

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

DESENVOLVIMENTO DE  
UM PROGRAMA DOS ELEMENTOS CONTORNOS PARA  
CONTATO UNILATERAL COM ATRITO

Por  
**Mohammad Hossein Shaterzadeh-Yazdi**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro  
Mecânico.

**Banca Examinadora**

---

Prof. Eder Lima Albuquerque, UnB/ENM

---

Prof. Edgar Nobuo Mamiya, UnB/ENM

---

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ENM

Brasília, 10 de Julho , 2013.

### ***Dedicatório***

Dedico esse trabalho ao meu pai, Mohsen, o certo exemplo de um engenheiro,  
à minha mãe, Azam, pelo amor incondicional e por sempre acreditar em mim  
e às minhas irmãs pelo apoio.

## ***Agradecimento***

A Deus, por estar sempre ao meu lado, iluminando o meu caminho. Obrigado também por ter me dado a bela família que tenho, pela saúde e tudo que eu tenho na minha vida.

Ao meu pai, Mohsen, o grande engenheiro, e à minha mãe, Azam, pelo exemplo de caráter, dignidade, honestidade e responsabilidade. Agradeço pelo apoio que me deram em qualquer momento da minha vida. Às minha irmãs, pelo apoio e pelas dicas e incentivos acadêmicos nos últimos anos.

Ao meu orientador, Éder Lima de Albuquerque, pela colaboração, paciência e conhecimentos repassados durante o desenvolvimento deste trabalho, além da grande amizade formada. A você, toda a minha sincera gratidão!

Aos meus amigos Iranianos aqui em Brasília, Ashkan e Amir, pela ajuda e apoio enquanto estava escrevendo este trabalho.

Ao pessoal da TECMEC, por ampliarem meus conhecimentos na área de engenharia, além de despertarem em mim o interesse pelo trabalho planejado e em grupo.

Aos colegas de turma, pela convivência agradável.

Aos meus amigos e amigas e familiares brasileiros que me apoiaram e tornaram agradável cada dia da minha vida no Brasil.

À Universidade de Brasília, pela oportunidade de realizar o meu sonho de ser engenheiro.

A todos que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho apresenta a implementação de um código numérico para análise de problemas de contato unilateral em corpos elásticos com atrito seco. Primeiramente será apresentada uma revisão bibliográfica sobre o assunto e a formulação do problema a ser trabalhada. Baseado nas formulações encontrados na bibliografia, foram desenvolvidos algoritmos utilizando o método dos elementos de contorno na imposição das condições de contato unilateral com ou sem atrito. O programa foi desenvolvido na linguagem *MATLAB*<sup>®</sup> e foi avaliado pela comparação com problemas com as soluções analíticas conhecida e também com resultados numéricos obtidos usando o método dos elementos finitos. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância a soluções analíticas de Hertz e também com soluções numéricas obtidas pelo método dos elementos finitos.

**Palavras-chave:** Contato unilateral, Método de Elementos Finitos, Atrito.

---

## ABSTRACT

This work presents the implementation of a numerical code for the analysis of unilateral contact of elastic bodies with dry friction. First, it will be presented a literature review on the subject and the formulation of the problem to be worked. Based on the formulations found on the literature, algorithms were developed using the boundary element method with the imposition of conditions of unilateral contact with or without friction. The program was developed in *MATLAB*<sup>®</sup> and was assessed with problems that have known analytical solutions and with numerical results obtained by the finite element method. The numerical results showed a good agreement with Hertz analytical solutions presented in the literature for frictionless contact condition and some solutions obtained by the finite element method to problems of contact with friction.

**Keywords:** Unilateral contact, Boundary Element Method, Friction.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
1.1	Contato sem atrito . . . . .	4
1.2	Contato com atrito . . . . .	4
1.3	Modos de contato . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Embasamento Teórico</b>	<b>6</b>
2.1	Elasticidade . . . . .	6
2.1.1	Tensão . . . . .	6
2.1.2	Lei de Hooke . . . . .	7
2.2	A equação integral de contorno . . . . .	9
2.3	Solução Fundamental . . . . .	11
2.4	A equação integral de contorno . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>14</b>
3.1	Introdução . . . . .	14
3.2	Elementos de contorno quadráticos contínuos . . . . .	14
3.2.1	Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não per- tence ao elemento . . . . .	17
3.3	Tensões no contorno . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Método de elementos de contornos para problemas de contato</b>	<b>22</b>
4.1	Introdução . . . . .	22
4.2	Decisão do Estado de Contato . . . . .	25
4.3	Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno	27
<b>5</b>	<b>SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS</b>	<b>31</b>
5.1	Exemplo 1: Bloco retangular em contato com plano elástico fixado nas direções $x$ e $y$ (atrito infinito) . . . . .	31
5.1.1	Resultados numéricos . . . . .	31
5.2	Exemplo 2: Bloco retangular elástico em contato com plano rígido fixado na direção $y$ (sem atrito) . . . . .	34

5.2.1	Resultados numéricos . . . . .	34
5.3	Exemplo 3: Cilindro rígido em contato com base elástica sem atrito . .	36
5.3.1	Resultado numérico e comparação com a solução analítica . . .	36
5.4	Exemplo 4: Bloco retangular elástico em contato com plano rígido com atrito . . . . .	40
5.4.1	Resultados numéricos . . . . .	40
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>43</b>

## Lista de Figuras

2.1	Corpo em equilíbrio sob as forças externas, Timoshenko [13]. . . . .	7
2.2	O ponto fonte $x'$ pertence ao contorno . . . . .	12
3.1	Elementos quadráticos contínuos. . . . .	15
3.2	Elementos quadráticos contínuos. . . . .	16
3.3	Tensões no contorno. . . . .	19
4.1	Região de contato $\Gamma_c$ e região sem contato $\Gamma_{nc}$ , Man [6] . . . . .	22
4.2	Fluxograma do programa Elast_qua . . . . .	28
5.1	Geometria e condições de contorno do problema do bloco elástico com atrito infinito. . . . .	32
5.2	Condições de contorno . . . . .	33
5.3	Tensões na região de contato $\mu = \infty$ . . . . .	33
5.4	Tensão normal e cisalhante no contato considerando $\mu = 0$ . . . . .	34
5.5	Deslocamentos nas direções $x$ e $y$ para o bloco em contato com uma superfície rígida sem atrito. . . . .	35
5.6	Condições de contorno do problema. . . . .	36
5.7	Malha e condições de contorno para o cilindro elástico em contato com uma base rígida sem atrito. . . . .	37
5.8	Comparação das tensões normais calculadas numericamente com a solução analítica. . . . .	38
5.9	Erros percentuais entre os resultados numéricos e analíticos nos nós em contato. . . . .	39
5.10	Tensão normal e cisalhante no contato conforme obtidas com $\mu = 1$ . . . . .	41
5.11	Deslocamentos no contato de corpo conforme com $\mu = 1$ . . . . .	41

# Símbolos

## SÍMBOLOS LATINOS

$b$	Força por Unidade de Volume
$E$	Módulo de Elasticidade
$n$	Vetor Unitario
$P$	Força Externa
$T_i$	Força interna
$t_{ij}$	Força de Superfície
$N_i$	Função de Forma
$u_{ij}$	Deslocamento
$u$	Deslocamento

## SÍMBOLOS GREGOS

$\sigma_{ij}$	Tensão Normal
$\tau_{ij}$	Tensão de Cisalhamento
$\varepsilon_{ij}$	Deformação
$\lambda$	Constantes de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G; \delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\Omega$	Volume tridimensional
$\Gamma$	Fronteira do volume $\Omega$
$\mu$	Coefficiente de atrito



# Capítulo 1 INTRODUÇÃO

## Contato Mecânico

De um modo geral, o contato entre dois corpos pode ocorrer em um ponto, ao longo de uma linha ou sobre uma superfície. No caso de carregamentos e configurações complexas, pode-se encontrar uma combinação dos contatos mencionados e dependendo da força aplicada, a região de contato pode mudar. Por outro lado, a interação entre duas superfícies de contato é complexa, pois o comportamento de contato é sensível à rigidez do material, à sua textura, ao seu acabamento, à topologia da superfície de contato, à taxa de carregamento, à magnitude do carregamento, à direção do carregamento em relação a região de contato, aos suportes do corpo, etc.

Devido à complexidade e importância tecnológica, problemas de contato têm sido muito estudados nos últimos anos. Grande parte dos estudos podem ser encontrados nos livros Johnson [1] Galin [2] e [3] e Hertz [4]. O comportamento na interface de contato é muito influenciada pelo *atrito*, o fenômeno de transferência de carga e a interação entre duas superfícies de contato. O contato é um parâmetro mecânico importante nas estruturas, pois a carga é transferida por contato através de uma máquina por meio de conjuntos aparafusados, engrenagens, rolamentos, fixação de pás de turbinas, etc. Calcular o valor de tensões e deformações devido ao contato, especificamente na presença de atrito, é de grande importância prática.

Considerando que a maioria das estruturas metálicas não sobrevive indefinidamente, a análise do contato mecânico ajuda a evitar falhas catastróficas. Por exemplo, na indústria aeroespacial, a iniciação de trincas nos pontos de concentração de tensão é uma das preocupações dos engenheiros. Os furos dos rebites, por exemplo, são pontos de concentração de tensão sob condições de contato. Em tal situação, a mecânica do contato deve ser utilizada para fornecer as avaliações necessárias e procedimentos para lidar com esses problemas, tanto na fase de projeto quanto em serviço.

Também pode ser destacado outras aplicações particularmente úteis: o caso de fretting que aparece quando o contato mecânico está associado a cargas cíclicas. Esta situação apresenta pequenas oscilações dos corpos na região de contato, o que pode acelerar a iniciação de trincas de superfície e fazer com que a propagação destas trincas levem à falha catastrófica dos componentes.

Em certas situações, uma análise de contato é feita para avaliar a quantidade de dano, como no caso de fretting (Waterhouse [5]). Em outros casos, o contato é desejado e é estudado para aperfeiçoar a utilização de componentes mecânicos, tais como

as travas mecânicas. A caracterização dos problemas muitas vezes ocorre por meio de equações diferenciais e integrais. No caso de contato mecânico com atrito, a natureza não linear do fenômeno torna mais difícil uma solução exata. Neste contexto, é altamente recomendável o uso de um método numérico para resolver o sistema de equações não lineares ou sistemas de equações lineares com restrições de desigualdade.

Atualmente, o método dos elementos finitos (MEF) é amplamente utilizado para realizar a análise de problemas de contato. O MEF se baseia numa estratégia de aproximação variacional que discretiza o corpo em elementos de tamanhos finitos. Cada um dos elementos é descrito por uma aproximação por partes das equações governantes utilizando as abordagens variacionais ou residuais ponderadas. Reunindo as equações para todos os elementos, um sistema simples de equações algébricas que representa o comportamento global do corpo pode ser obtido e resolvido. A gama de aplicação bastante ampla do MEF representa um grande desafio para qualquer outro método numérico existente. No entanto, uma de suas desvantagens é a necessidade de discretização de todo o corpo, que pode conduzir a um sistema de matrizes muito grande para ser resolvido, especificamente para problemas tridimensionais complexos.

Apesar de alguns destes problemas terem sido parcialmente resolvidos pelo desenvolvimento recente de algoritmos rápidos para a solução de sistemas de equações e computadores com grande capacidade de cálculo por segundo, algumas das dificuldades inerentes associadas com o MEF permanecem. Segundo Man [6], o MEF ainda é ineficiente e demorado para os problemas onde o contorno muda constantemente, tais como aqueles encontrados na mecânica da fratura linear elástica e na mecânica do contato devido aos cálculos desnecessários no interior do domínio.

Ao contrário do MEF, o método de elementos de contorno (MEC) evita a discretização de todo o domínio, usando uma abordagem matemática diferente. Esta técnica transforma analiticamente o conjunto de equações diferenciais lineares governantes em uma equação integral ao longo do contorno do problema. Essa transformação permite usar sistemas de discretização que envolvem apenas o contorno do corpo como foi dito por Fredholm [8], Mikhlin [9], Smirnov [10] e outros. A abordagem do MEC tem muitas vantagens sobre outras técnicas numéricas. Essas vantagens são resumidas como se segue:

- Reduz a dimensionalidade do problema em um, resultando em um sistema menor de equações com uma redução considerável nos dados necessários para a análise.
- O MEC considera contínua a modelagem no interior do domínio da solução, uma vez que nenhuma discretização do interior é necessária, o que conduz a uma elevada precisão no cálculo das tensões e deslocamentos interiores.

- As tensões são calculadas com a mesma precisão dos deslocamentos.
- O método é bem adequado para os problemas de domínios infinitos, tais como mecânica dos solos, acústica, aeroelasticidade, dentre outros. Nestes casos, os métodos clássicos de domínio não são adequados.

Pode-se argumentar a partir do ponto de vista numérico que, como o contato acontece no contorno, uma solução de contorno como a do método dos elementos de contorno, em vez de um procedimento de solução de domínio, seria mais adequada para a análise destes tipos de problemas. Além disso, na análise dos elementos de contorno, tanto os deslocamentos como as tensões são obtidas com a mesma precisão. No caso do método dos elementos finitos, por exemplo, as tensões são obtidas com precisões inferiores aos deslocamentos.

Os problemas de contato podem ser classificados em dois tipos: Problemas de contato sem atrito e problemas de contato com atrito.

### **1.1 Contato sem atrito**

O contato sem atrito é um contato idealizado que tem aplicação muito restrita. De modo geral, peças bem lubrificadas podem ser modeladas como em contato sem atrito.

Na situação de contato sem atrito, os corpos em contato podem deslizar sem resistência ao longo da direção tangencial (paralela à superfície de contato). Devido à carga aplicada e a ausência do atrito, existe somente força normal de compressão na região de contato. Neste caso, os corpos podem se separar, mas não vão interpenetrar. No contato sem atrito, as tensões na direção tangencial sempre são nulas e a continuidade da tensão normal dentro da zona de contato é sempre preservada. Além disso, problemas de contato sem atrito são independentes da história do carregamento.

### **1.2 Contato com atrito**

O atrito é um fenômeno físico encontrado naturalmente em problemas de contato reais. Quando o atrito é levado em consideração, o problema se torna mais complicado. O atrito influencia significativamente o comportamento na região de contato. Por exemplo, o movimento de deslizamento na direção tangencial de um ponto de contato será limitado pelas forças de atrito tangenciais (cisalhamento), no ponto de contato, que por sua vez dependem da componente normal das forças (tensões normais) exercida no mesmo ponto. A relação entre as componentes tangenciais e normais das forças impõe um comportamento não linear entre o movimento de deslizamento das superfícies em contato e a carga externa.

Em situação de atrito, as condições de contato ou são de adesão (sem deslocamento relativo na direção tangencial) ou de escorregamento (com deslizamento na direção tangencial).

### 1.3 Modos de contato

A região em que os contornos podem entrar em contato é chamada de "área potencial de contato". O tamanho desta área depende do problema envolvido, uma vez que é determinada pela geometria do problema e pela magnitude da carga final aplicada. A situação de separação ou contato é descrita pelos modos de contato. Os modos de contato em um ponto se classificam em:

**1- Modo de separação:** É definido quando os pares de nós permanecem separados.

**2- Modo de deslizamento:** É definido quando os pares de nós não estão restritos na direção tangencial, mas livre para deslizar um sobre o outro.

**3- Modo de adesão:** É definido quando os pares de nós estão restritos na direção normal e tangencial, ou seja, não tem qualquer deslizamento durante uma dada etapa do carregamento.

**4- Modo Misto:** Os modos de adesão e deslizamento podem ocorrer simultaneamente em uma dada região. Neste caso, o modo é chamado de modo misto.

## Capítulo 2 Embasamento Teórico

### 2.1 Elasticidade

Todos os materiais estruturais possuem, em certa medida, um modelo de elasticidade. Desde que as forças externas, que produzem uma deformação na estrutura, não excedam um certo limite, as deformações desaparecem com a remoção das forças, pois as tensões são proporcionais às deformações. Neste estudo será assumido que os corpos submetidos à ação de forças externas são perfeitamente elásticos e retomam a sua forma inicial completamente após a remoção das forças.

A estrutura molecular dos corpos elásticos não será considerada aqui. Será assumido que a matéria de um corpo elástico é homogênea e distribuída continuamente ao longo do seu volume, de modo que um pequeno elemento do corpo possui as mesmas propriedades físicas do corpo. Para simplificar a discussão, também será assumido que o corpo é isotrópico, ou seja, as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções.

#### 2.1.1 Tensão

Tensão é uma medida das forças internas que atuam dentro de um corpo. Quantitativamente, é uma medida da força média por unidade de área de uma superfície no interior do corpo sobre a qual atuam as forças internas. Estas forças internas surgem como reação às forças externas aplicadas ao corpo. Uma vez que o corpo deformável carregado é assumido como contínuo, estas forças internas são distribuídas de forma contínua dentro do volume do corpo e o corpo tem uma deformação contínua.

A Figura 2.1 representa um corpo em equilíbrio sob as forças  $P_1, \dots, P_7$ . Imagine o corpo dividido em duas partes  $A$  e  $B$  através de um corte na seção  $mm$ . Será assumido que estas forças estão distribuídas sobre a área  $mm$  continuamente, da mesma forma que a pressão é continuamente distribuída sobre a superfície sob a qual atua.

Considerando a área  $\Delta S$ , uma área infinitesimal da superfície, com normal unitária

A deformação de um corpo elástico é definida como a variação de comprimento e forma em certa direção. Se considerar  $u$  como a variação de comprimento e dividir pelo comprimento inicial obtém-se a *deformação média*. Em um elemento infinitesimal, a deformação é definida como a variação de comprimento  $u$  por unidade de comprimento, e pode ser escrita como:

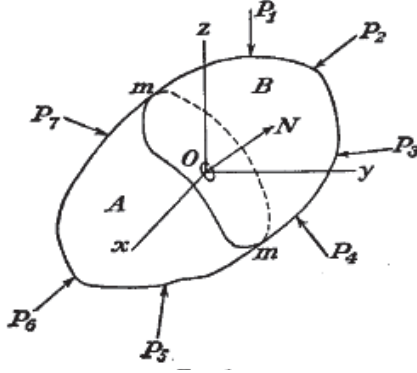


Figura 2.1: Corpo em equilíbrio sob as forças externas, Timoshenko [13].

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.1)$$

A equação (2.1) representa as deformações normais ou lineares. As componentes cisalhantes de deformação também fazem parte da deformação. Estas componentes são chamados deformações angulares e podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad e \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

Todos os componentes de deformação podem ser escritos na forma de um matriz denominada tensor de deformações representado por  $\varepsilon$  que envolve todos os componentes normais e de cisalhamento do tensor de deformação.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Na matriz (2.3), os componentes de cisalhamento da deformação são iguais em dupla, por simetria, ou seja  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

As equações (2.1) e (2.2) podem ser reescritas como:

$$\varepsilon(u) = \nabla_s u = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Lei de Hooke

Como já foi explicado anteriormente, qualquer material, sobre o qual atua uma força, sofrerá uma deformação. Em materiais com comportamento elástico linear, a deformação do corpo se relaciona diretamente com as tensões atuantes no corpo. Esta

relação é dada pela lei de Hooke que relaciona o tensor de tensões de Cauchy e o tensor de deformações.

No caso de material homogêneo e isotrópico, a lei de Hooke pode ser escrita de forma generalizada como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.5)$$

onde  $\lambda$  e  $G$  são constantes de Lamé, expressas em termos do módulo Young  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  e são definidos assim:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.6)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.7)$$

$G$  é chamado de módulo de cisalhamento e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker cujas propriedades são:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2.8)$$

e  $u_{k,k}$  é a forma escrita de deformação em notação indicial, ou seja:

$$u_{k,k} = \varepsilon_{kk} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \quad (2.9)$$

O inverso da Eq.(2.5) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1 + \nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.10)$$

As equações (2.5) e (2.10) também podem ser reescritas em termos de  $E$  e  $\nu$  como a seguir:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.11)$$

e

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu)}{E} \left[ \sigma_{ij} + \frac{\nu}{(1 + \nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (2.12)$$

Derivando a Eq. (2.5), substituindo na equação de equilíbrio (??) e substituindo os componentes de deformação com as derivadas de deslocamento a partir da Eq.(2.2) obtém-se a equação de Navier para equilíbrio estático, dada por:

$$u_{j,ii} + \frac{1}{(1 - 2\nu)} u_{i,ij} + \frac{1}{G} b_i = 0 \quad (2.13)$$

Esta equação é particularmente conveniente se as condições de contorno de deslocamento são especificadas. Da mesma forma, as condições de contorno de forças de superfície podem ser dadas pelo vetor de tensões definido como:

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = (\lambda\delta_{ij}u_{k,k})n_j + 2G\varepsilon_{ij}.n_j \quad (2.14)$$

onde  $n_j$  indica o cosseno diretor do vetor normal apontando para o exterior do domínio do corpo.

## 2.2 A equação integral de contorno

A equação integral de contorno é derivada através da utilização do teorema de reciprocidade de elasticidade, em conjunto com uma solução conhecida como solução fundamental da equação governante para uma carga discreta num corpo infinito.

O teorema de reciprocidade pode ser simplesmente explicado como o seguinte:

"Se dois estados de equilíbrio distintos  $(u_i^*, \sigma_{ij}^*, b_i^*)$  e  $(u_i, \sigma_{ij}, b_i)$  existir em uma região de  $\Omega^+$  na superfície limitada por  $\Gamma^+$ , o trabalho realizado pelas forças de superfície e as forças do corpo do primeiro sistema de (\*) sobre os deslocamentos da segunda é igual ao trabalho realizado pelas forças do segundo sistema nos deslocamentos do primeiro (\*)"

O teorema pode ser provado usando o teorema da divergência e pode ser escrito como:

$$\int_{\Gamma} u_i \sigma_{ij}^* n_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_i^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^* b_i d\Omega \quad (2.15)$$

onde  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $b_i$ , por seqüência, são os deslocamentos, as tensões e as forças de corpo, e  $n_j$ , são os componentes do vetor normal, apontando para fora do domínio  $\Omega$ . O domínio  $\Omega^*$  é denotado por um domínio infinito limitado por um contorno infinita  $\Gamma^*$  e  $\Omega$  é um domínio finito dentro de  $\Omega^*$  que tem um contorno  $\Gamma$ . As mesmas propriedades de material são assumidas por ambos os domínios. À medida que as forças de superfície  $T_i$  no contorno  $\Gamma$  são definidas por:

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.16)$$

a equação (2.15) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \{u_i b_i^* - u_i^* b_i\} d\Omega = \int_{\Gamma} \{u_i^* T_i - u_i T_i^*\} d\Gamma \quad (2.17)$$

Os vetores de deslocamento  $u_i^*$ , as forças de superfície  $T_i^*$ , e as força do corpo  $b_i^*$  na equação (2.17) são escolhidos para ser a solução conhecida da equação de Navier devido a uma força pontual unitária aplicada ao corpo, isto é:

$$\mu u_{i,kk}^* + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{k,ki}^* + \Delta(X - X')e_i = 0 \quad (2.18)$$



onde  $\Delta(X - X')$  é a função delta de Dirac,  $X \in \Omega^*$  é o ponto de carga singular e  $X' \in \Omega^*$  é o ponto campo. O componente do vetor unitário  $e_i$  em (2.18) corresponde a uma força positiva unitária aplicada em  $X'$  na direção  $i$ . Em problemas bidimensionais,  $e_i$  é força por unidade de espessura. A função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega^*} g(X) \Delta(X - X') d\Omega(X) = g(X') \quad (2.19)$$

O campo de deslocamento e forças de superfície que correspondem à solução podem ser escritas como:

$$u_i^* = U_j^* \delta_{ij} = U_{ij}(X', X) e_j \quad (2.20)$$

e

$$T_i^* = T_j^* \delta_{ij} = T_{ij}(X', X) e_j \quad (2.21)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta Kroneker.  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  são as soluções fundamentais dos deslocamentos e forças de superfícies, na direção  $j$  no ponto  $X$  devido a uma força pontual atuando na direção  $i$  em  $X'$ .

O componente de força de corpo  $b_i^*$  (força por unidade de volume) corresponde a uma força pontual e é dada por:

$$b_i^* = \Delta(X', X) e_i \quad (2.22)$$

Substituindo  $b_i^*$  na função de delta de Dirac, na equação (2.17) e especificando  $X$  como a variável de integração, obtém-se a seguinte equação considerando a força unitária atuando na direção  $i$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{u_j(X) \Delta_{ij}(X' - X) - U_{ij}(X', X) b_j(X')\} d\Omega(X) = \\ \int_{\Gamma} \{U_{ij}(X', X) T_j(X) - T_{ij}(X', X) u_j(X)\} d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Agora, usando as propriedades da função delta de Dirac, a equação (2.23) resulta em:

$$\begin{aligned} u_i(X') = \int_{\Gamma} U_{ij}(X' - x) T_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(X' - x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ \int_{\Omega} U_{ij}(X', X) b_j(X) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $x', x \in \Gamma$  e  $X', X \in \Omega$ . Esta é a famosa função Somigliana para deslocamentos  $u_i$  e é uma representação contínua para os deslocamentos em qualquer ponto interior  $X'$  no domínio  $\Omega$ . O campo de pressão ao longo do corpo pode ser obtido através das equações diferenciais (2.24) como a seguir:

$$\begin{aligned} u_{i,k}(X') = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(X' - x) T_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij,k}(X' - x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ \int_{\Omega} U_{ij,k}(X', X) b_j(X) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (2.25)$$

A função Somigliana para tensões num ponto interior é obtido por substituição da equação (2.25) na lei de Hooke (2.5), de qual obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(X') = & \int_{\Gamma} U_{kij}(X' - x) T_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{kij}(X' - x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & \int_{\Omega} U_{kij}(X', X) b_k(X) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (2.26)$$

O deslocamento de terceira ordem e tensores de tração, são dados por:

$$U_{kij}(X', x) \text{ e } T_{kij}(X', X) \quad (2.27)$$

em que contém as derivadas da solução de carga do ponto de Kelvin  $U_{kij}(X', x)$  e  $T_{kij}(X', X)$

### 2.3 Solução Fundamental

Para um problema de deformação plana, as soluções fundamentais para deslocamentos  $U_{ij}(X', x)$  e forças de superfície  $T_{ij}(X', x)$ , definidas na equação (2.19) são dadas por:

$$U_{ij}(X', x) = \frac{1}{8\pi G(1 - \nu^*)} \left\{ (3 - 4\nu^*) \ln\left(\frac{1}{R}\right) \delta_{ij} + R_{,i} R_{,j} \right\} \quad (2.28)$$

e

$$T_{ij}(X', x) = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu^*)R} \left\{ [(1 - 2\nu^*) \delta_{ij} + 2R_{,i} R_{,j}] \frac{\partial R}{\partial n} - (1 - 2\nu^*) (R_{,i} n_j - R_{,j} n_i) \right\} \quad (2.29)$$

O campo de deformação fundamental  $U_{kij}(X' X)$  e o campo de tensão  $T_{kij}(X' X)$  como apresentado na equação (2.26) são dados por:

$$U_{kij}(X', x) = \frac{1}{4\pi(1 - \nu^*)R} \left\{ (1 - 2\nu^*) (R_{,j} \delta_{ki} + R_{,i} \delta_{kj} + R_{,k} \delta_{ij}) + 2R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right\} \quad (2.30)$$

e

$$\begin{aligned} T_{kij}(X', x) = & \frac{\mu}{2\pi(1 - \nu^*)R^2} \left\{ 2 \frac{\partial R}{\partial n} [(1 - 2\nu^*) \delta_{ij} R_{,k} + \nu^* (R_{,j} \delta_{ik} + R_{,i} \delta_{jk}) - 4R_{,i} R_{,j} R_{,k}] \right. \\ & + 2\nu^* (n_i R_{,j} R_{,k} + n_j R_{,i} R_{,k}) + (1 - 2\nu^*) (2n_k R_{,i} R_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ & \left. - (1 - 4\nu^*) n_k \delta_{ij} \right\}, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nestas equações,  $\delta_{ij}$  denota o delta de Kronecker,  $R(x', x)$  representa a distância real entre o ponto fonte  $x'$  e o ponto campo  $x$ , que é dada por:

$$R = |x - x'| \quad \text{e} \quad R_{,i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} \quad (2.32)$$

As soluções fundamentais para o estado de tensão plana podem ser obtida pela seguinte substituição da relação modificada de Poisson e módulo de Young:

$$\nu^* = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.33)$$

$$E^* = E \left( 1 - \frac{\nu^{*2}}{(1 + \nu^*)^2} \right) \quad (2.34)$$

## 2.4 A equação integral de contorno

A equação integral de contorno é obtida por um processo de limite, fazendo um ponto  $X'$  no interior do domínio  $\Omega$  tender a um ponto  $x'$  no contorno  $\Gamma$ . Este processo pode ser demonstrado pela figura 2.2 e a equação (2.23) pode ser escrita como:

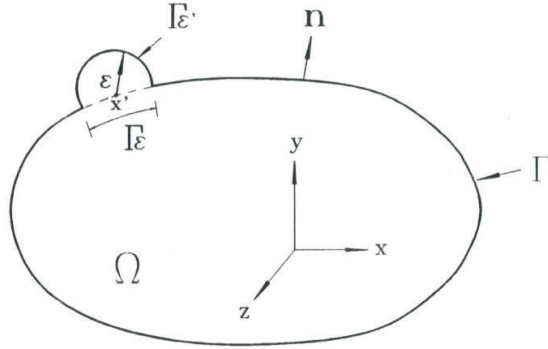


Figura 2.2: O ponto fonte  $x'$  pertence ao contorno

$$u_i(X') = \int_{\Gamma - \Gamma'_\varepsilon - \Gamma'_\varepsilon} U_{ij}(X', x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma'_\varepsilon - \Gamma'_\varepsilon} T_{ij}(X', x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma - \Gamma'_\varepsilon - \Gamma'_\varepsilon} U_{ij}(X', X) b_j(X) d\Omega(X) \quad (2.35)$$

onde o contorno total é definido como:

$$\Gamma' = (\Gamma - \Gamma'_\varepsilon) + \Gamma'_\varepsilon \quad (2.36)$$

$\Gamma'_\varepsilon$  representa o contorno de um semicírculo de raio  $\varepsilon$ ,  $\Gamma'_\varepsilon$  tende a  $\Gamma_\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Tomando o limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a formulação direta de elementos contornos é obtida como:

$$C_{ij}(x') u_j(x') = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) + \int_{\Omega} U_{ij}(x', X) b_j(X) d\Omega(X) d\Omega(x) \quad (2.37)$$

onde

$$C_{ij}(x') = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ij}(x', x) u_j(x) \right\} \quad (2.38)$$

A equação (2.37) representa a formulação direta do método de elementos de contorno o qual relaciona deslocamentos e forças de superfície no contorno. Esta equação integral de contorno para um ponto geral sobre o contorno na ausência de forças do corpo  $b_j$  pode ser escrita como:

$$C_{ij}(x') u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x) t_j(x) d\Gamma(x) \quad (2.39)$$

Portanto,  $C_{ij}(X') = \delta_{ij}$  quando o ponto  $x'$  está dentro do domínio  $\Omega$ . A avaliação de  $C_{ij}(x')$  é mais complicada quando  $x'$  está no contorno  $\Gamma$ , mas de um modo geral, tem-se:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi}, & \text{se } (x_d, y_d) \in \text{ao contorno} \\ 0, & \text{se } (x_d, y_d) \notin \text{ao domínio ou ao contorno} \end{cases} \quad (2.40)$$

Quando o ponto fonte encontra-se em ponto suave do contorno, isto é, não é um canto, tem-se:

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (2.41)$$

## Capítulo 3 O Método dos Elementos de Contorno

### 3.1 Introdução

Baseado na formulação apresentada no capítulo anterior, obtemos a equação:

$$C_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma} T_{ij}(x', x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x)d\Gamma(x) \quad (3.1)$$

Dividindo o contorno  $\Gamma$  em  $Ne$  elementos de contorno, a equação (3.1), de outra forma, pode ser escrita como:

$$C_{ij}u_j(d) + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} T_{ik}^* u_i d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} U_{ik}^* t_j d\Gamma_j \quad (3.2)$$

Essa equação é aplicada em cada um dos nós do elemento de tal forma que a equação integral de contorno é transformada em um sistema linear de equações algébricas:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (3.3)$$

onde as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  contêm as integrais das soluções fundamentais de forças de superfície  $T_{ij}$  e de deslocamentos  $U_{ij}$ , e os vetores  $\{t\}$  e  $\{u\}$  contêm todas as forças de superfícies e deslocamentos conhecidos ou não. Através de algumas manipulações algébricas podemos isolar as incógnitas em um vetor  $x$  de forma que o sistema (3.3) possa ser representado por:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (3.4)$$

onde uma solução única pode ser obtida.

### 3.2 Elementos de contorno quadráticos contínuos

Na discretização utilizando elementos de contorno quadráticos contínuos, a geometria é aproximada por uma função quadrática ao longo de cada elemento, sendo necessários três pontos nodais por elemento conforme mostrada na Fig.3.1.

Assim, os deslocamento e as forças de superfícies são aproximados da seguinte forma:

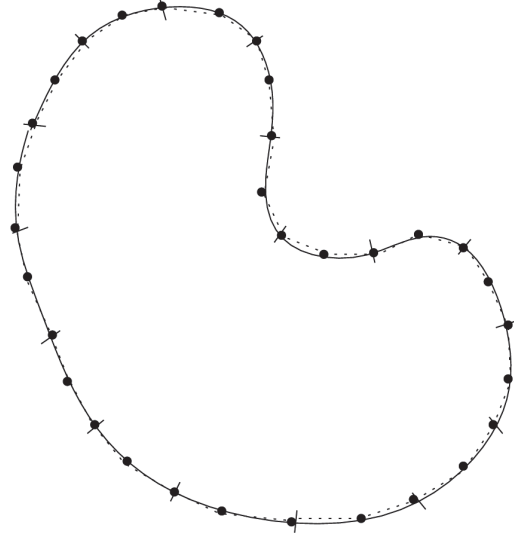


Figura 3.1: Elementos quadráticos contínuos.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}^{(n)} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} & 0 \\ 0 & N^{(1)} & 0 & N^{(2)} & 0 & N^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{t}^{(n)} \quad (3.6)$$

onde  $u_i^{(n)}$  e  $t_i^{(n)}$  são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e  $N^{(i)}$  são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (3.7)$$

$$N^{(2)} = 1 - \xi^2 \quad (3.8)$$

$$N^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (3.9)$$

onde  $\xi$  representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento.

Da mesma forma que os deslocamentos e forças de superfície, a geometria do problema também é aproximado por elementos de contorno quadráticos contínuos da seguinte forma:

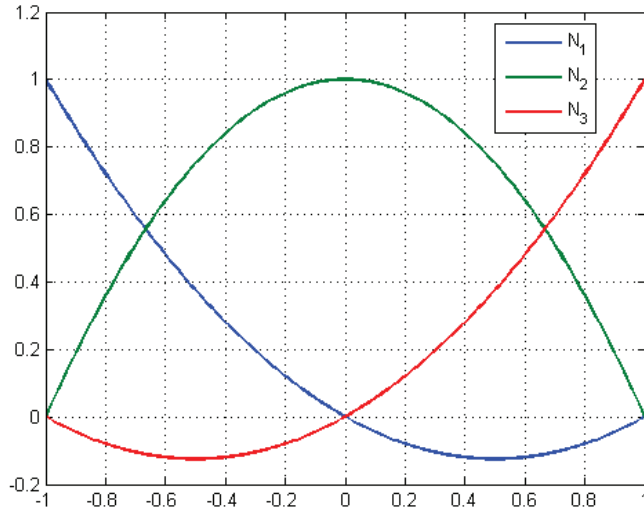


Figura 3.2: Elementos quadráticos contínuos.

Considere que o domínio tenha sido dividido em  $Ne$  elementos de contorno. Substituindo as equações (3.5) e (3.10) na equação (3.2), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$c^l u^l + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} TN d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} UN d\Omega \right\} t^j \quad (3.11)$$

Chamando

$$\int_{\Gamma_j} UNd\Gamma = G \quad (3.12)$$

e

$$\int_{\Gamma_j} TNd\Gamma = H \quad (3.13)$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^N H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^N G^{lj} t^j \quad (3.14)$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Integração das matrizes $[H]$ e $[G]$ quando o ponto fonte não pertence ao elemento

A integração dos termos das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  quando o ponto fonte não pertence aos elementos é uma integração regular que pode ser realizada usando, por exemplo, quadratura de Gauss. Esta integração é descrita a seguir:

$$H^{(j)} = \int_{\Gamma_j} T_{lk} N^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 T_{lk} N^{(j)} |J| d\xi \quad (3.16)$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{lk} N^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk} N^{(j)} |J| d\xi \quad (3.17)$$

onde  $|J|$  representa o módulo do Jacobiano da transformação  $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ :

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.18)$$

onde  $dx_1/d\xi$  e  $dx_2/d\xi$  são obtidos derivando-se as equações (??) em relação a  $\xi$ . onde

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2},$$

$(x_d, y_d)$  são as coordenadas do ponto fonte e  $(x, y)$  as coordenadas dos pontos campo (pontos de integração ou pontos de Gauss).

Considerando o elemento  $j$  conforme equações apresentadas na seção anterior, tem-se:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{cases}$$



onde  $N_1(\xi)$ ,  $N_2(\xi)$  e  $N_3(\xi)$  são as funções de forma quadráticas contínuas e dadas pelas equações (3.7), (3.8) e (3.9).

Integrais singulares da ordem  $O(\ln r)$  podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles [11], que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest [12]. De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por:

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi), \quad (3.19)$$

onde  $N$  é o número de pontos de Gauss.

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de  $\mathbf{G}$  são do tipo  $\ln(r)$  sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de  $\mathbf{H}$  são do tipo  $1/r$  e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos. Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ( $b_i = 0$ ) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a equação (3.15) torna-se:

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{v}^q$  é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção  $q$  e zero na outra direção. Para satisfazer a equação (3.20) tem-se:

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^{Ne} H_{ij} \quad j \neq i \quad (3.21)$$

sendo  $j$  par ou ímpar.

O termo da diagonal da matriz  $\mathbf{H}$  é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

### 3.3 Tensões no contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere um nó em que as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não coincidam com as direções dos eixos geométricos (Figura 3.3). Neste nó é criado um novo sistema de referência  $x'_1 x'_2$  possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao

contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local tem-se:

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij}u_j \\ t'_i &= l_{ij}t_j \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde  $l_{ij}$  são os cossenos diretores.

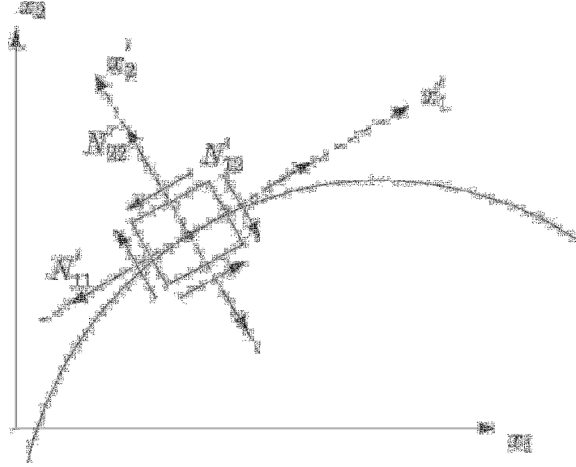


Figura 3.3: Tensões no contorno.

No sistema local tem-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \sigma'_{22} &= t'_2 \\ \sigma'_{12} &= t'_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

A deformação  $\varepsilon'_{11}$  pode ser calculada, sabendo que:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1} \\ u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Usando geometria diferencial na equação (3.24), pode-se notar que a direção local  $x'_1$  é tangente ao comprimento infinitesimal de arco  $ds$  dado por

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2} = \sqrt{\left(\frac{dx'_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{d\xi}\right)^2} d\xi \\ \frac{ds}{d\xi} &= J \end{aligned} \quad (3.25)$$

Um pequeno movimento ao longo de  $s$  corresponde a um pequeno movimento em  $x'_1$ . Isto permite com que  $x'_1$  na equação (3.24) seja substituído pela equação (3.25), ou seja:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \\ \varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} J^{-1}\end{aligned}\tag{3.26}$$

sendo

$$\begin{aligned}u_1 &= \sum_{i=1}^3 N^{(i)} u_1^{(i)} \\ \frac{du_1}{d\xi} &= \sum_{n=1}^3 \frac{dN^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)}\end{aligned}\tag{3.27}$$

onde  $N^{(i)}$  são as funções de forma. Pode-se então obter a deformação

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{n=1}^3 \frac{dN^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1}\tag{3.28}$$

Da relação tensão deformação

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon'_{kk} + G \varepsilon'_{ij}\tag{3.29}$$

Na equação (3.29) tem-se três incógnitas  $\sigma'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}$ , que agora podem então ser calculadas.

Por último, as densidades de força tem que ser escritas no referencial global  $x_1 x_2$ , ou seja

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}\tag{3.30}$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas.

## Capítulo 4 Método de elementos de contornos para problemas de contato

### 4.1 Introdução

O contorno de dois corpos isotrópicos homogêneos linearmente elásticos  $A$  e  $B$  são representados por  $\Gamma^A$  e  $\Gamma^B$ . Geralmente, quando dois corpos entram em contato, apenas uma parte do contorno de um corpo entra em contato com uma parte do contorno do outro. Portanto, os seus contornos totais podem ser divididos em regiões de *contorno de contato*  $\Gamma_c$  e *contorno sem contato*  $\Gamma_{nc}$ , tal como ilustrado na figura 4.1.

$$\Gamma^A = \Gamma_{nc}^A + \Gamma_c^A \quad (4.1)$$

$$\Gamma^B = \Gamma_{nc}^B + \Gamma_c^B \quad (4.2)$$

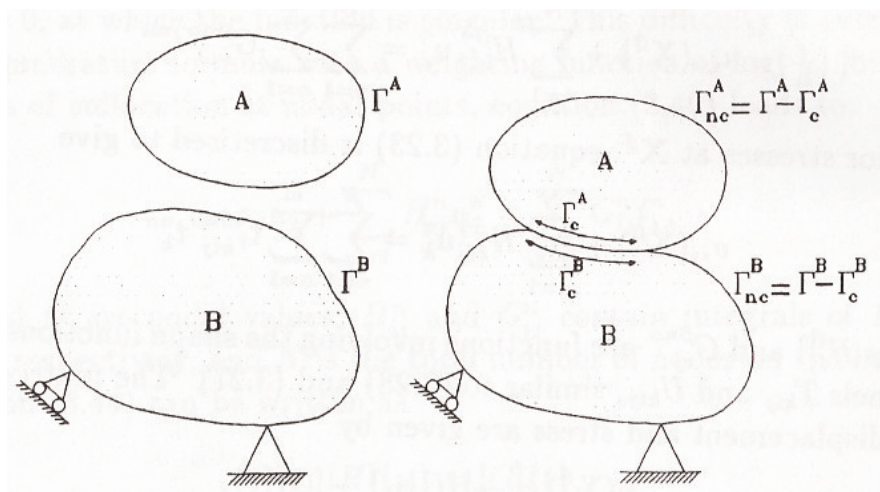


Figura 4.1: Região de contato  $\Gamma_c$  e região sem contato  $\Gamma_{nc}$ , Man [6]

O contorno de contato  $\Gamma_c$  pode conter regiões de adesão *Stick* ( $st$ ), regiões de deslizamento *Slip* ( $sl$ ) e regiões de separação ( $sp$ ). Assim, o contorno  $\Gamma_c$  para os corpos  $A$  e  $B$  pode ser expresso como:

$$\Gamma_c^{A,B} = \Gamma_{st}^{A,B} + \Gamma_{sl}^{A,B} + \Gamma_{sp}^{A,B} \quad (4.3)$$

Supõe-se também que a força de atrito atuando ao longo da região de deslizamento segue a lei de atrito de Coulomb. A solução numérica de problemas de contato requer um modelo matemático para representar os corpos em contato. A equação integral de

contorno é formulada em termos das forças de superfície e deslocamentos no contorno do domínio elástico. Em locais onde forças de superfície são prescritas no contorno, os deslocamentos correspondentes são as incógnitas da equação integral de contorno, e vice-versa.

Se dois corpos sujeitos a uma carga externa estão em contato sobre uma área  $\Gamma_c$ , a deformação pode ser descrita por duas equações integrais acopladas, uma para cada corpo, como:

$$C_{ij}^A u_j^A + \int_{\Gamma_{nc}^A} T_{ij}^A u_j^A d\Gamma^A + \int_{\Gamma_c^A} T_{ij}^A u_j^A d\Gamma^A = \quad (4.4)$$

$$\int_{\Gamma_{nc}^A} U_{ij}^A t_j^A d\Gamma^A + \int_{\Gamma_c^A} U_{ij}^A t_j^A d\Gamma^A \quad (4.5)$$

$$C_{ij}^B u_j^B + \int_{\Gamma_{nc}^B} T_{ij}^B u_j^B d\Gamma^B + \int_{\Gamma_c^B} T_{ij}^B u_j^B d\Gamma^B = \quad (4.6)$$

$$\int_{\Gamma_{nc}^B} U_{ij}^B t_j^B d\Gamma^B + \int_{\Gamma_c^B} U_{ij}^B t_j^B d\Gamma^B \quad (4.7)$$

Para obter uma solução numérica para o problema das equações integrais de contorno (4.5) e (4.7), os contornos dos corpos  $A$  e  $B$  são discretizados separadamente. Isto produz dois conjuntos de equações (um para  $A$  e um para  $B$ ), dadas por:

$$c_{ij}^A u_j^A + \sum_{n=1}^N H_{ij}^{nA} u_j^{nA} = \sum_{n=1}^N G_{ij}^{nA} t_j^{nA} \quad (4.8)$$

$$c_{ij}^B u_j^B + \sum_{m=1}^M H_{ij}^{mB} u_j^{mB} = \sum_{m=1}^M G_{ij}^{mB} t_j^{mB} \quad (4.9)$$

onde  $N$  e  $M$ , respectivamente, são o número total de nós dos corpos  $A$  e  $B$ . Dois conjuntos de equações lineares são obtidas. Elas podem ser expressas na forma de uma matriz como:

$$[H]^A \{u\}^A = [G]^A \{t\}^A \quad e \quad [H]^B \{u\}^B = [G]^B \{t\}^B \quad (4.10)$$

Os vetores de  $\{u\}^{A,B}$  e  $\{t\}^{A,B}$  representam valores de deslocamentos e forças de superfície nos contornos dos corpos  $A$  e  $B$ . Na região de contato, os dois sistemas de equações compartilham as variáveis de contorno do problema, ou seja, as equações são acopladas e devem ser resolvidas simultaneamente para qualquer dada combinação de carga externa e condições de contato. Se as condições de contorno, dentro e fora de qualquer região de contato são implementados, a equação (3.3) pode ser reduzida para o sistema unificado de equação dado por (3.4). Para problemas lineares, uma vez que este sistema de equações foi resolvido, a solução final para os deslocamentos e forças de superfície em todos os lugares sobre os contornos podem ser obtidos.

Entretanto, os problemas de contato podem ser não lineares e a extensão da zona de contato pode ser desconhecida, mas deve ser determinada como uma parte da solução. Isto significa que alguns problemas de contato exigem um procedimento iterativo de solução. Durante o processo iterativo, coeficientes de  $[A]$  e  $\{b\}$ , derivados a partir do interior da zona de contato, podem ser alterados de uma iteração para outra. O número de mudanças na matriz  $[A]$  é pequeno, dado que o número de elementos que necessitam alterações nas condições de contato é geralmente uma fração pequena do total. De acordo com procedimentos normais, todo o sistema de equações teria de ser reordenado para a próxima iteração, de modo a acomodar as alterações na zona de contato e em seguida atualizar a matriz  $[A]$ . A repetição deste procedimento, até que a solução final é encontrada, seria ineficiente e caro.

A fim de resolver o sistema de equações atualizado de forma eficiente, sem recorrer a uma reformulação da matriz de todo o sistema, é necessário manter as variáveis desconhecidas na zona de contato potencial separadas das incógnitas fora dela. Esta técnica pode acelerar consideravelmente a solução iterativa. Uma vez que a atual zona de contato pode ser desconhecida, é essencial que uma zona de potencial contato a ser escolhida seja maior do que a região de contato final. Para as zonas de contato potenciais, as equações obtidas a partir das condições de contato tem que ser expressas de forma explícita, de modo que elas possam ser separadas daquelas fora da zona de contato. Desta forma, um coeficiente de sub-matriz  $[A_c]$ , pode ser configurado para as variáveis da região de contato (potencial). Esta separação de incógnitas permite que a equação (4.8) seja reescrita como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} H_{nc}^A - G_{nc}^A & H_c^A - G_c^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_c^B - G_c^B & H_{nc}^b - G_{nc}^B \\ 0 & & D_c & 0 \end{bmatrix} \{x\} = [b] \quad (4.11)$$

Os subscritos de  $nc$  e  $c$  denotam zonas de não-contato e contato (real ou potencial), respectivamente.

Se os número totais de nós fora da zona de contato potencial dos corpos  $A$  e  $B$  são  $N_{nc}^A$  e  $M_{nc}^B$  respectivamente, isto resulta em  $2(N_{nc}^A + M_{nc}^B)$  equações lineares, uma vez que existem duas incógnitas por nó. No interior da zona de contato em cada nó de contorno, ambas as componentes de força de superfície e os dois componentes de deslocamentos são desconhecidos. Assim, para um par de nós de contato existem oito incógnitas. Para calcular estas oito incógnitas, oito equações são fornecidos pela consideração da compatibilidade de deslocamento e equilíbrio de forças de superfície na interface de contato. Essas equações de compatibilidade e de equilíbrio podem ser obtidas explicitamente para cada par de nós com potencial de contato, considerando o

estado do contato do par do nó em si com seus pares de nós vizinhos imediatos.

Um sistema de equações de contato pode, então, ser obtido na forma de matriz, de modo que eles podem ser facilmente incorporados no conjunto da matriz final. A região de contato pode conter uma combinação de separação, adesão e deslizamento de pares de elementos. A ordem na qual eles ocorrem, depende do problema envolvido. O sistema de equações de contato, portanto, têm que ser formulado para lidar com qualquer situação possível.

O sistema de equações de contato é escrito em termos de um sistema de coordenadas local com as normais unitárias exteriores tomadas como sendo positivas. Estas equações de contato podem ser descritas como *condições de contorno* dentro da região de contato para todos os pares de elementos de contato potenciais.

## 4.2 Decisão do Estado de Contato

A verificação do estado de contato, em qualquer fase, é baseada nas decisões de contato mostrados a seguir para um par de nós de contato  $a$  e  $b$ . Primeiro deve verificar se os pares separados permanecem separados ou se entram em contato e vice-versa. Deve notar que a violação representa uma incompatibilidade geométrica e não deve ocorrer em qualquer fase dos cálculos.

Nas fórmulas a seguir,  $t$  e  $u$  representam força de superfície e deslocamento e  $\Delta t$  e  $\Delta u$  são a variação incrementais deles. Os subscritos  $n$  e  $t$  são referentes à direção normal e tangencial,  $m-1$  representa as condições iniciais e  $m$  denota a situação depois da aplicação de uma carga adicional.

### 1. Separação ou Contato:

- Considera-se que os corpos separados continuam separados, se tiver:

$$(\Delta u_n^a + \Delta u_n^b)^m < g_0^{m-1}$$

sendo  $g_0$  é a distância entre nós correspondentes dos corpos A e B. Caso contrário, os corpos entram em contato, ou seja:

$$(\Delta u_n^a + \Delta u_n^b)^m \geq g_0^{m-1}$$

- De outra forma considera-se que os corpos em contato continuam em conato caso:

$$t_n^{m-1} + \Delta t_n^m < 0$$

caso contrário, os corpos perdem o contato, ou seja:

$$t_n^{m-1} + \Delta t_n^m \geq 0$$

## 2. Adesão ou Deslizamento:

Depois de conhecer o estado de separação ou contato entre os corpos, se ocorrer contato, deve aplicar as fórmulas a seguir para diferenciar adesão e deslizamento para aqueles pares de nós que estão em contato. A detecção é feita sobre esses pares de nós por violação de equilíbrio de tração tangencial e normal. Essa violação geralmente implica que a continuidade de tração sobre a região de contato foi violada. Neste caso, uma redistribuição da tração é necessária. Qualquer redistribuição de tração no interior da região de contato é alcançada por meio da variação das dimensões das regiões de adesão e deslizamento.

Nesse caso basta considerar os corpos no estado de adesão e verificar a validação da fórmula a abaixo:

$$|t_t^{m-1} + \Delta t_t^m| \leq |\mu(t_n^{m-1} + \Delta t_n^m)|$$

se a fórmula foi válida, os corpos continuam no estado de adesão. Caso contrário, se tiver:

$$|t_t^{m-1} + \Delta t_t^m| \geq |\mu(t_n^{m-1} + \Delta t_n^m)|$$

os corpos vão deslizar um sobre outro.

De fato, a determinação de uma região ótima de adesão/deslizamento constitui um dos processos iterativos da presente análise numérica. Nesta fase, se as condições de adesão ou deslizamento de pares de nós foram violadas, elas deverão ser corrigidas pela reconfiguração para o modo novo de contato calculado. Neste estado novo de contato, a carga incremental ( $\Delta P^m$ ) pode ser reajustada de modo que apenas um novo par de nós entram em contato. Em seguida as soluções recalculadas têm que ser reexaminadas uma vez mais ao longo da região de contato inteira. Um novo incremento de carga é permitido somente se ambos os processos iterativos estão completamente satisfeitos.

## 4.3 Implementação Computacional do Método dos Elementos de Contorno

A implementação computacional do método dos elementos de contorno nesse trabalho foi realizada através do programa *MATLAB*<sup>®</sup>. O programa de elementos de contorno desenvolvido, chamado *Elast\_qua* (Análise de Elasticidade com elementos quadráticos) é constituído de etapas básicas como:

- Definição de dados do problema a ser analisado, como geometria, propriedades do material, condições de contorno e discretização;



- Visualização de características do problema que será analisado, como geometria, malha de elementos de contorno, forças aplicadas e restrições de deslocamento;
- Construção das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  de influência de elementos de contorno;
- Montagem do sistema linear de equações através da aplicação das condições de contorno;
- Resolução do sistema linear, obtendo-se o vetor de soluções;
- Visualização dos resultados obtidos, através de geometrias deformadas e mapas de cores para grandezas como deslocamentos e tensões;

O conjunto de funções implementadas é mostrado no fluxograma da figura (4.2)

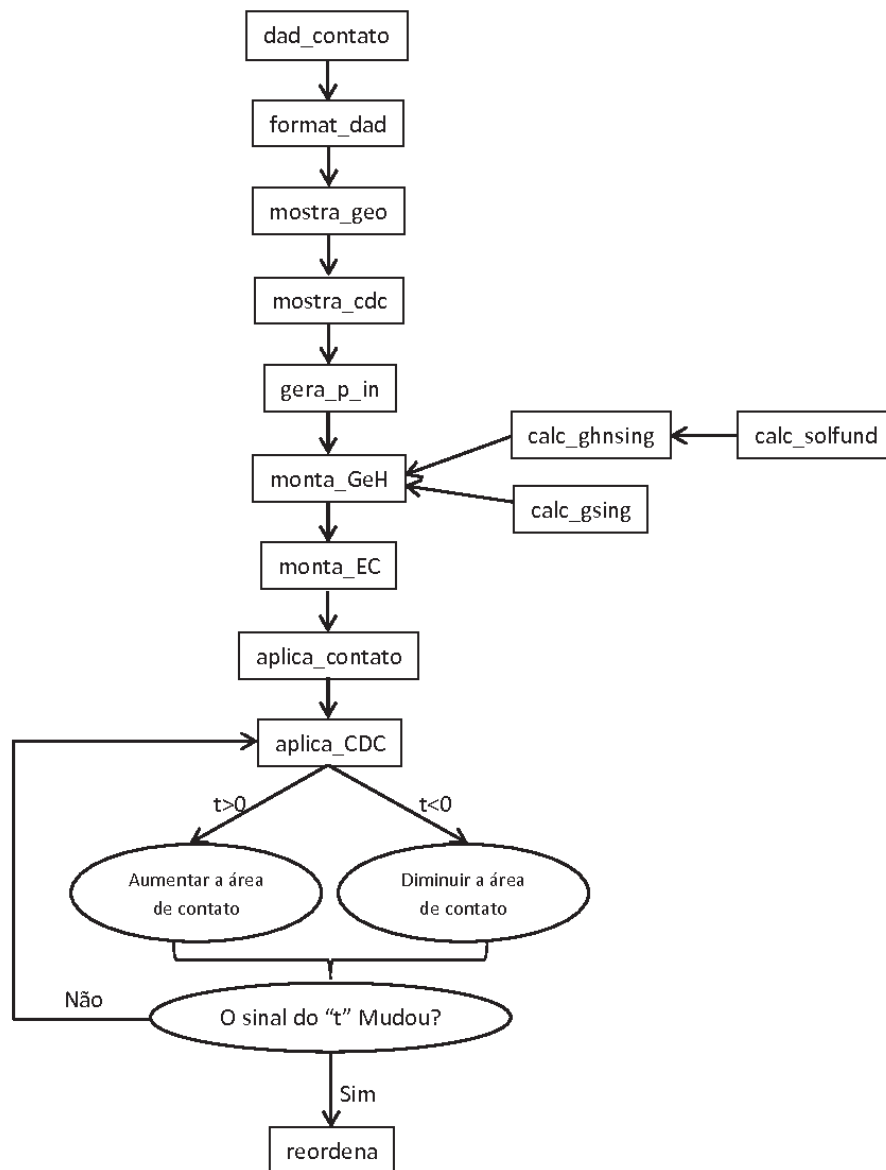


Figura 4.2: Fluxograma do programa Elast\_qua

Na seqüência é feita uma descrição dessas funções, que constituem o programa *Elast\_qua*.

**dad\_contato.m:** é o arquivo de dados para definição de um problema de elasticidade bidimensional. A geometria é definida pela matriz PONTOS, que contém as coordenadas de todos os pontos básicos, e pela matriz SEGMENTOS, que define as linhas da geometria a partir dos pontos já definidos. A discretização é definida na matriz MALHA, que contém o número de elementos em cada linha. As condições de contorno de deslocamento prescrito e as condições de contorno de forças de superfície são definidas pela matriz CCSeg. As propriedades do material utilizado para a análise são definidas pelas variáveis  $E$ , para o módulo de elasticidade e  $\nu$ , para o coeficiente de Poisson.

**formata\_dad:** essa função é responsável pela transcrição dos dados de entrada dos problema em um conjunto de dados que pode ser utilizado de forma mais eficiente durante a análise. Assim, o conjunto de dados inicial, que tem forma amigável para um usuário é transformado num conjunto de dados que pode ser lido de forma mais rápida pelo programa. Essa função cria as matrizes NOS (coordenadas nodais), ELEM (conectividade dos elementos) e CDC (condições de contorno por elemento).

**mostra\_geo:** essa função mostra a geometria do problema e a malha de elementos de contorno, através de funções gráficas do *MATLAB*<sup>®</sup>.

**mostra\_cdc:** essa função mostra as condições de contorno do problema, utilizando o símbolo de seta para forças de superfície aplicadas e o símbolo de triângulo para deslocamentos restritos.

**gera\_p\_in:** essa função gera de forma automática um conjunto de pontos internos ao domínio do problema em estudo. De início, é criada uma rede regular de pontos sobre a geometria, e depois cada ponto criado é testado por um algoritmo que verifica se o ponto é interno ou externo ao domínio. Caso o ponto seja interno, este é adicionado em uma matriz chamada PONTOS\_INT, que contém as coordenadas dos pontos internos. O algoritmo de verificação é baseado na contagem do número de interseções entre o contorno do problema e um semi-reta que tem origem nos pontos interno e é traçada na direção vertical. Caso o número de interseções seja ímpar, o ponto é interno, caso contrário, é externo.

**monta\_GeH:** essa é a função mais importante do programa *Elast\_qua*, uma vez que é responsável pela construção das matrizes de influência H e G, que descrevem o comportamento do problema em estudo. É utilizada a técnica RISP (Reusable Intrinsic Sample Point) que consiste na construção das matrizes H e G por colunas, isto é, um elemento é fixado e todos os pontos fontes são percorridos. Essa técnica permite uma análise mais rápida do problema, quando comparada com a técnica padrão que fixa um

ponto fonte e percorre os elementos, uma vez que não é necessário recalculá-lo o valor do Jacobiano, dos pontos campo e do vetor normal ao elemento em cada iteração. A integração é feita numericamente utilizando-se 8 pontos de Gauss

Essa função faz chamada das funções `calc_ghnsing`, `calc_fforma`, `calc_dfforma`, `calc_solfund` e `calc_gsing`

**calc\_fforma:** é a função responsável pelo cálculo das 3 funções de forma para o elemento de contorno quadrático contínuo. Tem como entrada o valor da variável intrínseca do elemento e como saída, as três funções de forma para essa coordenada intrínseca.

**calc\_dfforma:** essa função calcula as derivadas das funções de forma,  $N_i$  em relação ao  $d\xi$ .

**calc\_ghnsing:** é a função responsável pelo cálculo das integrais  $h$  e  $g$ , correspondentes ao produto entre funções de forma, Jacobianos e soluções fundamentais, quando não existe singularidade, isto é, quando o ponto fonte não se encontra sobre o elemento sobre o qual a integração está sendo feita. A integração é realizada com 8 pontos de Gauss.

**calc\_solfund:** dados um ponto fonte e um ponto campo, essa função retorna o valor das soluções fundamentais de deslocamento e de forças de superfície para o caso de elasticidade bidimensional.

**calc\_gsing:** é a função responsável pelo cálculo da integral singular, que ocorre quando o ponto fonte da solução fundamental coincide com um dos nós do elemento em que está sendo feita a integração. A integração é feita através da divisão da solução fundamental e uma parte não singular, que pode ser calculada pelo método de Gauss padrão, e em outra parte, com singularidade logarítmica, que pode ser calculada pelo método de Gauss logarítmico.

**monta\_EC:** essa função calcula a distância entre os nós dos corpos que vão entrar em contato e monta uma matriz chamada  $h$ .

**aplica\_contato:** é a função que calcula os elementos iniciais e finais de cada seguimento e reordena as colunas de  $H$  e  $G$  para aplicação das condições de contorno.

**aplica\_CDC:** essa função faz a aplicação das condições de contorno do problema através da permutação de colunas entre as matrizes  $H$  e  $G$ . Como saída, essa função apresenta a matriz  $A$  e o vetor  $b$  do sistema linear que representa o comportamento do problema em estudo.

**reordena:** depois de obter a vetor  $x$ , a programa faz várias iterações para achar a posição onde o sinal de  $t$  que representa a força na superfície muda. Depois essa função reordena a matriz anterior e separa os deslocamentos e as forças de superfície.

## Capítulo 5 SIMULAÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com o programa implementado com elementos contornos quadráticos contínuos. O programa foi desenvolvido em linguagem *MATLAB*<sup>®</sup>.

Serão abordados os exemplos clássicos de contato sendo que alguns possuem solução analítica e outros possuem resultados disponíveis na literatura.

### 5.1 Exemplo 1: Bloco retangular em contato com plano elástico fixado nas direções $x$ e $y$ (atrito infinito)

Considerando um bloco retangular com altura de  $40\text{ mm}$  e largura de  $80\text{ mm}$  submetido a um carregamento vertical  $f$  igual  $5\text{MPa}$  por unidade de comprimento e pressão horizontal  $F$  igual  $15\text{MPa}$  por unidade de comprimento. Este bloco possui módulo de elasticidade  $E$  igual a  $130\text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson,  $\nu$  igual a  $0,2$ . Na superfície de contato todos os nós são fixados na direção  $x$  e  $y$  para simular o caso de coeficiente de atrito infinito.

Para simplificar o problema, só a metade do retângulo foi considerado no programa, pois como o problema é simétrico, o resultado também será o mesmo. As forças normal e tangencial são aplicadas simultaneamente.

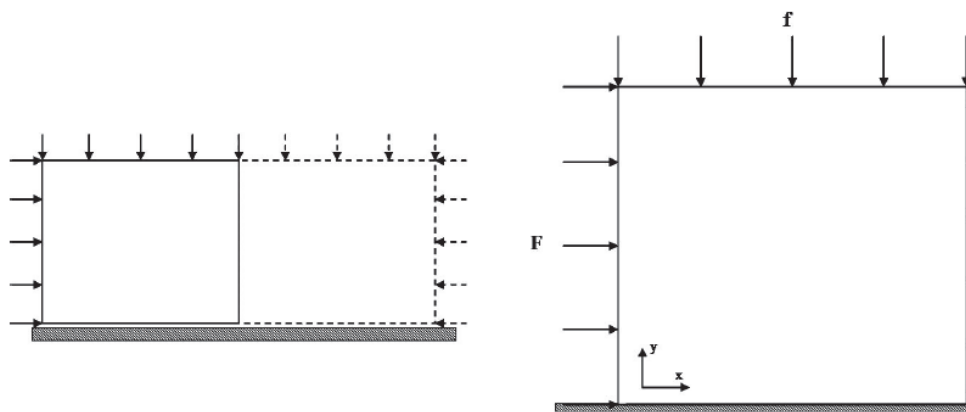


Figura 5.1: Geometria e condições de contorno do problema do bloco elástico com atrito infinito.

### 5.1.1 Resultados numéricos

Para ter um resultado mais refinado, foram considerados 40 elementos por cada aresta, 160 elementos no total.

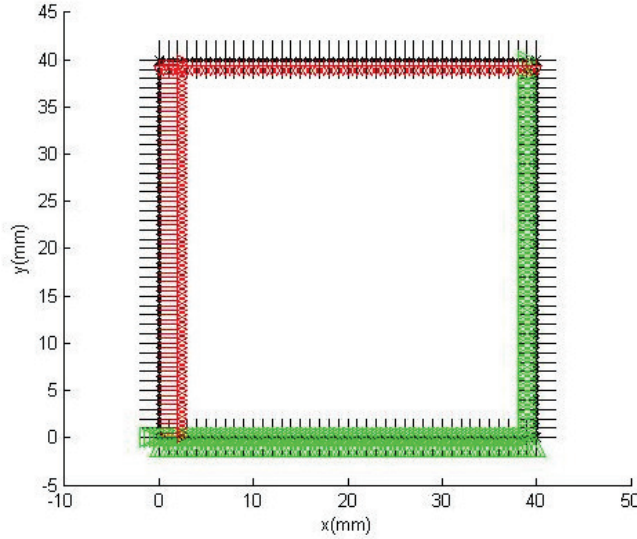


Figura 5.2: Condições de contorno

O deslocamento nas direções  $x$  e  $y$  na aresta inferior (região de contato) são iguais a zero pois o corpo está fixado nas duas direções. Por isso, o gráfico obtido não foi apresentado neste trabalho. O resultado obtido para tensão normal e cisalhante na região de contato é apresentado na figura 5.3 :

Pode-se notar na figura 5.3 que tanto a tensão de cisalhamento quando a tensão normal tendem a infinito no canto inferior esquerdo do bloco ( $x = 0$ ).

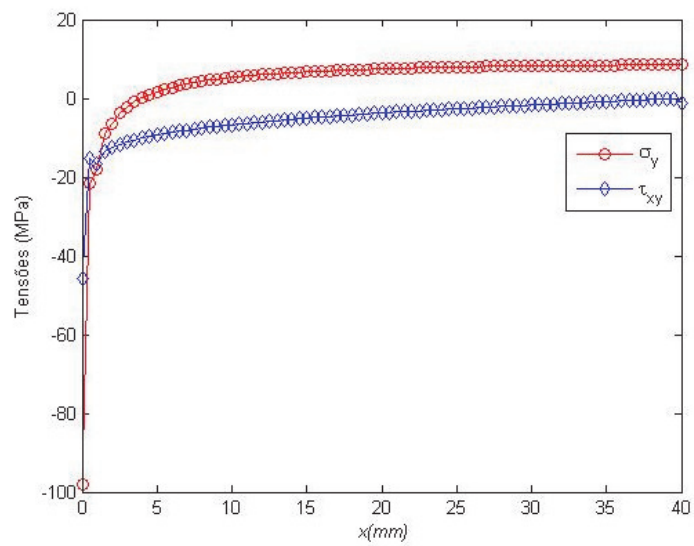


Figura 5.3: Tensões na região de contato  $\mu = \infty$

## 5.2 Exemplo 2: Bloco retangular elástico em contato com plano rígido fixado na direção $y$ (sem atrito)

No segundo problema, foi considerado o mesmo bloco do exemplo anterior na situação sem atrito, ou seja, somente fixado na direção  $y$ , na região de contato e livre na direção  $x$ . As propriedades do material e dimensão são iguais ao exemplo anterior.

### 5.2.1 Resultados numéricos

Como já era esperado, a tensão normal na região de contato é igual ao carregamento vertical distribuído no corpo e a tensão cisalhante é igual zero. O gráfico 5.4 mostra este resultado.

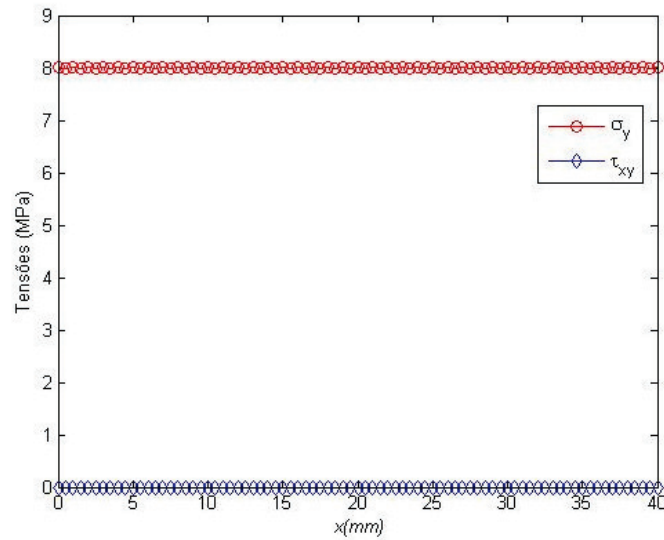


Figura 5.4: Tensão normal e cisalhante no contato considerando  $\mu = 0$

No caso do deslocamento, o corpo terá deslocamento nulo na direção  $y$ , pois está fixado nessa direção, mas terá deslocamento diferente de zero na direção  $x$ . O maior deslocamento vai ser no lado esquerdo do corpo. O deslocamento varia linearmente ao longo do corpo e vai ser igual zero no lado direito do corpo.

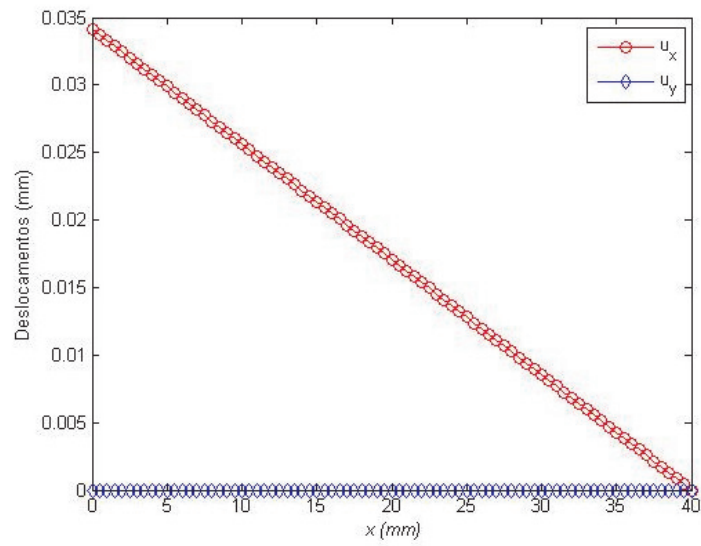


Figura 5.5: Deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  para o bloco em contato com uma superfície rígida sem atrito.



### 5.3 Exemplo 3: Cilindro rígido em contato com base elástica sem atrito

No terceiro caso, foi considerado um cilindro rígido com diâmetro de 70 mm em contato sem atrito com uma base elástica. O contato ocorre devido a uma força externa aplicada ao cilindro. Este problema é uma referência para problemas de contato, pois tem solução analítica de Hertz.

Da mesma forma que nos exemplos anteriores, aproveitamos a simetria do problema para simplificar a simulação e analisar somente a metade do cilindro. O cilindro tem módulo de elasticidade de 73,4 GPa e coeficiente de Poisson de 0,33. O corpo está submetido a uma carga de 100 N por unidade de comprimento.

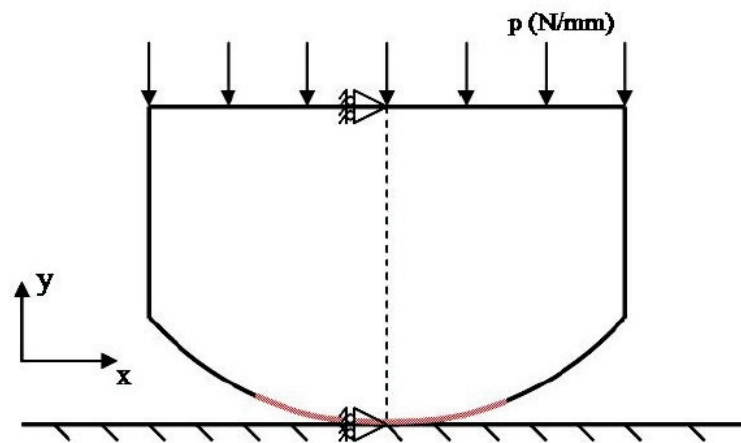


Figura 5.6: Condições de contorno do problema.

#### 5.3.1 Resultado numérico e comparação com a solução analítica

No problema de contato entre dois corpos não conformes, a região de contato entre os dois corpos é uma das incógnitas do problema. Para resolver este problema, são necessárias várias iterações para se definir quais partes da região com potencial para entrar em contato encontram-se no modo de adesão, no modo de deslizamento ou no modo de separação. Por isso, foi criado um algoritmo para achar a região de contato.

Para ter um resultado refinado foram usados 50 elementos na aresta de contato e 25 elementos nas outras arestas, 125 elementos no total.

A Figura 5.8 mostra o resultado obtido. A curva vermelha apresenta o resultado obtido com o programa implementado usando o MEC e a curva azul apresenta a solução analítica. O eixo  $x$  representa a distância em relação ao centro do cilindro e o eixo  $y$  representa a tensão de contato em MPa.

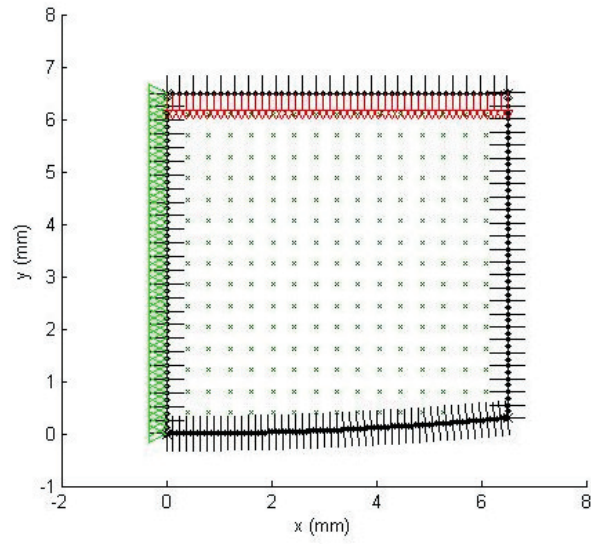


Figura 5.7: Malha e condições de contorno para o cilindro elástico em contato com uma base rígida sem atrito.

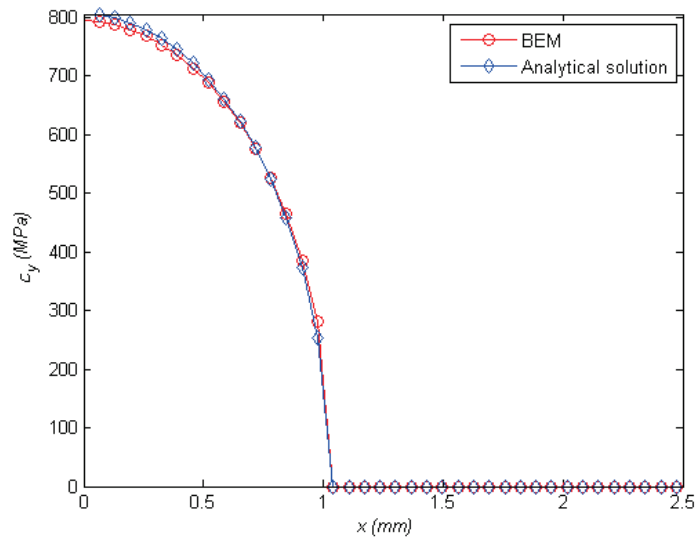


Figura 5.8: Comparação das tensões normais calculadas numericamente com a solução analítica.

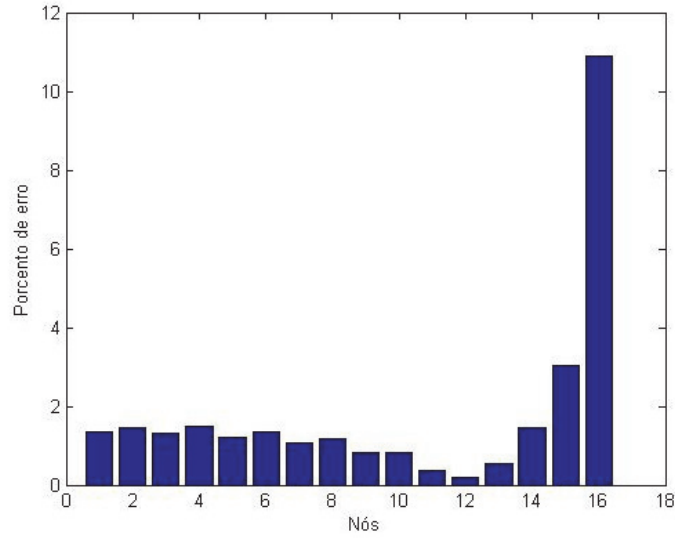


Figura 5.9: Erros percentuais entre os resultados numéricos e analíticos nos nós em contato.

A Figura 5.9 mostra os erros percentuais entre as tensões normais calculadas numericamente, através do método dos elementos de contorno, e a solução analítica de Hertz. Note que o erro se mantém abaixo de 2% em quase todos os nós, exceto nos dois últimos. A razão para o crescimento do valor dos erros nestes dois últimos nós se deve ao fato de que no método dos elementos de contorno, a região de contato é calculada de forma discreta, através da mudança do modo de contato dos nós (modo de contato para modo de separação e vice versa). Entretanto, na solução analítica de Hertz, a região de contato é contínua sendo que normalmente a mudança entre os modos de contato e de separação se dá em um ponto entre dois nós de malha de elementos de contorno.

## 5.4 Exemplo 4: Bloco retangular elástico em contato com plano rígido com atrito

O último problema a ser analisado com o programa implementado é o mesmo retângulo dos exemplos anteriores, desta vez com coeficiente de atrito igual 1, ou seja, na região de contato não tem nenhuma fixação nas direções  $x$  e  $y$ , mas tem atrito entre eles. Esse problema foi implementado por Feijóo [20] utilizando o MEF. Vale lembrar que o atrito unitário adotado é por motivo acadêmico, sem relação com problemas reais.

O corpo está submetido a um carregamento vertical de 50 N por unidade de comprimento e a um carregamento horizontal de 100 N por unidade de comprimento.

Este caso é mais complexo do que os exemplos anteriores, pois, como já foi explicado no capítulo anterior, vai ter regiões de separação, adesão e deslizamento.

### 5.4.1 Resultados numéricos

Usando as fórmulas apresentadas anteriormente na seção 4.2, considerando um retângulo com 96 elementos na aresta de contato, os gráficos abaixo foram obtidos. Além das curvas obtidas pelo programa, são mostradas as curvas obtidas pelo MEF no trabalho de Feijóo [20].

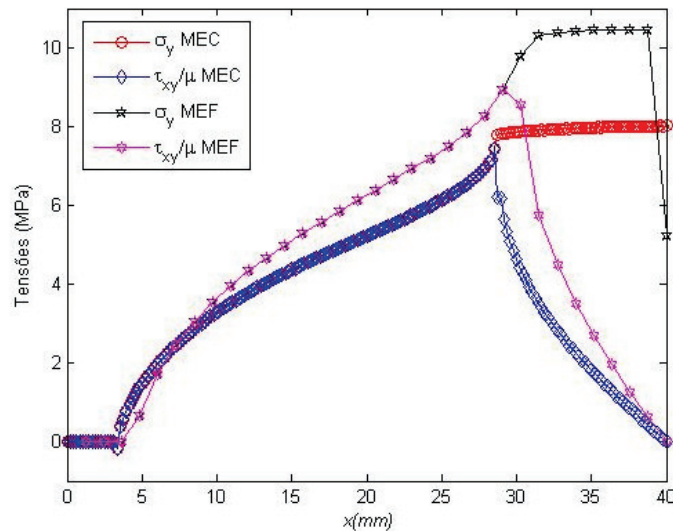


Figura 5.10: Tensão normal e cisalhante no contato conforme obtidas com  $\mu = 1$

Como pode-se constatar na figura 5.10, a curva pode ser dividida em três partes. A primeira parte onde as tensões são iguais a zero que é região de separação, a segunda parte onde as curvas de tensões são coincidentes que é região de deslizamento e a última

parte onde as curvas se separam que é região de adesão. No modo de adesão a tensão cisalhante tende para zero enquanto a tensão normal na direção  $y$  tende para o valor máximo.

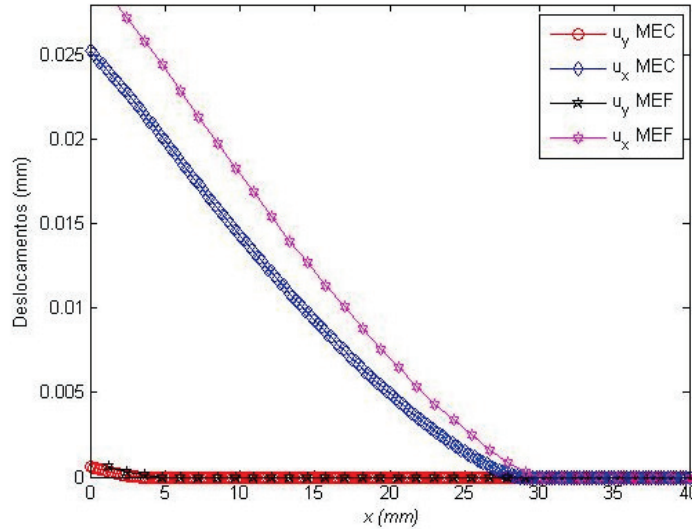


Figura 5.11: Deslocamentos no contato de corpo conforme com  $\mu = 1$

A figura 5.11 ilustra o deslocamento do corpo ao longo da superfície de contato. Observe que na direção  $y$  só tem deslocamento na região de separação enquanto na direção  $x$  tem deslocamento na aresta toda menos a região de adesão.

Comparando com resultados obtidos com os resultados de Feijóo [20], encontra-se uma boa concordância entre eles quanto a região de adesão, deslizamento e separação. Os resultados para os deslocamentos normais também apresentam boa concordância enquanto que os deslocamentos tangenciais calculados pelo método dos elementos finitos são superiores aos calculados pelo MEC. Grande diferença é encontrado nos valores das tensões. Entretanto, esta diferença é esperada, uma vez que o método dos elementos finitos calculam cargas nodais equivalentes enquanto que no método dos elementos de contorno o resultado calculado representa a pressão de contato. Portanto conclui-se o programa implementado tem validação adequada para ser utilizado em outros problemas de contato elástico.

## Capítulo 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste projeto de graduação foi feita uma análise de problemas de contato unilateral com e sem atrito. Primeiramente, o problema foi descrito física e matematicamente, enfatizando as condições e modelos de contato. Em seguida, um programa de elementos de contorno foi desenvolvido e implementado para a análise de problemas de contato unilateral. Foram obtidos, os deslocamento e a distribuição de tensões na região de contato que apresentou boa concordância com os resultados analíticos da teoria de Hertz.

No caso de contato com atrito, foram implementados algoritmos para definir as regiões de separação, adesão e deslizamento. Os resultados obtidos mostraram boa concordância com os resultados encontrados na literatura.

O presente trabalho demonstrou a capacidade do método dos elementos de contorno na análise do problemas de contato. O programa implementado na linguagem *MATLAB*<sup>®</sup> é fácil de utilizar e rápido de analisar. O programa conclui a análise em menos de 30 segundos apresentando gráficos de condições de contorno, tensões normais e cisalhantes, deslocamentos e mapas de cor de cada um deles.

Concluindo esse trabalho, como proposta para trabalhos futuros, é sugerido a extensão do código desenvolvido para outros casos de contato, tais como problemas de fadiga por fretting onde, além de contato entre os corpos, tem-se a propagação de trincas. Nesse contexto, o caso será estudado no mestrado sob orientação do Professor Sollero na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

## Referências Bibliográficas

- [1] K.L. Johnson, K.Kenneth. *Contact Mechanics*. Cambridge university press, 1987.
- [2] L.A. Galin. *Imprint of stamp in the presence of friction and adhesion*. PMM, 1945.
- [3] L.A. Galin. *Contact problems in the Theory of Elasticity*. North Carolina State College, Department of Mathematics, 1961.
- [4] H. Hertz. *On the contact of elastic solid*. Macmillan and Co. Ltd, London, 1896.
- [5] R.B. Waterhouse. *Fretting fatigue*. Elsevier Science Technology, 1981.
- [6] K. W. Man. *Contact Mechanics using Boundary Elements*. Computational Mechanics Publications, 1994.
- [7] N.I. Muskhelishvili. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Leyden, 1953.
- [8] I. Fredholm. *Sur unde classe d'équations fonctionells*. Acta Math. 27, pp. 365-390, 1903.
- [9] S.G. Mikhlin. *Integral Equations*. Pergamon, London, 1957.
- [10] V.J. Smirnov. *Integral Equation and Partial Differentioaç Equations*. Addison-Wesley, London, 1964.
- [11] J.C.F. Telles. *A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals*. international Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.24, pp 959?973, 1987.
- [12] A.H. Stroud, D. Secret. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall, 1966.
- [13] S. Timoshenko ; J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGRAW-HILL, 1951.
- [14] C.A. Brebbia; J. Dominguez. *Boundary elements. An introductory course. 2ª Edição*. Computational Mechanics Publications, 1992.

- [15] S. Takahashi. *Elastic Contact Analysis by Boundary Element*. Springer-Verlag, 1991.
- [16] G. Karimi. *A Boundary Element Method for Two-Dimensional Contact Problems*. Springer-Verlag, 1989.
- [17] J. H. Kane. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. Prentice Hall, 1994.
- [18] A. L. Serpa. *Problema de contato com atrito utilizando o Método do Lagrangiano Aumentado*. Dissertação de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1996.
- [19] F. A. G. Lourenço. *Análise de Reparos de Trincas Através do Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [20] R.A. Feijoo, H.J.C. Barbosa. *Numerical formulations for contact problems with friction*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, N.1, Vol.7, 1988.