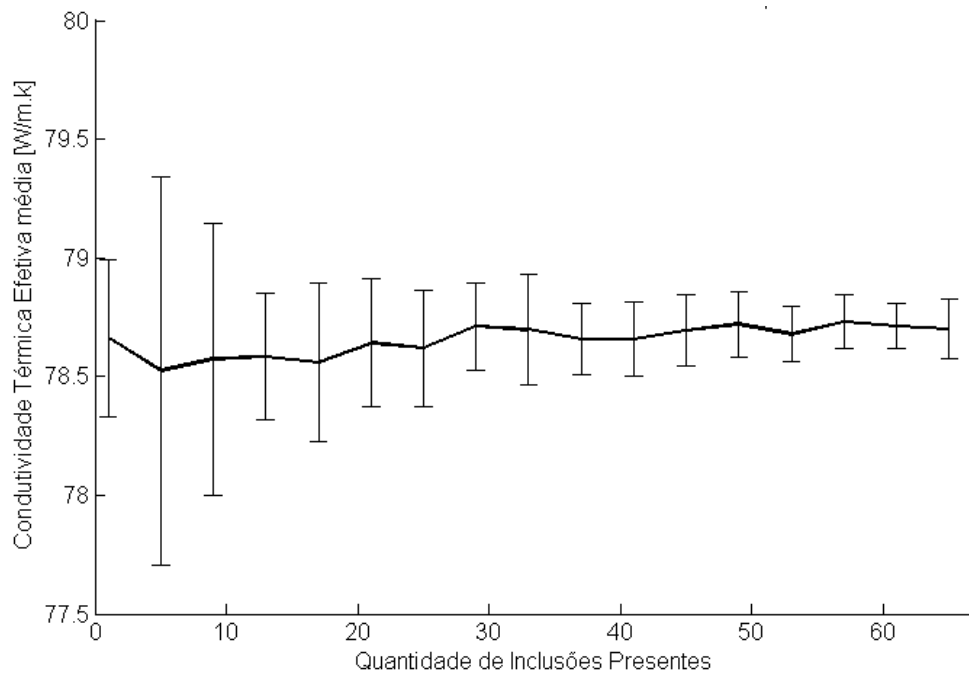


Figura 5.12. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 20% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.4. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,2 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Variação do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	78.6617	0.3321	-
5	78.5245	0.8164	0.1744
9	78.5733	0.5748	0.0621
13	78.5838	0.2660	0.0133
17	78.5593	0.3359	0.0310
21	78.6425	0.2717	0.1058
25	78.6183	0.2440	0.0306
29	78.7106	0.1858	0.1173
33	78.6978	0.2306	0.0162
37	78.6567	0.1484	0.0522
41	78.6560	0.1553	0.0009
45	78.6939	0.1507	0.0483
49	78.7198	0.1404	0.0328
53	78.6782	0.1168	0.0528
57	78.7306	0.1126	0.0665
61	78.7125	0.0962	0.0229
65	78.7000	0.1276	0.0158

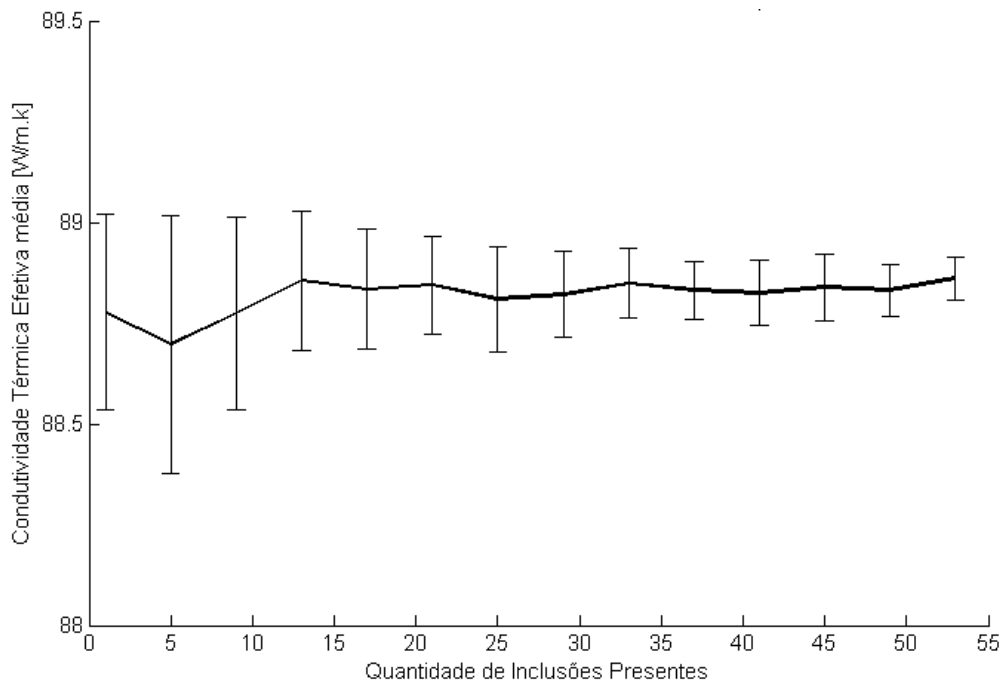


Figura 5.13. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 10% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.5. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,1 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	88.7771	0.2439	-
5	88.6974	0.3199	0.0897
9	88.7739	0.2385	0.0862
13	88.8558	0.1723	0.0922
17	88.8338	0.1480	0.0247
21	88.8447	0.1213	0.0122
25	88.8094	0.1318	0.0397
29	88.8212	0.1070	0.0132
33	88.8486	0.0864	0.0308
37	88.8313	0.0722	0.0194
41	88.8243	0.0808	0.0078
45	88.8388	0.0837	0.0483
49	88.8310	0.0635	0.0328
53	88.8606	0.0543	0.0528

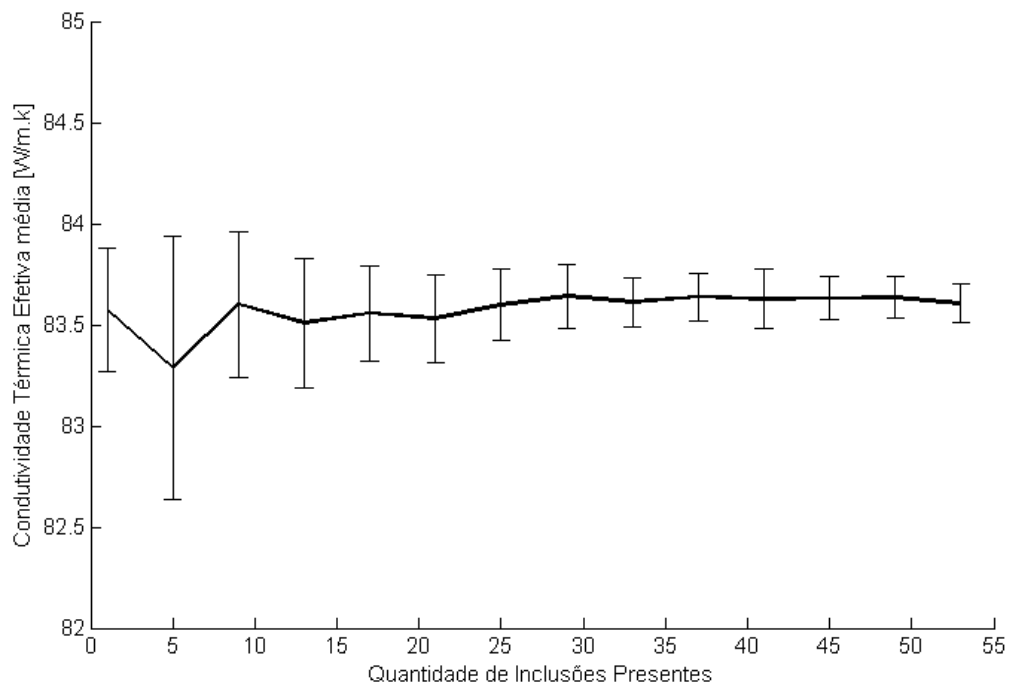


Figura 5.14. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 15% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.6. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,15 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	83.5745	0.3029	-
5	83.2865	0.6513	0.3446
9	83.5997	0.3619	0.3760
13	83.5108	0.3198	0.1063
17	83.5562	0.2351	0.0543
21	83.5315	0.2153	0.0295
25	83.5979	0.1743	0.0794
29	83.6401	0.1570	0.0504
33	83.6105	0.1215	0.0353
37	83.6387	0.1167	0.0337
41	83.6282	0.1475	0.0125
45	83.6319	0.1066	0.0044
49	83.6353	0.1050	0.0040
53	83.6037	0.0959	0.0377

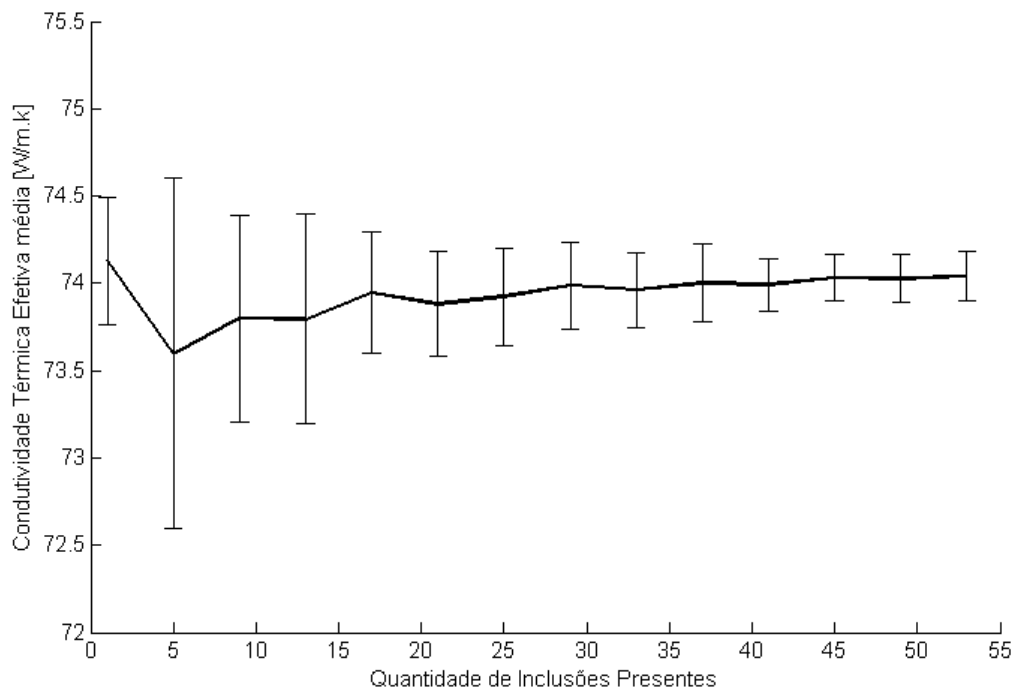


Figura 5.15. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 25% da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.7. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,25 da área total. Inclusões menos condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	74.1287	0.3649	-
5	73.5991	1.0004	0.7144
9	73.7978	0.5903	0.2699
13	73.7963	0.5971	0.0020
17	73.9465	0.3461	0.2035
21	73.8799	0.3004	0.0900
25	73.9232	0.2768	0.0586
29	73.9864	0.2458	0.0854
33	73.9618	0.2168	0.0332
37	74.0010	0.2211	0.0530
41	73.9930	0.1506	0.0108
45	74.0329	0.1309	0.0539
49	74.0260	0.1376	0.0093
53	74.0407	0.1433	0.0198

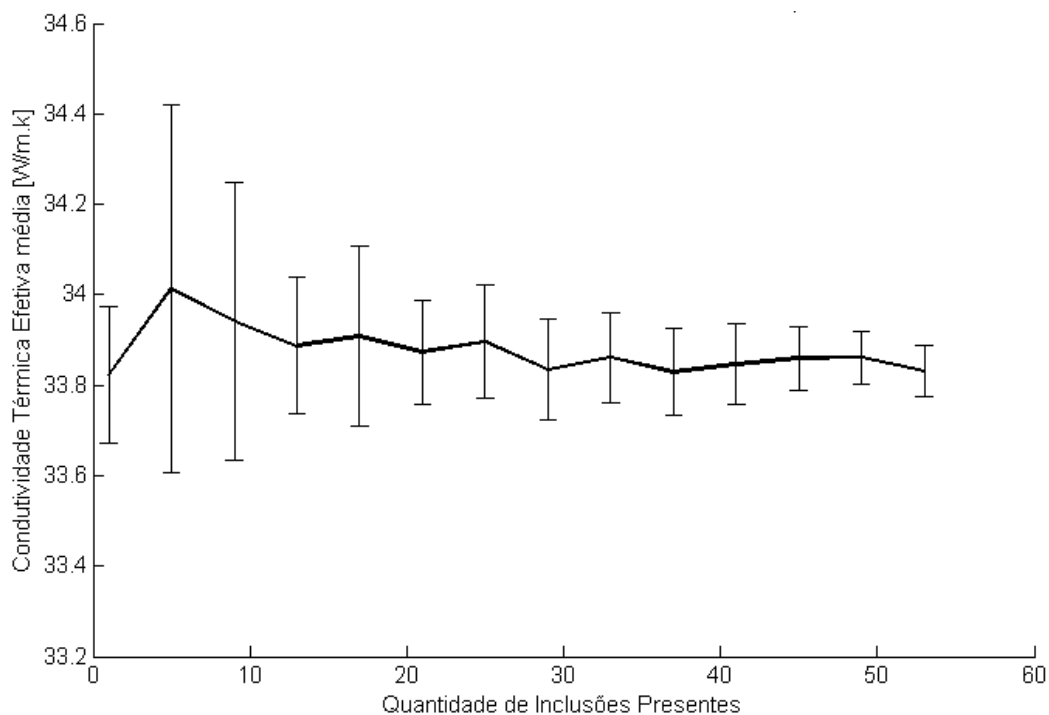


Figura 5.16. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 25% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.8. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,25 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Variação do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	33.8222	0.1506	-
5	34.0128	0.4079	0.5635
9	33.9418	0.3072	0.2087
13	33.8873	0.1505	0.1605
17	33.9078	0.1986	0.0604
21	33.8733	0.1156	0.1017
25	33.8965	0.1258	0.0684
29	33.8345	0.1117	0.1829
33	33.8619	0.0993	0.0809
37	33.8292	0.0955	0.0965
41	33.8462	0.0901	0.0502
45	33.8595	0.0712	0.0392
49	33.8613	0.0585	0.0053
53	33.8307	0.0567	0.0903

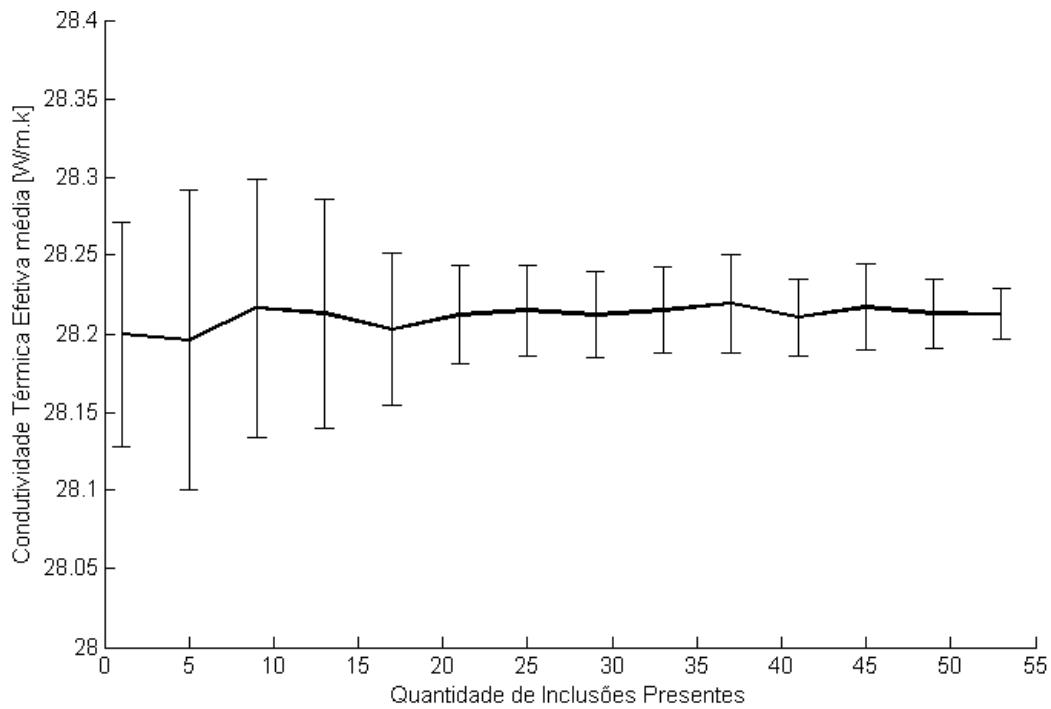


Figura 5.17. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 10% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.9. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,10 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	28.1995	0.0712	-
5	28.1958	0.0956	0.0131
9	28.2164	0.0825	0.0730
13	28.2130	0.0732	0.0120
17	28.2029	0.0484	0.0357
21	28.2121	0.0315	0.0326
25	28.2148	0.0288	0.0095
29	28.2121	0.0272	0.0095
33	28.2148	0.0275	0.0095
37	28.2192	0.0311	0.0155
41	28.2103	0.0249	0.0315
45	28.2169	0.0273	0.0233
49	28.2128	0.0220	0.0145
53	28.2124	0.0163	0.0014

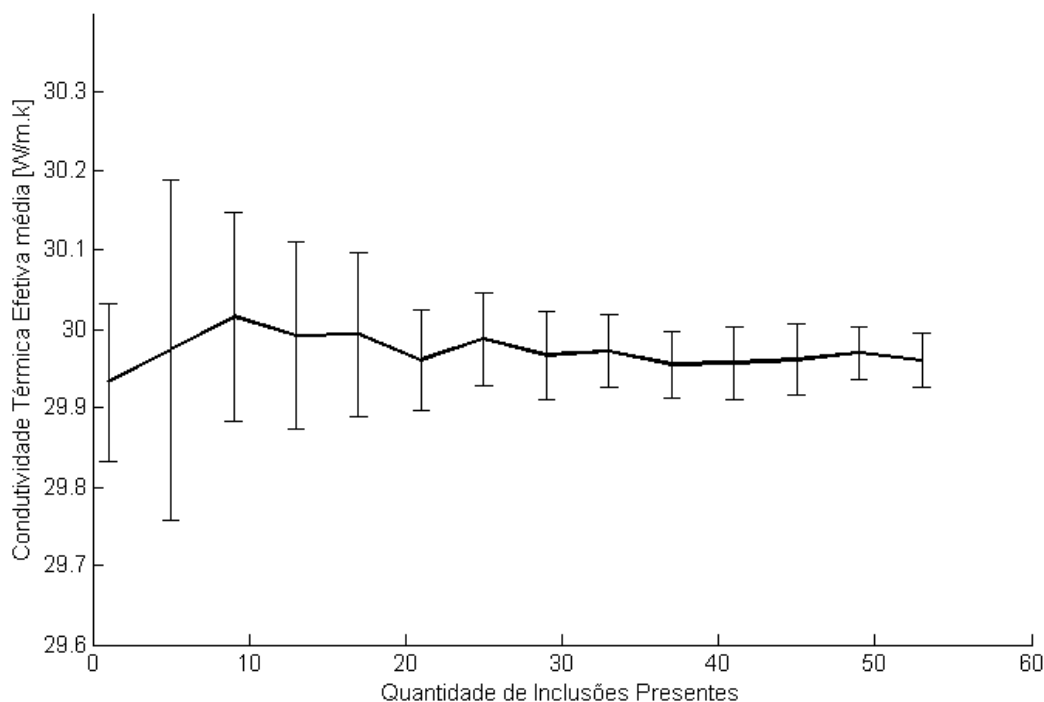


Figura 5.18. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 15% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.10. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,15 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	29.9331	0.1000	-
5	29.9742	0.2159	0.1373
9	30.0160	0.1323	0.1394
13	29.9915	0.1183	0.0816
17	29.9934	0.1044	0.0063
21	29.9615	0.0634	0.1063
25	29.9873	0.0597	0.0861
29	29.9671	0.0557	0.0673
33	29.9724	0.0467	0.0176
37	29.9554	0.0421	0.0567
41	29.9577	0.0461	0.0076
45	29.9612	0.0453	0.0116
49	29.9696	0.0342	0.0280
53	29.9608	0.0341	0.0293

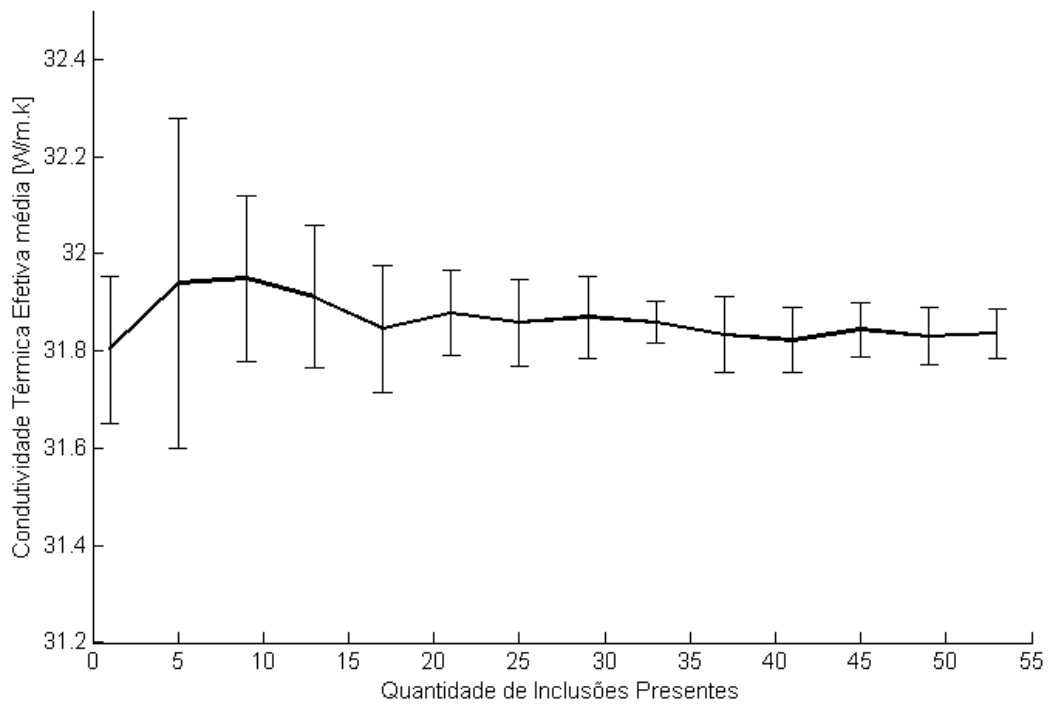


Figura 5.19. Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes no domínio em análise para fração de área ocupada por inclusões igual a 20% da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Tabela 5.11. Variação do resultado da condutividade térmica efetiva média em função do número de inclusões presentes para uma fração de área de 0,20 da área total. Inclusões mais condutoras que o restante do domínio.

Número de Inclusões	Condutividade térmica efetiva média [W/m.K]	Desvio padrão	Varição do resultado médio devido ao aumento do número de amostras [%]
1	31.8037	0.1514	-
5	31.9397	0.3391	0.4276
9	31.9495	0.1701	0.0306
13	31.9118	0.1467	0.1179
17	31.8461	0.1311	0.2058
21	31.8786	0.0884	0.1020
25	31.8580	0.0900	0.0646
29	31.8700	0.0848	0.0376
33	31.8593	0.0438	0.0335
37	31.8337	0.0776	0.0803
41	31.8222	0.0672	0.0361
45	31.8439	0.0555	0.0681
49	31.8300	0.0587	0.0436
53	31.8365	0.0505	0.0204

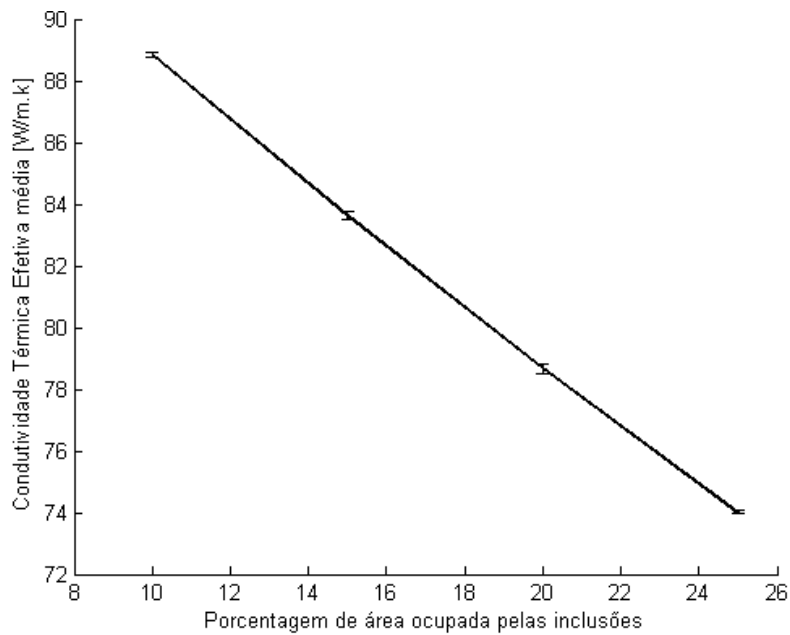


Figura 5.20 Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média, calculado supondo-se a condição de EVR com 37 inclusões, em função da área percentual ocupada pelas inclusões. Neste caso foram consideradas as inclusões com coeficiente de condutividade térmica igual a 25W/m.K , e o restante do domínio com 100W/m.K.

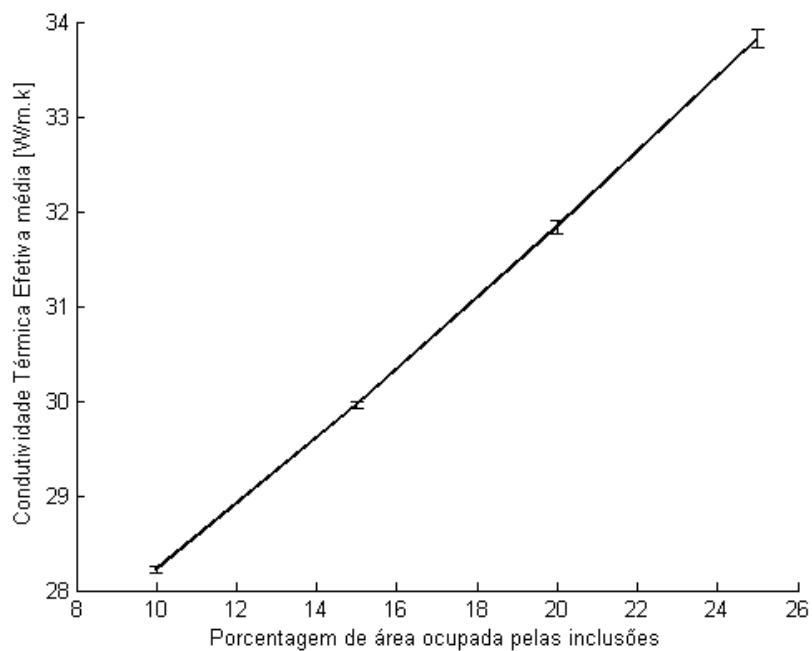


Figura 5.21 Gráfico do coeficiente de condutividade térmica efetiva média, calculado supondo-se a condição de EVR com 37 inclusões, em função da área percentual ocupada pelas inclusões. Neste caso foram consideradas as inclusões com coeficiente de condutividade térmica igual a 100W/m.K , e o restante do domínio com 25W/m.K.

6 ANÁLISE EXPERIMENTAL

Visando avaliar-se a consistência dos resultados obtidos por meio da metodologia de análise numérica proposta, foi elaborado um procedimento experimental para determinação do coeficiente de condutividade térmica efetiva de uma placa quadrada fabricada em aço SAE 1020 com uma distribuição aleatória de inclusões usinadas em Nylon 6,6. Isto se faz possível através de uma montagem experimental que se aproxima da condição de condução de calor unidirecional exibida na Fig. 5.8. No experimento, uma das laterais da placa é aquecida com auxílio de um resistência elétrica enquanto a face oposta a esta é resfriada por meio de contato com uma superfície mergulhada em água a temperatura de fusão. As demais faces da placa são isoladas para minimizar ao máximo trocas de calor com o meio, exceto por duas pequenas áreas da face, justamente nas regiões de contato com as superfícies de aquecimento e de resfriamento, que são mantidas expostas para que seja possível a tomada de temperatura nos contornos aquecido e resfriado da placa. Esta tomada de temperatura é realizada por meio de imagens termográficas. Levando-se em conta a potência dissipada pela resistência, as distribuições de temperatura nos contornos aquecido e resfriado e , é possível calcular a constante de condutividade térmica média da placa em análise a partir da Eq. (6.1). Nesta equação “ \dot{Q} ” é a potência dissipada pela resistência, “ A ” é a área da face lateral do corpo de prova, “ L ” é o comprimento característico, isto é, comprimento das faces laterais, e $T_{q_{\text{médio}}}$ e $T_{f_{\text{médio}}}$ são, respectivamente as temperaturas médias nas faces aquecida e resfriada.

$$K = \dot{Q} \cdot L / [(T_{q_{\text{médio}}} - T_{f_{\text{médio}}}) \cdot A] \quad (6.1)$$

6.1 MONTAGEM EXPERIMENTAL

Para viabilizar a execução do procedimento experimental como idealizado, fez-se necessária a fabricação de um aparato experimental desenvolvido especialmente para este trabalho.

6.1.1 Materiais e equipamentos utilizados

Os materiais e equipamentos utilizados para execução do experimento no laboratório foram os seguintes:

- 2 Corpos de prova quadrados (155 x 155 mm) usinados em chapa de aço SAE 1020 com 3/8”;
- 37 inclusões cilíndricas de Nylon 6,6 com 1/2 polegada de diâmetro e 3/8” de altura;
- 1 Resistência de cartucho de alta carga 220V marca Hertz com 3/8” de diâmetro;

- 1 Termostato digital Full Gauge modelo rgti 17 com termopar;
- 1 Câmera térmica FLUKE Ti 125;
- 1 Alicata amperímetro Hikari HA-266;
- 1 multímetro digital Hikari HM-1000;
- 1 lâmpada incandescente de 100W;
- 1 lâmpada incandescente de 60W;
- Pasta térmica Thermaltake TG-2;
- 1 Tarugo de alumínio com perfil quadrado (3/8" x 3/8");
- Fiação e plug para tomada;
- Placa de isopor para isolamento térmico;
- Recipiente de alumínio;
- Água com gelo;
- 1 Tijolo refratário;
- Tinta spray preto fosco.

6.1.2 Construção do equipamento de aquecimento

O sistema de aquecimento elaborado para o experimento utiliza como elemento principal uma resistência de cartucho de alta carga construída para 220V. Este tipo de resistência apresenta como principal característica o aquecimento uniforme, fundamental para a execução do experimento como idealizado. Por possuir capacidade para atingir temperaturas superiores a 400°C é necessária a sua montagem em série com um termostato, com o qual é possível controlar a temperatura de trabalho. O termostato empregado apresenta histerese configurável em até 0,1°C, isto é, no caso do aquecimento, quando a temperatura medida através do termopar deste equipamento indicar uma queda de 0,1°C abaixo da temperatura de trabalho programada, este ativará a resistência e a aquecerá novamente a extremidade da placa até a temperatura configurada. Para garantir a segurança do equipamento, entre o termostato e a resistência é instalado um interruptor.

Além do próprio termostato com termopar, são utilizados um multímetro digital para verificação da queda de potencial promovida pela resistência, e também um alicata amperímetro montado em um dos fios ligados na resistência. O amperímetro alicata permite uma leitura da corrente que passa pela resistência sem interferir diretamente no circuito e, juntamente com o outro multímetro digital empregado, permite calcular o valor da resistência em tempo real e também a potência dissipada na

forma de calor pela resistência. O modelo de resistência selecionado promove um grande aquecimento em um intervalo de tempo bastante curto. Diante disto, se faz necessária a adição de um dispositivo para dissipar parte da potência, limitando a taxa de aquecimento da resistência em contato com o corpo de prova. No caso optou-se pela utilização de duas lâmpadas incandescentes, uma de 100W e outra de 60W, montadas em paralelo para reduzir a corrente total que passa pela resistência de aquecimento. A figura (6.1) exibe um esquema do circuito construído para o elemento de aquecimento.

Para garantir uma melhor transferência de calor entre a resistência, que possui formato cilíndrico, e a placa a ser aquecida, cuja lateral é retangular, foi necessário fabricar uma peça, a partir do tarugo de alumínio, com geometria capaz de acomodar, de um lado a metade da circunferência da resistência, mantendo-se plana na face oposta. A montagem desta peça na superfície da resistência é realizada utilizando-se pasta térmica na região de interface visando uma melhor condução de calor. A figura (6.2) apresenta a montagem da resistência juntamente com a peça de alumínio usinada.

Em vista da capacidade de aquecimento da resistência empregada, utilizou-se um tijolo refratário, com elevada capacidade de isolamento, como estrutura de suporte. Na maior face do tijolo foi usinado um sulco, paralelo à aresta de maior comprimento, com largura e profundidade suficientes para acomodar o conjunto composto pela resistência e pela peça de alumínio, mantendo a face plana da peça que vai em contato com a lateral da placa a ser aquecida no mesmo plano que a superfície do tijolo, como mostra a Fig. (6.3).

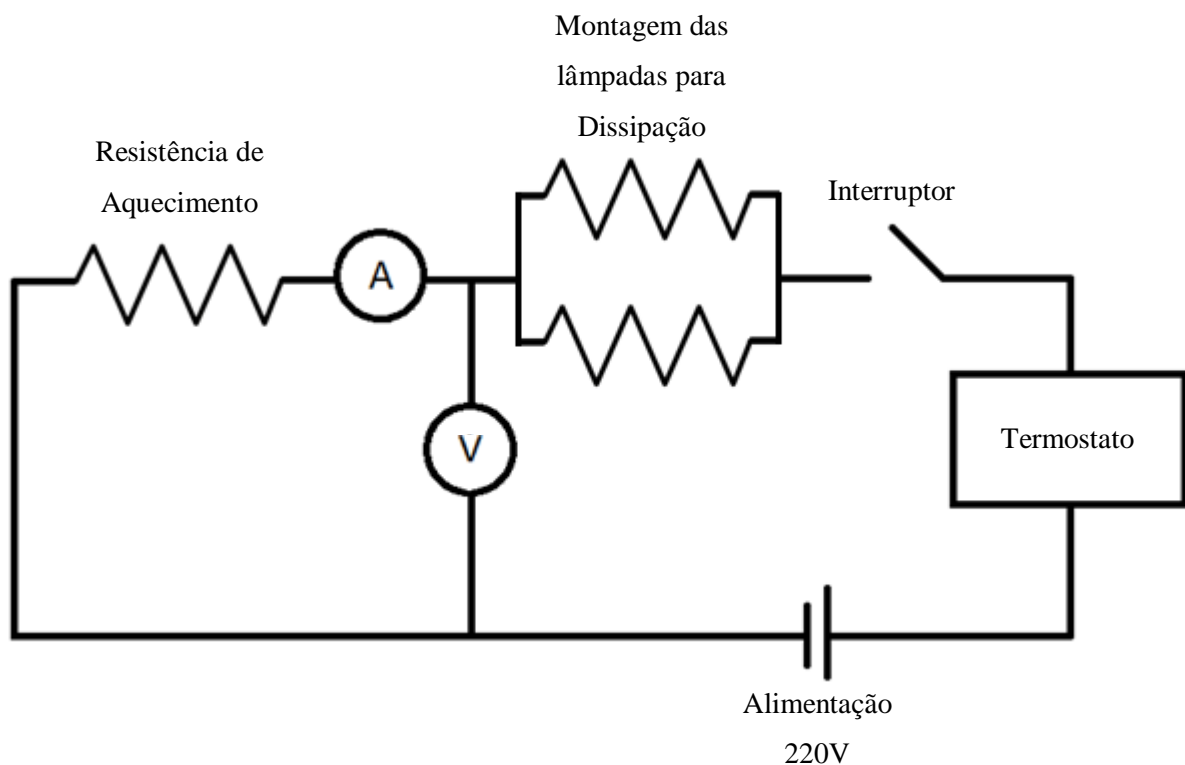


Figura 6.1. Esquema do circuito elaborado para o sistema de aquecimento do experimento.

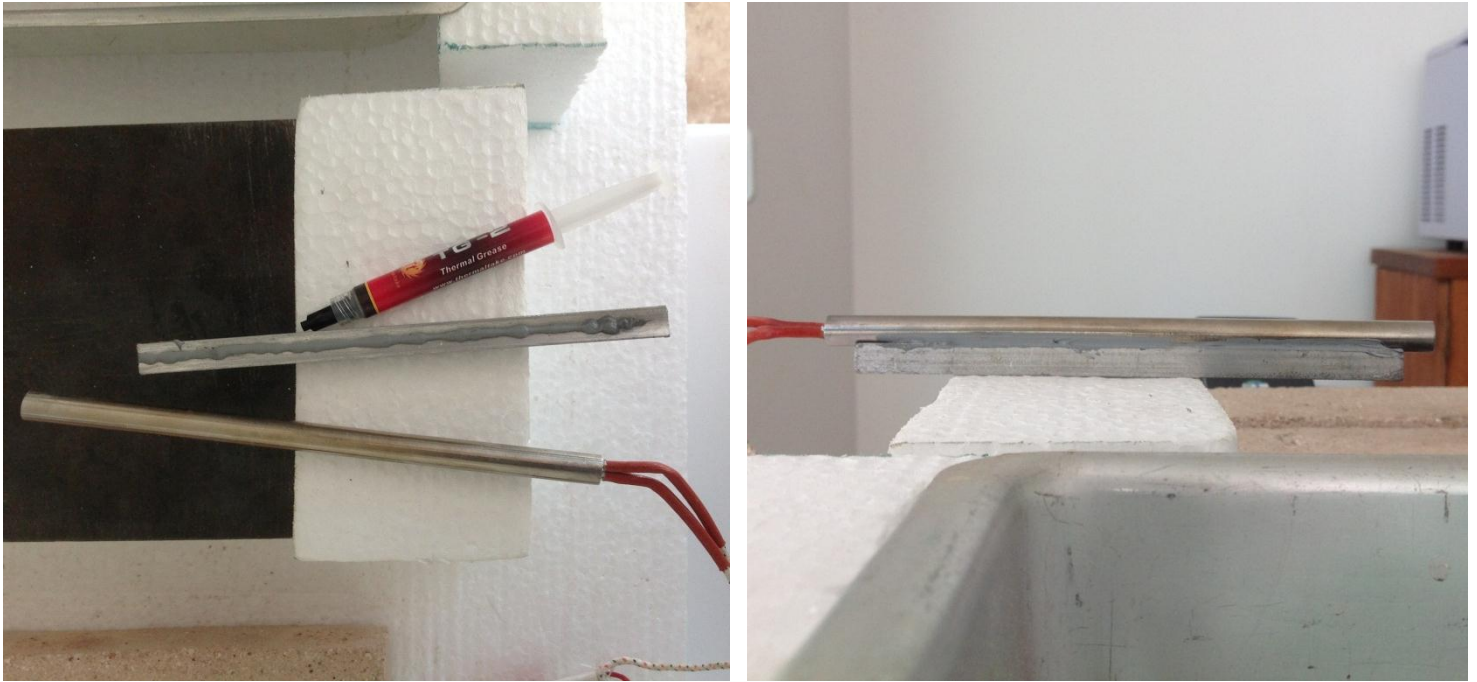


Figura 6.2. Montagem da resistência na peça usinada para aumentar a superfície de contato.

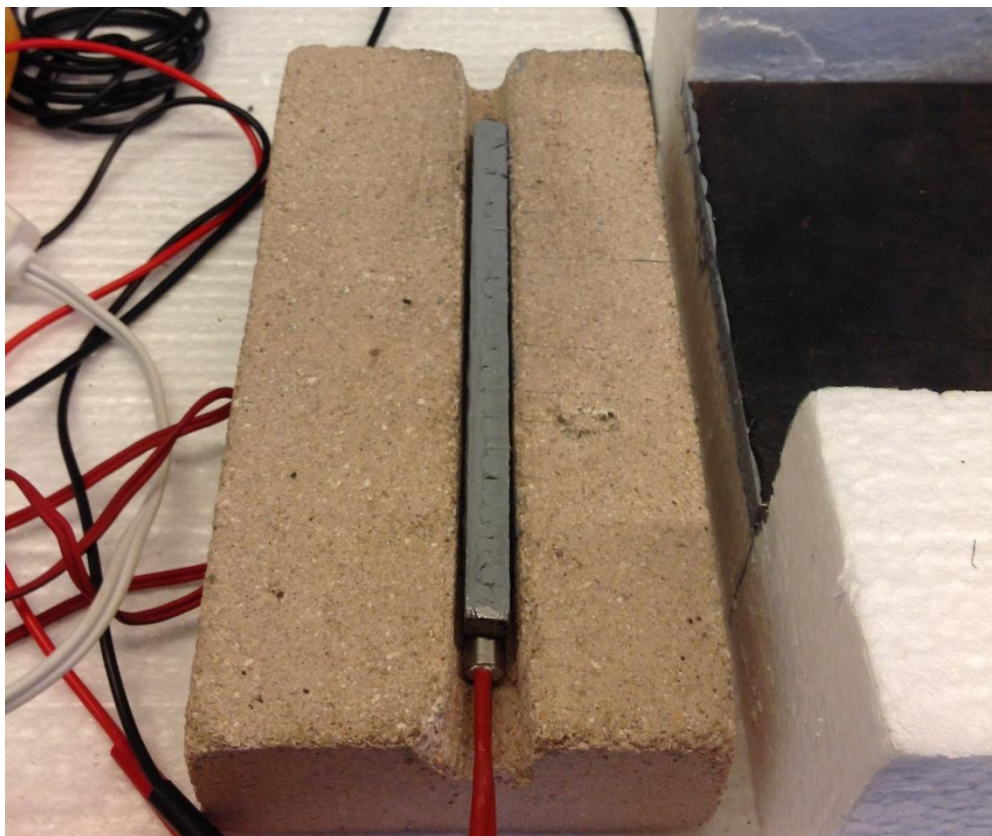


Figura 6.3. Montagem do conjunto no suporte refratário. Nesta foto, a superfície plana da peça de alumínio encontra-se com a pasta térmica aplicada.

6.1.3 Corpos de prova

Foram elaborados dois tipos de corpos de prova para esse experimento, ambos com a mesma geometria de contornos externos: quadrados com aproximadamente 155 mm de comprimento por 3/8” de espessura. O primeiro corpo de prova é constituído inteiramente em aço SAE 1020, que, por ser um material bastante comercial, apresenta propriedades termomecânicas bastante estudadas e previamente determinadas. Conforme Callister (2008), este tipo de aço apresenta coeficiente de condutividade térmica de aproximadamente 51,9 W/m.K.

Em uma segunda placa de aço SAE 1020, com as mesmas dimensões da anterior, são inseridos 37 furos passantes com 1/2” de diâmetro distribuídos aleatoriamente, de maneira a simular uma condição de EVR definida numericamente. Cada um dos furos é preenchido com um corpo cilíndrico com mesmo diâmetro dos furos e também 3/8” de altura. O nylon utilizado apresenta, de acordo com seu próprio fabricante, uma condutividade térmica de 0,23 W/m.K. A montagem de cada inclusão é realizada aplicando-se pasta térmica em toda a região de contato, melhorando a interface entre os materiais e promovendo uma melhor condução de calor. Essa configuração de distribuição de inclusões equivale a uma fração de área ocupada por inclusões de 0,20. Este corpo de prova visa justamente avaliar a metodologia de determinação numérica das propriedades médias efetivas de um EVR utilizando o MEC. A figura (6.4) exhibe fotos dos corpos de prova produzidos.

A superfície superior dos corpos de prova foi pintada com spray de tinta preto fosco para obtenção de uma superfície mais uniforme para tomada dos campos de temperatura via imagens termográficas

Para aproximar o experimento da condição de condução de calor unidimensional foi elaborado um isolamento em isopor para a face posterior da placa, bem como suas laterais. Também foi elaborado um isolamento para face superior da placa, visando reduzir o efeito convectivo atuante nesta região. Na face superior são deixados expostos apenas pequenas faixas nas regiões de interface das laterais aquecida e resfriada. Essas regiões expostas são utilizadas para obtenção dos campos de temperatura nos contornos aquecido e refrigerado dos corpos de prova com a câmera térmica. Na figura (6.5) é possível visualizar o corpo de prova já montado no isolamento proposto.

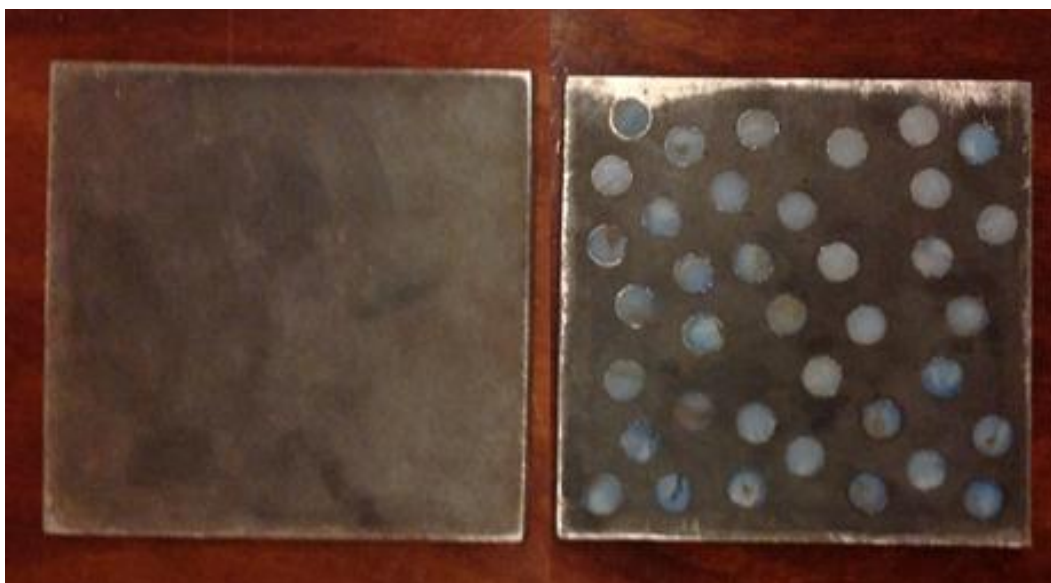


Figura 6.4. Corpos de prova fabricados: placa maciça de aço 1020 (esquerda) e com inclusões de nylon simulando a condição de EVR (direita).

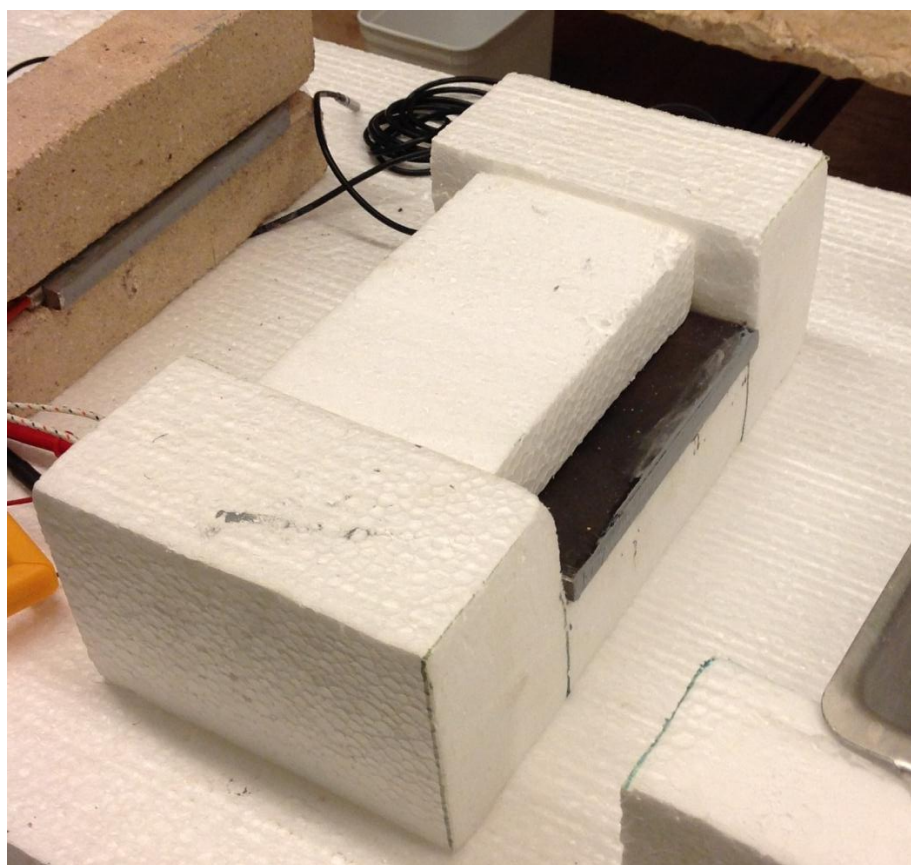


Figura 6.5. Montagem do corpo de prova no isolamento proposto.

6.1.3 Refrigeração

A refrigeração da lateral da placa oposta à aquecida é realizada basicamente por um recipiente de alumínio contendo água com gelo visando retirar uma maior quantidade de calor da placa em análise. O recipiente selecionado apresenta uma face lateral plana adequada para garantir uma boa superfície de contato com a lateral dos corpos de prova e, conseqüentemente, uma melhor condução de calor. O controle da temperatura neste recipiente é realizado por meio de um termômetro convencional. Este recipiente é montado sobre uma estrutura fabricada também em isopor para minimizar trocas de calor com o meio, aumentando o tempo útil do experimento.

6.1.4 Montagem completa do experimento

Construídas todas as partes principais do experimento, o passo seguinte é uni-los. Como base para todos equipamentos, foi utilizada uma placa de isopor de 100 mm de espessura aumentando ainda mais o isolamento em relação ao ambiente do laboratório. Tendo como base o corpo de prova montado em seu isolamento, o aparato de aquecimento deve ser acoplado a uma das faces livres da placa em análise. A face plana da peça de alumínio é responsável pela condução de calor entre a resistência e o corpo de prova e, para garantir uma condição de condução uniforme ao longo de toda aresta lateral, é utilizada também pasta térmica nesta interface. A face não isolada restante é, então, colocada em contato com a parede de alumínio do recipiente de refrigeração, também fazendo o uso da pasta térmica para garantia de uma melhor interface. Durante o procedimento experimental, o recipiente de refrigeração de alumínio deve ser cheio com água com gelo buscando-se uma maior transferência de calor com a parede do corpo de prova. A figura (6.6) exhibe a montagem completa do equipamento experimental desenvolvido indicando cada um dos seus elementos principais. Além dos elementos exibidos nesta figura, há também, a montagem elétrica com o termostato, o multímetro, o alicate amperímetro e as lâmpadas de dissipação, montados de acordo com o esquema exibido na Fig. (6.1).

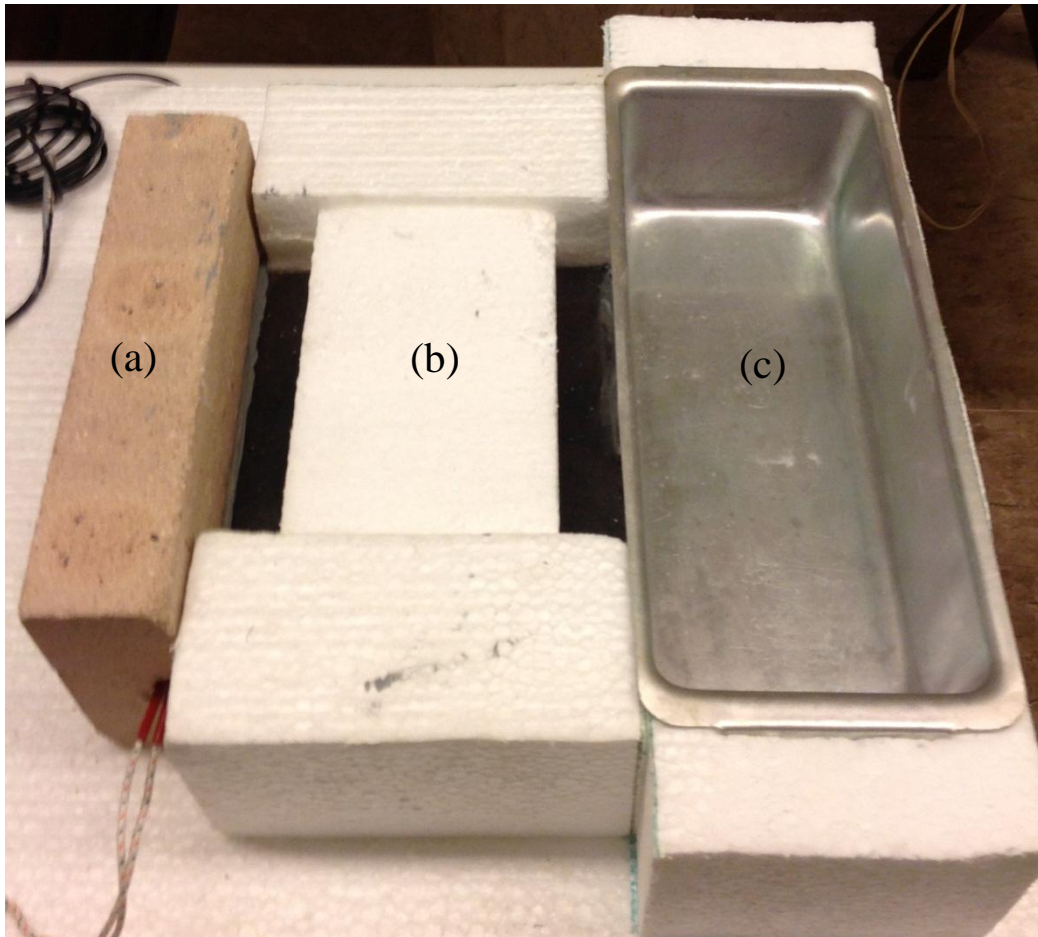


Figura 6.6. Montagem completa do equipamento experimental principal: (a) Equipamento para aquecimento; (b) Corpo de prova isolado; (c) Recipiente de resfriamento.

6.2 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Com o equipamento devidamente montado com o corpo de prova inteiramente de aço, inicialmente é colocado água com gelo no recipiente de alumínio em contato com a lateral da placa a ser resfriada. Em seguida liga-se o equipamento de aquecimento na tomada, tendo-se o cuidado para preservar o interruptor da resistência na posição desligada até que a configuração do termostato esteja concluída. Na programação do termostato é estabelecida uma temperatura de trabalho de 85°C com controle de histerese de $0,1^{\circ}\text{C}$. Esta configuração mantém a resistência acionada enquanto a temperatura for inferior a este valor estipulado. No aquecimento, em um primeiro momento, a temperatura da resistência tende a subir rapidamente. Porém, conforme aumenta-se a temperatura, ocorre uma redução gradual da taxa de aquecimento do corpo de prova até um ponto em que é atingido o comportamento de regime permanente. A temperatura deste ponto de equilíbrio está associada justamente com a capacidade do corpo de prova de conduzir calor, de modo que quanto mais condutor o material do corpo, menor é essa temperatura.

Atingida a condição de regime permanente, retira-se a cobertura isolante do corpo de prova e realizam-se filmagens com a câmera térmica para aquisição dos campos de temperatura nas regiões de interface de aquecimento e resfriamento. A tabela (6.1) exibe os dados relativos à corrente e à queda de potencial na resistência de aquecimento. Estes dados são utilizados para o cálculo da resistência após seu aquecimento e também da potência total dissipada na forma de calor, empregando-se as Eqs. (6.2) e (6.3).

$$V = R \cdot i \quad (6.2)$$

$$P = R \cdot i^2 \quad (6.3)$$

Nestas equações, “*V*” representa a queda de potencial promovida pela resistência, “*i*” é a corrente que passa pela resistência de aquecimento, “*R*” é o próprio valor da resistência elétrica e “*P*” é potência total dissipada nesta resistência.

Com exceção da parte de configuração do termostato, que permanece salva para os usos posteriores, o mesmo procedimento é repetido para o corpo de prova de aço com inclusões de nylon simulando a condição de EVR.

6.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS E ANÁLISES

A análise das imagens termográficas é realizada com auxílio do software SmartView 3.3. Este software é capaz de analisar a filmagem termográfica completa ou mesmo frames separados adquirindo valores pontuais de temperatura sobre todo o domínio registrado.

Antes de iniciar a análise dos campos de temperaturas coletados nas imagens termográficas, foi necessário realizar uma calibração da emissividade da câmera. Para este procedimento foi utilizada a temperatura coletada por meio do termopar do termostato, posicionado na região do contorno aquecido do corpo de prova, como medida padrão. Observando-se na imagem termográfica a distribuição de temperaturas na mesma região foi definida uma emissividade igual a 1,00. As figuras (6.7) e (6.9) exibem, respectivamente, as imagens termográficas já com as linhas para coleta das distribuições de temperaturas. As distribuições de temperaturas para cada linha traçada nas imagens termográficas são avaliadas nos gráficos apresentados nas Figs. (6.8) e (6.10).

Como foi utilizada a mesma montagem experimental para ambos os casos experimentados, foram obtidas leituras de corrente e queda de potencial iguais e constantes exibidas na Tab. (6.1). Apesar disso, devido à diferença de condutividade térmica, observou-se uma temperatura de estabilização de

70°C para o corpo de prova inteiramente em aço, enquanto que para o corpo de prova com inclusões essa temperatura chegou a 85°C, ambas tomadas junto à lateral aquecida das placas.

Por questão de estabilidade da filmagem, para o levantamento das distribuições de temperatura, é selecionado um único frame da filmagem termográfica. Sobre os contornos aquecido e resfriado da peça são traçadas linhas para aquisição de temperatura. Essas linhas são compostas por uma grande quantidade de pontos alinhados sobre os quais são tomados, individualmente, os dados de temperaturas. Com isso o software é capaz de fornecer com relativa precisão a distribuição de temperaturas ao longo das traçadas.

Inicialmente, é analisado o corpo de prova inteiramente de aço. Da análise das imagens termográficas para esse caso, tem-se uma distribuição de temperatura praticamente uniforme nas regiões de aquecimento e resfriamento. Este fato permite que, para as análises da condução de calor aqui realizadas, sejam utilizados os valores médios de temperatura nessas interfaces sem grandes perdas. A tabela (6.2) exhibe as temperaturas médias medidas nas interfaces aquecida e resfriada deste corpo de prova. Em posse destes dados, para cada corpo de prova é possível calcular a quantidade de calor conduzida empregando-se diretamente a Eq. (6.1). Para efeito de propagação de erros nas operações matemáticas realizadas a partir dos dados experimentais são seguidas as regras apresentadas no Anexo I.

A quantidade de calor conduzido obtida indica que, de toda a energia dissipada pela resistência na forma de calor, 80% é conduzida diretamente pelo corpo de prova e o restante, 20%, é dissipado no próprio tijolo refratário no qual a resistência é posicionada, justificando o seu leve aquecimento observado ao fim do experimento.

O passo seguinte consiste na análise do corpo de prova que simula a condição de EVR prevista numericamente. Assim como no corpo de prova anterior, são tomadas as distribuições de temperaturas nos contornos aquecido e resfriado. Neste caso, o objetivo é a determinação do coeficiente de condutividade térmica efetiva do EVR de aço com inclusões de nylon. Para tal, considera-se a quantidade de calor obtida da análise do corpo de prova inteiramente de aço, uma vez que foi utilizada a mesma montagem experimental com a resistência fornecendo calor a uma taxa constante. Com isso, e também em posse das distribuições de temperaturas nas regiões resfriada e aquecida, utiliza-se uma vez mais a Eq. (6.1), porém agora para uma determinação preliminar do coeficiente de condutividade térmica do EVR com base apenas nos valores médios de temperatura. Devido à não uniformidade da distribuição de temperaturas nos contornos aquecido e resfriado causada pela presença das inclusões, já é previsto um erro relativamente maior ao se empregar o uso apenas das temperaturas médias. Os dados e resultados obtidos relativos a este corpo de prova encontram-se exibidos na Tab. (6.3).

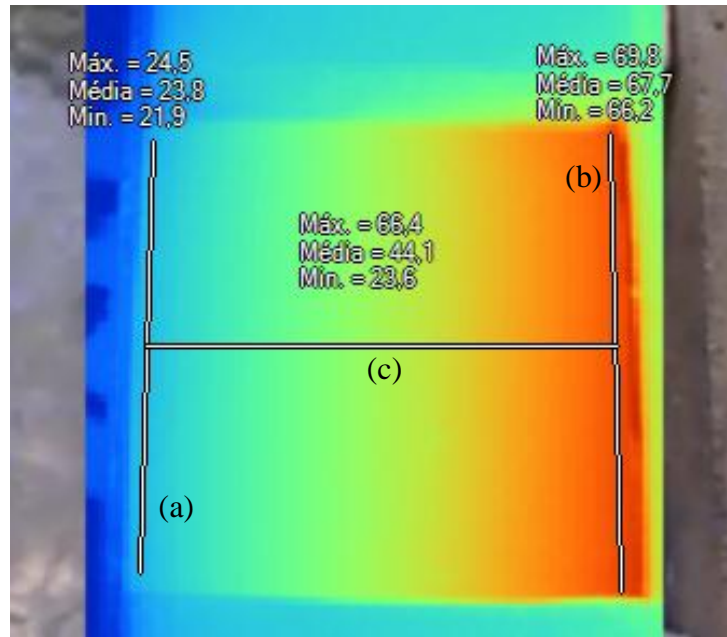


Figura 6.7. Imagem termográfica do corpo de prova inteiramente de aço.

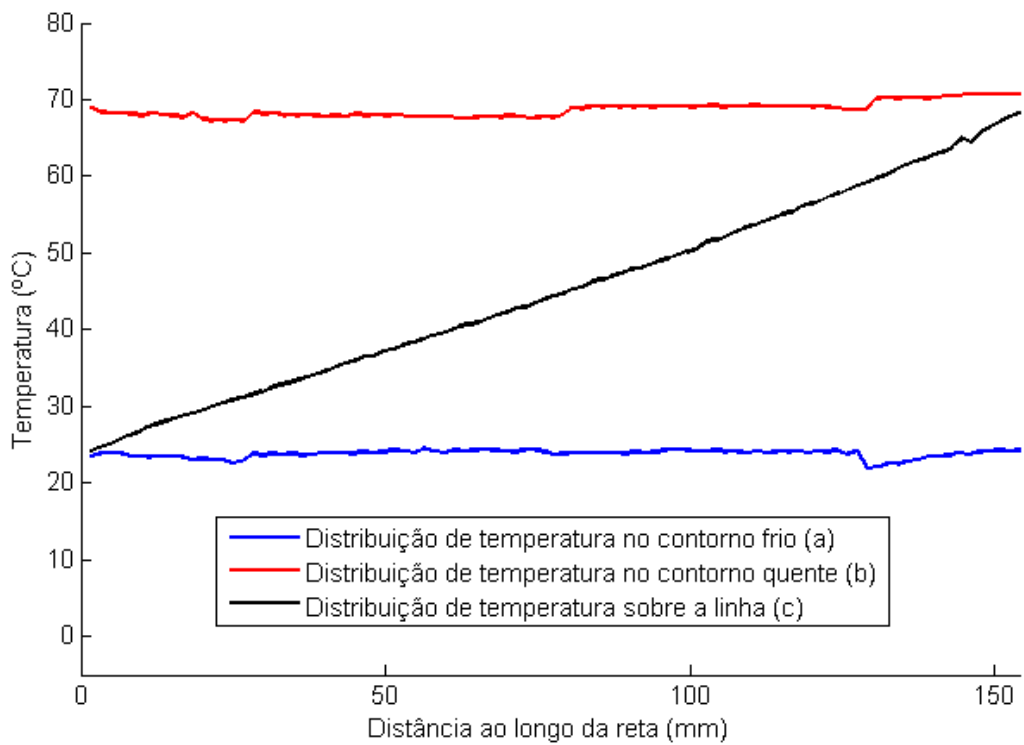


Figura 6.8. Análise gráfica da distribuição de temperaturas sobre as linhas traçadas na Fig. 6.7.

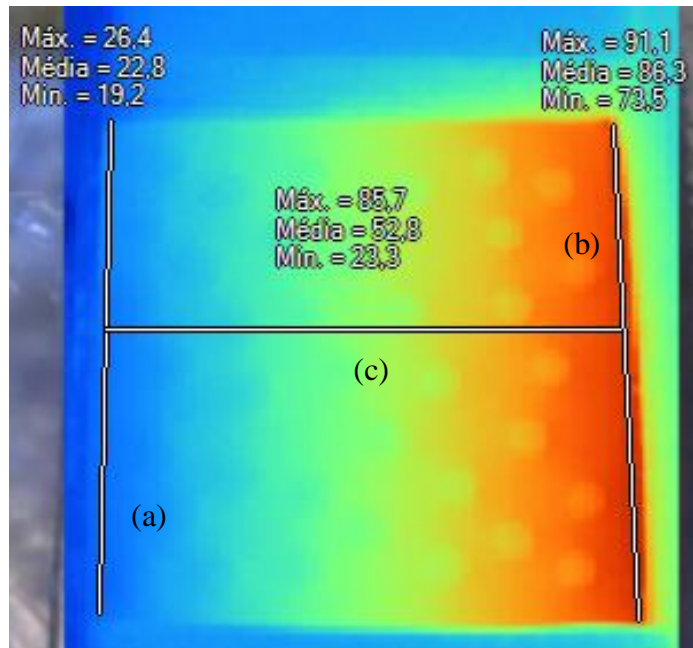


Figura 6.9. Imagem termográfica do corpo de prova de aço com inclusões de nylon.

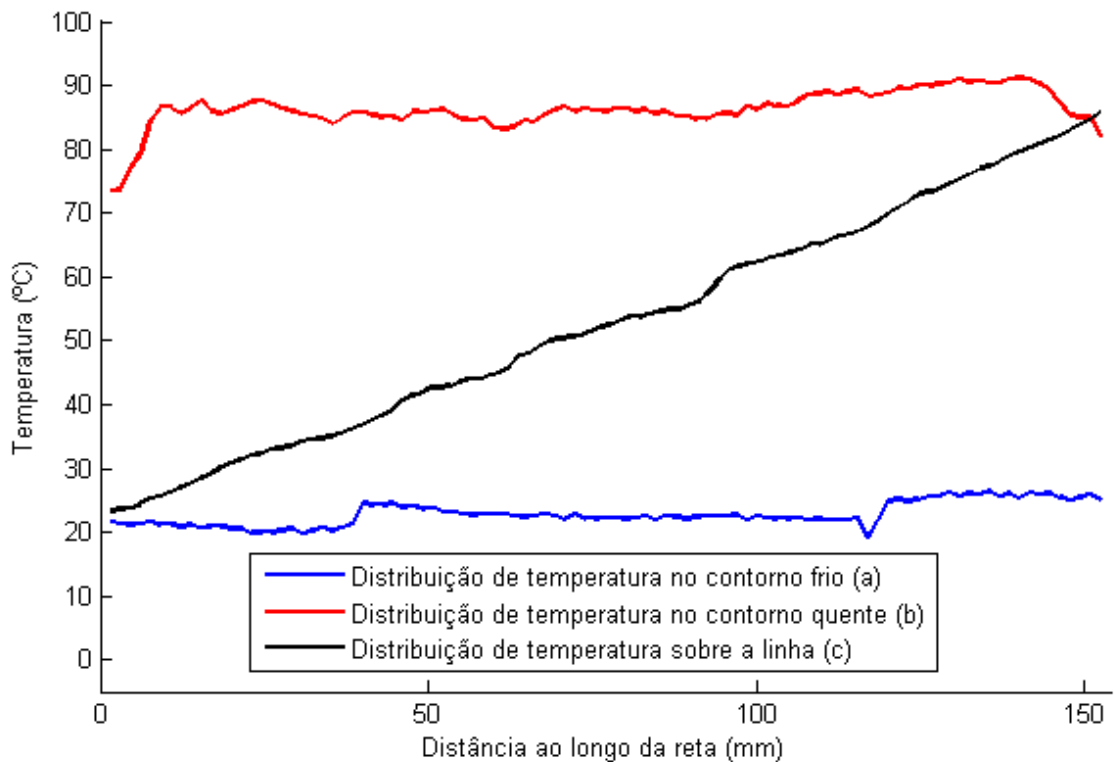


Figura 6.10. Análise gráfica da distribuição de temperaturas sobre as linhas traçadas na Fig. 6.7.

Tabela 6.1. Queda de potencial e corrente medidas na resistência durante o experimento.

Corrente [A]	$0,4 \pm 0,1$
Diferença de potencial [V]	$66,0 \pm 0,1$
Resistência calculada [Ω]	$165,0 \pm 0,3$
Potência total dissipada na forma de calor [W]	$26,4 \pm 0,7$

Tabela 6.2. Dados relativos ao corpo de prova inteiramente em aço SAE 1020.

Temperatura média na interface resfriada [$^{\circ}\text{C}$]	$23,8 \pm 1$
Temperatura média na interface aquecida [$^{\circ}\text{C}$]	$67,7 \pm 0,5$
Coefficiente teórico de condutividade térmica do material [W/m.K]	51,9
Quantidade calculada de calor conduzida [W]	$21,7 \pm 0,9$

Tabela 6.3. Dados relativos ao corpo de prova de aço SAE 1020 com inclusões de nylon.

Temperatura média na interface resfriada [$^{\circ}\text{C}$]	$23,7 \pm 2,0$
Temperatura média na interface aquecida [$^{\circ}\text{C}$]	$86,3 \pm 2,8$
Coefficiente teórico de condutividade térmica do aço [W/m.K]	51,9
Coefficiente teórico de condutividade térmica do Nylon [W/m.K]	0,23
Quantidade calculada de calor conduzida assumida [W]	$21,7 \pm 0,9$
Coefficiente de condutividade térmica efetiva do EVR calculado a partir dos resultado médios das distribuições de temperaturas [W/m.K]	$37,5 \pm 5,7$

6.4 VERIFICAÇÃO DA METODOLOGIA NUMÉRICA

Utilizando novamente a metodologia numérica baseada no MEC em conjunto com a rotina elaborada para geração e posicionamento aleatório de inclusões, é simulada a condição de EVR utilizada no experimento. São aplicadas as condições de contorno de aquecimento e refrigeração semelhantes às observadas no experimento e também são inseridos os valores de coeficientes de condutividade térmica reais dos materiais utilizados. Seguindo ainda a metodologia já apresentada, são realizadas 34 simulações com geração aleatória para a condição de 37 inclusões ocupando uma fração de área de 0,195 da área total, utilizada no corpo de prova experimental. Como condições de contorno, são aplicadas as temperaturas médias nos contornos aquecido e resfriado obtidas experimentalmente enquanto as demais faces permanecem na condição de isolamento perfeito.

Desta análise foi obtido um resultado para a condutividade média efetiva de $34,8 \pm 0,2$ W/m.K. Comparando-se o valor obtido numericamente ao valor exibido na Tab. (6.3), calculado baseado

apenas com base nas temperaturas médias, já é possível observar uma certa proximidade dos resultados. Tal fato já indica uma boa associação do método numérico ao experimental. Porém, com auxílio do software de análise das imagens termográficas é possível realizar-se uma análise mais precisa do ponto de vista experimental. Sobre os contornos aquecido e resfriado do corpo de prova, são traçadas duas linhas para coleta das distribuições de temperaturas compostas pela mesma quantidade de pontos. Considerando-se que o tipo de construção experimental elaborado permite uma distribuição uniforme de potência ao longo do contorno aquecido é possível utilizar-se uma metodologia para cálculo da condutividade térmica efetiva muito similar ao empregada na análise numérica, apresentada na Eq. (5.2), adicionando-se apenas o termo relativo à área da seção transversal. Assim como utilizado para o cálculo numérico do coeficiente de condutividade térmica efetiva, neste cálculo também é considerado um somatório das contribuições, porém agora ponto a ponto, o que, teoricamente, torna possível a obtenção de um resultado mais preciso. Cada uma das linhas tomadas nas regiões em questão, apresentadas nas Figs (6.9) e (6.10), é composta por 99 pontos distintos e equidistantes, dispostos como no esquema exibido na Fig. (6.11). Desta maneira o cálculo do coeficiente de condutividade térmica efetiva experimental é dado conforme a Eq. (6.4).

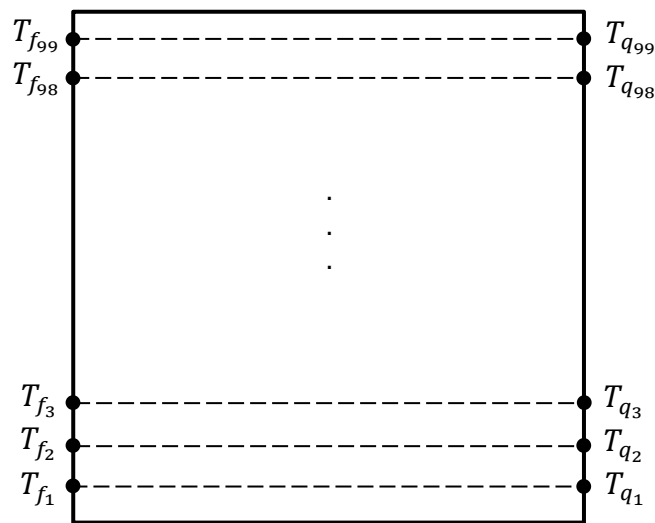


Figura 6.9. Esquema do posicionamento dos pontos de tomada de temperatura sobre os contornos aquecido e resfriado. As linhas tracejadas são paralelas entre si.

$$K_{exp} = \sum_{i=1}^{99} \frac{q}{A} \cdot \left(\frac{L}{99}\right) / (T_{q_i} - T_{f_i}) \quad (6.4)$$

Nesta equação, “ q ” representa o fluxo de calor total distribuído uniformemente por toda a aresta aquecida, “ A ” é seção transversal do corpo de prova, “ L ” é o comprimento da aresta do contorno do corpo de prova, e, por fim, “ T_{q_i} ” e “ T_{f_i} ” são, respectivamente, a temperatura no ponto “ i ” do contorno aquecido e também do contorno resfriado.

Aplicando a Eq. (6.4) aos dados coletados para o caso experimental do corpo de prova de aço com inclusões de nylon obteve-se um coeficiente de condutividade térmica efetiva de $35,9 \pm 4$ W/m.K. A tabela (6.4) mostra uma comparação dos resultados para coeficiente de condutividade térmica efetiva obtidos tanto numericamente quanto calculados com base nos dados experimentais.

Tabela 6.4. Comparação dos resultados para o coeficiente de condutividade térmica efetiva do EVR calculados a partir dos dados experimentais.

Metodologia empregada	Coeficiente de condutividade térmica efetiva [W/m.K]
Metodologia numérica baseada no MEC com formulação para sub-regiões.	$34,8 \pm 0,2$
Calculado com base apenas nos valores médios das distribuições de temperaturas obtidas experimentalmente (Eq. (6.1)).	$37,9 \pm 5,7$
Calculado com base nos valores pontuais das distribuições de temperaturas obtidas experimentalmente (Eq. (6.4)).	$35,9 \pm 4$

Desta comparação, verifica-se uma diferença de aproximadamente apenas 3% entre os valores obtidos numericamente e calculado a partir dos valores pontuais das distribuições de temperatura observadas experimentalmente. Esta pequena diferença dos resultados evidencia o bom desempenho da metodologia numérica baseada no MEC, com formulação para sub-regiões, assim como do procedimento experimental elaborado.

Comparando-se os dois valores de condutividade térmica efetiva calculados a partir dos dados experimentais, verifica-se que a utilização apenas dos valores médios acarreta em uma perda de informação considerável, uma vez que as distribuições de temperaturas observadas no experimento com o corpo de prova com inclusões apresentam comportamento bastante irregular e não uniforme, diferentemente das observadas no caso do corpo de prova inteiramente de aço. A utilização dos valores de temperatura tomados ponto a ponto preservam esse comportamento não uniforme, fornecendo, como observado, resultados mais consistentes.

7 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve seu início na análise numérica do problema de condução de calor em materiais com distribuições aleatórias de inclusões em seu domínio. O modelamento numérico foi realizado utilizando-se o MEC com formulação para sub-regiões. As inclusões foram implementadas através do desenvolvimento de uma subrotina responsável pela geração aleatória destas, as quais possuíam propriedades de condutividade térmica distintas da matriz. Foram analisados dois parâmetros fundamentais acerca das inclusões: a sua quantidade e também a sua concentração, isto é, a fração de área do domínio total ocupada pelas inclusões. Para cada configuração de parâmetros utilizada, foram realizadas diversas simulações a fim de avaliar o efeito do posicionamento aleatório das inclusões nos resultados médios de condutividade térmica efetiva e também nos desvios padrões associados.

A partir destes resultados foram traçados os gráficos de condutividade térmica efetiva em função do número de inclusões inseridas, exibidos nas Figs. (5.12) a (5.19). Das análises de convergência destes gráficos, verificou-se que a condição de EVR é atingida a partir de cerca de 37 inclusões, independente da fração de área por estas ocupada.

Para verificação da metodologia numérica proposta, foi elaborado um procedimento experimental capaz de reproduzir a mesma condição de calor simulada numericamente. Neste experimento, foram analisados dois corpos de prova: um maciço em aço SAE 1020 e outro, também em aço, porém com 37 inclusões de nylon simulando a condição de EVR. O primeiro corpo de prova foi empregado para determinação da quantidade de calor conduzida em regime permanente, uma vez que seu coeficiente de condutividade térmica é conhecido da bibliografia. Os campos de temperatura dos corpos de prova foram obtidos a partir da análise de imagens termográficas adquiridas durante o procedimento experimental. A partir das análises das imagens termográficas foi possível determinar o coeficiente de condutividade térmica efetiva para o corpo de prova com inclusões.

De maneira preliminar, foi realizado um primeiro cálculo a partir apenas dos valores médios das distribuições de temperaturas nos contornos aquecido e resfriado do corpo de prova com inclusões, resultando em um valor de $37,5 \pm 5,7$ W/m.K. Devido ao comportamento pouco uniforme das curvas de distribuição de temperatura nestes contornos, o uso apenas das temperaturas médias resulta em uma perda de informação e conseqüente aumento no erro. Diante disto, foi proposta uma análise realizada ponto-a-ponto com a qual obteve-se um resultado de $35,9 \pm 4$ W/m.K, teoricamente mais preciso que o anterior. Simulando-se numericamente a condição retratada experimentalmente, na condição de EVR foi obtido um coeficiente de condutividade térmica de $34,8 \pm 0,2$ W/m.K. Ao comparar-se o resultado médio de $34,8$ W/m.K, obtido numericamente, ao de $35,9$ W/m.K, calculado a partir dos resultados experimentais, foi possível observar que houve uma diferença de apenas 3%, indicando um desempenho satisfatório da metodologia numérica proposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bialecki, R.A., Ostrowski, Z., Kassab, A. J., Yin, Q., Sciubba, E., 2002, “Coupling BEM, FEM and analytic solutions in steady-state potential problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 597-611.
- Braga, L.M., 2012, “O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor”, *Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Ciências Mecânicas*, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília.
- Buroni, F.C., Marczak, R.J., 2008, “Effective properties of materials with random micro-cavities using special boundary elements”, *Journal of Material Science*, Vol. 43, p. 3510-3521.
- Callister, W.D., 2008, “Ciência e Engenharia de Materiais, Uma Introdução:sétima edição”, Ed. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, ISBN: 978-85-216-1595-8.
- Dondero, M., Cisilino, A.P., Carella, J.M., Tomba, J.P., 2011, “Effective thermal conductivity of functionally graded random micro-heterogeneous materials using representative volume element and BEM”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, pp. 3873-3881.
- Huang, H.C., Shih, C.C., 2006, “A shape identification problem in estimating simultaneously two interfacial configurations in a multiple region domain”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 26, pp. 77-88.
- Kanalachos, A., Provatidis, C., 1992, “Potential and wave propagation problems using the boundary element method and BEM-subregions”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 9, pp. 117-124.
- Kane, J.H., 1994, “Boundary element analysis in engineering continuum mechanics”, Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA, ISBN: 0-13-086927-9.
- Kwon, J.S., Jang, H.C., Jung, H., Song, T.H., 2009, “Effective thermal conductivity of various filling materials for vacuum insulation panels”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp. 5525-5532.
- Mulliken, J., Rizos, D. C., 2011 “A coupled computational method for multi-solver, multi-domain transient problems in elastodynamics”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 34, pp.78–88.
- Samantray, P.K., Karthikeyan, P., Reddy, K.S., 2006, “Estimating effective thermal conductivity of two-phase materials”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 4209-4219.
- Terada, K., Kikuchi, N., 1996, “Microstructural design of composites using the homogenization method and digital images”, *Materials Science Research International*, Vol. 2, pp.65-72.
- Wang, M., Pan, N., 2008, “Modeling and prediction of the effective thermal conductivity of random open-cell porous foams”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, 1325-1331.
- Yao, Z., Kong, F., Wang, H., Wang P., 2004, “2D Simulation of composite materials using BEM”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 28, pp. 927-935.
- Zarichta, C., 2008, “Um estudo sobre condutividade térmica efetiva em materiais micro-porosos utilizando o método dos elementos de contorno”, *Dissertação para obtenção do Título de Mestre em Engenharia*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

ANEXOS

	Pág.
Anexo I Propagação dos erros associados às medidas experimentais	65

ANEXO I: Propagação dos erros associados às medidas experimentais

Tabela A1. Regras adotadas para propagação de erros em operações matemáticas envolvendo dados experimentais

Operação	Erro propagado resultante
$(a \pm e_a) + (b \pm e_b)$	$e_{res} = e_a + e_b$
$(a \pm e_a) - (b \pm e_b)$	$e_{res} = e_a + e_b$
$(a \pm e_a) \cdot (b \pm e_b)$	$e_{res} = \left(\frac{e_a}{a} + \frac{e_b}{b} \right)$
$\frac{(a \pm e_a)}{(b \pm e_b)}$	$e_{res} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{e_a}{a} + \frac{e_b}{b} \right)$

Cálculo da propagação das incertezas associadas ao cálculo do fluxo de calor conduzido pelo corpo de prova inteiramente de aço. Neste cálculo são levadas em conta as incertezas associadas aos dados experimentais apresentados na Tab. 6.1 aplicadas à Eq. 6.1. As equações de (A1.1) a (A1.4) exibem o procedimento de propagação da incerteza relacionada ao cálculo do fluxo de calor através do corpo de prova inteiramente de aço aplicando-se a Eq. 6.1. Ao coeficiente de condutividade térmica do aço SAE 1020 não é associada nenhuma incerteza tendo em vista que este dado provém da bibliografia. Como incerteza associada à medição de temperaturas com a câmera térmica, considera-se a indicação do próprio fabricante do equipamento de $\pm 2^\circ\text{C}$.

$$E_{\text{área}(A)} = 0,154[m] \cdot 0,00953[m] \cdot \left(\frac{0,00005 [m]}{0,154 [m]} + \frac{0,00005 [m]}{0,00953 [m]} \right) \cong 0,0000082[m^2] \quad (\text{A1.1})$$

$$E_{(T_{q\text{méd}} - T_{f\text{méd}})} = 0,5[^\circ\text{C}] + 1[^\circ\text{C}] + 2[^\circ\text{C}] = 3,5[^\circ\text{C}] \quad (\text{A1.2})$$

$$E_{A \cdot (T_{q\text{méd}} - T_{f\text{méd}})} = 0,00147[m^2] \cdot 43,9[^\circ\text{C}] \cdot \left(\frac{0,0000082[m^2]}{0,00147[m^2]} + \frac{3,5[^\circ\text{C}]}{43,9[^\circ\text{C}]} \right) \cong 0,0055[^\circ\text{C} \cdot m^2] \quad (\text{A1.3})$$

$$E_{\dot{Q}} = \frac{51,9 \left[\frac{W}{m \cdot ^\circ\text{C}} \right] \cdot 0,644[^\circ\text{C} \cdot m^2]}{0,154[m]} \cdot \left(\frac{0,0055[^\circ\text{C} \cdot m^2]}{0,644[^\circ\text{C} \cdot m^2]} + \frac{0,00005 [m]}{0,154 [m]} \right) \cong 0,9[W] \quad (\text{A1.4})$$

Esta última incerteza calculada apresenta unidade em Watts devido ao coeficiente de condutividade térmica do aço, que não é considerado para efeito de propagação de incertezas, mas multiplica o resultado de acordo com a Eq. 6.1.

Procedimento similar é aplicado ao cálculo do coeficiente de condutividade térmica do corpo de prova de aço com inclusões de nylon. A propagação de incertezas segue em acordo com a Eq. (6.4), levando em conta os valores pontuais de temperatura coletados diretamente pelo software de análise das imagens termográficas. Como incerteza associada a essas medidas de temperatura, considera-se apenas indicação do fabricante da câmera térmica de $\pm 2^\circ\text{C}$, visto que as temperaturas de trabalho utilizadas nos experimentos foram mantidas sempre abaixo de 100°C . As Eqs. (A1.5) e (A1.6) exibem os cálculos de propagação de incertezas realizados tendo como base a Eq. (6.4). Como a seção transversal do corpo de prova é a mesma, admite-se que a incerteza associada ao cálculo da área é o mesmo apresentado na Eq. (A1.2). Além disso, como a montagem experimental é estritamente a mesma, admite-se, também, que o fluxo de calor pelo corpo de prova é perfeitamente uniforme e idêntico ao calculado a partir do corpo de prova fabricado inteiramente em aço. Para conveniência, assume-se o valor médio da diferença de temperaturas entre as faces. O valor médio, apresentado na Tab. (6.3), foi calculado com base na Eq. (6.1) levando-se em conta apenas os valores médios de temperatura no contorno aquecido e no resfriado. O procedimento de cálculo é semelhante ao apresentado para obtenção da incerteza propagada em relação ao fluxo de calor conduzido pelo corpo de prova inteiramente de aço. As equações (A1.7) e (A1.8) evidenciam os cálculos realizados

$$E_{\dot{Q}.L} = 21,7[W].0,154[m]. \left(\frac{0,9 [W]}{21,7 [W]} + \frac{0,00005 [m]}{0,154 [m]} \right) \cong 0,14 [W.m] \quad (\text{A1.5})$$

$$E_{K_{exp}} = \sum_{i=1}^{99} \frac{3.3412 [W.m]}{99,0,00147 [m^2].(T_{q_i} - T_{f_i}) [^\circ\text{C}]} \cdot \left(\frac{0,14 [W.m]}{3.3412 [W.m]} + \frac{0,0000082 [m^2]}{0,00147 [m^2]} + \frac{4 [^\circ\text{C}]}{(T_{q_i} - T_{f_i}) [^\circ\text{C}]} \right) = 4 \left[\frac{W}{m.^{\circ}\text{C}} \right] \quad (\text{A1.6})$$

O valor médio, apresentado na Tab. (6.3), foi calculado com base na Eq. (6.1) levando-se em conta apenas os valores médios de temperatura no contorno aquecido e no resfriado. O procedimento de cálculo é semelhante ao apresentado para obtenção da incerteza propagada em relação ao fluxo de calor conduzido pelo corpo de prova inteiramente de aço. As equações (A1.7), (A1.8) e (A1.9) mostram os cálculos realizados.

$$E_{(T_{q_{m\underline{e}d\underline{i}o}} - T_{f_{m\underline{e}d\underline{i}o}})} = 2,0 [^\circ\text{C}] + 2,8 [^\circ\text{C}] + 2,0 [^\circ\text{C}] = 6,8 [^\circ\text{C}] \quad (\text{A1.7})$$

$$E_{\dot{Q}.L} = 21,7[W].0,154[m]. \left(\frac{0,9 [W]}{21,7 [W]} + \frac{0,00005 [m]}{0,154 [m]} \right) \cong 0,14 [W.m] \quad (\text{A1.8})$$

$$E_{K_{m\underline{e}d\underline{i}o}} = \frac{3.341 [W.m]}{0,00147 [m^2].62,5 [^\circ\text{C}]} \cdot \left(\frac{0,14 [W.m]}{3.341 [W.m]} + \frac{0,0000082 [m^2]}{0,00147 [m^2]} + \frac{6,8 [^\circ\text{C}]}{(62,5) [^\circ\text{C}]} \right) \cong 5,7 \left[\frac{W}{m.^{\circ}\text{C}} \right] \quad (\text{A1.9})$$