

雷放電による上層大気の発光現象の発生機構の解明

著者	長野 勇
著者別表示	Nagano Isamu
雑誌名	平成10(1998)年度 科学研究費補助金 基盤研究(C) 研究成果報告書
巻	1997-1998
ページ	86p.
発行年	1999-03
URL	http://doi.org/10.24517/00049396



雷放電による上層大気の発光現象の発生機構の解明

(課題番号 09640530)

平成9年度～平成10年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))
研究成果報告書

平成11年3月

研究代表者 長野 勇 (金沢大学工学部教授)

金沢大学附属図書館



8000-73524-5

雷放電による上層大気の発光現象の発生機構の解明

(課題番号 09640530)

平成9年度～平成10年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))
研究成果報告書

平成11年3月

研究代表者 長野 勇 (金沢大学工学部教授)

目次

1. はしがき
2. 謝辞
3. 研究組織
4. 研究経費
5. 研究発表リスト
6. 研究成果報告

1. はしがき

本報告書は、平成9年度から平成10年度までの2年間にわたり、文部省科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))により行なった『雷放電による上層大気の発光現象の発生機構の解明』(課題番号09640530)の研究成果をまとめたものである。この研究は下記の研究組織および研究経費によって実施された。

2. 謝辞

本研究における Full Wave 計算法の開発、コーディング、デバッグおよび実行は金沢大学宮村 和俊君に負うところが非常に大であり、感謝する。

3. 研究組織

研究代表者 長野 勇 金沢大学工学部
研究分担者 八木谷 聡 金沢大学工学部

4. 研究経費

平成9年度	1,800	千円
平成10年度	600	千円
合 計	2,400	千円

5. 研究発表リスト

—本研究に直接関連する発表論文(付録C)—

- (a) 宮村和俊, 長野勇, 八木谷聡, 雷放電から放射される VLF 電磁界波形の Full wave 計算, 電子情報通信学会論文誌, **J80-B-II**, 5, 387-396, 1997.
- (b) 宮村和俊, 長野勇, 八木谷聡, 木村磐根, あけぼの衛星の低高度観測におけるオメガ電波強度分布の Full wave 計算による解析, 電子情報通信学会論文誌, **J80-B-II**, 7, 595-603, 1997.

—本研究に関連する発表論文—

- (a) I. Nagano, X.-Y. Wu, S. Yagitani, K. Miyamura, and H. Matsumoto Unusual whistler with very large dispersion near the magnetopause: Geotail observation and ray-tracing modeling, *J. Geophys. Res.*, **103**, A6, 11827-11840, 1998.
- (b) H. Matsumoto, H. Kojima, Y. Omura, and I. Nagano, Plasma waves in geospace: GEOTAIL observations, *AGU Monograph*, **105**, 261-322, 1998.
- (c) D. Shklyar, and I. Nagano, On the VLF wave scattering in plasma with density irregularities, *J. Geophys. Res.*, **103**, A12, 29515-29526, 1998.
- (d) S. Yagitani, I. Nagano, H. Matsumoto, and Y. Omura, W. R. Paterson, L. A. Frank, and R. R. Anderson, Wave and particle measurements for chorus emissions by GEOTAIL in the magnetosphere, *Adv. Space Res.*, (in press), 1999.

—本研究に関連する発表図書—

- (a) 長野勇, 他 13 名, 電波伝搬ハンドブック, リアライズ社, pp.407, 1999.

6. 研究成果報告

目次

第1章 諸論	1
1.1 電離層および磁気圏中の ELF/VLF 波伝搬	1
1.2 地球上層大気中の ELF/VLF 波の伝搬および電磁界計算の理論的手法	3
1.2.1 地上もしくは地上付近の波源からの電波の伝搬および電磁界計算	3
1.2.2 電離層中の波源からの電波の伝搬および電磁界計算	5
1.2.3 電離層プラズマ中のパルス電磁波の伝搬計算	6
1.3 本研究の目的と本報告の構成	6
第2章 地上のダイポール波源による電離層中の電磁界強度分布の計算	8
2.1 はじめに	8
2.2 計算手法	9
2.2.1 計算モデル	9
2.2.2 自由空間中のダイポール波源からの放射電磁界	9
2.2.3 平面素波の full wave 計算	10
2.2.4 平面素波電磁界の積分	12
第3章 雷放電により発生する ELF/VLF 電磁界の Full wave 計算	14
3.1 はじめに	14
3.2 雷雲-地上間雷放電および雷雲内放電	16
3.3 電磁界波形の計算手法	18
3.3.1 計算モデル	18
3.3.2 自由空間中の伝送路電流からの放射電磁界波形	18
3.3.3 各周波数における平面素波の full wave 計算	21
3.3.4 時間に関するフーリエ変換による電磁界波形の計算	23
3.3.5 波源電流の直流成分の取り扱い	23
3.4 電磁界波形の計算結果	26
3.4.1 計算に用いた種々のパラメータ	26
3.4.2 電磁界分布の時間変化	29

3.4.3	雷放電電流の時定数と電磁界波形との関係	37
3.4.4	雷放電電流パルスの移動速度と電磁界波形との関係	37
3.4.5	雷放電電流の終端高度と電磁界波形との関係	41
3.4.6	水平方向の雷放電による電磁界波形	44
3.5	ロケットによる雷雲上空の電界波形の観測結果との比較	51
3.6	雷放電に伴う下部電離層の発光現象との関係	55
3.6.1	雷放電に伴う下部電離層における発光現象	55
3.6.2	Sprites および Elves の発生機構と雷放電による電磁界との関連性	55
3.7	まとめ	62
第4章	結論	64
4.1	本研究のまとめ	64
4.2	将来への課題	65
	参考文献	66
	付録 A 球面波の平面波展開の手法に関する考察	72
	付録 B 中間圏および電離層における電界と大気発光との関係	76
	付録 C 発表論文	79

第 1 章

諸論

1.1 電離層および磁気圏中の ELF/VLF 波伝搬

電磁気学的に地球の上層大気は，地表から高度約 50 km までを自由空間 (free space) と，太陽からの X 線や紫外線により大気が電離されて電子密度が高くなっている高度約 60 km から高度約 500 km までを電離層 (ionosphere) と，それ以上を磁気圏 (magnetosphere) とおよそ分けることができる．磁気圏は上層大気と呼ばれる範囲を越えて地球の昼側では地球半径の 10 倍，夜側では地球半径の 20 倍以上の領域まで広がっており，それより外側は惑星間空間 (interplanetary space) と呼ばれている．

地上もしくは電離層下の自由空間中から自然もしくは人工的に放射された ELF/VLF 電波の大部分は，下部電離層 (高度 60~100 km) で反射されて地表-電離層によって形成される導波管内を伝搬する．この伝搬特性を活かして船舶などのナビゲーションに VLF 電波を利用したのがオメガシステムである．また，自然電磁波の主な発生源の 1 つである雷放電から放射された ELF/VLF 波が地表-電離層導波管内を伝搬したものが，よく知られる空電 (atmospherics) と呼ばれるものである．

一方，放射された ELF/VLF 電波の一部は下部電離層を透過して電離層プラズマとの相互作用によりホイストモード波になり，地球磁力線に沿って上部電離層を経て磁気圏へと伝搬する (図 1.1 参照)．さらに，地球磁力線に沿ってもしくはダクト (duct) と呼ばれる地球磁力線に沿って電子密度が周辺より高くなっている領域内を伝搬する ELF/VLF 波は高度数 1,000 km で赤道面を横切って，電波が放射された地点をつらぬく地球磁力線の反対半球での到達点である磁気共役点付近に至る．ELF/VLF 電波が赤道面を横切るとき，波動-粒子相互作用により電子が加速されて電離層下部にまで降り込む現象 (electron precipitation) や加速された電子から二次的に ELF/VLF 電波が放射される現象などが起こることも分かっている．

反対半球の電離層に到達した ELF/VLF 電波の一部は下部電離層を突き抜けて地上に達し，地上の観測局などで受信される．この電波は伝搬してきた経路の媒質情報を含ん

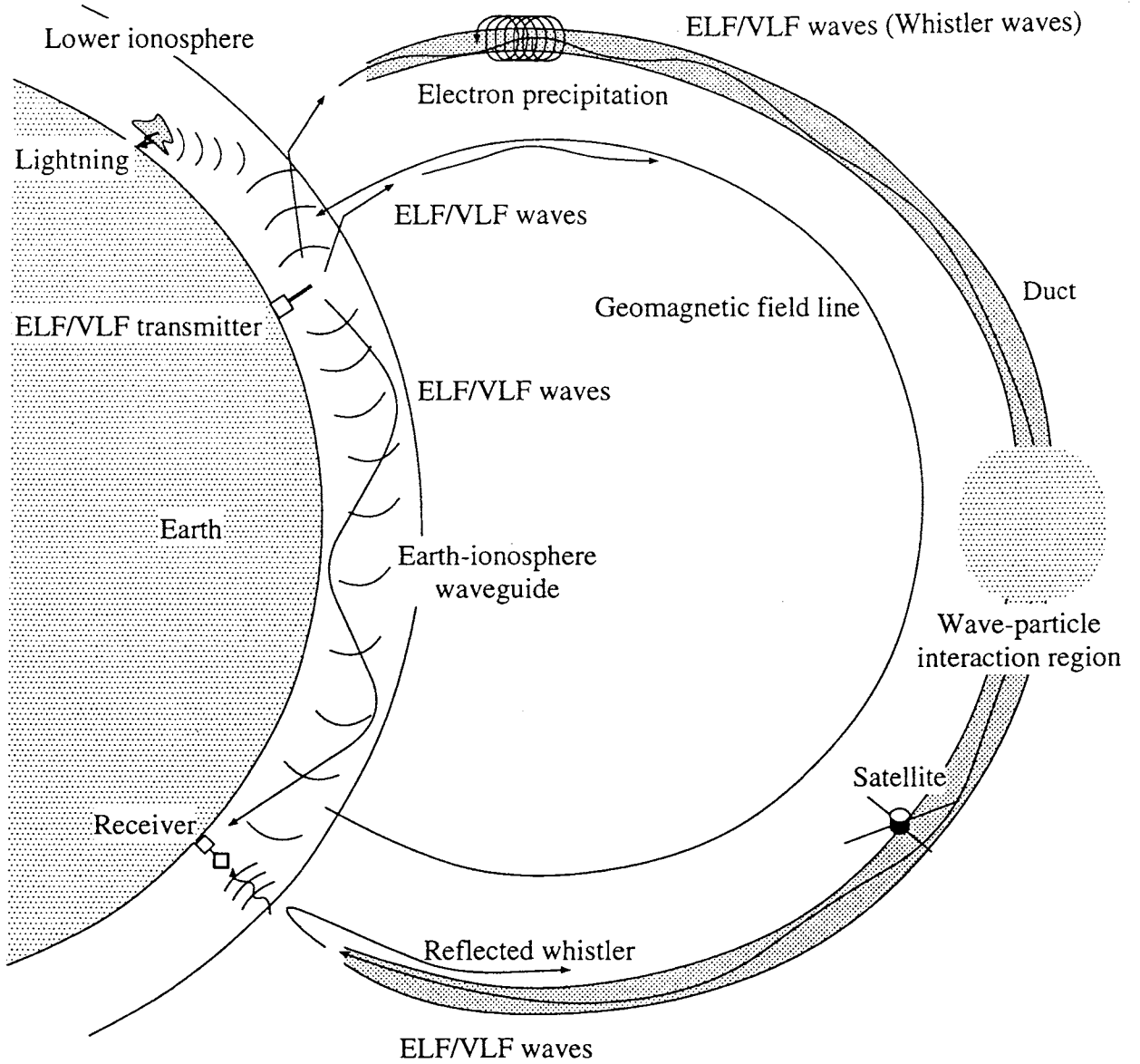


図 1.1 電離層および磁気圏中の ELF/VLF 電波伝搬の概念図

でいるため、これを解析することは非常に有用である。また、反対半球の電離層に届いた ELF/VLF 電波の多くは、ここで反射して再び元の半球に向かって伝搬することになる。このような伝搬経路の往復を繰り返すホイストラ波動は科学衛星でも多く観測されている。

このように、電離層および磁気圏中を伝搬する ELF/VLF 電波はこれらの領域を満たすプラズマ粒子や地球磁場と深く結びついて様々な興味ある現象を引き起こす。したがって、これらの ELF/VLF 電波を地上やロケット、科学衛星などで観測することにより、電波の伝搬機構だけではなく電離層や磁気圏のプラズマ密度や地球磁場などの大域的な構造、プラズマ粒子と電磁波との相互作用のメカニズム、これらの領域の電磁気学的エネルギーの流れなど、地球周辺の電磁気環境の詳細を明らかにすることができる。

1.2 地球上層大気中の ELF/VLF 波の伝搬および電磁界計算の理論的手法

1.2.1 地上もしくは地上付近の波源からの電波の伝搬および電磁界計算

地上もしくは地上付近の自由空間から放射された ELF/VLF 波の自由空間や電離層、磁気圏中の伝搬を理論的に計算する手法は対象とする領域によって異なる。

地上および電離層下の自由空間中の電磁界強度は、主に地表面と電離層によって形成される導波管のモード理論によって求められている。*Wait* は、平坦もしくは球面状の地表面および電離層を仮定し、下部電離層を均質な等方性媒質とみなして導波管モードによる解析により地上および自由空間中の電磁界強度を求めた [1]。さらに、*Galejs* により地表面および自由空間を球面状ではなく円筒形状とみなすかわりに、電離層を任意方向の静磁場を含んだ多層の異方性媒質として取り扱うことができる導波管モードによる解析によりダイポールアンテナなどの点波源から放射された電離層下の VLF 波の東西伝搬による電磁界強度が求められている [2]。ただし、電離層中の電波伝搬に対しては電離層を平面層状媒質と近似している。

一方、高度 300 km より上の電離層および磁気圏中の VLF 波の伝搬については、この領域のプラズマ媒質の空間変化が ELF/VLF 波の波長に比べて十分にゆるやかであるため、WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) 近似 [1] が成立する。したがって、電離層もしくは磁気圏中の各点の媒質によって決まる分散関係式から波の群速度ベクトルを求めることで、空間的な媒質の変化に応じた波の伝搬経路を求めていくレイトレーシングの手法 [3], [4] が一般的である。また、このように波源から遠い領域の解析で、電波の到来の有無を明らかにすることに重点が置かれ、電波の絶対強度まで求めることが必要とされない場合には、波源からの電波の指向性など波源の形状に依存する部分を考慮しないレイトレーシングの手法で十分であると言える。

それに対して、下部電離層から高度 300 km 程度までの領域については、プラズマ媒質の密度の空間変化が急峻であるために WKB 近似が成立せず、伝搬過程において媒質の不均質によって生じる分反射やモード結合を考慮しなければならない。したがって、この領域を伝搬する ELF/VLF 波による電磁界を正確に求めるためには、Maxwell の方程式を厳密に解くしかない。これがいわゆる full wave 法である。この full wave 法は、水平方向には均質で垂直方向にのみ変化する媒質中の電磁界が満たす 1 階線形微分方程式を直接積分する数値積分法と、電離層プラズマ媒質を高度方向に多層に分割したモデルを採用し、各層で成立する Maxwell 方程式から得られる電磁界を各層間の境界条件によって接続して解く均質多層分割法 (multi-layered method) とに大きく分けられる。

数値積分法において *Pitteway* は、それまで自由空間中の独立した 2 つの直線偏波で電磁界のモードを分離していたものを、電離層中の ELF/VLF 波伝搬における物理的解釈に合う透過波モード (penetrating mode) と非透過波モード (non-penetrating mode) に分離する方法で解いた [5]。この方法では、電離層上部から下部に向けて積分するときに透過波と非透過波の電磁界ベクトルを直交化することで、非透過波の振幅の増大による透過波の数値埋没を防ぐことに成功している。

一方、均質多層分割法においては、層中の特性波の伝搬を表す 4×4 行列の乗算を用いて各分割層で解析的に得られる特性波を各層の上下端で境界条件より接続する方法が *Price* によって提案された [6]。しかし、エバネッセントモードが存在する領域における数値不安定性が存在した。そこで、長野らにより *Price* の均質多層分割法 [6] に *Pitteway* のモード直交化の手法 [5] を取り入れてエバネッセントモード波による数値埋没を起こさずに電磁界を求める計算法が開発された [7]。

これらの full wave 計算法は 1 つの伝搬ベクトルで決まる 1 つの平面波を取り扱うものである。しかし、ダイポールアンテナなどから放射される電磁波は平面波ではない。そこで、*Price* により、ダイポール波源から放射される球面波を伝搬ベクトルの方向で特徴づけられる平面素波の積分の形式で表し、被積分関数である平面素波電磁界の電離層伝搬に均質多層分割法を用いることが提案された [8]。この手法にもとづいて、*Nunn* は地上の垂直および水平アンテナから放射される ELF 電波によって下部電離層に形成される電磁界分布を実際に数値計算した [9]。しかし、電離層中の伝搬における数値埋没への対応が不十分であったため、高度 100 km 以下の電磁界分布しか得られていない。

そこで長野らは、電離層中の平面素波の伝搬計算にエバネッセントモードによる数値埋没の問題を解決している full wave 法 [7] を適用し、同じく球面波を平面素波で展開する方法で、地上にダイポール波源がある場合の電離層中の電磁界分布を求めることに成功した。そして、電離層中に打ち上げられたロケット上 (高度 60~120 km) で観測された地上送信局からの VLF 電波の強度が説明された [10]。

1.2.2 電離層中の波源からの電波の伝搬および電磁界計算

電離層中を通過する科学衛星上のアンテナから直接に放射された ELF/VLF 電波や HF 電波によって加熱された下部電離層から二次的に放射される ELF/VLF 電波を地上や衛星で受信する実験がこれまで幾度となく行われている [11], [12]. このような実験の理論的解析として, 電離層プラズマ中にダイポール波源がある場合の地上および波源上空における電磁界強度を求める計算手法も発展してきている.

地上の電磁界については, *Einaudi* らが上部電離層と D 層付近にあたる下部電離層, 自由空間の3つの層と地表面を想定し, 波源が上部電離層中にあるとしてダイポール波源から放射される厳密な電磁界を導出し, 下部電離層を透過して地表-電離層間導波管に入射する成分を求め, そのうちの低次モード成分のみの導波管内の伝搬特性を得た [13]. それに対して *Galejs* は, 電離層を均質とし, 相対定理 (reciprocity theorem) [14] を用いて地上に波源がある場合の波源上空の電離層中の電磁界と地上に波源がある場合の波源から離れた地上の点の電磁界の計算結果から, 電離層中に波源がある場合の地表-電離層間導波管内の主要モードによる地上の電磁界を求めている [15]. また, *Tripathi* らは ELF 波について, 電離層を指数関数的に単調に導電率が変化する媒質とみなして WKB 近似を適用し, グリーン関数を用いて電磁界が満たす微分方程式を解析的に解く方法で TEM モードによる地上の電磁界強度を求めている [16]. しかし, WKB 近似の適用が妥当なものであるかは疑問が残るところである. これらはいずれも地表-電離層間導波管の主要伝搬モードしか取り扱っていないという点で共通している.

それに対して, *Pappert* は電離層を垂直方向に不均質とし, 電離層中のダイポール波源からの電磁界を平面波で展開してそれぞれの平面素波の電離層中の伝搬を *Pitteway* の数値積分法 [5] によって解き, これを地上で合成して導波管モード理論でいうすべてのモードを含んだ電磁界を求めている [17]. しかし, 波源真下の地上の点からの距離と電磁界強度との関係について得られた計算結果はかなりおおまかなものであった.

一方, 電離層中に ELF/VLF 波源がある場合の波源より上の電離層中の電磁界を求める試みもこれまでに多く行われている. 電子とプロトンからなる無損失均質コールドプラズマ中の微小電気および磁気ダイポール波源からの電波のプロトンサイクロトロン周波数から電子サイクロトロン周波数までの範囲における放射パターンが解析的に *Wang* らにより求められている [18]. ここで媒質の屈折率面の特性と放射パターンに現れる焦点効果 (focusing effects) の関係について議論されている.

Kondrat'ev らは, 均質磁化コールドプラズマ媒質中のループ電流からの低域ハイブリッド共鳴 (lower hybrid resonance: LHR) 周波数から電子サイクロトロン周波数までの範囲におけるホイストラモード波の放射抵抗と放射パターンを解析的に求めている [19]. 放射電力の波数 (屈折率) 空間表示を用いて, 外部磁場とのなす角が大きく比較的共鳴に近い成分である準静電的ホイストラモードと外部磁場とのなす角が小さい本来のホイストラモード成分,

それらの間に位置する中間成分とに分けて考え、それぞれの成分の放射抵抗とそのループ電流の半径への依存性や放射電力値の角度特性すなわち放射パターンについて明らかにしている。

一方、層状不均質プラズマ媒質中の波源からの放射電磁界およびその伝搬については *Habashy* らにより議論されている [20]。電束密度および磁束密度による電磁界表示と波数空間へのフーリエ変換 (kDB system) およびダイアディックグリーン関数を用いて均質プラズマ媒質中の波源からの電磁界を求め、多層媒質中の伝搬については透過行列と反射行列と呼ばれる行列の乗算で取り扱っている。しかし、一般式を示したのみで具体的な計算結果は示されていない。

そこで、*Habashy* らの手法 [20] と同様にダイアディックグリーン関数と波数空間へのフーリエ変換を用いて波源からの電磁界を平面波展開し、多層不均質電離層中の伝搬計算には full wave 法 [7] を適用して任意の層中の電磁界分布を求める手法が開発された [21], [22]。この手法は、波源より下の自由空間中や地上の電磁界分布と、波源より上の電離層中の電磁界分布とを同時に求めることができるという点が特長である。

1.2.3 電離層プラズマ中のパルス電磁波の伝搬計算

ここまで述べたのは単一周波数 (ELF/VLF) の電磁波による自由空間および電離層中の電磁界分布の計算手法である。これに対して、パルス状平面電磁波のプラズマ媒質中の伝搬に関しては、*Ginzburg* により個々の周波数成分の伝搬特性と時間-周波数に関する逆フーリエ変換とを組み合わせた手法を用いて議論されている [14]。また、*Zhang* らにより 1次元 Gaussian パルスの異方性不均質プラズマ中の伝搬を同じく時間-周波数に関する逆フーリエ変換を用いて右回り円偏波モード波と左回り円偏波モード波に分けた形で解かれている [23]。しかし時間-周波数に関するフーリエ変換を用いて 2次元以上の伝搬を取り扱った文献は見当たらない。一方、最近では Maxwell 方程式を差分化して直接に数値計算で解く FDTD (Finite Difference Time Domain) 法 [24] を用いて、分散性をもつ電離層などのプラズマ媒質中のパルス電磁波の伝搬を解く手法も開発されている [25], [26]。

1.3 本研究の目的と本報告の構成

本研究の目的は、自由空間中の雷放電電流 (パルスのな波源) からの ELF/VLF 電波の放射と自由空間および電離層中の伝搬の詳細を明らかにし、雷上空の上層大気において生じる Elves や Sprites 等の発光現象の成因を解明することである。

第2章において、これまでにすでに開発されている、均質多層分割法と球面波の平面波展開を用いて地上のダイポールアンテナから放射される VLF 電波による電離層中の電磁界分布を数値計算する方法 [10] について述べる。

第3章では、雷雲-地上間雷放電電流パルスから放射される ELF/VLF パルス電磁波による電離層および電離層下の自由空間中の電磁界強度分布の時間変化を数値計算する手法を述べる。これは、地上もしくは地上付近の ELF/VLF 波源を単一周波数のダイポールから伝送路電流パルスへと拡張したことになる。これは第2章で述べる単一周波数における手法に時間に関するフーリエ変換を組み合わせたものである。波源となる伝送路電流パルスを周波数スペクトルに分解して、それぞれの周波数成分に対して単一周波数波源の場合の手法を用いて電離層中の電磁界強度を計算して、電磁界強度の周波数スペクトルを得る。これを高速フーリエ変換 (FFT) を時間-周波数領域で用いて任意の点における電磁界の波形を求める。

そして、典型的な雷雲-地上間雷放電による電磁界分布の時間変化の計算結果、および電流パルス波形や電流パルスの移動速度、雷放電電流の終端高度、雷放電電流の方向などが電磁界分布の時間変化にどう影響するかを調べた結果を示す。また、雷雲上空に打ち上げられたロケットによる雷放電に伴う雷雲上空の電界波形の観測実験をモデルとした計算を行ない、その結果と実際の観測によって得られたホイストラ波形との比較および考察を行う。さらに、最近注目されている大規模な雷雲-地上間雷放電に伴う中間圏および下部電離層における発光現象について述べ、その発生メカニズムと関係が深いと考えられる雷放電によって発生する準静電界および ELF/VLF 電磁界について、本手法による数値計算結果を含めて議論する。

最後に、第4章にて本報告の結論と今後の研究課題について記述する。

第 2 章

地上のダイポール波源による電離層中の電磁界強度分布の計算

2.1 はじめに

VLF 電波の電離層および磁気圏中の伝搬機構や伝搬経路のプラズマ密度, 伝搬する VLF 波とプラズマ粒子との波動-粒子相互作用のメカニズム等を明らかにするために, 地上の電波標識用の VLF 送信局からの VLF 電波や南極の Siple 基地のようにその目的で放射された VLF 電波をロケットや科学衛星によって観測する実験が数多く行われている [27], [28], [29], [30]. これらの観測データを説明するためには, 地上の送信局から放射された VLF 波が衛星等の観測高度すなわち電離層や磁気圏中にどれくらい到達するのか, また, その電磁界強度分布はどのようなようになるのかを理論的に求めることが必要である.

地上の送信局からの VLF 電波は一般的にダイポールアンテナから放射される球面波であるが, *Mielke* らは Siple 局の送信アンテナからの VLF 波を平面波と近似し, 下部電離層と自由空間とが急峻な境界であると仮定して送信アンテナからの自由空間モードの VLF 波の電離層中におけるホイストラモード波へのパワー結合率を解析的に求めている [31]. しかし, 球面波であることによる $1/r$ の減衰や下部電離層の媒質の高度による連続的な変化が考慮されていないため, 定性的な結果を示すにとどまっている.

Nunn は地上のダイポールアンテナからの球面波を平面素波に展開し, 個々の平面素波に対しては均質多層分割法を適用して下部電離層媒質の高度変化を考慮して電離層中の電磁界を求めてこれを再合成する手法を開発し, 下部電離層中 (高度 100 km 付近) の電磁界強度分布を得ている [9]. しかし, エバネッセント波による数値埋没の問題 [5] への対応が不十分であるため, ほとんど完全にホイストラモードしか伝搬できない高度 100 km より高い領域の電磁界分布を求めるまでに至っていない.

それに対して, *Nunn* と同様の球面波の平面素波への展開 [9] と, 数値埋没を防ぐための電磁界ベクトルのエバネッセントモード波に対する直交化を含んだ各平面素波の電離層中

の伝搬を計算する均質多層分割法 (full wave 法) [7] を適用して, 地上の送信局からの VLF 電波の電離層の低高度領域 (高度 60~120 km) だけでなく衛星高度 (~1,000 km) における電磁界強度分布を求めることに成功した [10], [32].

本章では, 長野らが開発した地上のダイポール波源から放射された VLF 波による電離層中の電磁界強度分布の計算手法 [10] について述べる.

2.2 計算手法

2.2.1 計算モデル

地表-自由空間-電離層からなる系において, 電離層を電子と中性粒子からなるコールドプラズマ媒質とし, その電子密度と電子の中性粒子への衝突周波数は高度によってのみ変化し, 地表面に平行な方向には均質と仮定し, 電離層を垂直方向に多層に分割した平面層状不均質媒質とする.

2.2.2 自由空間中のダイポール波源からの放射電磁界

自由空間中の微小ダイポール波源によってできるヘルツベクトル Π は

$$\Pi = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi\epsilon_0 r} \mathbf{p} \quad (2.1)$$

で表される. ここで, k_0 は真空中の波数, r は波源から観測点までの距離, ϵ_0 は真空中の誘電率, \mathbf{p} は波源のダイポールモーメントである. $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{l}/j\omega$ と定義され, m はダイポール波源の方向を表す単位ベクトル, I は波源の電流値, l はダイポール波源の長さ, ω は角周波数である. ただし, 微小ダイポール波源なので $l \ll \lambda (= c/f)$ を満たすものとする. このヘルツベクトル Π を用いて電界 \mathbf{E} , および磁界 \mathbf{H} は次式で得られる.

$$\mathbf{E} = \nabla\nabla \cdot \Pi + \omega^2\epsilon_0\mu_0\Pi \quad (2.2)$$

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\nabla \times \Pi \quad (2.3)$$

ここで μ_0 は真空中の透磁率である.

自由空間中のダイポール波源から放射される電磁波はいわゆる球面波であるが,

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{r} = -\frac{jk_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.4)$$

を用いて次式のように平面素波電磁界に展開することができる [33].

$$\mathbf{E} = -\frac{jk_0}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \{-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})\mathbf{k} + k_0^2\mathbf{p}\} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{j\omega k_0}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \mathbf{k} \times \mathbf{p} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.6)$$

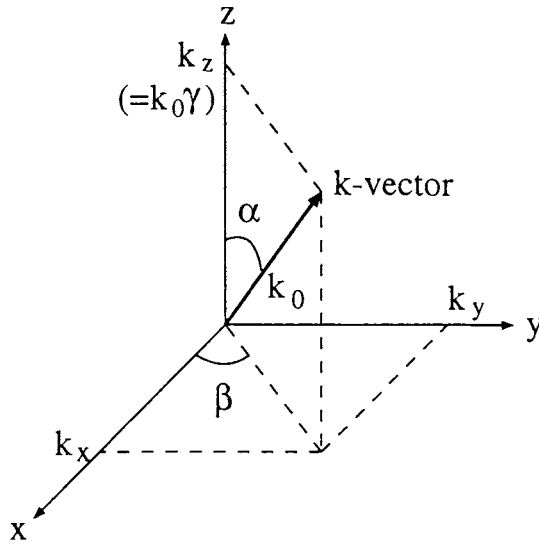


図 2.1 直角座標系における角 α, β の定義 ($z > 0$)

平面素波電磁界の積分であることを明示的に書けば

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \tilde{\mathbf{E}}(\alpha, \beta, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.7)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \tilde{\mathbf{H}}(\alpha, \beta, z) e^{-j(k_x x + k_y y)} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}(\alpha, \beta, z) = -\frac{jk_0}{8\pi^2 \epsilon_0} \{-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})\mathbf{k} + k_0^2 \mathbf{p}\} e^{-jk_z z} \quad (2.9)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(\alpha, \beta, z) = -\frac{j\omega k_0}{8\pi^2} \mathbf{k} \times \mathbf{p} e^{-jk_z z} \quad (2.10)$$

となる。 $\tilde{}$ は平面素波電磁界であることを意味している。ここで、平面素波の波数ベクトル \mathbf{k} および観測点の位置ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \sin \alpha \cos \beta \\ k_0 \sin \alpha \sin \beta \\ k_0 \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

である (図 2.1 参照)。ただし、ここでは $z > 0$ である。 $z < 0$ の場合には、 \mathbf{k} ベクトルは z 軸負方向を向き、 α は z 軸の負方向と \mathbf{k} ベクトルとのなす角で定義され、式 (2.9), (2.10) 中の k_z は $-k_z$ に置き換わる。

2.2.3 平面素波の full wave 計算

一方、平面波が自由空間から平面多層の電離層中へと伝搬したときに生じる自由空間中および電離層中の電磁界強度を full wave 法 (均質多層分割法) を用いて求める計算手法は、

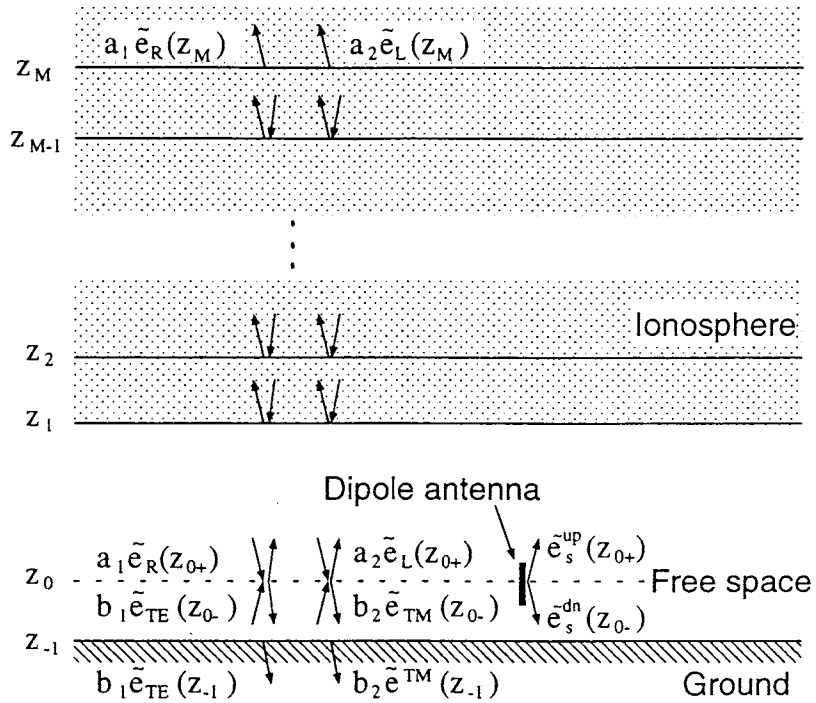


図 2.2 平面層状媒質中の平面素波の電磁界

長野らによって開発されている [7]. 前節で展開された各平面素波の電離層伝搬の計算はこの手法を用いて行う.

多層に分割した地表-自由空間-電離層の計算モデルを図 2.2 に示す. 地表面を高度 $z = z_{-1}$, 波源の高度 (自由空間中) を $z = z_0$ とする. $z_{-1} < z < z_1$ の領域を自由空間, $z > z_1$ の領域を電離層とし, 電離層を M 層に分割する. 地表面より下 ($z < z_{-1}$) および電離層の高度 $z > z_M$ の領域は均質とする. 各層境界における電界および磁界の水平成分から構成される電磁界ベクトルを $\tilde{e} = (E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y)$ と定義する. ここで Z_0 は真空中の波動インピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ である.

高度 $z = z_M$ および $z = z_{0+}$ における電磁界ベクトルをそれぞれ $\tilde{e}(z_M)$, $\tilde{e}(z_{0+})$ とし, 各層の電子密度と衝突周波数, 地球磁場の強度と方向, 層の厚さで決まる 4×4 の伝搬マトリクスを \bar{K} とすると

$$\tilde{e}(z_{0+}) = \prod_{j=0}^{M-1} \bar{K}_j^{-1} \tilde{e}(z_M) \quad (2.12)$$

と表され, 同様に高度 z_{-1} および高度 z_{0-} における電磁界ベクトルをそれぞれ $\tilde{e}(z_{-1})$, $\tilde{e}(z_{0-})$ とすると

$$\tilde{e}(z_{0-}) = \bar{K}_{-1} \tilde{e}(z_{-1}) \quad (2.13)$$

と表される. ここで $\tilde{e}(z_{0+})$ は $z = z_0$ における電磁界ベクトルの上からの極限值を, $\tilde{e}(z_{0-})$ は $z = z_0$ における電磁界ベクトルの下からの極限值を意味している. 例えば, x 軸方向のダイポール波源があるときには, H_y においてこの両者の値が異なることになる. なお, 例

例えば $\tilde{e}(z_M)$ は平面素波電磁界ベクトルであり α および β で特徴づけられるので、 $\tilde{e}(\alpha, \beta, z_M)$ と記述すべきであるが、本節では固定された一組の α, β について述べるので省略する。

実際の計算では、高度 z_M にて振幅1のRモードおよびLモードの透過波(上昇波)を仮定する。それらと式(2.12)から得られる高度 z_{0+} における電磁界ベクトルをそれぞれ $\tilde{e}_R(z_{0+})$, $\tilde{e}_L(z_{0+})$ とする。同様に、高度 $z = z_{-1}$ にて振幅1のTEモードおよびTMモードの透過波(下降波)を仮定し、それらと式(2.13)から得られる高度 z_{0-} における電磁界ベクトルをそれぞれ $\tilde{e}_{TE}(z_{0-})$, $\tilde{e}_{TM}(z_{0-})$ とする。そして、これらと波源高度 $z = z_0$ における波源からの直接波の上昇波成分 $\tilde{e}_s^{up}(z_{0+})$ と下降波成分 $\tilde{e}_s^{dn}(z_{0-})$ とは

$$a_1 \tilde{e}_R(z_{0+}) + a_2 \tilde{e}_L(z_{0+}) - b_1 \tilde{e}_{TE}(z_{0-}) - b_2 \tilde{e}_{TM}(z_{0-}) = \tilde{e}_s^{up}(z_{0+}) - \tilde{e}_s^{dn}(z_{0-}) \quad (2.14)$$

の関係が成立する。ここで a_1, a_2, b_1, b_2 は未知の係数である。式(2.14)の右辺は式(2.9)と式(2.10)から求められ、

$$\tilde{e}_s^{up}(z_{0+}) - \tilde{e}_s^{dn}(z_{0-}) = \frac{j k_0 k_z}{4\pi^2 \epsilon_0} \begin{pmatrix} k_x p_z \\ -k_y p_z \\ k_0 p_y \\ -k_0 p_x \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となる。ただし、 k_z は上昇波の伝搬ベクトルの z 成分であり、 k_z が実数のときには $\text{Re}\{k_z\} > 0$ を、 k_z が虚数のときには $\text{Im}\{k_z\} < 0$ を満たす。式(2.14)を解くことで係数 a_1, a_2, b_1, b_2 が求められる。式(2.12)および式(2.13)より $\tilde{e}_R(z_{0+})$ や $\tilde{e}_L(z_{0+})$, $\tilde{e}_{TE}(z_{0-})$, $\tilde{e}_{TM}(z_{0-})$ を求める過程で得られている任意の高度 z_j における電磁界ベクトルにこれらの係数を掛けることで波源によって生じる任意高度の電磁界ベクトルが得られることになる。計算領域の最上層上端においてRモードのみの透過波を仮定した電磁界と、Lモードのみの透過波を仮定した電磁界に分けて計算を行うのは、エバネッセントになるLモード波の増大によって起こる数値埋没を、この両モードの電磁界の直交化によって防止するためである[7]。

2.2.4 平面素波電磁界の積分

このようにして得られた自由空間および電離層中の任意の高度 $z = z_j$ における平面素波電磁界ベクトルのすべてを式(2.7), (2.8)同様に α および β で積分することでダイポール波源から放射された電磁波による高度 $z = z_j$ における x - y 平面上の電磁界分布が得られることになる。

$$e(x, y, z_j) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2 + j\infty} \tilde{e}(\alpha, \beta, z_j) e^{-j(k_x x + k_y y)} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (2.16)$$

$\tilde{e}(\alpha, \beta, z_j)$ が前節の手法に従った数値計算によって求められる平面素波電磁界ベクトルである。さらに、 $\gamma = \cos \alpha$ とおくと $\sin \alpha \, d\alpha = -d\gamma$ より

$$e(x, y, z_j) = - \int_0^{2\pi} \int_1^{0-j\infty} \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma, \beta, z_j) e^{-j k_0 \sqrt{1-\gamma^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\gamma \, d\beta \quad (2.17)$$

となる。さらに γ についての積分を

$$e(x, y, z_j) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_r, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_r^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\gamma_r \right. \\ \left. - \int_0^{-j\infty} \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_i, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_i^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\gamma_i \right) d\beta \quad (2.18)$$

のように γ の複素平面の実軸上の積分と虚軸上の積分に分離する。 γ が虚数になるとその平面素波はエバネッセントになり、平面素波電磁界ベクトル $\tilde{e}(\cos^{-1} \gamma, \beta, z_j)$ は急速に0に収れんするので、 γ_i についての積分は有限区間で打ち切ることができる。その積分区間の上限値を $-j\gamma_{i \max}$ とすると

$$e(x, y, z) \simeq \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_r, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_r^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\gamma_r \right. \\ \left. - \int_0^{-j\gamma_{i \max}} \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_i, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_i^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\gamma_i \right) d\beta \quad (2.19)$$

となる。式(2.19)における積分は数値計算による離散積分となり、

$$e(x, y, z_j) = \sum_{n_\beta=0}^{N_\beta-1} \left\{ \sum_{n_{\gamma r}=0}^{N_{\gamma r}-1} \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_r, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_r^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} \Delta\gamma_r \right. \\ \left. - \sum_{n_{\gamma i}=1}^{N_{\gamma i}} \tilde{e}(\cos^{-1} \gamma_i, \beta, z_j) e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_i^2} (x \cos \beta + y \sin \beta)} \Delta\gamma_i \right\} \Delta\beta \quad (2.20)$$

と表される。ここで

$$\gamma_r = \Delta\gamma_r n_{\gamma r}, \quad \Delta\gamma_r = \frac{1}{N_{\gamma r}} \quad (n_{\gamma r} = 0, 1, \dots, N_{\gamma r} - 1) \\ \gamma_i = \Delta\gamma_i n_{\gamma i}, \quad \Delta\gamma_i = -j \frac{\gamma_{i \max}}{N_{\gamma i}} \quad (n_{\gamma i} = 1, 2, \dots, N_{\gamma i}) \\ \beta = \Delta\beta n_\beta, \quad \Delta\beta = \frac{2\pi}{N_\beta} \quad (n_\beta = 1, 2, \dots, N_\beta) \quad (2.21)$$

である。離散化の刻み数である $N_{\gamma r}$, $N_{\gamma i}$, N_β は式(2.19)の被積分関数の γ や β による変化に対して十分細かくサンプリングするようにとらなければならない。求めたい電磁界強度分布の領域が大きいほど x や y がより大きい値をとり得るため、式(2.19)の被積分関数の γ や β による変化がはげしくなるので、 $N_{\gamma r}$, $N_{\gamma i}$, 特に N_β を大きくとらなければならないことが分かっている。この $N_{\gamma r}$, $N_{\gamma i}$, N_β の値と数値計算によって得られる電磁界分布の精度に関して付録Aにて詳しい検討を行う。

第3章

雷放電により発生する ELF/VLF 電磁界の Full wave 計算

3.1 はじめに

雷は地球大気中で起こる電気的自然現象のなかで最も良く知られているものの1つである。雷放電の過程には様々な時間スケールの放電現象が含まれているので、そこから発生する電磁波の帯域は非常に広い。様々な放電現象のなかで最も電流値が大きいのが雷雲-地上間の第一帰還雷撃 (first return stroke) であり、この放電電流パルスの時間幅は数 $10 \mu\text{s}$ ~ 数 $100 \mu\text{s}$ であるため、VLF 帯のスペクトルを最も多く含む電磁波を放射することになる。

これまでに、自由空間中の伝搬と地表面の存在を考慮して、雷雲-地上間の第一帰還雷撃から 200 km 程度離れた地点で観測される電界波形と雷撃の電流波形との関係を解析的に求めたり [34]、第一帰還雷撃の電流値や電流の立ち上がり時間、電流波形の移動速度の変化が雷放電から 100 km 離れた地点の電界波形にどう影響するかが求められている [35]。

また、第一帰還雷撃によって放射された VLF 電波の大部分は、地表面と電離層とによって形成される導波管内を伝搬し、雷放電の発生地点から $1,000 \text{ km}$ 以上離れた地上の点にまで十分到達することができる。地上において雷放電から発生した VLF 帯域のパルス電波の電界および磁界を観測することで、観測点から見た雷放電発生点の方位や距離を推定することが多く行なわれている [36]。

一方、この VLF 波の一部は下部電離層を透過して、電離層プラズマ中でよく知られたホイイスラ波となり、磁気圏の地球磁力線に沿って伝搬する。磁気圏中を地球磁力線に沿って伝搬した VLF 電波は、赤道面を横切って反対半球の磁気圏、さらに電離層へと到達する。反対半球の電離層に届いた VLF 波の一部は、さらに電離層を突き抜けて地上すなわち雷放電が発生した点の反対半球の地磁気共役点近くに届くことになる。また、地球磁力線に沿って赤道域を伝搬するホイイスラ波は、そこでエネルギーの高い電子と相互作用を起こして電子を加速させる。加速された電子は地球磁力線に沿ってホイイスラ波の波源である雷放

電が発生した地点付近上空の電離層に高速で降り込むことになる (electron precipitation) [37]. 降り込んだ粒子は電離層の中性粒子と衝突してこれを電離させてダクトを形成したり, 下部電離層の電子密度を増加させて地表-電離層導波管を伝搬する VLF 波を散乱させ, Trimpi 効果と呼ばれる導波管内を伝搬する VLF 波の振幅および位相を変化させる現象を引き起こす [38].

また, 第一帰還雷撃から放射されて電離層を透過した電磁波パルスは, ロケットや比較的低高度 (高度 500 km 以下) を通過するあけぼのなどの科学衛星によって頻繁に観測されている. このような電磁波パルスに含まれる個々の周波数スペクトル成分の伝搬については比較的良好に解析されているが, パルス全体としての伝搬解析はあまり行われていないようである.

Kelley らは, 雷雲上空に打ち上げられたロケットによって雷放電に起因した VLF 電波の電磁界波形の観測を行っている [39]. これに対する理論計算では高度 230 km 以下の領域のプラズマ媒質の影響を無視し, 仮定した電界のサンプルパルスをこの高度から入射して, 観測高度 (約 290 km) までの伝搬を計算して観測高度における電界波形を得ているのにすぎず, 大地や下部電離層媒質の高度変化が伝搬に与える影響や雷放電電流の振幅値や波形などが考慮されていない.

また最近, 大規模な雷雲-地上間の雷放電に伴う中間圏および下部電離層 (高度 50~90 km) での発光現象 (red sprites, elves など) が注目されている [40], [41]. 雷放電によって生じる VLF パルス波および準静電界が中間圏および下部電離層中の電子を加速し, 加速された電子の衝突による N_2 分子の励起がこの原因となっている可能性が高いが [42], 発光領域の位置や発光強度について詳細に分析するためには, 雷放電によって生じるこの領域における電磁界強度の正確な時間変化を求めることが必要である.

雷放電による上空の中間圏および下部電離層における電界の時間変化については, Greifinger らが雷放電の発生時刻を $t=0$ として $0.1 \leq t \leq 1.5$ s の範囲すなわち ULF 帯域の地上から電離層 (高度 300 km 程度) に至るまでの任意の点における電界および磁界の時間変化を解析的に求めている. これは, 電界および磁界のスペクトルを雷雲高度における電荷の時間変化のフーリエ変換すなわちスペクトルと電離層などの媒質に依存する伝達関数の積で表し, 伝達関数は波数によるベッセル関数の積分で表して, 電磁界スペクトルを逆フーリエ変換もしくはラプラス変換する手法をとっている [43].

Baginski らは雷放電による雷雲高度への電荷の注入と上空の領域の導電率の存在によって生じる電流 (conduction current) を考慮して高度 50 km から高度 80 km における電界強度の ELF/VLF 帯の時間変化 (時間スケールで $10^{-5} \sim 10^{-1}$ sec) を有限要素法を用いて計算している [44]. しかし, 誘導界と放射界を含まない準静電的な界しか取り扱っていない.

また最近では Sukhorukov が, ULF から VLF までの比較的広い帯域における (時間スケールで $10^{-4} \sim 10^0$ sec) 高度 20 km から高度 70 km までの領域の電界の時間変化を, Greifinger らの手法 [43] と同様な電界の波数によるハンケル関数の積分と時間に関するラプラス変換

を用いて解析的に求めている [45]。ただし、下部電離層による反射波成分の存在にはふれているが、具体的には表現されていない。

そこで、第2章で述べた full wave 法と球面波の平面波展開の手法に、時間に関する離散フーリエ変換を組み込んで、周波数成分ごとの電磁界分布計算から電磁界の時間波形を求める手法を開発した [46]。これにより、電磁界の全ての成分および電離層での高度による媒質変化や任意方向の地球磁場の影響、雷放電電流の特徴なども考慮した上での電離層より下の自由空間や電離層中の厳密な電磁界波形が求められるようになった。この計算では雷雲-地上間雷放電を伝送路電流と仮定して、任意の電流値や方向、電流長、電流速度をパラメータとして与えることができる。

本章ではまず、雷雲-地上間雷放電を含む雷放電現象全体についての概要を説明する。また、第一帰還雷撃の電流に対して提唱されているいくつかのモデルについても述べる。次に、電離層中の平面波電磁界を計算する full wave 法と球面波の平面波展開、時間に関するフーリエ変換を用いた、任意の雷放電電流から発生する電磁界パルスによる電離層下の自由空間および電離層中の電磁界波形を厳密に数値計算する手法について述べる。

次に、この計算手法を用いて典型的な雷雲-地上間雷放電によってできる上空の自由空間および電離層中の電磁界分布の時間変化を計算した結果を示す。さらに、雷放電電流波形の違いが電磁界波形に与える影響や、雷放電電流パルスの電流経路上の移動速度が与える影響、雷放電電流の終端高度が与える影響について示す。また、水平雷放電の場合の電磁界分布の時間変化についても計算を行った。

さらに、電磁界分布の計算領域を拡大して、雷雲上空に打ち上げられたロケットにより観測された雷放電に起因した電界波形に対するモデル計算を行ったのでその計算結果を示し、観測結果との比較も行う。最後に、最近注目されている大規模な雷放電に伴う中間圏および下部電離層における発光現象の発生機構と本計算結果との関連性について議論を行う。

3.2 雷雲-地上間雷放電および雷雲内放電

発達した雷雲内では、一般的に上部に正電荷、下部に負電荷が分布していることが知られている。多くの場合、この雷雲下部に蓄積された負電荷の一部が、同じく雷雲下部に部分的に存在している正電荷との間で絶縁破壊 (preliminary breakdown) を起こすことをきっかけにして、雷雲下部から地上に向けて負に帯電したチャンネル (stepped leader) を形成し始める。このチャンネルが地上付近まで伸びると、地上からも正のチャンネルが形成され始めて、ついに雷雲下部から地上に至る導電路が確立される (attachment process)。その直後に地上から雷雲へと非常に大きい正の電流 (第一帰還雷撃: first return stroke) が流れることになる。この後は、確立されている電流チャンネルを通じて再び先駆電荷 (dart leader) が雷雲から地上へ移動し、続いて帰還雷撃 (return stroke) が流れる過程が数回続くことになる。

また、この過程において雷雲-地上間のチャンネル上には継続的な電流 (continuing current) も存在する。また、帰還雷撃と帰還雷撃との間に、雷雲内で頻繁に放電現象 (J, K-process) が起きていることも分かっている.[47]

このように雷放電の過程は様々な時間スケールの放電現象を含んでいるので、そこから放射される電磁波の帯域は非常に広い。雷雲内の J 過程では HF や VHF 帯の電波が多く放射され、チャンネル上の継続的な電流からは ELF 帯の電波が多く放射される [48]。一方、最も電流値が大きい雷雲-地上間の第一帰還雷撃は、電流パルスの時間幅が数 $10 \mu\text{s}$ ~ 数 $100 \mu\text{s}$ であるために主に VLF 帯の電波を放射することになる。本章ではこの第一帰還雷撃によって発生する電磁界を取り扱う。

雷雲-地上間雷放電 (cloud-to-ground discharge) の第一帰還雷撃は極性という点で大きく2つの種類に分けられる。1つは、上で述べたように雷雲下部から負のチャンネルが地上に伸びて、チャンネルが地上と接続された直後に正の電流が地上から雷雲へと流れるタイプのものである。これは負のチャンネルが初めに雷雲から伸びることから負 (極性) の雷放電 (negative discharge) と呼ばれている。このタイプは雷雲-地上間雷放電全体のおよそ 90% を占めている。もう1つは、雷雲上部に蓄積された正電荷が段階的先駆電荷 (stepped leader) を伴わずに地上へと流れ落ちるタイプのものである。このタイプは、正 (極性) の雷放電 (positive discharge) と呼ばれており、発生頻度が低く、雷撃最大電流値は、負の雷放電で平均 30 kA 程度であるのに対して、一般的に大きく、その値が $200 \sim 300 \text{ kA}$ に至ることも多い。後節の計算ではこの2つのタイプの雷雲-地上間雷放電を考える。

さらに雷雲-地上間雷放電の第一帰還雷撃の電流波形について、電流チャンネル上の1点で決まる時間に関する電流波形がチャンネル上をそのまま移動すると仮定する伝送路モデル (transmission line (TL) model) や電流波形がチャンネル上の移動距離に比例して指数的に減衰すると仮定する修正伝送路モデル (modified transmission line (MTL) model)、逆に電流チャンネル先頭からチャンネル後方に向かって波形が光速で進行すると仮定する進行波電流モデル (traveling current source (TCS) model)、さらにチャンネル上を前後両方向に進む成分をもつと仮定する Diendorfer-Uman モデル (DU model) や修正 Diendorfer-Uman モデル (MDU model) など多くの電流モデルが提案されている [49]。本章ではもっとも単純な伝送路モデル (TL model) を採用した。

また、雷雲-地上間雷放電は必ずしも垂直な電流チャンネルになっているわけではなく、水平に近い部分も存在することが分かっているため [47], [48]、雷放電電流は垂直および水平の両方を想定することにする。

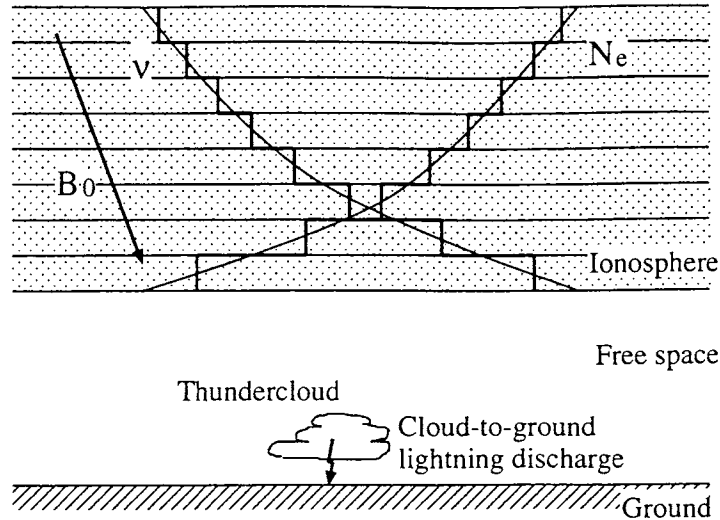


図 3.1 計算モデル

3.3 電磁界波形の計算手法

3.3.1 計算モデル

計算モデルとして図 3.1 のように大地-自由空間-電離層を考える。電離層のパラメータとして電子密度と電子の衝突周波数，地球磁場ベクトルを与え，これらのパラメータは高度によってのみ変化するものとして電離層を平面層状不均質媒質とみなす。雷放電の第一帰還雷撃（以下，単に雷放電と略す）は大地付近の自由空間中で発生することになる。座標系は地磁気座標の北を y 軸，高さ方向を z 軸，これらに垂直な方向を x 軸とし，雷放電開始点の真下の地上の点を原点とする。

3.3.2 自由空間中の伝送路電流からの放射電磁界波形

自由空間中の電流源 $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ による電界および磁界ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ， $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ は Maxwell の方程式

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3.2)$$

を満足する。これら 2 つの式の両辺に対して時間に関するフーリエ変換をとると

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', \omega) + j\omega\varepsilon_0 \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega\mu_0 \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.4)$$

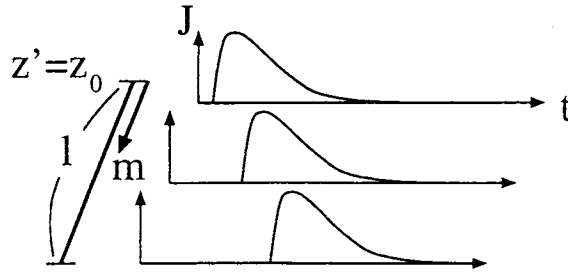


図 3.2 雷放電電流計算モデル

となる。ただし、 ω は角周波数で、 $\hat{E}(\mathbf{r}, \omega)$ 、 $\hat{H}(\mathbf{r}, \omega)$ はそれぞれ $E(\mathbf{r}, t)$ 、 $H(\mathbf{r}, t)$ の時間に関するフーリエ変換である。

$$\hat{E}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.5)$$

$$\hat{H}(\mathbf{r}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.6)$$

以降、時間に関するフーリエ変換量には $\hat{}$ をつけて記す。 $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ 'は観測点の位置ベクトル、 $\mathbf{r}' \equiv (x', y', z')$ 'は電流源上のある1点の位置ベクトルであり、 ϵ_0 、 μ_0 はそれぞれ真空の誘電率と透磁率である。'は転置を表し、ベクトルであることを意味している。

ここで雷放電電流として、図3.2のように雷雲高度 z_0 の点 $(0, 0, z_0)$ 'から単位ベクトル $\mathbf{m} \equiv (m_x, m_y, m_z)$ 'の方向へ長さ l の経路上を流れる伝送路電流 (transmission line current) を次式のとおりに仮定する [50], [47].

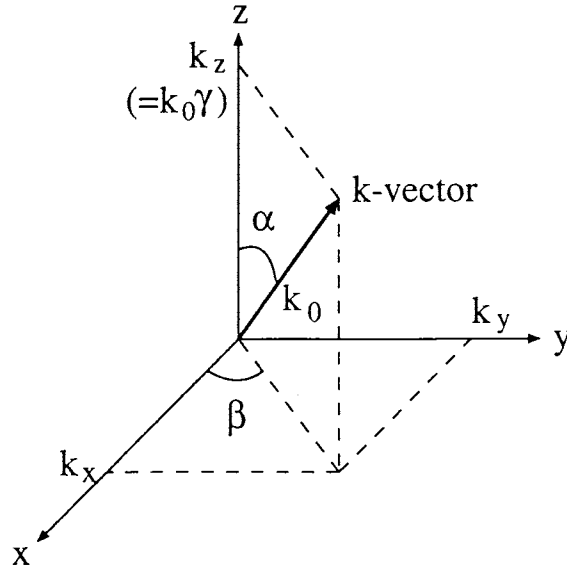
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \equiv \begin{cases} m I_0 (e^{-\frac{t-u}{\tau_1}} - e^{-\frac{t-u}{\tau_2}}) & (t \geq u) \\ 0 & (t < u) \end{cases} \quad (3.7)$$

ただし、

$$u = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z' - z_0)^2}}{v_I} \quad (0 \leq v_I u \leq l) \quad (3.8)$$

ここで、 I_0 [A] は電流のピーク値を、 τ_2 [s] は電流の立上り時間を、 τ_1 [s] は電流の減衰時間を決める値である。電流パルス時間長はおよそ $\tau_1 - \tau_2$ とみなせる。 v_I [m/s] は電流パルスが進行する速さであり、 l [m] は電流経路の長さである。 $\mathbf{m} = \mathbf{i}_z$ で $z_0 = 0$ ならば地上から高度 l へと垂直に流れる雷雲-地上間放電の帰還雷撃に相当する。この $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ の時間に関するフーリエ変換 $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', \omega)$ を求めると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', \omega) &= \int_u^{\infty} \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) e^{-j\omega t} dt \\ &= m I_0 \left(\frac{\tau_1}{1 + j\omega\tau_1} - \frac{\tau_2}{1 + j\omega\tau_2} \right) e^{-j\omega u} \end{aligned} \quad (3.9)$$


 図 3.3 直角座標系における角 α, β の定義

となる。そして $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', \omega)$ に対するヘルツベクトル $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ が $\omega \neq 0$ で、

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{j4\pi\epsilon_0\omega} \int_0^l \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dl' \quad (3.10)$$

と表される。ただし

$$x' = m_x l', \quad y' = m_y l', \quad z' = z_0 + m_z l'$$

である。ここで k_0 は自由空間中の波数で $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ であり、 $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')^t$ である。なお式 (3.10) に含まれない $\omega = 0$ に関しては後節で検討する。ここで球面波の平面波展開 [33]

$$\frac{e^{-jk_0 R}}{(-jk_0 R)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (3.11)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{k_0}{8\pi^2 \epsilon_0 \omega} \int_0^l \mathbf{p}_0 e^{-j\omega t} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} e^{-j\{k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z(z-z')\}} \\ &\quad \cdot \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \, dl' \\ \mathbf{p}_0 &= m I_0 \left(\frac{\tau_1}{1 + j\omega\tau_1} - \frac{\tau_2}{1 + j\omega\tau_2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。ただし、 z は $z \geq \max(z_0, z_0 + m_z l)$ (=電流経路上端の高度) であり、

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \sin \alpha \cos \beta \\ k_0 \sin \alpha \sin \beta \\ k_0 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

である (図 3.3 参照). ここで l' についての積分を先におこなうと,

$$\hat{\Pi}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{jk_0}{8\pi^2\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \mathbf{p}(\omega) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\omega) = & m \frac{I_0 l}{j\omega} \left(\frac{\tau_1}{1+j\omega\tau_1} - \frac{\tau_2}{1+j\omega\tau_2} \right) \frac{\sin\left\{\frac{l}{2}\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} - \frac{\omega}{v_I}\right)\right\}}{\frac{l}{2}\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} - \frac{\omega}{v_I}\right)} \\ & \cdot \exp\left\{j\frac{l}{2}\left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} - \frac{\omega}{v_I}\right) + jk_z z_0\right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

が得られる. 式 (3.14) の τ_1 と τ_2 を含む部分は電流経路上のある 1 点における電流波形のフーリエ変換と一致しており, sinc 関数と exp 関数の積は電流が速さ v_I , 長さ l , 方向 \mathbf{m} の伝送路電流であることを意味している.

一方, $z \leq \min(z_0, z_0 + m_z l)$ (=電流経路下端の高度) の領域では, α は z 軸の負方向からとった角度となり, $\hat{\Pi}(\mathbf{r}, \omega)$ は式 (3.13), (3.14) の k_z を $-k_z$ で置き換えた式になる.

そして, 次の関係から $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ と $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ が求められる.

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \nabla \cdot \hat{\Pi}(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \hat{\Pi}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.15)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega\varepsilon_0 \nabla \times \hat{\Pi}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.16)$$

より,

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{jk_0}{8\pi^2\varepsilon_0} \iint \{-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}(\omega))\mathbf{k} + k_0^2 \mathbf{p}(\omega)\} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta \quad (3.17)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{j\omega k_0}{8\pi^2} \iint \mathbf{k} \times \mathbf{p}(\omega) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta. \quad (3.18)$$

このように自由空間中の伝送路電流から放射される電磁界の波形は, 電流の周波数スペクトルに電流波形の進行方向と電流経路の長さ, 電流波形の進行速度で決まるファクタをかけて得られるモーメントをもつダイポールアンテナによる電磁界の複数の周波数の重ね合わせで表すことができ, かつ, おのおのの周波数における放射電磁界は多数の平面波電磁界の合成として表すことができる.

3.3.3 各周波数における平面素波の full wave 計算

式 (3.17), (3.18) 中の被積分関数のように表された各周波数における各平面素波が大地-自由空間-電離層中を伝搬することによってできる任意高度の電磁界強度は full wave 計算法によって求めることができる [10]. これについては 2.2.3 で述べた通りである. ここでは, 波源が伝送路電流であり, 電流経路が z 方向に有限長であるため, 波源付近における境界条件の取り扱いが 2.2.3 と少し異なっている. そこでここでは, その違いのみを記述するのにとどめる.

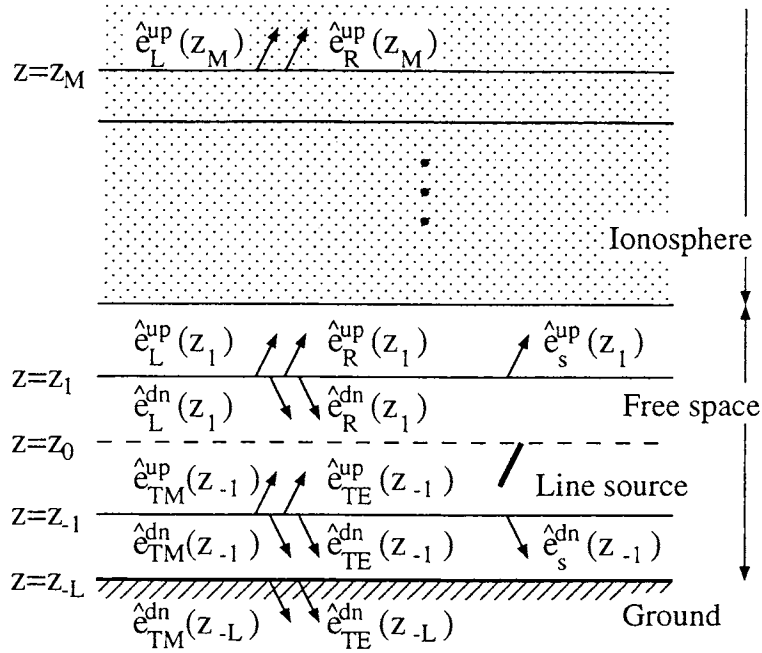


図 3.4 full wave 計算における各特性波の電磁界ベクトル

ここでは z 方向の層分割を図 3.4 のようにとる. 高度 z_1 および z_{-1} における波源からの直接波による電磁界ベクトルは式 (3.17), (3.18) の被積分関数から得られ, これらをそれぞれ $\hat{e}_s^{up}(z_1)$, $\hat{e}_s^{dn}(z_{-1})$ とする.

また, $z=z_M$ にて振幅 1 の R モードおよび L モードの透過波 (上昇波) を仮定した場合に式 (2.12) に相当する式によって得られる $z=z_1$ における電磁界ベクトルをそれぞれ $\hat{e}_R(z_1)$, $\hat{e}_L(z_1)$ とし, $z=z_{-L}$ にて振幅 1 の TM モードおよび TE モードの透過波 (下降波) を仮定した場合に式 (2.13) に相当する式によって得られる $z=z_{-1}$ における電磁界ベクトルをそれぞれ $\hat{e}_{TM}(z_{-1})$, $\hat{e}_{TE}(z_{-1})$ とすると, $z=z_1$ における境界条件から

$$a_1 \hat{e}_R^{up}(z_1) + a_2 \hat{e}_L^{up}(z_1) - \{b_1 \hat{e}_{TM}^{up}(z_{-1}) + b_2 \hat{e}_{TE}^{up}(z_{-1})\} e^{-jk_z(z_1 - z_{-1})} = \hat{e}_s^{up}(z_1) \quad (3.19)$$

が, また $z=z_{-1}$ における境界条件から

$$b_1 \hat{e}_{TM}^{dn}(z_{-1}) + b_2 \hat{e}_{TE}^{dn}(z_{-1}) - \{a_1 \hat{e}_R^{dn}(z_1) + a_2 \hat{e}_L^{dn}(z_1)\} e^{-jk_z(z_1 - z_{-1})} = \hat{e}_s^{dn}(z_{-1}) \quad (3.20)$$

が得られる. ここで上添字 up は上昇波成分を, dn は下降波成分を意味しており,

$$\hat{e}_R^{up}(z_1) + \hat{e}_R^{dn}(z_1) = \hat{e}_R(z_1) \quad (3.21)$$

$$\hat{e}_L^{up}(z_1) + \hat{e}_L^{dn}(z_1) = \hat{e}_L(z_1) \quad (3.22)$$

$$\hat{e}_{TM}^{up}(z_{-1}) + \hat{e}_{TM}^{dn}(z_{-1}) = \hat{e}_{TM}(z_{-1}) \quad (3.23)$$

$$\hat{e}_{TE}^{up}(z_{-1}) + \hat{e}_{TE}^{dn}(z_{-1}) = \hat{e}_{TE}(z_{-1}) \quad (3.24)$$

を満たしている. なお, 電磁界ベクトルの上昇波成分と下降波成分とは, 固有ベクトル行列を用いて分離することができる [7]. そして, この式 (3.19), (3.20) を解いて係数 a_1 , a_2 ,

b_1, b_2 を求め、式(2.12), (2.13)に相当する式にこれらの係数をかけることで波源からの放射による平面素波の任意高度 z_j における電磁界ベクトルを得ることができる。

文献[10]においては、高度 $z=z_0$ における境界条件だけで波源からの直接波による電磁界との接続を行っているのに対して本論文では $z=z_1$ と $z=z_{-1}$ の2つの高度で接続を行っている。そのため、電磁界ベクトルを上昇波成分と下降波成分に分離する必要が生じている。このようにすることにより、伝送路電流のように波源が高度方向に広がりをもつ場合においても平面波を取り扱う full wave 法を適用することが可能となった。

求められた各平面素波の電磁界ベクトルを $\hat{e}(\alpha, \beta, z_j, \omega)$ とすると高度 z_j における x - y 平面上の電磁界ベクトル分布 $\hat{e}(x, y, z_j, \omega)$ は

$$\hat{e}(x, y, z_j, \omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2+j\infty} \hat{e}(\alpha, \beta, z_j, \omega) e^{-j(k_x x + k_y y)} \sin \alpha \, d\alpha d\beta \quad (3.25)$$

から得られる。また α を γ で置き換えれば、

$$\hat{e}(x, y, z_j, \omega) = - \int_0^{2\pi} \int_1^{0-j\infty} \hat{e}(\cos^{-1} \gamma, \beta, z_j, \omega) e^{-j(k_x x + k_y y)} d\gamma d\beta \quad (3.26)$$

となる。この式の計算手法は 2.2.4 と同じであるので、ここでは省略する。

3.3.4 時間に関するフーリエ変換による電磁界波形の計算

さらに、時刻 t における電磁界ベクトル $e(x, y, z_j, t)$ は逆フーリエ変換

$$e(x, y, z_j, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{e}(x, y, z_j, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.27)$$

により得られるが、実際の計算では高速フーリエ変換 (FFT) を用いて行うので、離散周波数間隔 $\Delta\omega$ と計算周波数帯域幅 ω_{max} の2つのパラメータが導入される。 ω_{max} は、計算領域内の任意の x, y, z_j に対して式(3.27)の電磁界ベクトル $\hat{e}(x, y, z_j, \omega)$ のスペクトルの最大値から -50 dB までの領域を十分に含むような値を選ぶ。また、計算時間長を T_{max} とすると $T_{max} = 2\pi/\Delta\omega$ の関係にあり、時間領域でのエリアジング現象を防ぐために T_{max} は解析する雷放電発生から電磁波の伝搬までの現象全体を含むほどに十分大きくとらなければならない。波源からより離れた点での電磁界波形を求める場合には、その伝搬遅延のために波形はより遅れて現れることになるので、それだけ T_{max} を大きくしなければならないことになる。従って T_{max} の値は雷放電電流パルス長よりもむしろ電磁界波形を求める高度や計算領域の水平幅に大きく依存する。

図 3.5 に計算手法の全体の流れを示した。

3.3.5 波源電流の直流成分の取り扱い

ここで式(3.10)に含まれない $\omega = 0$ の成分について検討する。雷放電電流のように電流経路が閉曲線でなくかつ電流の流れる方向が単一方向である場合には、放電現象の前後で

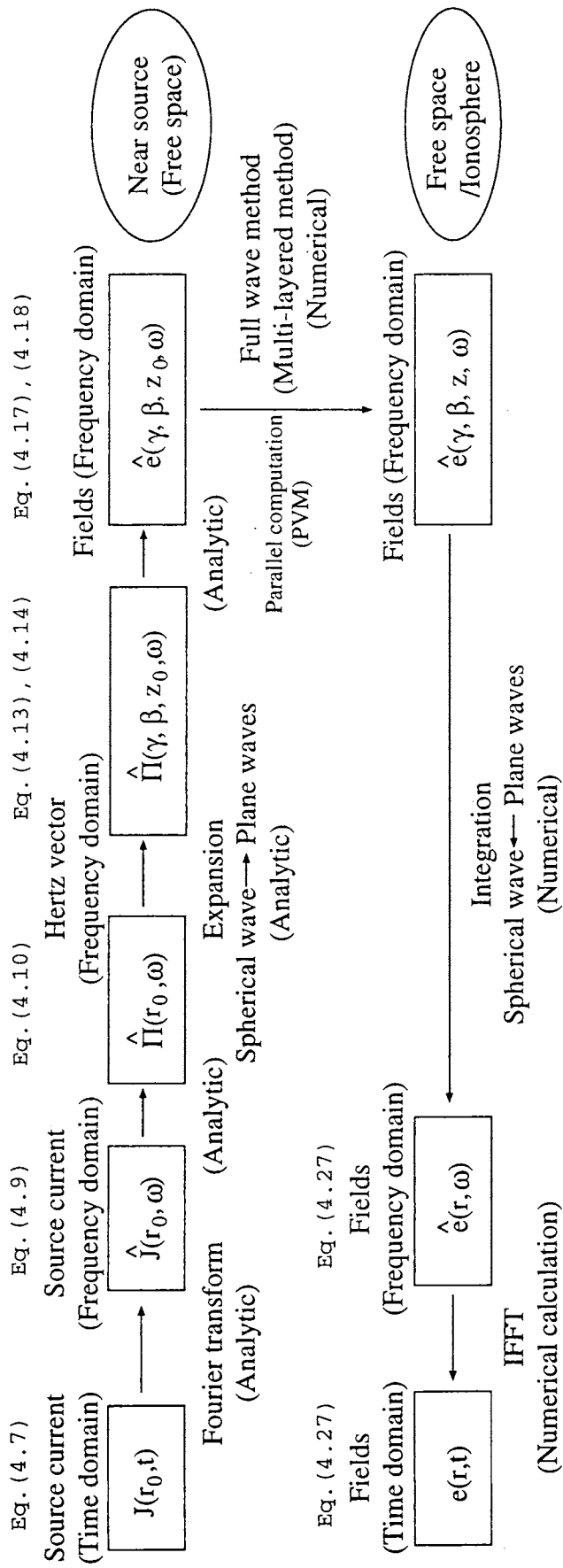


図 3.5 計算手法全体の流れ

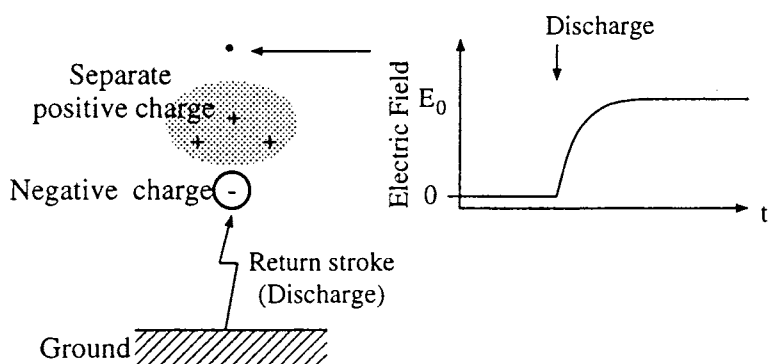


図 3.6 雷放電による電荷の移動とその周辺の電界強度

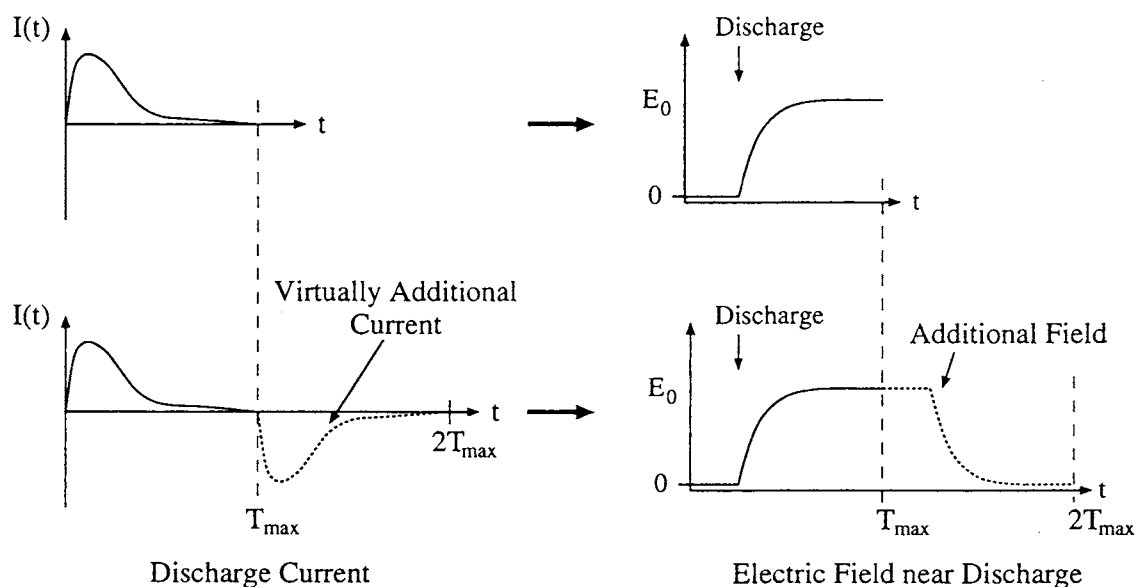


図 3.7 数値計算上導入した仮想付加電流とそれによる電界

電荷分布が異なることになる。よって、波源に比較的近い点での電界強度は一般的に放電現象の前後で静電界成分の変化分だけ異なることになる。すなわち、電磁界波形の計算時間幅(雷放電に伴う現象全体を含む十分な時間でなければならない)を T_{max} とすると、時刻 $t=0$ における電界値と時刻 $t=T_{max}$ における電界値が異なるわけである(図 3.6 参照)。離散フーリエ変換では時間軸上のこの2点は隣り合うことになるので、数値計算結果ではこの不連続は再現できずに滑らかにつながり、 $t=0$ および $t=T_{max}$ 付近の電界値が正しく得られないことになる。

そこでこの不正確性を除去するために、区間 $t=0 \sim T_{max}$ の本来の現象に、区間 $t=T_{max} \sim 2T_{max}(=T'_{max})$ において本来のものと正負が逆の同一波形の電流が流れる現象を付加して(図 3.7 参照)、時間幅 $2T_{max}$ で離散フーリエ変換を行うことにした。これにより、時刻 $t=0$ と $t=2T_{max}$ での電界値が等しくなり、電界波形が正確に求められるようになる。つま

り、電流経路上の1点での雷放電電流波形は、式(3.7)より

$$I(t) = I_0(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \quad (3.28)$$

と表されるので、計算に用いる電流波形は

$$I(t) = \begin{cases} I_0(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) & 0 \leq t < T_{max} \\ -I_0(e^{-(t-T_{max})/\tau_1} - e^{-(t-T_{max})/\tau_2}) & T_{max} \leq t \leq 2T_{max} \end{cases} \quad (3.29)$$

となる。この時間に関するフーリエ変換 $\tilde{I}(\omega)$ を求めると

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\omega) = & \frac{I_0\tau_1}{1+j\omega\tau_1} \left\{ (1 - e^{-j\omega T_{max}})(1 - e^{-(\frac{1}{\tau_1}+j\omega)T_{max}}) \right\} \\ & - \frac{I_0\tau_2}{1+j\omega\tau_2} \left\{ (1 - e^{-j\omega T_{max}})(1 - e^{-(\frac{1}{\tau_2}+j\omega)T_{max}}) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

となり、 $\tau_1, \tau_2 \ll T_{max}$ を満たすならば、さらに

$$\tilde{I}(\omega) = I_0 \left(\frac{\tau_1}{1+j\omega\tau_1} - \frac{\tau_2}{1+j\omega\tau_2} \right) (1 - e^{-j\omega T_{max}}) \quad (3.31)$$

となる。 $\Delta\omega = 2\pi/(2T_{max}) = \pi/T_{max}$ と定義すれば、さらに

$$\tilde{I}(\omega) = I_0 \left(\frac{\tau_1}{1+j\omega\tau_1} - \frac{\tau_2}{1+j\omega\tau_2} \right) (1 - e^{-j\pi\omega/\Delta\omega}) \quad (3.32)$$

となる。これは、電流経路上の任意の点の電流波形の離散化された周波数スペクトルにおける $\omega = 2n\Delta\omega$ (n は整数)成分すなわち直流成分および $\Delta\omega$ の偶数倍成分が0になることを表している。ゆえに式(3.10)の $\omega = 0$ の成分について考慮する必要がなくなる。

3.4 電磁界波形の計算結果

3.4.1 計算に用いた種々のパラメータ

実際の計算において雷放電として一般的な地上から雷雲へと垂直に正の電流が流れる負極性の雷雲-地上間雷放電の第一帰還雷撃を仮定した。その電流ピーク値が負の雷放電の帰還雷撃において平均的な値である 35 kA [47] になるように $I_0=50$ kA とし、電流の立上り時間を決める τ_2 を 5 μ s、電流の継続時間を決める τ_1 を 50 μ s、電流パルスの進行速度 v_I を典型値として 8×10^7 m/s とした。放電開始点を地上、電流経路終端高度および電流経路長を 5 km と仮定した。また、これらのパラメータを表3.1にまとめた。仮定した雷放電電流波形とその周波数スペクトルを図3.8に示した。周波数スペクトルでは直流成分が最も大きく、周波数が高くなるにつれてスペクトル強度は減少し、周波数 100 kHz でおおよそ 40 dB 下がっている。

表 3.1 雷放電電流のパラメータ

電流の方向 m	$(0, 0, 1)^t$
電流 I_0	50 kA (ピーク値 35 kA)
時定数 τ_1	50 μ s
時定数 τ_2	5 μ s
パルス速度 v_I	8×10^7 m/s
放電開始高度 z_0	0 km
電流路終端高度	5 km
電流経路長 l	5 km

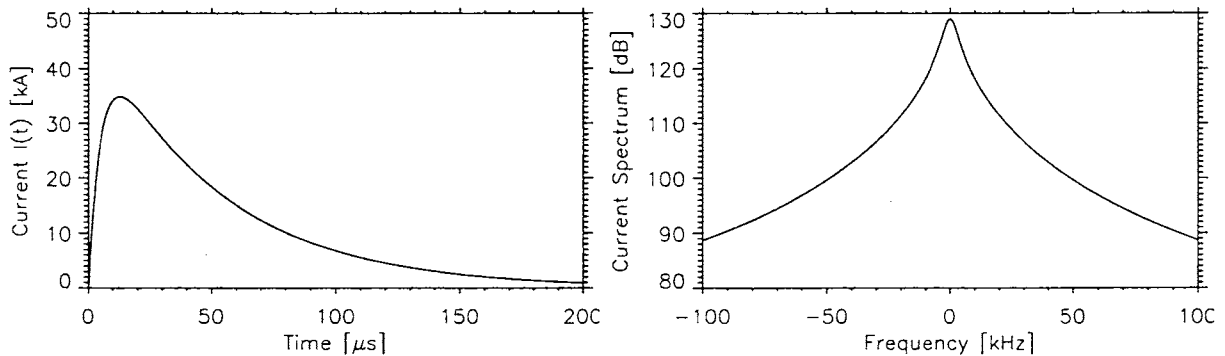


図 3.8 雷放電電流波形と周波数スペクトル

また、電離層の電子密度の高度プロファイルは太陽活動度の比較的高い北半球中緯度の夜の IRI (International Reference Ionosphere) モデル [51] を、電子の実効衝突周波数の高度プロファイルの高度 90 km 以下については大気圧モデル [52], [53] を、高度 90 km から 200 km については電子温度の平方根に比例するモデルを、高度 200 km 以上については電子温度および電子密度、イオン密度に依存したモデル [54], [55] を用いた。これらを図 3.9 に示した。地球磁場ベクトル(強度と方向)の高度プロファイルには、IGRF モデル [56] を使用した。また、計算に用いた他のパラメータは表 3.2 のとおりである。

電磁界の平面波展開に関するパラメータである式 (2.20) の $N_{\gamma r}$ や $\gamma_{i max}$, $N_{\gamma i}$, N_{β} の値をいくつかの周波数において表 3.3 に示した。 $\gamma_{i max}$ の値は電磁界の静電界および誘導界成分を強く含む領域すなわち波源に近い領域を計算する場合、より大きく取らなければならないことがわかっている。したがって、計算領域の中で波源にもっとも近い高度(ここでは 30 km)の電磁界を求めるのに必要な値で決まると言える。また、 $N_{\gamma r}$ と N_{β} は波源からより離れた点の電磁界を計算する場合により大きな値が必要とされるので、計算領域の上限高度(ここでは 140 km)と最大水平距離(ここでは 100 km)によって決まる。また、周波数が高くなると静電界および誘導界成分が無視できる波源からの距離がより小さくなるので $\gamma_{i max}$ は小さくなる。必要な N_{β} は周波数が大きくなると増大するが、本計算では高い周

波数で必要な値を低い周波数にも適用しているため、表 3.3ではこれらは周波数によらず一定になっている。

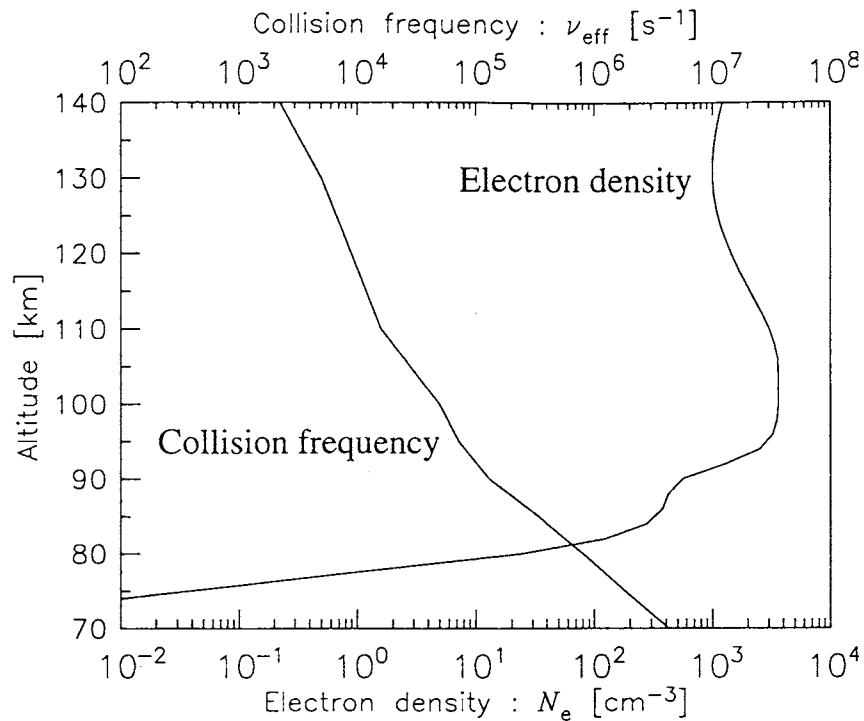


図 3.9 計算に用いた電子密度と衝突周波数の高度プロファイル

表 3.2 種々の計算パラメータ

計算最大周波数 $\omega_{max}/2\pi$	100 kHz
(時間分解能)	5 μ s
計算時間長 $2T_{max}$	4 ms
(周波数間隔 $\Delta\omega/2\pi$)	250 Hz
計算高度範囲	30~140 km
電離層高度範囲	74~140 km
電離層分割幅	2 km
電子のサイクロトロン周波数	1.47~1.54 MHz
地磁気伏角	71°
地表の比誘電率	10
地表の導電率	10^{-3} S/m
計算領域の最大水平距離 y_{max}	100 km
水平方向の距離分解能 Δy	5 km

表 3.3 いくつかの周波数における平面素波展開に関する計算パラメータ

周波数	$N_{\gamma r}$	$\gamma_{i \max}$	$N_{\gamma i}$	N_{β}	平面素波数
250 Hz	10	140	290	300	90,000
750 Hz	20	47	280	300	90,000
3 kHz	60	10.8	240	300	90,000
10 kHz	150	3.4	150	300	90,000
30 kHz	240	1.2	60	300	90,000
100 kHz	280	0.2	20	300	90,000

3.4.2 電磁界分布の時間変化

次にこれらのパラメータを用いて得られた計算結果を示す。雷放電の開始時刻を $t=0$ として $t=0 \sim 525 \mu\text{s}$ の $75 \mu\text{s}$ ごとの波源を通る子午面上すなわち y - z 面上、高度 $30 \sim 140 \text{ km}$ で南北 $-100 \sim 100 \text{ km}$ の領域の電界の垂直成分 E_z の強度分布の時間変化をカラーコンターで図 3.10 (a) に示した。横軸正方向が北 (y 軸の正) に、負方向が南 (y 軸の負) に相当する。放電前の雷雲内の電荷分布は図 3.11 のように想定し、放電することになる電荷による上空の電界が雷雲上部に存在する電荷 (separate charge) によって相殺されているものとした。したがって、時刻 $t=0$ において計算領域内のすべての場所で電界は 0 とした。

$t=300 \mu\text{s}$ で、発生した電磁波パルスが高度 40 km で南北 $\pm 80 \text{ km}$ の点まで、高度 80 km で南北 $\pm 50 \text{ km}$ の点まで到達していることが分かる。また、 $t=300 \mu\text{s}$ から電離層中に電界 E_z が現れ、時刻とともに電離層上部へと伝搬していく様子が見られる。また、 $t=525 \mu\text{s}$ における高度 70 km で南北 100 km の位置から高度 30 km で南北 60 km の位置までの強度の強い部分は電磁波パルスが電離層で反射して下に向かう成分であることが分かる。

同様に電界の y 成分 E_y の時間変化を図 3.10 (b) に示す。放電パルスによる放射界成分が円弧を描いて伝搬する様子や電離層での反射、電離層へ透過してホイストラモード波として伝搬する様子が (a) の E_z に比べてよりはっきりと見ることができる。放電後に原点付近に見られる強度の大きい成分は、モデル計算においては雷放電によって注入された正電荷による静電界であり、実際には雷放電後に雷雲上部に残された正電荷 (separate charge) による静電界に相当する。さらに、磁界の x 成分 B_x について同図 (c) に示した。電離層に入ると伝搬するホイストラモード波に対する屈折率が大きいこと、磁界強度も大きくなりこのモード波の伝搬の様子が鮮明に観察できる。同じく屈折率が大きいことにより、電離層中では波の伝搬方向が等しくほぼ垂直方向に向き、平面波に近い形の伝搬になっている様子を見ることができる。地球磁場のベクトルが南方から北へと地表に入る方向 (伏角 71°) に向いているため、電離層でホイストラ波が南方にずれながら伝搬している様子が分かる。

次に、雷放電の真上 ($x=y=0 \text{ km}$) の高度 60 km における電界 E_z および高度 100 km と 140 km それぞれにおける電界 E_y の周波数スペクトルと波形、高度 140 km における電界

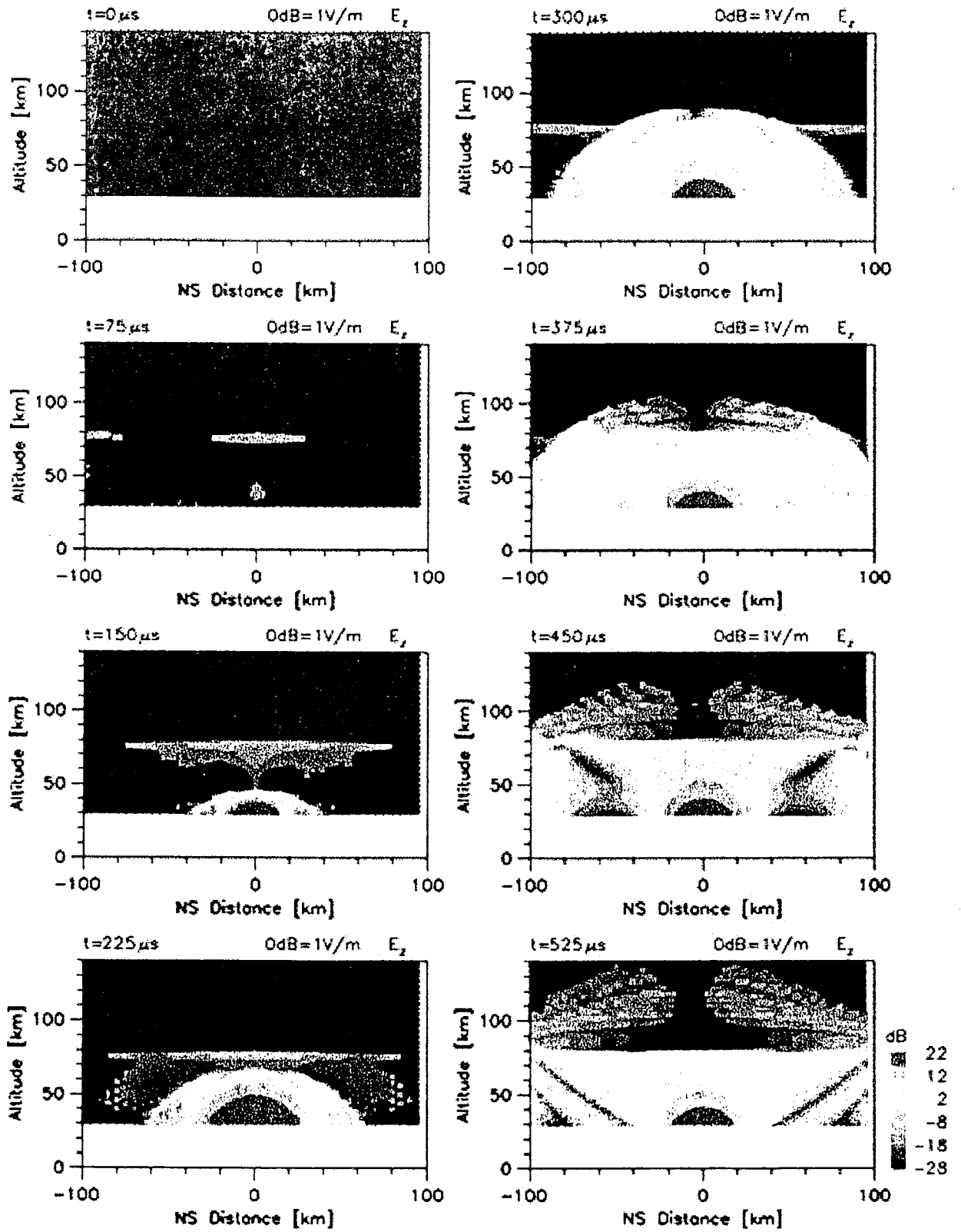
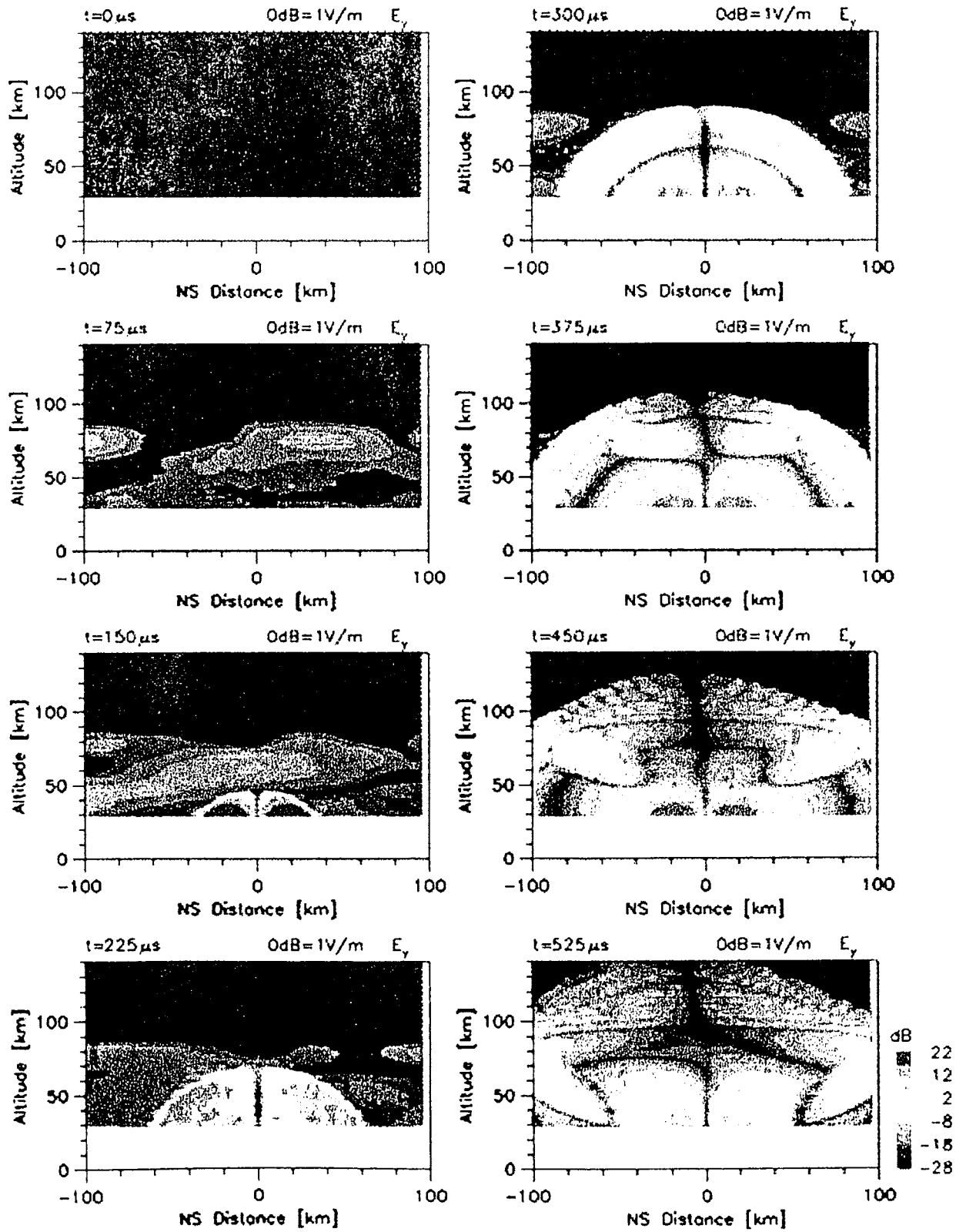
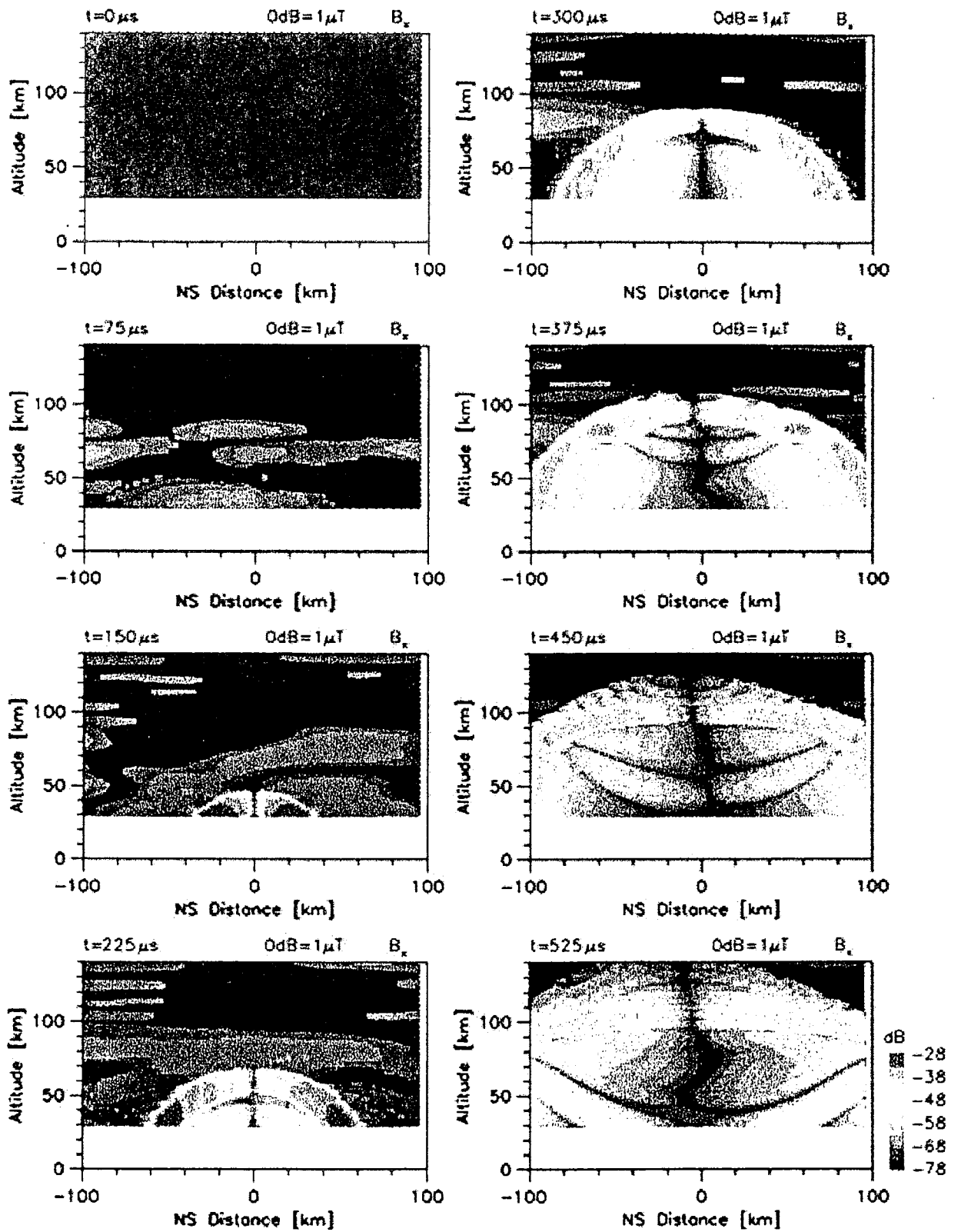


図 3.10 雷雲-地上間雷放電によって生じる下部電離層付近の電界強度分布の時間変化



(b) 電界の南北成分 E_y

図 3.10 (続き)



(c) 磁界の東西成分 B_x

図 3.10 (続き)

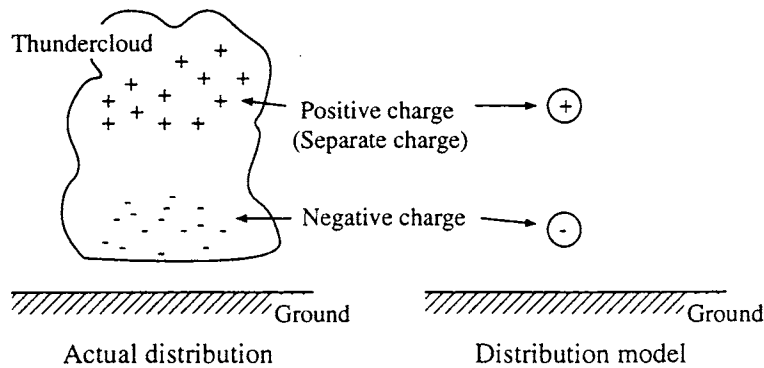


図 3.11 計算で想定した放電前の雷雲内の電荷分布

E_y の周波数-時刻 ($f-t$) ダイアグラムを図 3.12に示した. ただし, 電磁界の周波数スペクトルは実際の現象のものを示すために, 計算手法上に用いた逆電流の付加を取り除いたものになっている. すなわち, 周波数スペクトルの $\omega=2n\Delta\omega$ (n は整数)成分は0になっていない. 一方, 波形については正確さを保つためにこの逆電流を付加して得られた結果を示した.

高度 60 km は自由空間であり, 波源からの距離が近い放電後に静電界成分が残り, スペクトルも DC 成分が最も強くなっている. 電界 E_z の波形の $t=2$ ms における値を見ると, 電流経路の終端 (0, 0, 5 km) に総放電電荷量

$$Q = \int_0^{\infty} i(t) dt = I_0(\tau_1 - \tau_2) = 2.25 \text{ [C]} \quad (3.33)$$

が存在し, 電離層 (高度 74 km 以上) および地表を導体とした場合 (図 3.13参照) に生じる静電界強度 E_z

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \times 10^6} \left(\frac{1}{(60-5)^2} - \frac{1}{(60+5)^2} + \frac{1}{(14+69)^2} - \frac{1}{(14+69+10)^2} \right) \\ &= 2.49 \text{ [V/m]} \end{aligned}$$

にはほぼ一致している.

高度 100 km になると, 高度 60 km に比べてスペクトルの 3 kHz 以下の低周波成分が著しく減少して, 20 kHz 以上の高周波成分のレベルが相対的に上昇している. 波形においては, 電離層の分散性によって高い周波数成分が時間的に先に現れ始めているのが分かる.

高度 140 km になると, 電界スペクトルの周波数特性は高度 100 km のものとはほとんど変わらないが, 電界波形は明らかに周波数変調されたような形になっており, 高い周波数成分の後に低い周波数成分が到来している様子がはっきりしている. また, 2 ms 間で 400 点からなっている電界波形データを, 連続する 80 点ずつでハニング窓をかけたうえで短時間フーリエ変換 (Short Time Fourier Transform: STFT) を行い, 0~55 kHz の範囲を 2.5 kHz 間隔で周波数スペクトルを求める手順を, サンプルデータ列を動かしながら繰り返し

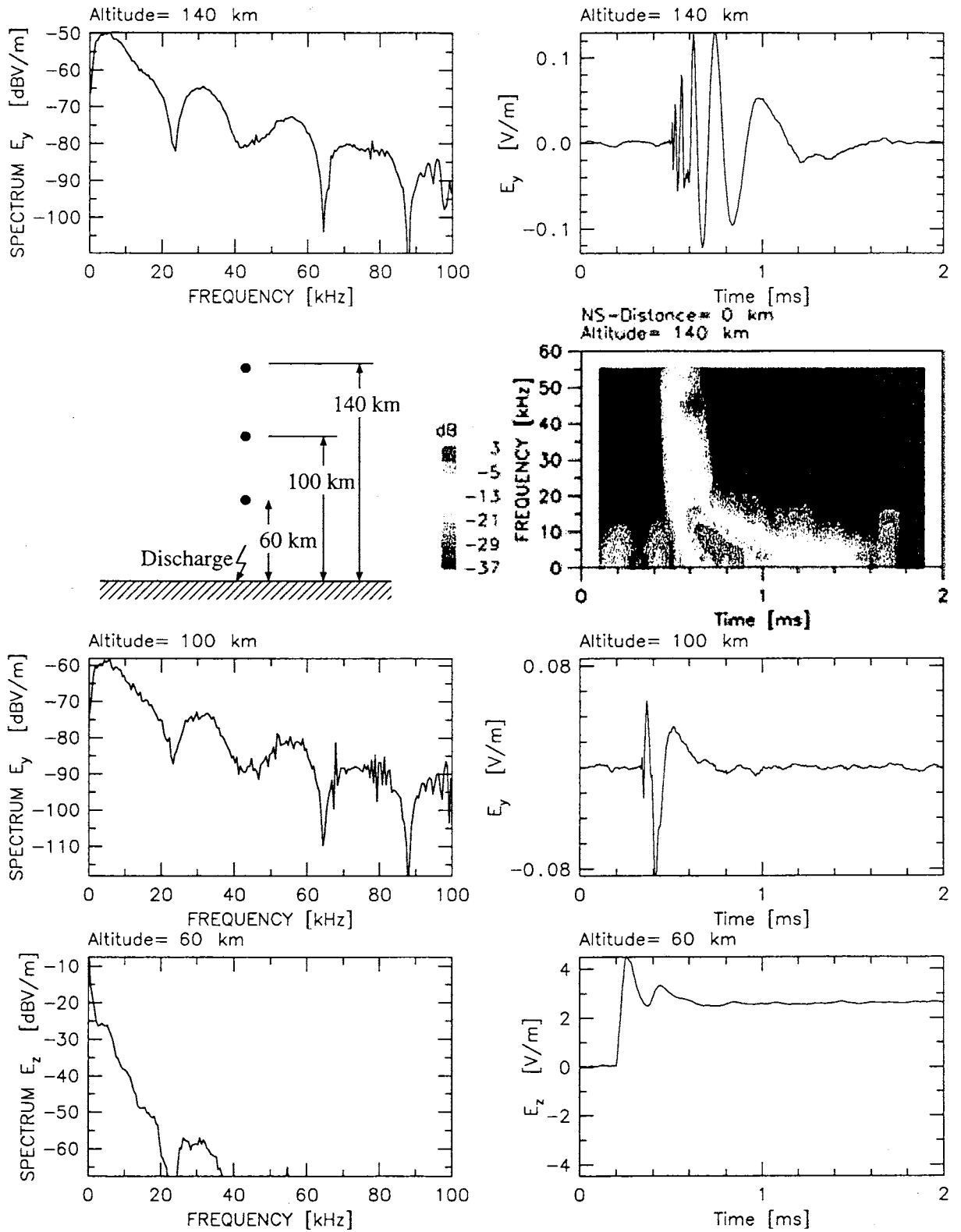


図 3.12 雷放電の真上 ($y=0$ km) の高度 140 km における E_y の周波数スペクトルと波形, f - t ダイアグラム, 高度 100 km における E_y の周波数スペクトルと波形, 高度 60 km における E_z の周波数スペクトルと波形

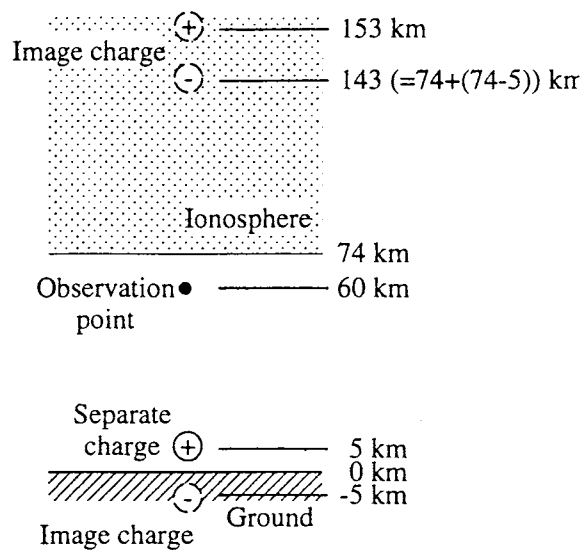


図 3.13 雷放電後の電界強度に寄与する電荷

行って得た周波数-時間ダイアグラム ($f-t$ ダイアグラム) を電界波形の図の下に示した. この図より, 電界の周波数が時間とともに低下するというホイストラと同じ特徴が観察できる.

次に, 波源から南方へ 100 km 離れた点 ($x=0, y=-100$ km) の上空高度 140 km および高度 100 km における電界 E_y , 高度 60 km における電界 E_z の波形の計算結果を図 3.14 に示した. 高度 140 km における電界波形は, 図 3.12 に示した雷放電真上の高度 140 km における電界波形と概形はほぼ同じである. しかし, 電界波形の最大値は, 波源真上では 0.13 V/m であるのに対して, 南方 100 km では 0.40 V/m とおよそ 3 倍である. 高度 100 km における電界波形においては, 雷放電真上の高度 100 km (図 3.12) でピーク値が 0.086 V/m であるのに対して, 南方 100 km では 0.49 V/m とおよそ 5.7 倍である. 高度 100 km における波源真上と南方 100 km でのピーク値の差が, 両点における雷放電の波源としての指向性をよく表しており, 高度 140 km において両者のピーク値の差が小さくなっているのは, 電離層中を電磁界パルスが伝搬するにしたがって媒質の分散性により波束が広がってしまうためであると言える.

雷放電の南方 100 km の高度 100 km における $t=1$ ms に見られる波形の乱れは電離層下端と地表面を 1 度ずつ反射したのちに電離層に透過してこの高度に到達した成分であると考えられる. 高度 60 km における電界波形は, 図 3.12 に示した雷放電真上の同じ高度の電界波形に比べて静電界成分がほとんどなくなって, 時間的に幅の短いパルスの形状になっている. $t=0.9 \sim 1.0$ ms に電離層下端と地表面を 1 回ずつ反射した成分が, $t=1.4 \sim 1.6$ ms に 2 回ずつ反射した成分が見られる.

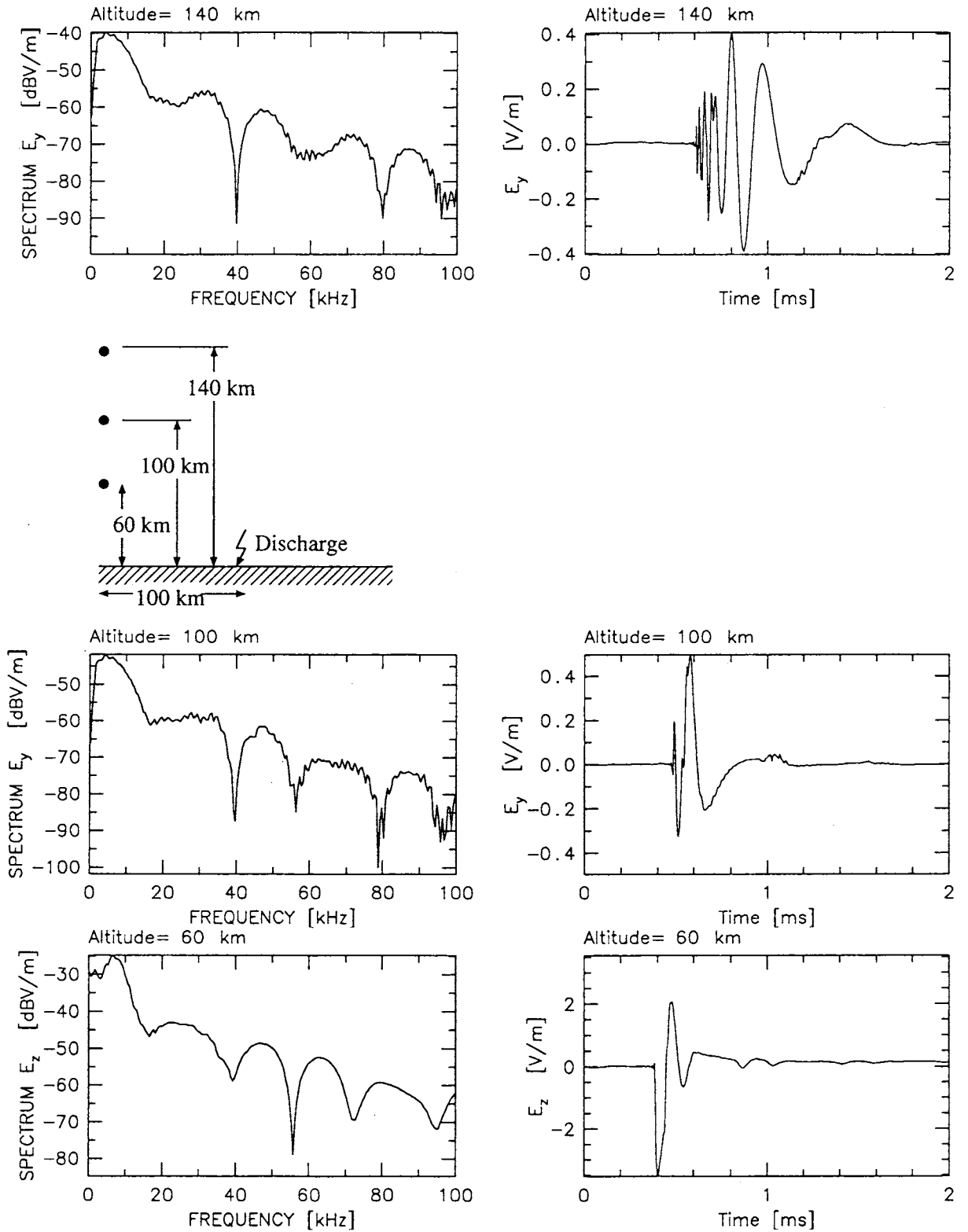


図 3.14 雷放電の南方 100 km ($y=-100$ km) の高度 140 km および高度 100 km における E_y の周波数スペクトルと波形, 高度 60 km における E_z の周波数スペクトルと波形

3.4.3 雷放電電流の時定数と電磁界波形との関係

実際の雷放電電流の立上り時間や電流の継続時間はさまざまであり、電流パラメータの τ_1, τ_2 のとり得る範囲は広い。負の雷雲-地上間雷放電電流の立上り時間の観測値の統計による累積分布関数値が 95% および 50%, 5% を超える立上り時間の値としてそれぞれ $1.8 \mu\text{s}$, $5.5 \mu\text{s}$, $18 \mu\text{s}$ が、一方、電流パルス時間長の値としてそれぞれ $30 \mu\text{s}$, $75 \mu\text{s}$, $200 \mu\text{s}$ という値が得られている [47]。

そこで、(a) $\tau_1=20 \mu\text{s}$, $\tau_2=2 \mu\text{s}$ の場合と (b) $\tau_1=50 \mu\text{s}$, $\tau_2=5 \mu\text{s}$ の場合 (前節のパラメータ) (c) $\tau_1=200 \mu\text{s}$, $\tau_2=20 \mu\text{s}$ の場合の、雷放電より南方 50 km で高度 140 km における電界 E_y のスペクトルと波形を計算し、図 3.15 に示した。計算におけるその他のパラメータについては前節と同じである。 τ_1 や τ_2 を小さくするという事は電流波形の時間変化が急峻になることなので、電流スペクトルは高い周波数領域に広がることになる。したがって、(a) の電界 E_y のスペクトルにおいて、周波数の増加に伴うスペクトル強度の減少が (b) に比べて小さくなっている。(a) の電界波形においても (b) に比べて周波数が高くなっていると言える。一方、(c) においては、電界スペクトルの周波数が高くなるにつれての成分の減少は大きく、電界波形は (b) に比べて大きい周期で変化する形になっている。なお、電界強度の瞬時的な最大値はおよそ 0.3 V/m で (a), (b), (c) でほぼ同じである。

3.4.4 雷放電電流パルスの移動速度と電磁界波形との関係

3.2 で述べたように本論文では雷放電電流として伝送線モデルを用いている。このモデルでは、電流波形が波形を一定に保ったまま直線の電流チャンネル上を移動する。その移動する速度が式 (3.8) 中の v_I である。電流パルスの移動速度 v_I は統計的な観測により、小さいときには $2 \times 10^7 \text{ m/s}$ 、大きいときには $2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$ 程度をとり得ることが分かっている [47]。

本節では、 v_I を変化させることによって電磁界波形にどのような影響が出るかを調べた。 v_I を (a) $4 \times 10^7 \text{ m/s}$ および (b) $8 \times 10^7 \text{ m/s}$ 、(c) $1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$ とした場合の、雷放電開始から $300 \mu\text{s}$ (左) および $500 \mu\text{s}$ 後 (右) における南北各 100 km まで、高度 30~140 km の子午面上における電界の南北成分 E_y の強度分布をカラーコンターで図 3.16 に、雷放電から南方 50 km で高度 60 km (左) および 140 km (右) における電界 E_y の波形を図 3.17 に示した。雷放電電流のパラメータについては表 3.1 の値を用いた。

図 3.16 より、移動速度 v_I が大きいほど電界のピーク値が大きくなり、電界パルスの空間的幅が小さくなっていることが分かる。移動速度 v_I が大きいと電流経路に電流が流れている時間が短くなるので、電磁界が放射される時間も短くなり電磁界パルスの幅が短くなるといえる。図 3.17 から v_I が大きくなるに従って電界パルス長が短くなっていることがはっきりと分かる。電界パルス長はチャンネルを電流が流れる時間 l/v_I におよそ一致している。また、電界のピーク値を見ると、高度 60 km (自由空間) においてはそれぞれ (a) 2.0

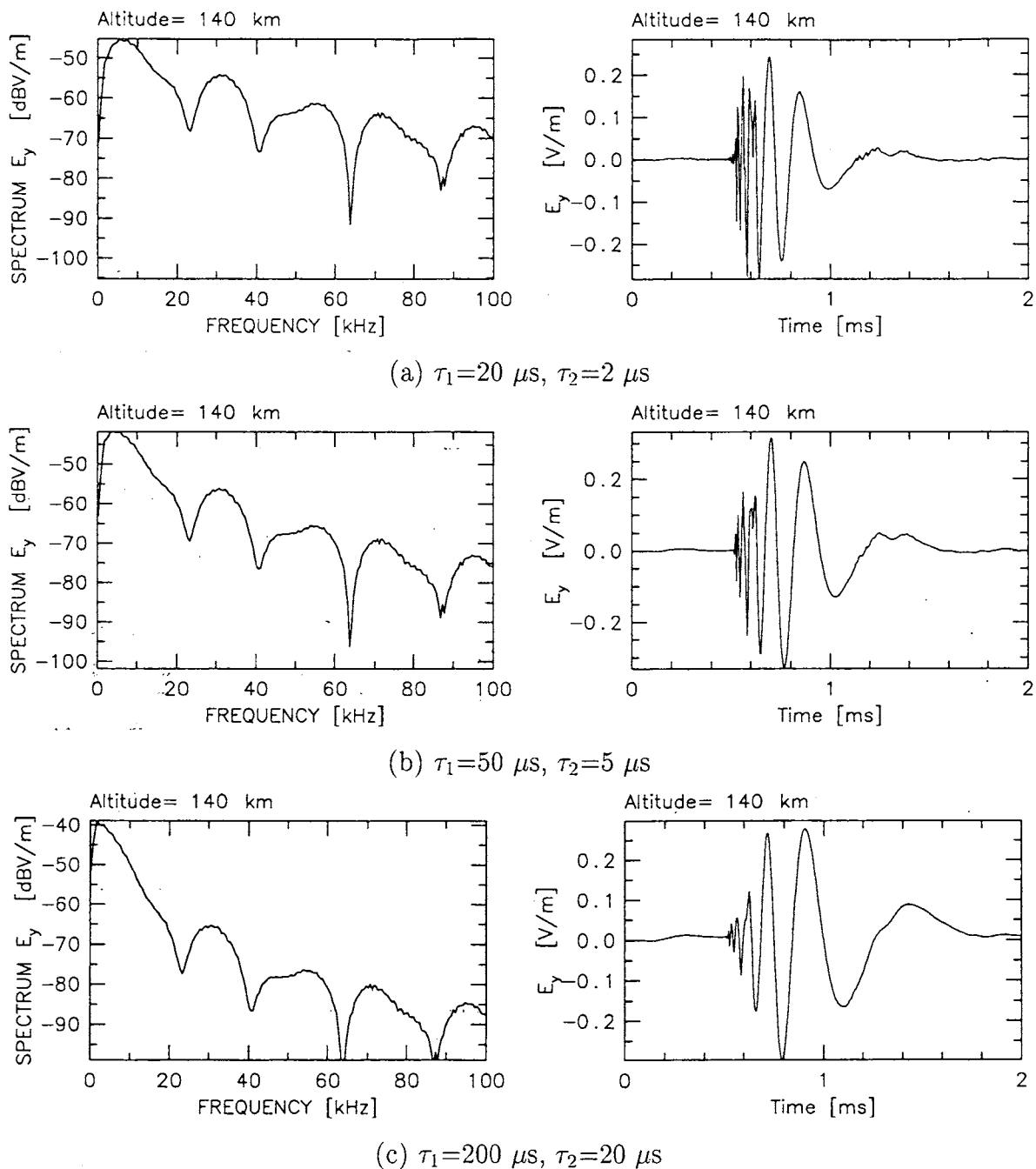
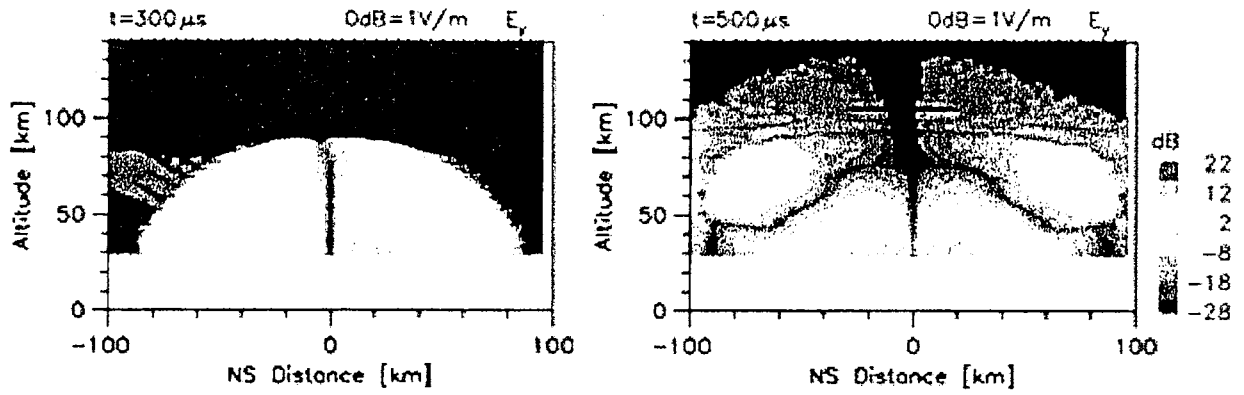
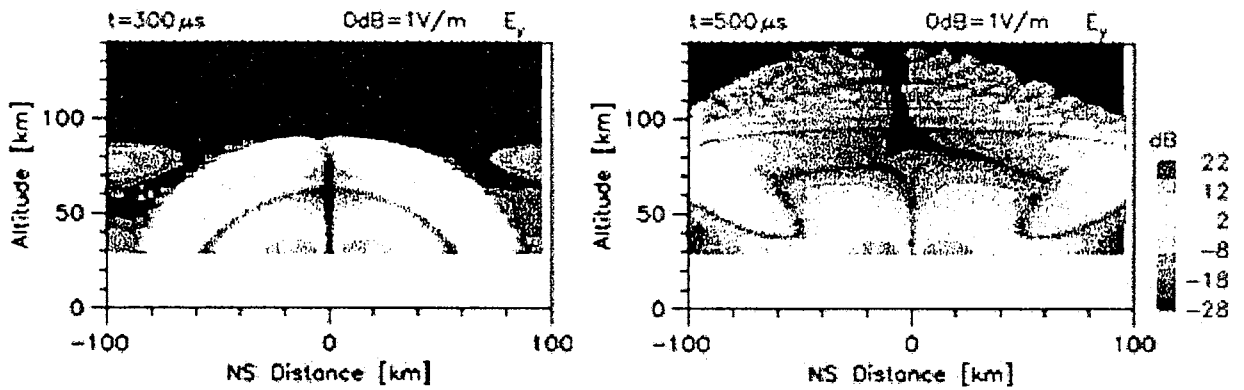


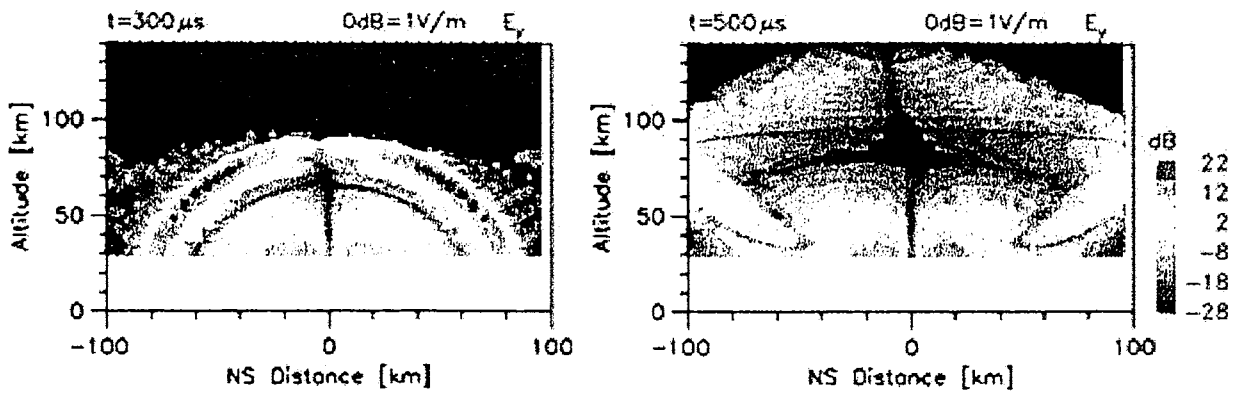
図 3.15 雷放電電流の時定数 τ_1 および τ_2 と雷放電の南方 50 km, 高度 140 km における電界 E_y のスペクトルおよび波形との関係



(a) $v_I = 4 \times 10^7 \text{ m/s}$



(b) $v_I = 8 \times 10^7 \text{ m/s}$



(c) $v_I = 1.5 \times 10^8 \text{ m/s}$

図 3.16 $t = 300 \mu s$ (左) および $t = 500 \mu s$ (右) における電界 E_y の強度分布の電流波形速度 (v_I) 依存性

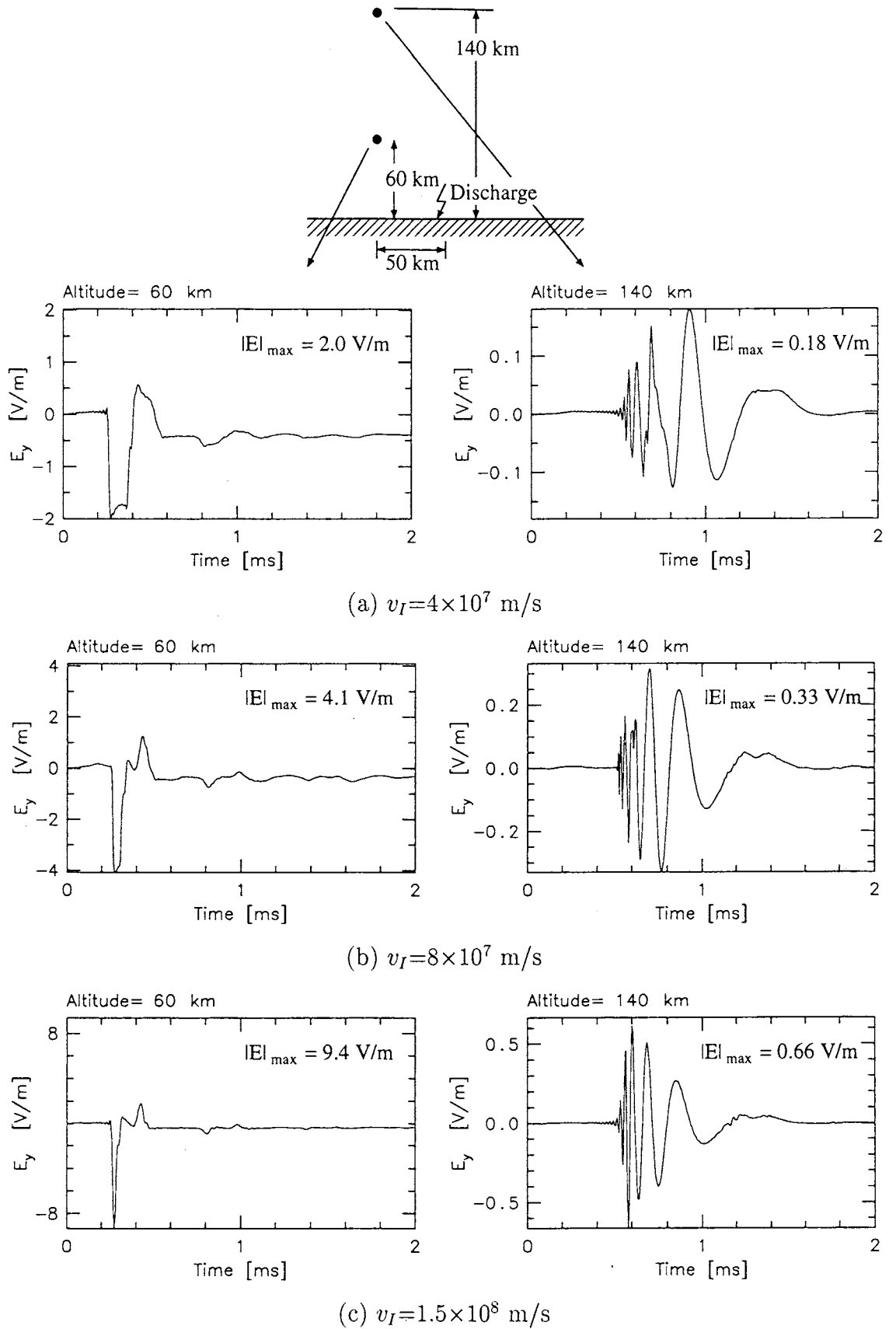


図 3.17 雷放電の南方 50 km, 高度 60 km (左) および高度 140 km (右) における電界 E_y の波形の電流波形速度 (v_I) 依存性

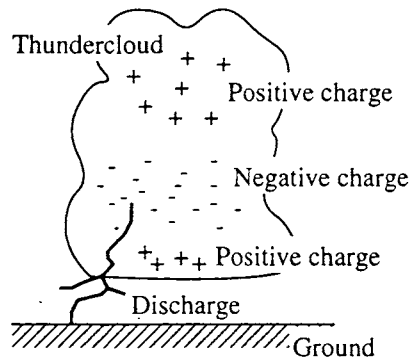


図 3.18 一般的な雷雲内の電荷分布

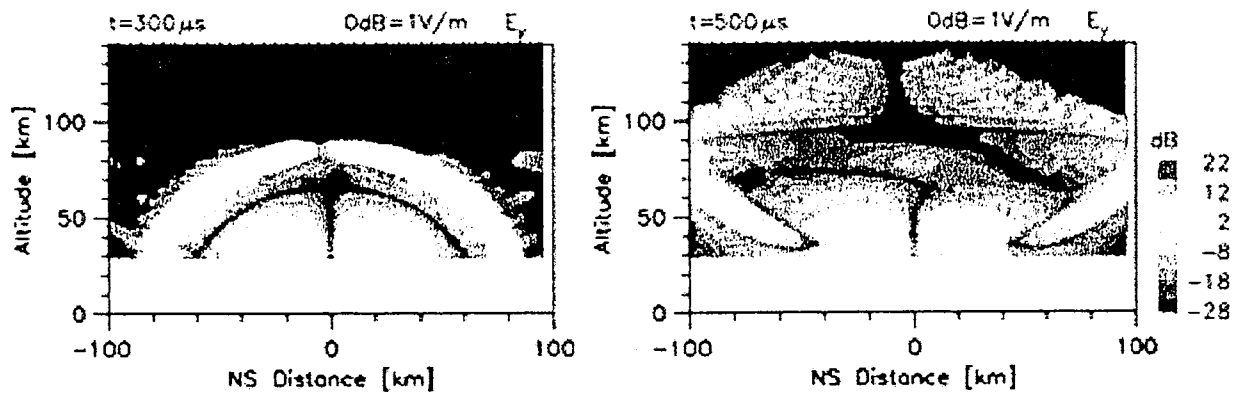
V/m, (b) 4.1 V/m, (c) 9.4 V/m となっている。自由空間中の伝送路電流から放射される電磁界強度は、電流波形の移動速度におよそ比例する(ただし、 v_l が光速に近づくと補正係数がつく)ことが分かっているが[47], [57], 本計算結果はこのことと一致している。

一方、高度 140 km (電離層) においては電界のピーク値はそれぞれ (a) 0.18 V/m, (b) 0.33 V/m, (c) 0.66 V/m となっている。高度 140 km においては高度 60 km ほどに、電界パルス幅の短い (c) のピーク値が (b) のピーク値に対して大きくなっていない。これについても電離層中のプラズマ媒質の分散性より波束がくずれて広がってしまう効果のためと考えられる。

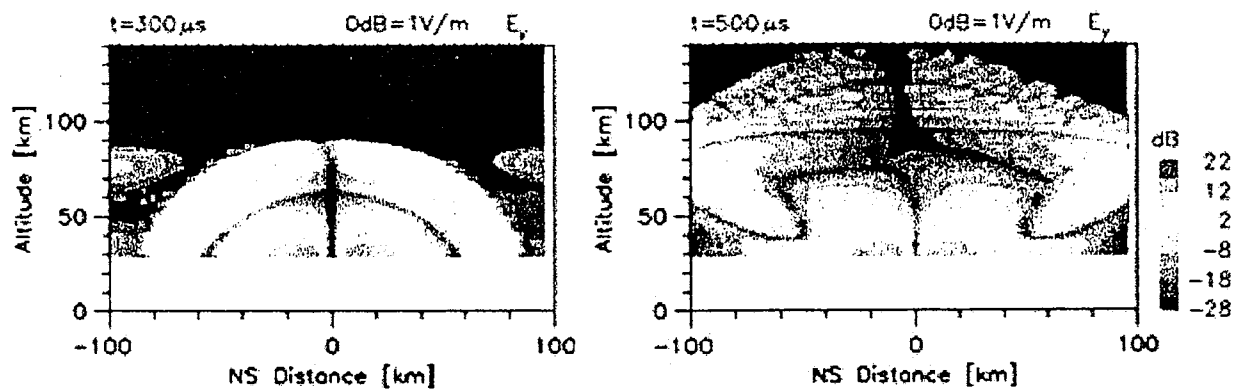
3.4.5 雷放電電流の終端高度と電磁界波形との関係

雷放電が終端する高度は、雷雲の電荷分布に大きく依存している。雷雲中の電荷分布は大域的には、図 3.18 のように高度の高いところから正・負・正の電荷が分布することが分かっている[47]。一般に、負極性の雷雲-地上間雷放電は地上から雷雲へと正の電流が流れることにより雷雲中の負の電荷が中和される(もしくは雷雲中央の負の電荷が地上へ移動する)と考えることができる。負の電荷の分布高度は雷雲の規模や地理的、その他の条件によって決まり、とり得る範囲は広い。そこで本節では、この負電荷の高度すなわち放電電流の終端高度によって電磁界波形にどのような違いが生じるかを調べた。ここで垂直な雷雲-地上間雷放電を想定しているので、放電電流の終端高度は電流経路長 l に等しい。

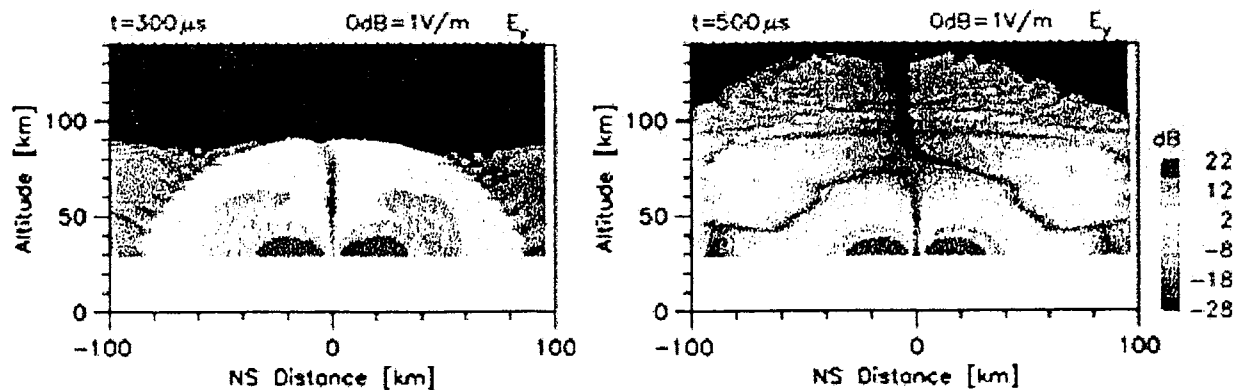
図 3.19 に、電流終端高度 l を (a) 2 km とした場合、(b) 5 km とした場合、(c) 10 km とした場合の放電開始後 300 μ s および 500 μ s における電界 E_y の強度分布を、図 3.20 に雷放電から南方 50 km ($y = -50$ km) の高度 60 km および高度 140 km における電界 E_y の波形を示した。放電電流の時定数および電流パルス移動速度については、表 3.1 の値を用いた。(a), (b), (c) を比べると、電流終端高度 l が大きいほど放射電界パルスの空間的幅が大きくなる。電流移動速度は電流チャネル全体にわたって一定なので、電流チャネルに電流が流れている時間は l に比例することになる。電流が流れている間電磁界パルスは発



(a) $l = 2$ km の場合



(b) $l = 5$ km の場合



(c) $l = 10$ km の場合

図 3.19 電界 E_y の $t = 300 \mu\text{s}$ (左) および $t = 500 \mu\text{s}$ (右) における強度分布の電流終端高度 (l) 依存性

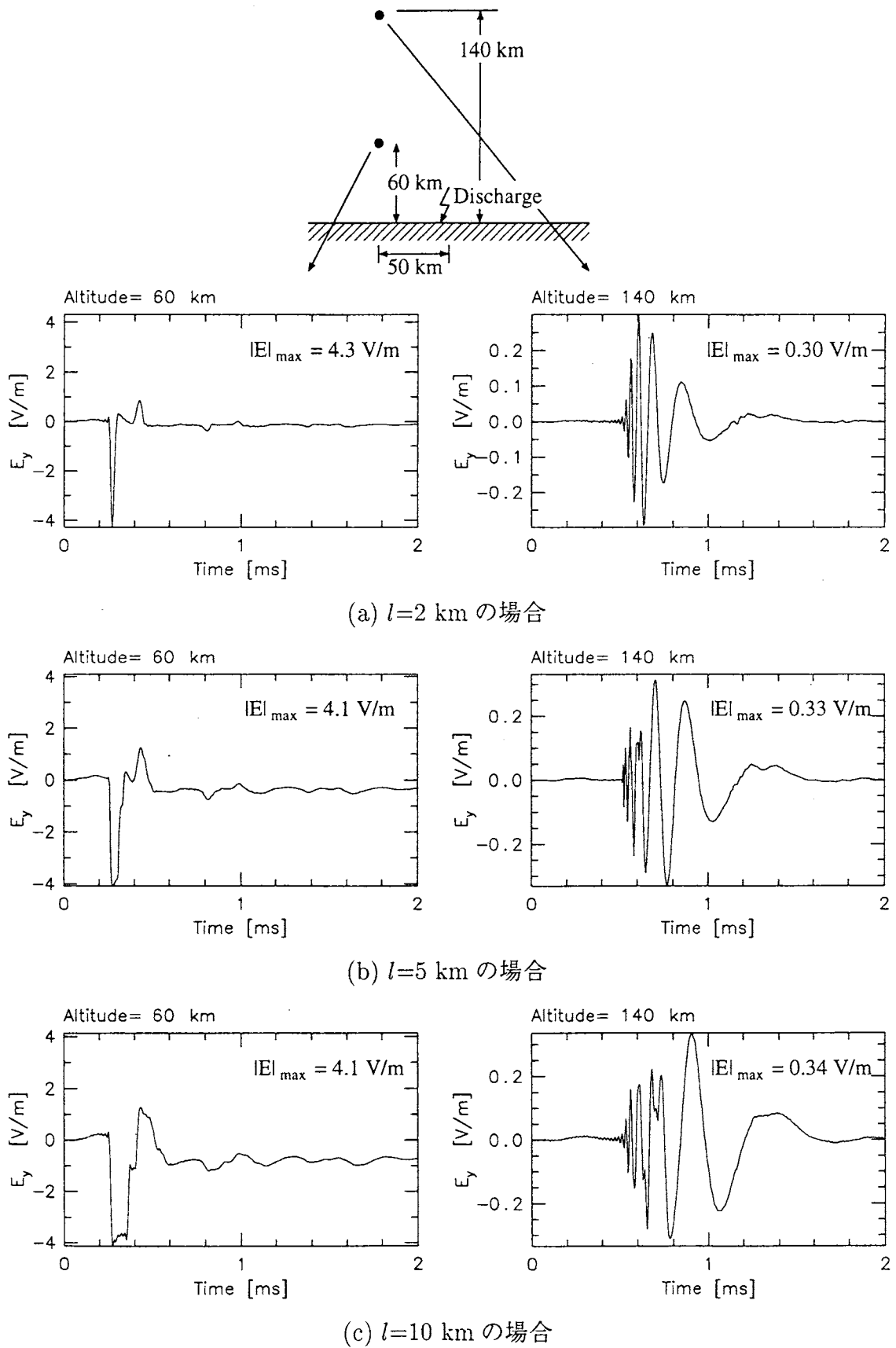


図 3.20 雷放電の南方 50 km, 高度 60 km (左) および高度 140 km (右) における電界 E_y の波形の電流終端高度 (l) 依存性

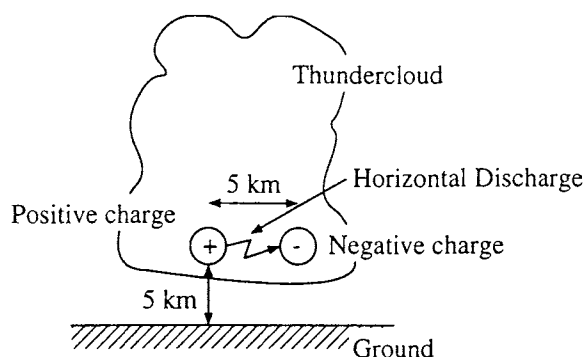


図 3.21 水平雷放電の計算で想定した放電前の電荷配置

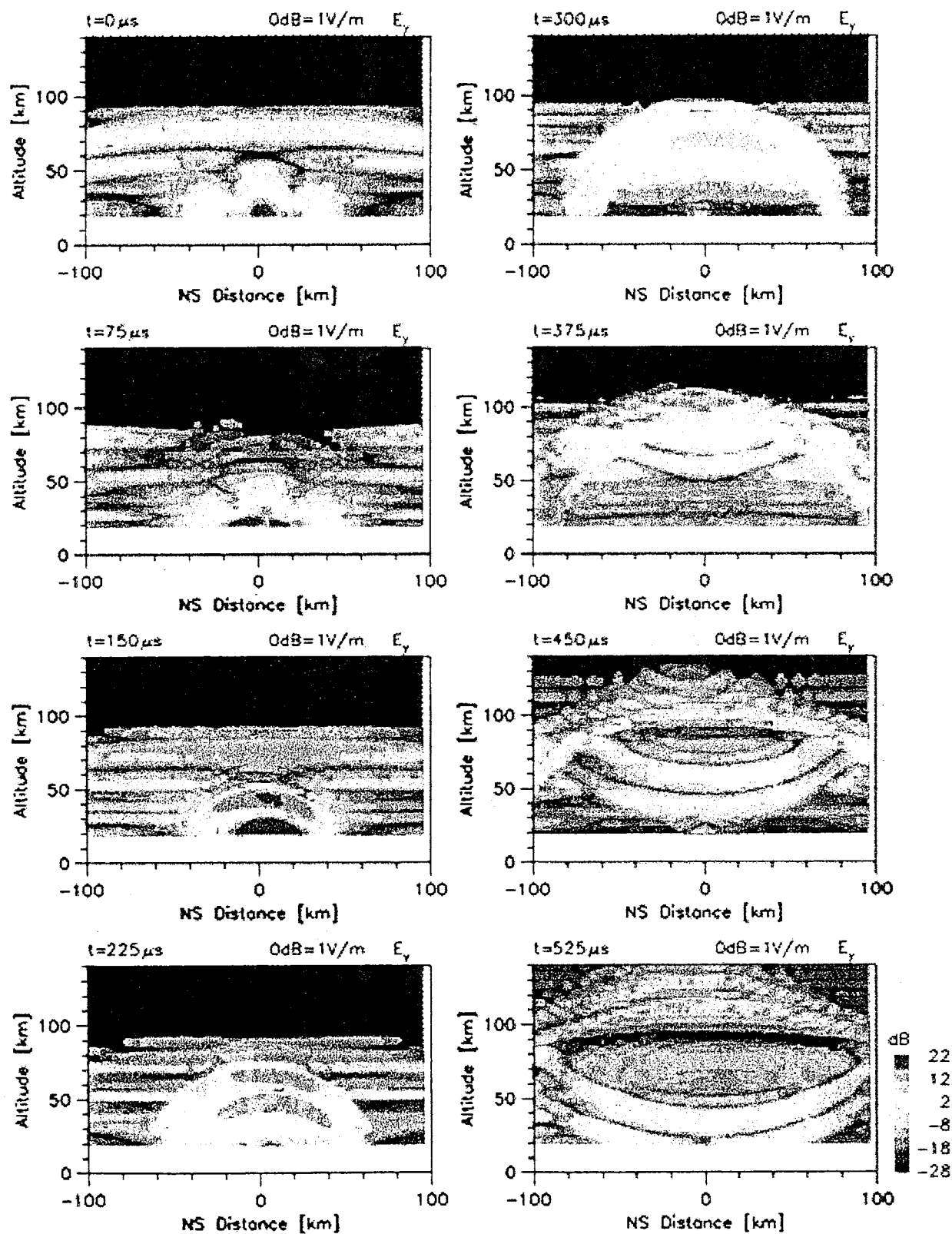
生し続けることになるので、電流終端高度すなわち電流経路長が大きいほど放射電界パルスの空間的幅が大きいことになる。

3.4.6 水平方向の雷放電による電磁界波形

3.2 で述べたように雷雲-地上間雷放電であってもその電流チャネルは全体にわたって必ずしも垂直であるとは限らない。電流チャネルの一部が水平方向になっていることもある。そこで、水平な雷放電を想定した場合の計算も行った。図 3.21 のように、 $(0, 0, 5 \text{ km})$ の点に正電荷、 $(0, 5 \text{ km}, 5 \text{ km})$ の点に負電荷がある状態から、式 (3.7) で示される放電電流が流れて両電荷が消滅する現象を想定した。

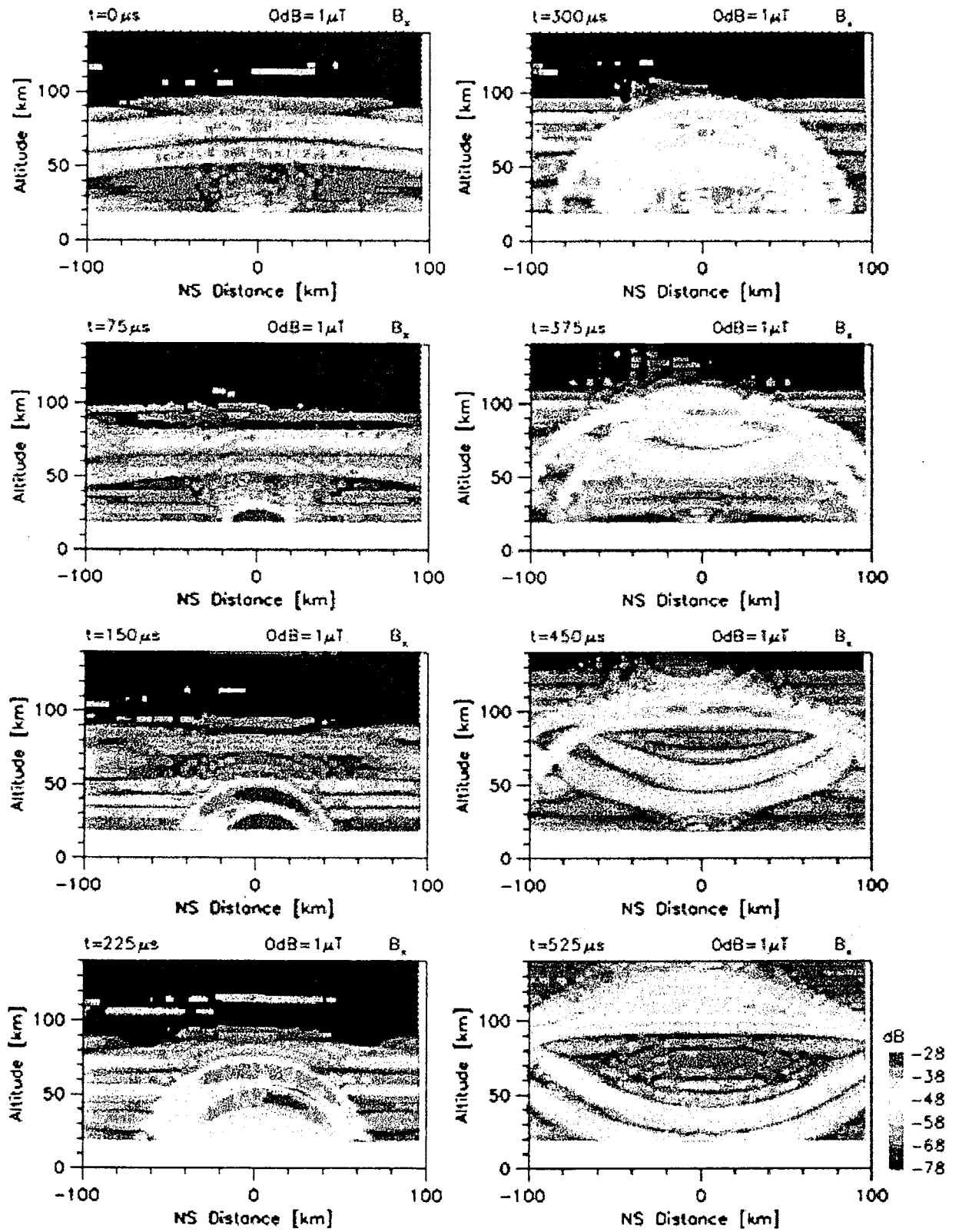
図 3.10 同様に雷放電開始を $t=0$ として $t=525 \mu\text{s}$ までの $75 \mu\text{s}$ ごとの y - z 面上における高度 $20 \sim 140 \text{ km}$ 、南北 100 km ($-100 \text{ km} \leq y \leq 100 \text{ km}$) の領域の (a) 電界の y 成分 E_y 、(b) 磁界の x 成分 B_x の強度分布の時間変化をカラーコンターで図 3.22 に示した。 $t=0$ において原点から南北に 50 km 付近かつ高度 40 km より低い領域に見られる強い電界は想定した放電前の正負の電荷によって生じている静電界である。なお、 $t=0$ において高度 $70 \sim 80 \text{ km}$ 付近に広くあるおよそ -5 dBV/m の強度の電界は、電磁界計算における周波数間隔 ($=250 \text{ Hz}$) が十分に小さくないことによって生じている時間領域におけるエリアシングである。この図で分かるように水平雷放電の場合、垂直雷放電とは逆に真上に電磁波がもっとも強く放射され、この成分が電離層下端と地表面との間を何回も反射を繰り返す。そのため、長時間にわたって比較的強い電磁界が残ることになり、 $T_{max}=2 \text{ ms}$ の設定では時間領域におけるエリアシングが生じてしまう。このエリアシングを取り除くためには、さらに長い計算時間長 T_{max} 、すなわちさらに小さい周波数間隔 $\Delta\omega$ が必要となるわけである。

$t=225 \mu\text{s}$ では、2つの弓型の強度の大きい部分が見られるが、上の方は雷放電から放射された電磁界パルスのうち直接的に到来した成分であり、下の方は地上で1回反射して到来した成分である。この弓形の成分は少し北側の方が強くなっているのが分かるが、これは雷放電電流が北の方向に進行しているためである。伝送路電流から放射される電磁波の



(a) 電界の y 成分 E_y

図 3.22 水平雷放電によって生じる電磁界パルスの自由空間および下部電離層における電界強度分布の時間変化



(b) 磁界の x 成分 B_x

図 3.22 (続き)

強度は進行方向に強く、反進行方向に弱くなることが分かっている [57]. また, $t=300 \mu\text{s}$ 以降, 放射された電磁界パルスの一部が下部電離層で反射される一方で, 一部が電離層を透過して伝搬する様子が明確に観察できる.

(b) の磁界の x 成分については, 静電界成分に相当するものがない点を除いては (a) の E_y と同様の時間変化を示している. ただし, 図 3.10(c) と同じく, 電離層中でのホイストラモード波の屈折率は大きいので, 電離層中に透過すると磁界強度は大きくなっている.

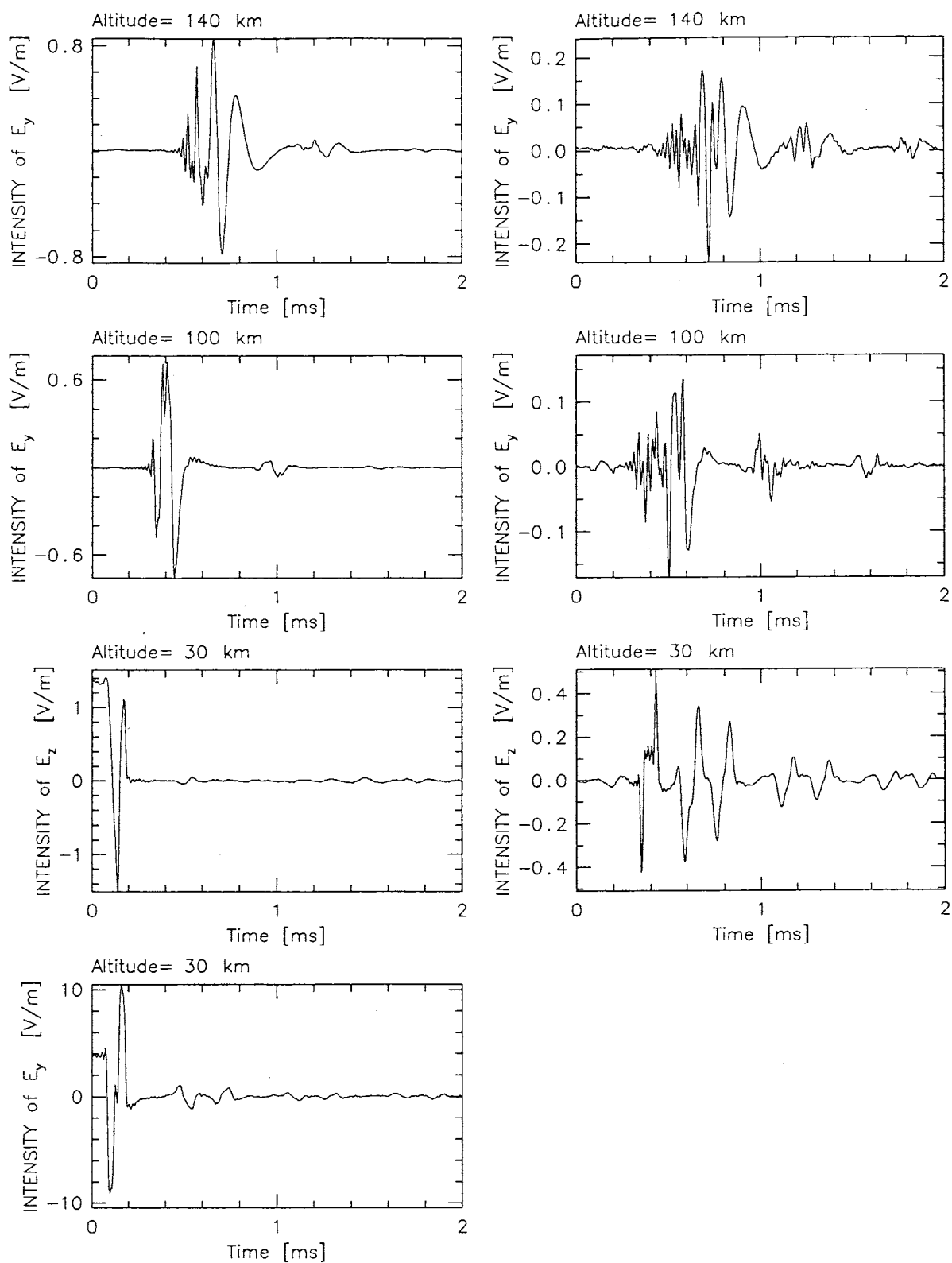
次に, (a) 雷放電真上 ($y=0$) と (b) 南方 100 km ($y=-100$ km) のそれぞれの高度 140 km および高度 100 km における電界の y 成分 E_y , 高度 30 km における電界の z 成分 E_z ($y=0$ km においては加えて E_y) の波形の計算結果を図 3.23 に示した. 高度 140 km においては, 時間とともに波の周波数が低くなるホイストラ波になっているのがよく分かる. (a) および (b) の $t=1.2\sim 1.4$ ms における乱れは, 電離層および地表面で各 1 回反射したのちに電離層を透過してこの高度に到来した成分であると考えられる. また, (b) の $t=1.7\sim 1.9$ ms における乱れは, 同様に各 2 回反射した成分であると考えられる. (b) は, (a) に比べて電離層中の伝搬距離が長いので, 周波数の違いによる各々の成分の到達時間のずれが大きくなっているため, パルスの波束がより広がっていると言える. 高度 100 km において, 地表面と電離層との多重反射による成分がそれぞれ現れていることは高度 140 km と同様である. しかし, 140 km に比べて伝搬距離が短いので各成分の波束の広がり (a), (b) それぞれにおいて小さい.

高度 30 km の (a) の $t=0$ において存在する電界 E_z および E_y は図 3.24 に示した電荷配置による生じている静電界成分であり, 導体とみなせる地表面の存在によってできる像の電荷も考慮した電界

$$\begin{aligned} E_{y(0,0,30)}|_{t=0} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \times 10^6} \left(\frac{5}{\sqrt{(25^2 + 5^2)^3}} - \frac{5}{\sqrt{(35^2 + 5^2)^3}} \right) \\ &= 3.8 \text{ [V/m]} \\ E_{z(0,0,30)}|_{t=0} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \times 10^6} \left(\frac{1}{25^2} - \frac{1}{35^2} - \frac{25}{\sqrt{(25^2 + 5^2)^3}} + \frac{35}{\sqrt{(35^2 + 5^2)^3}} \right) \\ &= 1.36 \text{ [V/m]} \end{aligned}$$

に一致している. ただし, Q は放電する総電荷量すなわち放電前の正負各電荷の荷電量であり, 式 (3.33) と同じく 2.25 C である. (b) $y=-100$ km では雷放電からの水平距離が大きいため静電界成分は見られず, 地表面と電離層との反射を繰り返しながら減衰しつつ伝搬してゆく空電 (sferics) と呼ばれる成分がはっきりと見られる. また, 電離層で反射するたびに時間変化の緩やかな電界パルスに変化する, すなわちパルスの周波数成分が低くなっていくのが分かる.

最後に, 垂直雷放電および水平雷放電の場合の高度 140 km と 60 km における電界の y 成分 E_y の絶対値の最大値と雷放電からの南北方向の距離との関係を図 3.25 に示す. 垂直雷



(a) 雷放電の真上 ($y=0$ km)

(b) 南方 100 km ($y=-100$ km)

図 3.23 水平雷放電の場合の高度 140 km および高度 100 km における電界 E_y の波形と高度 30 km における E_z および E_y の波形

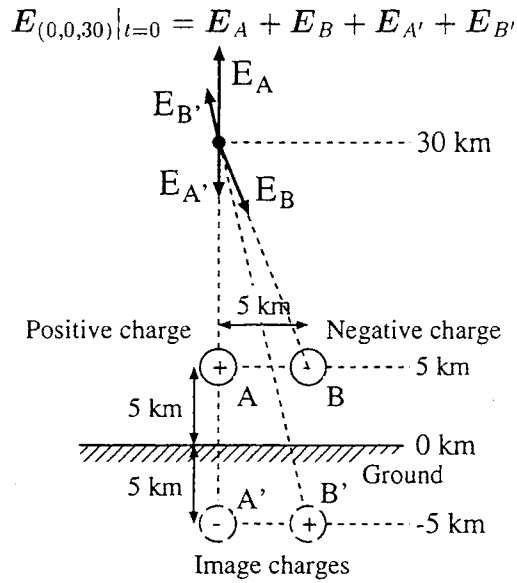


図 3.24 水平雷放電における放電前の電界強度に寄与する電荷配置

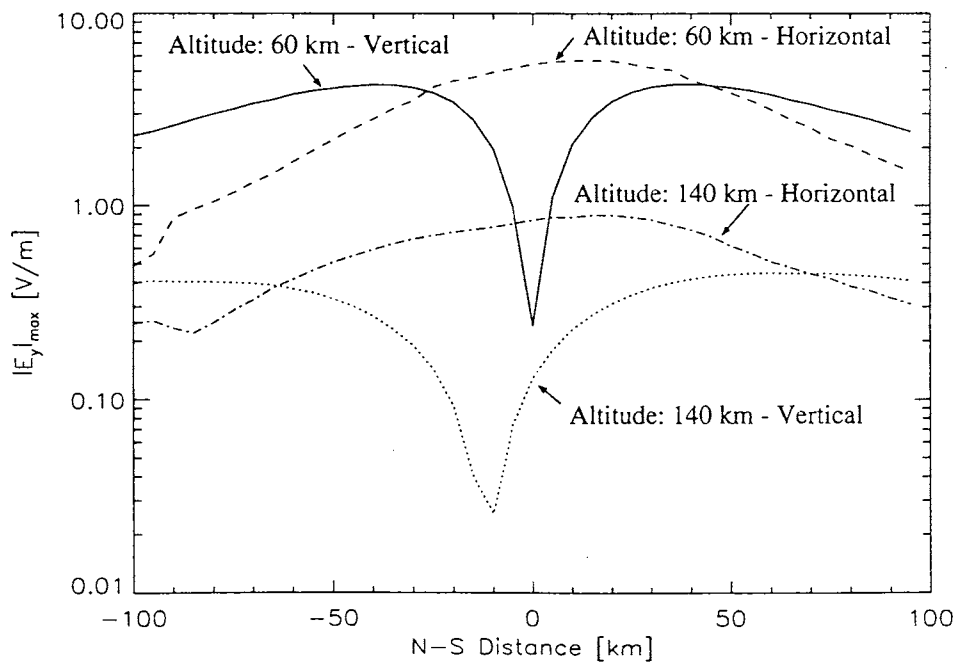


図 3.25 垂直雷放電および水平雷放電の場合の高度 140 km と 60 km における電界の y 成分 E_y の絶対値の最大値と雷放電からの南北方向の距離との関係

放電の場合には、雷放電真上は指向性のヌルに相当するため高度 60 km において電界 E_y は最も小さくなっている。ただし、高度 140 km では Dip=71°の地球磁場の影響を受けて最小点が南の方にずれている。逆に水平雷放電の場合には、雷放電真上付近で電界値が最も大きくなっている。最大点が北の方に少しずれているのは先に述べたように北に進行する電流の影響が現れているためである。また、南北方向の距離が大きくなると垂直雷放電の場合の方が電界値が大きくなっている。

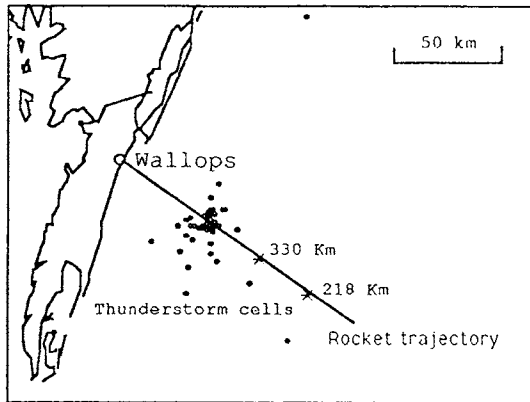
また、本章で示した雷放電のモデルは 2 点間を流れる雷放電電流のみを想定している。しかし、先に述べたように本計算では時刻 $t=0$ ですべての場所での電界を 0 としているので、これは放電前において放電に関わる電荷による電界を相殺するようなその周辺の遮蔽電荷の存在を仮定していることを意味している。実際には厳密に言うと完全に遮蔽されることはなく、放電前において特に低い高度 (<40 km) の領域で電界は存在している。したがって、高度の高い領域 (>40 km) の電界については十分であるが、低高度領域の電界の時間変化を厳密に求めようとする場合には、放電することになる電荷が雷雲内に蓄積されるすなわち電荷が分離する過程も考慮する必要があると考えられる。

3.5 ロケットによる雷雲上空の電界波形の観測結果との比較

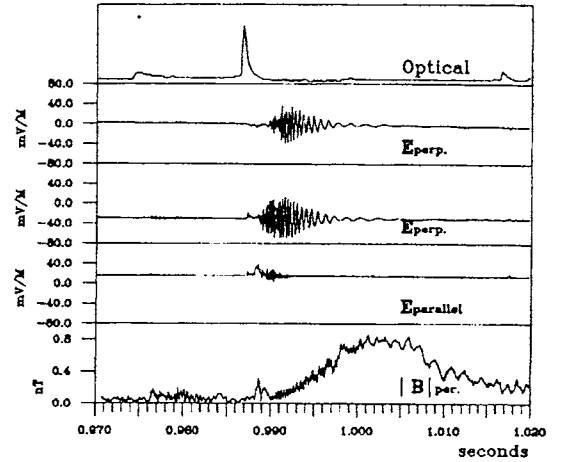
雷放電に起因した雷雲上空の中間圏や下部電離層における電磁界強度の時間変化を観測する実験は、これまで幾度も行われている。雷雲の活動が活発なときをねらって雷雲付近(水平距離 70 km)に上げられた気球や、雷雲上空の中間圏さらに下部電離層(高度 50~150 km)に届くように打ち上げられたロケットや、ロケットから射出されたパラシュートなどに搭載された機器によって、これらの領域における電界強度や導電率が測定されている [58], [59]。また、米国バージニア州の NASA Wallops Flight Center (37.8°N, 284.5°E) から、雷雲の真上を通過しつつ最高高度が 330 km となるロケットを打ち上げて、高度 290 km 付近で雷放電に起因した電界の直交 3 成分およびロケットのスピンの軸に垂直な磁界 1 成分の波形の観測を行っている [39]。図 3.26 (a) に観測を行ったロケットの軌道を、同図 (b) に高度 294 km のロケット上で観測された雷光および電界 3 成分、磁界 1 成分の波形を、同図 (c) に (b) の電界波形を拡大して地球磁場ベクトルに垂直な成分と平行な成分とに変換したもの、および伝搬計算によって求められた電界波形を、同図 (d) に (b) の 3 つ目の E_{perp} をソノグラムになおしたものを示した。これらはそれぞれ文献 [39] の図 1, 3~5 からの引用である。

そこで、本節ではこの観測を念頭に置いて、前節の計算よりさらに計算高度範囲および雷雲からの水平距離を広げ、電磁界波形の計算を試みた。計算に使用した各種パラメータを表 3.4 に、電子密度および電子の衝突周波数の高度プロファイルを図 3.27 に示した。電子密度プロファイルは先の観測地である Wallops Island 上空の夜 (LT05h) の IRI モデルを用いた。電子の衝突周波数の高度プロファイルは図 3.9 と同一のものを用いた。本計算によって得られた電離層中で高度 290 km、雷放電からの水平距離が 60 km における電界の水平成分のスペクトルと波形、および波形を SFFT することで得られた f - t ダイアグラムを図 3.28 に示す。

この計算結果と図 3.26 の観測結果とを比較すると以下のことが言える。図 3.26 (c) より、20 kHz 成分の到達時刻と 10 kHz 成分のそれとの差、さらに 5 kHz 成分のそれとの差はともに約 1 ms と読むことができ、計算結果の図 3.28 の f - t ダイアグラムから得られる値とほぼ一致している。これは計算で仮定した電離層モデルが観測時の実際の電離層に近いものであることを意味している。しかし、観測値のホイッスラ強度は図 3.26 (c) をみると周波数に関して平坦であるが、計算結果では 16 kHz 付近で明確な極小点が見られる。これは電流パルスの移動速度 v_f を雷放電電流経路長 l で割った値と一致する。観測値にこの極小が見られないことは、パルス移動速度がモデル計算で仮定した値 (8×10^7 m/s) より大きかったか、もしくは電流経路長が仮定した値 (5 km) より短かったことを意味している。また、雷放電が発生してから 10 kHz 成分が到達するまでの時間は計算結果で約 4 ms であるのに対して、観測値では 3.5 ms と相違がある。(図 3.26 (b) より、雷放電が起こってから雷光がロケットで観測されるまでの時間が $300 \text{ [km]} \div (3 \times 10^5 \text{ [km/s]}) = 1 \text{ [ms]}$ 、雷光の

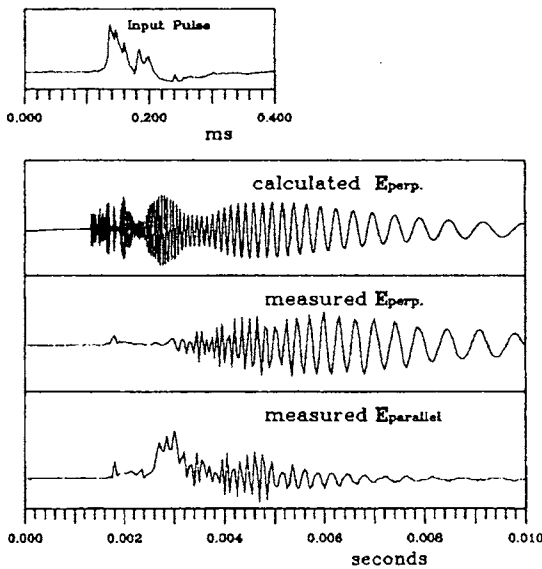


(a) 観測を行なったロケットの軌道

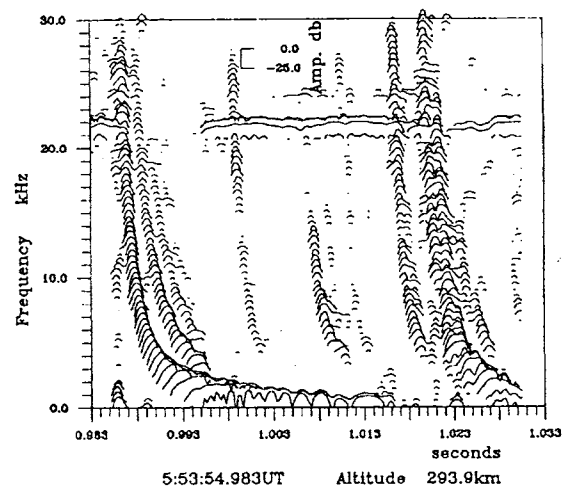


Time 5:53:54.97 TO 55.02UT, Altitude 294km

(b) 上から順に雷光強度，スピン軸に垂直な電界2成分，スピン軸に平行な電界成分，スピン軸に垂直な磁界成分



(c) 上から順に伝搬計算で得られた波形，電界2成分を拡大して地球磁場に垂直な成分と平行な成分とに変換したもの



5:53:54.983UT Altitude 293.9km

(d) 電界の垂直成分 ((b) の3段目) のソノグラム

図 3.26 ロケットの軌道およびロケット上で観測された雷光パルス波形と雷放電による電磁界パルス波形，文献 [39] の図 1, 3~5

表 3.4 種々の計算パラメータ

電流の方向 m	$(1, 0, 0)^t$ ($=x$ 方向)
電流 I_0	-50 kA (ピーク値-35 kA)
時定数 τ_1, τ_2	200 μ s, 20 μ s
パルス速度 v_I	8×10^7 m/s
放電開始高度 z_0	5 km
電流経路長 l	5 km
計算最大周波数 $\omega_{max}/2\pi$	40 kHz
(時間分解能)	12.5 μ s)
計算時間長 $2T_{max}$	40 ms
(周波数間隔 $\Delta\omega/2\pi$)	25 Hz)
計算高度範囲	20~370 km
電離層高度範囲	80~370 km
電離層分割幅	2 km
電子のサイクロトロン周波数	1.24~1.45 MHz
地磁気伏角	67°
地表の比誘電率	10
地表の導電率	10^{-3} S/m

立上がりからホイストラに先立つ低周波 (<2 kHz および 8~12 kHz) 成分の立上がりまでが 0.5 ms, 図 3.26 (c) より, “先立つ低周波成分” の立上がりからホイストラの 10 kHz 成分の立上がりまで 2 ms, これらを足し合わせて 3.5 ms となる. ただし, “先立つ低周波成分” の立上がり時刻が同図 (b) と (c) とで異なっている.) また, 観測値では 500 Hz 前後の成分がかなり強い強度で存在している (図 3.26 (b) 0.009~0.010 付近) が, 計算結果では, スペクトルを見ると明らかのように強度がかなり小さくなっている. この点が一致しない.

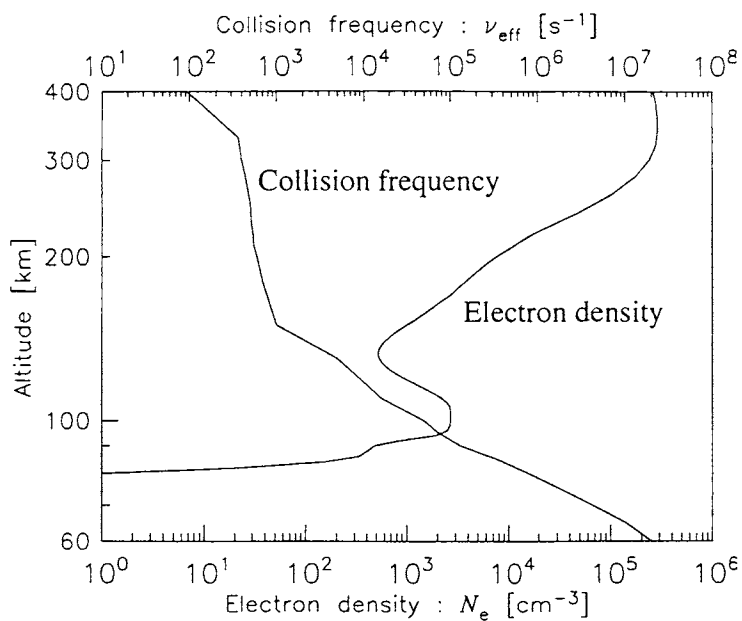


図 3.27 計算に用いた電子密度と衝突周波数の高度プロファイル

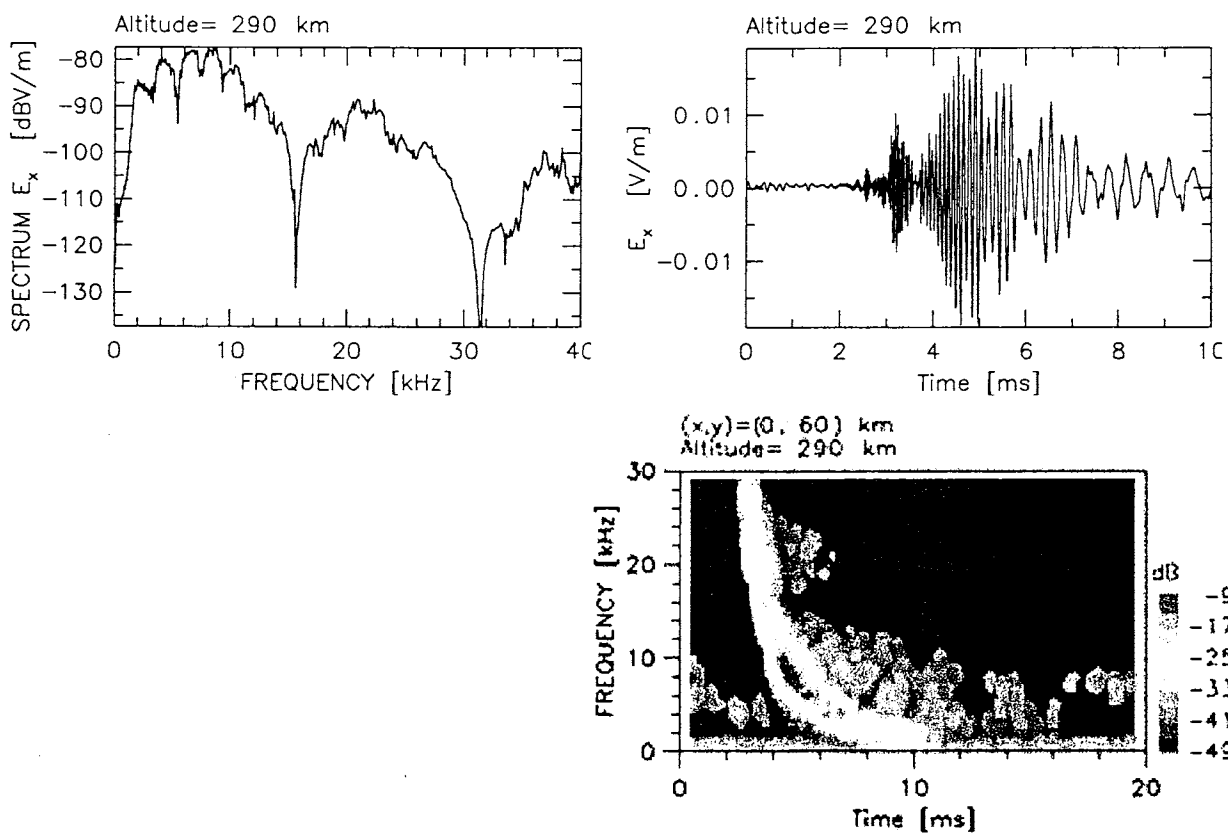


図 3.28 計算によって得られた高度 290 km, 雷放電からの水平距離 60 km の点における電界の水平成分のスペクトルおよび波形, f - t ダイアグラム

3.6 雷放電に伴う下部電離層の発光現象との関係

3.6.1 雷放電に伴う下部電離層における発光現象

近年、雷雲上空の中間圏 (mesosphere) から下部電離層 (lower ionosphere) までの領域に、雷雲-地上間雷放電に伴って次に述べる3種類の発光現象がしばしば発生することがスペースシャトルや航空機上および地上からの観測によって確認されている [60], [61], [40], [62], [63]. その1つが “red sprites” (または単に “sprites”) と呼ばれるもので、これは雷雲上空高度 50~90 km の領域に主として赤色で細長く巻きひげ状 (tendrill) に群をなして光るものである. 図 3.29 に航空機上のカメラがとらえた sprites [64] と地上の CCD カメラがとらえた sprites [65] を示した. 個々の発光領域の水平方向の幅は 5~30 km であり [66], 雷雲-地上間雷放電発生から数~数 10 ms 後に発生し, 数 10 ms の継続時間をもつことが分かっている [41].

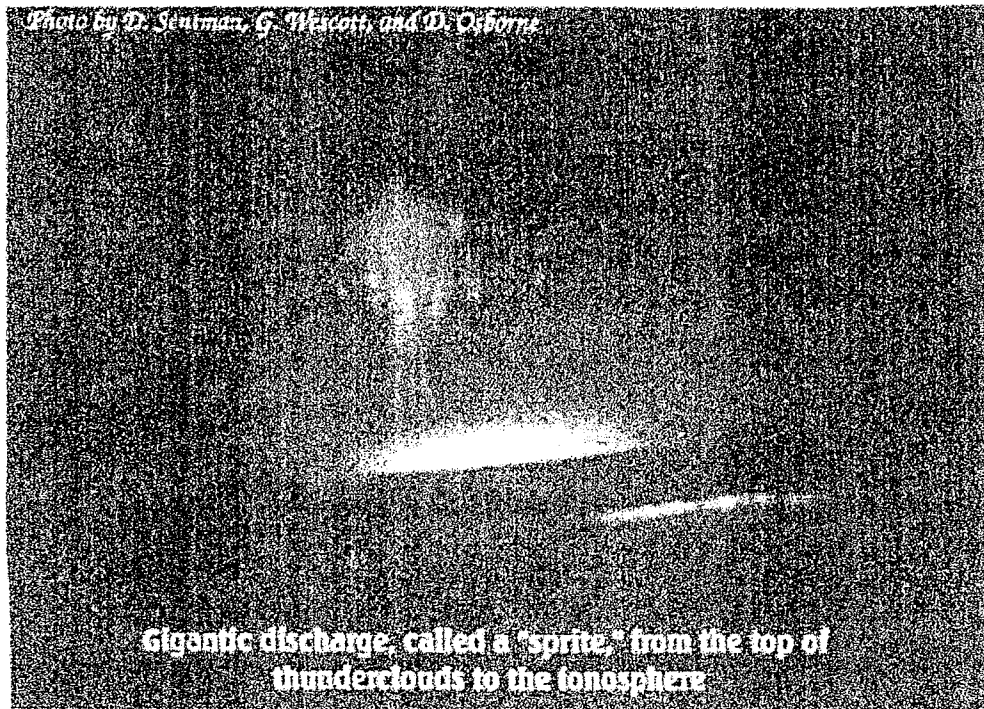
2つ目は “elves” と呼ばれるものであり、これは sprites より高い位置、雷雲上空の高度 75~105 km の領域に輪郭がはっきりしない形で光る現象である. 発光領域の水平幅は 100~300 km と sprites より広く、発生時間は sprites より早く雷放電からおよそ 300 μ s 後であり、継続時間も 300 μ s 程度で sprites よりずっと短い [41].

もう一つは “blue jets” と呼ばれる雷雲上部から高度 40~50 km へと青色で細長く伸びるものである (水平幅は sprites よりさらに狭く数 km~10 km 程度). この現象の継続時間は 300 ms 程度と、sprites よりずっと長い. また、この blue jets は sprites よりまれにしか見られず、必ずしも雷雲-地上間雷放電と同期して発生しないことが分かっている [67]. これらの発光現象はほとんど、雷放電電流が負極性の雷雲-地上間雷放電より一般的に大きい正極性の雷放電の発生時にだけ見られる.

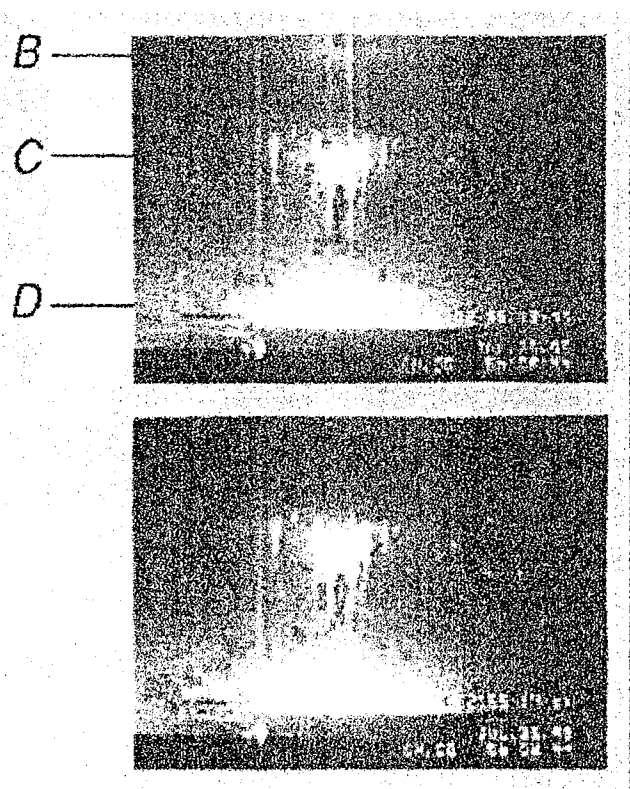
3.6.2 Sprites および Elves の発生機構と雷放電による電磁界との関連性

sprites の発生高度は elves より低く、高度 50 km~90 km の範囲である. 高度 50 km 付近では雷雲-地上間雷放電電流によって生じる放射電磁界の電界より、雷放電によって電荷が移動することによる静電的な電界変化の方が強くなる. また、sprites の継続時間は雷放電電流からの電磁界パルスが発生領域を通過する時間 (< 1 ms) より長く (数 ms~数 10 ms), むしろ発生領域の緩和時間 (relaxation time) に近いと言える. したがって、sprites の発生原因となっているのは雷放電による電荷移動によって生じる準静電界 (quasi-electrostatic field) 成分であるという見方が強い [68].

Pasko は、以下のような物理モデルを想定して雷雲-地上間雷放電発生の前後における雷雲上空の中間圏および下部電離層の電界強度分布の時間的推移を数値シミュレーションを用いて計算し、sprites の発生機構の説明を行っている [69]. 雷雲-地上間雷放電にて放電さ



(a) 航空機上のカメラがとらえた sprites, 文献 [64] より引用.



(b) 地上の CCD カメラがとらえた sprites, 文献 [65] より引用.

図 3.29 航空機上および地上のカメラによる sprites の写真

れる電荷は、放電前の雷雲内の電荷分離 (charge separation) 時に周辺領域 (主に雷雲上空の中間圏) 中に反対符号の電荷の分布を誘起し、それら全体によってこの領域の電界分布が形成される。そこに雷放電が発生して一方の電荷が消失すると、残された電荷による大きな電界が生まれ、その後、雷雲上空の中間圏および下部電離層が導電率をもつために伝導電流 (conduction current) が流れて、電荷分布が変化すると同時に電界分布も全体的に減少していく。雷放電直後に発生したこの大きな電界は、雷雲上空の高度 60~85 km において電子を加熱することによって媒質の導電率を変え、電離 (ionization) や付着 (attachment) を起こすことで電子密度を変え [70]、また同時に窒素分子や酸素分子を励起して発光させる。このような個々の現象の結びつきを数値シミュレーションを用いて解き、最終的に sprites の発光強度とその分布を求めている。この理論計算結果は sprites の観測結果を良く説明している。

一方、雷雲-地上間雷放電を源とする電磁波パルスが、elves の発生領域に到達する時間と elves の発生時間 ($\sim 300 \mu\text{s}$) とがおよそ一致していることと、電磁波パルスが最も減衰する高度と elves の発生高度とが一致していることから [41]、elves の発生は雷放電から放射される強い電磁波パルスと関連性が高いと考えられている [42]。Inan らは、雷雲-地上間雷放電のとしてハイパボリックセカント関数 ($\text{sech}(\cdot)$) で表された垂直方向の電流を仮定し、これから放射される電磁波パルスが中間圏から下部電離層へと伝搬したときの電界分布とその時間変化を Maxwell の方程式を直接解くシミュレーションによって求めている。そして、この強い電界によってさらに下部電離層の電子が加熱、電離、付着されると同時に、窒素分子が励起されて発光が起こるといったメカニズムの仮定にもとづいて発光強度とその時間的推移を得て、観測結果を説明している [42]。

これらに対して、本節では雷雲-地上間雷放電によって発生する電磁界の時間変化を full wave 法によって数値計算し、雷雲上空の中間圏および下部電離層における大気発光強度と電界強度との関係には Pasko の提案したモデル [69] を用いて sprites や elves に相当する大気発光現象の発生領域および発光強度の算出を試みた。

電離層電子密度として夜の低密度プロファイル [71] を、電子の衝突周波数プロファイルとして図 3.9 で示したものをを用いた。それらを図 3.30 に示した。雷放電電流は正極性の雷放電の中でも大規模なもの、すなわち電流値が大きく放電時間が長いものを想定し、パラメータとして表 3.5 に示す値を用いた。雷放電開始点 (= 高度 10 km) における雷放電電流波形を図 3.31 に示した。

そして、本章で示してきた full wave の手法により雷放電によって発生する電界分布の時間変化を計算した。図 3.32 に計算によって得られた雷放電開始から $275 \mu\text{s}$ および $375 \mu\text{s}$, $475 \mu\text{s}$, $675 \mu\text{s}$, 2 ms , 15 ms 後における高度 50 km~100 km、雷放電位置を中心に南北水平 $\pm 100 \text{ km}$ の領域における電界 E の強度分布を示した。

Pasko によると、中間圏および電離層における分子励起発光のもっとも主要な許容線は窒素分子 (N_2) の 1st positive 帯であり、これによる単位体積当たりの発光強度 [Rayleigh/cm]

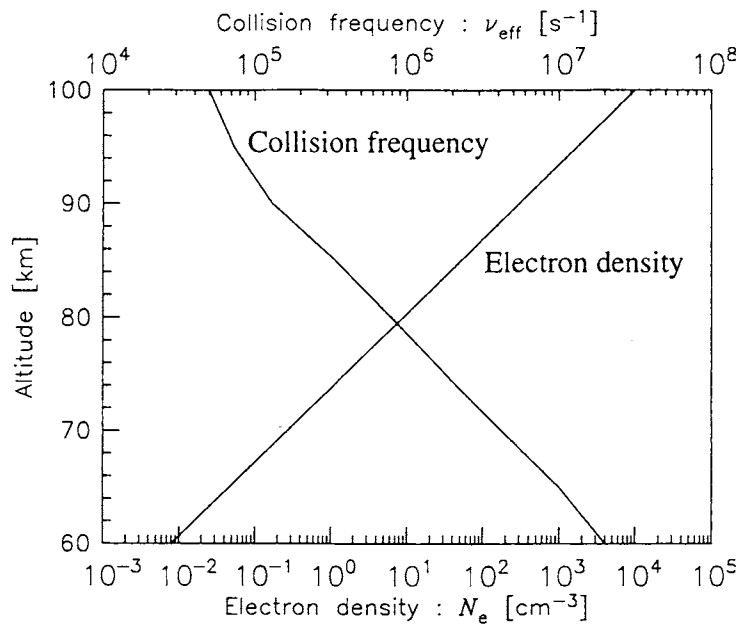


図 3.30 計算に用いた電離層電子密度および電子の衝突周波数の高度プロファイル

表 3.5 計算に用いた雷放電電流パラメータ

電流の方向 m	$(0, 0, -1)^t$
電流 I_0	300 kA
時定数 τ_1, τ_2	1000 μ s, 100 μ s
パルス速度 v_I	8×10^7 m/s
放電開始高度 z_0	10 km
電流経路長 l	10 km

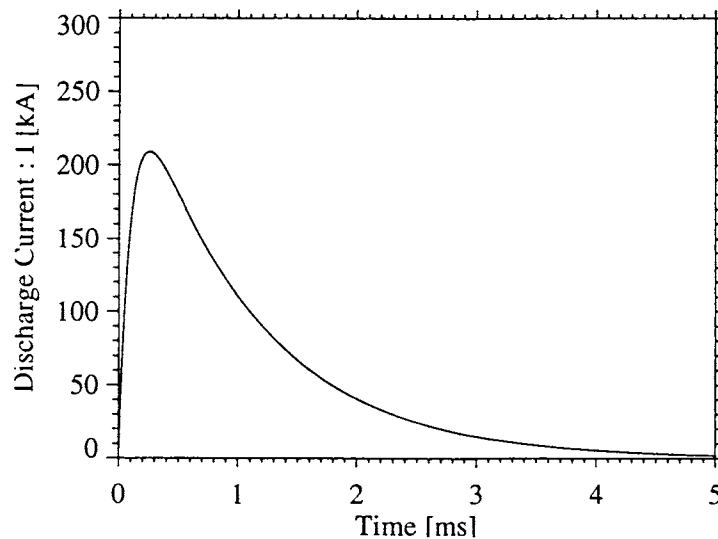


図 3.31 計算で想定した雷放電電流の放電開始点における波形

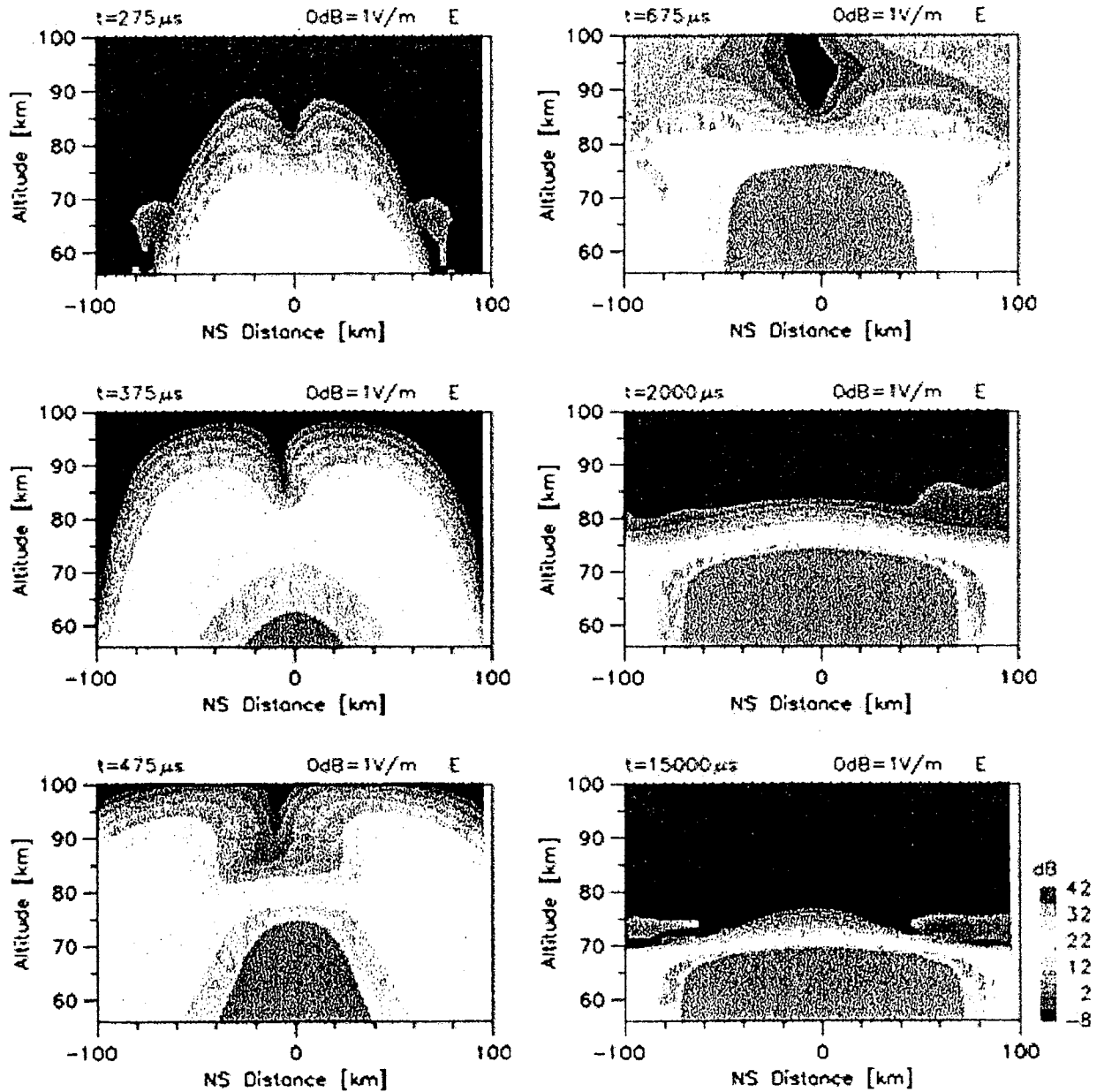


図 3.32 雷放電開始から $275 \mu\text{s}$ および $375 \mu\text{s}$, $475 \mu\text{s}$, $675 \mu\text{s}$, 2 ms , 15 ms 後における電界強度分布 (左上→左下→右上→右下の順)

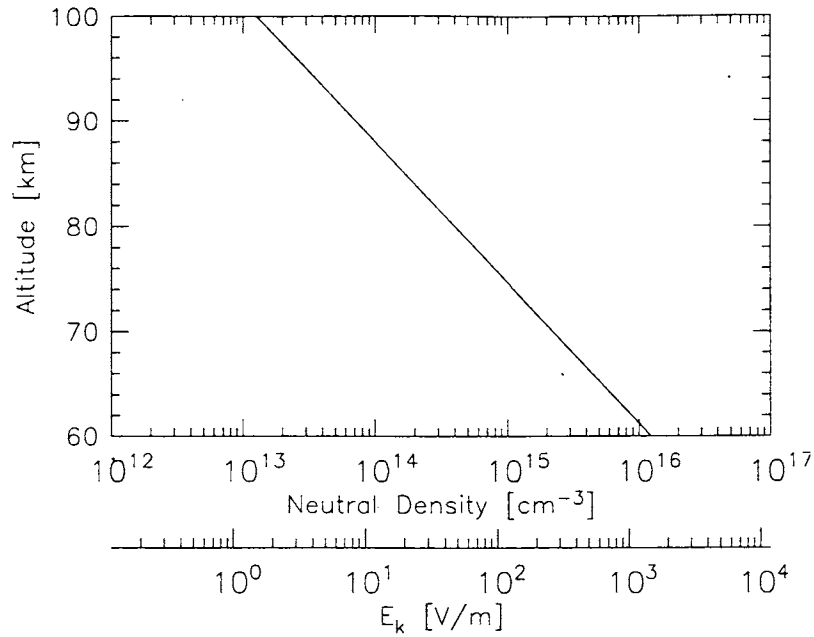


図 3.33 大気発光強度の計算で仮定した中性大気密度の高度プロファイル

は N_2 1st pos. 帯の遷移放射率 A_1 [s^{-1}] とこの励起状態にある分子の密度 n_1 [cm^{-3}] の積に比例する [69]. なお, 励起分子密度 n_1 は電界値と中性分子密度に大きく依存する. この関係については付録 B にて詳細に述べる. そこで, U.S. Standard Atmosphere の近似式 [72]

$$N = 3.96 \times 10^{14} \exp[(80 - z)/5.808] \quad (3.34)$$

による中性大気密度 N [cm^{-3}] の高度プロファイルを仮定し (ここで高度を z [km] とする. 図 3.33 参照), 図 3.32 に示した full wave 計算により得られた電界分布から $A_1 n_1$ の分布の時間変化を求めた.

図 3.34 が図 3.32 と同様, 雷放電開始から $275 \mu s$ および $375 \mu s$, $475 \mu s$, $675 \mu s$, $2 ms$, $15 ms$ 後における $A_1 n_k$ の強度分布である. $60 dB$ のレベルが距離 $10 km$ にわたって続き, それをその線上に見込んだとき発光強度が $1 kR$ (=天の川の明るさ [73]) に相当する. $t=375 \mu s$ に高度 $90 km$ 付近に現れ始め, $t=675 \mu s$ において高度 $95 \sim 100 km$ の領域に移動しているのが elves に相当し, $t=475 \mu s$ で高度 $75 km$ 付近に現れはじめ, $t=15 ms$ においてもなお継続しているのが sprites に相当すると考えられる. 計算から得られたそれぞれの発光部分の発生時刻すなわち雷放電からの遅延時間および継続時間が elves および sprites のそれらの観測値と良く一致する結果となった. それぞれの発光現象の発生時刻および継続時間から, sprites は雷放電による電荷の移動によって生じる準静電界 (quasi-electrostatic electric fields) が, elves は雷放電電流から放射される電磁波成分 (electromagnetic fields) が, 原因となっているとすることができる. 図 3.34 より sprites に相当する発光領域の高度が時間とともに下がっているのが分かるが, これは実際に観測されている sprites の発光領域の時間的推移 [66] と一致しており, また, これは電離層の導電率が高度とともに高く

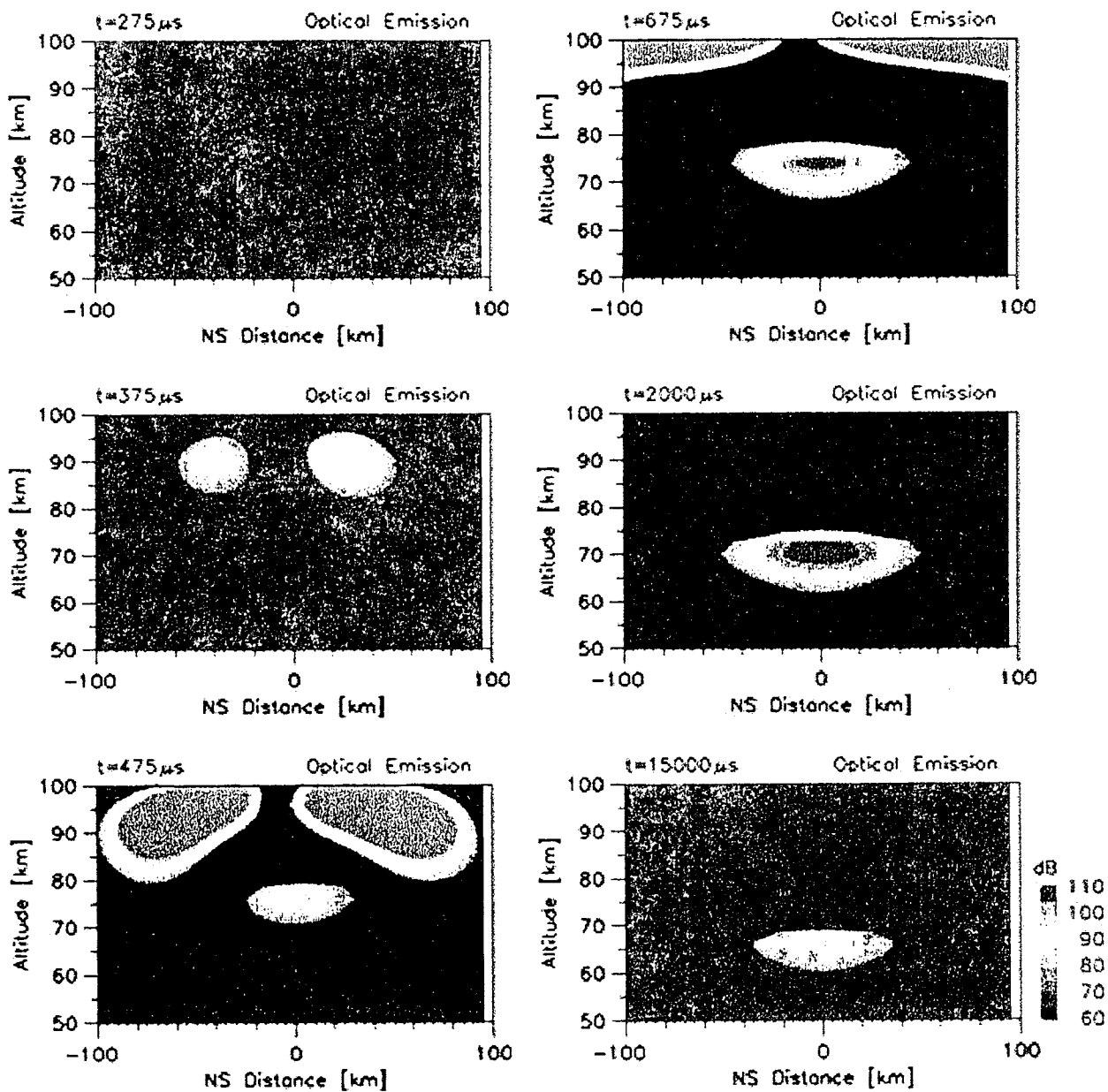


図 3.34 雷放電開始から $275 \mu\text{s}$ および $375 \mu\text{s}$, $475 \mu\text{s}$, $675 \mu\text{s}$, 2 ms , 15 ms 後における N_2 1st pos. 帯の発光強度 $A_1 n_1$ の分布の時間変化 (左上→左下→右上→右下の順)

なっているために起こると考えられる。

本章で行っている計算は、電離層の電子密度や電子の中性粒子との衝突周波数が時間的に変化しないものと仮定している。しかし、spritesなどの発光現象が発生するような規模の大きい雷放電では、発生した強い電界により下部電離層におけるこれらの量が時間的に変化すると言われている [74]。したがって、さらに正確に sprites の発生機構に関してアプローチするためには、この点を考慮する必要があると考える。

一方、本手法は、雷雲-地上間雷放電電流の方向や電流経路長、電流パルスの移動速度など波源に関する様々なパラメータを独立して与えることができる。本節では、一組のパラメータすなわちある一つのタイプの雷放電の場合の大気発光強度を計算しただけであるが、今後、これらの雷放電パラメータと大気発光現象との関係を明らかにすることが興味ある問題の一つである。

3.7 まとめ

雷雲-地上間雷放電の第一帰還雷撃を伝送路電流と仮定し、これによって生じる雷放電上空の自由空間および電離層中の電磁界強度分布の時間変化を、第2章で述べた地上のダイポール波源からの ELF/VLF 波による電離層中の電磁界強度を求める full wave 法と、時間に関する離散フーリエ変換を用いて厳密に数値計算する方法を開発した。この計算手法により、任意の雷放電の電流値や電流方向、電流速度、放電開始高度、放電終端高度をパラメータとして与えて、雷放電による電離層および電離層付近の自由空間の静電界と誘導界、放射界すべてを含む電磁界の強度分布およびその時間変化を詳細に求めることが可能となった。

典型的な雷雲-地上間雷放電電流をパラメータとして与えて自由空間および電離層の電磁界分布の時間変化を計算した結果、放射された電磁波パルスが電離層を透過および反射する過程を観察することや、電磁波パルスの指向性や、電離層中でホイストラ波が形成される様子を確認することができた。また、雷放電電流パルスの時定数や電流パルスの移動速度、電流パルスの終端高度の違いによって、自由空間および電離層中の電磁界分布および時間的推移がどう変化するかを明らかにした。例えば、電流パルスの移動速度が大きくなるほど、自由空間中の電磁界パルスのピーク値は移動速度にほぼ比例して大きくなるが、電離層中ではパルス波形が崩れるためにピーク値は自由空間中ほど大きくはならないことが分かった。また、水平方向の雷放電の場合の計算も行い、雷放電真上では垂直雷放電の場合に比べて電離層中での電磁界強度が大きく、南北 80 km 以上ずれると逆に小さくなることが分かった。

次に、雷雲上空に打ち上げられたロケットで観測された雷放電に起因する電界パルスの観測結果を踏まえて、観測点(雷放電からの水平距離 60 km, 高度 290 km)における電界

パルス波形の理論計算値を本手法によって求め、観測値との比較を行った。その結果、電離層伝搬によって生じるホイストラ波の異なる周波数成分の到来時刻のずれが両者で一致した。しかし、観測点への電磁界パルスの絶対的な到来時間やスペクトル強度の周波数特性において観測値と一致しない点が見られた。ゆえに、電流パラメータや電離層モデルを変えて、さらに解析を進める必要があると考えられる。

そして、最近注目されている雷放電に伴う中間圏および下部電離層での sprites および elves と呼ばれる発光現象の観測結果と本計算手法により求めた大気発光強度分布の計算結果とを比較した。計算結果は、elves と sprites 双方において実際に観測された発光領域および発生時刻、継続時間をうまく説明するものであった。その一方で、さらに sprites の構造などを説明するためには、本計算手法に考慮されていない雷放電から発生する強電界によって生じる中間圏および下部電離層の電子密度や衝突周波数の時間的変化を本手法にどう組み込んでいくかを考えていく必要があると考えられる。

また、本計算の工学的応用として、雷放電に伴って生じる tweek 空電のシミュレーションを行い、計算値と観測値とを比較することにより、下部電離層の媒質定数や観測点と波源の距離などが推定できると考えられる。

第4章

結論

4.1 本研究のまとめ

本研究では，自由空間中の雷電流 (パルス的な ELF/VLF 波源) による自由空間および電離層中における電磁界分布の full wave 法による計算の開発を行い，雷電流から放射された ELF/VLF 電波の自由空間および電離層中の伝搬の詳細を明らかにし，雷雲上空における上層大気が発光現象の成因の解明を試みた。

第2章では，球面波の平面波展開と平面波の電離層中の伝搬による電磁界を数値計算する full wave 法とを用いて，地上のダイポール波源から放射された ELF/VLF 波による電離層中の電磁界分布を計算する手法について述べた。

第3章では，第2章で述べた地上のダイポール波源からの ELF/VLF 波による電離層中の電磁界強度分布を求める full wave 計算法に時間に関するフーリエ変換を組み合わせることで実現した，雷雲-地上間雷放電の第一帰還雷撃によって生じる上空の自由空間および電離層中の電磁界分布の時間変化を数値計算する手法について述べた。この計算手法では，任意の雷放電電流波形や電流の方向，電流パルスの移動速度，放電開始(終端)高度それぞれを任意に計算パラメータとして与えることができる。

そして，典型的な雷雲-地上間雷放電電流パラメータを用いて計算した結果，放射された電磁界パルスが電離層を透過および反射する過程や，電磁界パルスの指向性，電離層中でホイッスラ波が形成される過程を確認することができた。また，雷放電電流パルスの移動速度が大きくなるほど自由空間の電磁界パルスのピーク値は移動速度に比例して大きくなるが，電離層中では波形が崩れるためにピーク値は自由空間中ほど大きくなること分かった。水平方向の雷放電の場合の電磁界計算も行い，垂直雷放電の場合との電離層への電磁界パルスの透過性の違いも明らかにした。

次に，雷雲上空に打ち上げられたロケットによる雷放電に起因する電界パルスの観測に対する電磁界計算も行い，観測結果と比較した。その結果，電離層伝搬によって生じるホイッスラ波の 5 kHz 成分と 10 kHz 成分の高度 290 km における到達時間のずれが観測値と

計算値とで一致した。しかし、電界パルスの 10 kHz 成分の観測点への絶対的な到達時間やスペクトルの周波数特性において観測値と計算値が一致しない点もいくつかみられた。

また、本手法によって得られた大規模な正の雷雲-地上間雷放電によって発生する電界分布の時間変化から大気の絶縁破壊 (breakdown) 領域を求めると、最近注目されている雷放電に伴う中間圏および下部電離層における発光現象の 1 つである red sprites の発生領域と一致する結果が得られた。

4.2 将来への課題

雷放電の第一帰還雷撃から放射される ELF/VLF 電磁波の自由空間および電離層における電磁界分布の時間変化については、実際のロケットによる雷雲上空の電界観測実験に対する電磁界計算を行って計算結果と観測結果とを比較したが、仮定する電離層モデルを変えたりするなどさらに検討の余地が残されている。

雷放電に伴う下部電離層における発光現象 (特に Red sprites) の発生機構と深く関わっているこの領域の電界強度の時間変化を計算することについて、本手法では考慮されていない放電する電荷の周辺に誘起される 2 次的な電荷分布による準静電界の寄与をどう組み込んでいくかを考えることが今後の課題である。

また、高度 100 km より上の電磁界波形の解析では、雷放電電流を特徴づけるパラメータの違いによる電磁界波形の変化についてさらに詳細に調べて、科学衛星などによる電離層でのホイストラ波の観測によりこれらのパラメータがどれくらい推定可能であるかという一種の逆問題への応用が考えられる。

参考文献

- [1] Wait, J. R., *Electromagnetic waves in stratified media*, Pergamon Press, Oxford, 1962.
- [2] Galejs, J., *Terrestrial propagation of long electromagnetic waves*, Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [3] Haselgrove, J., Ray theory and a new method for ray tracing, *The physics of the ionosphere*, pp. 355–64, London: Physical Society, 1954.
- [4] Kimura, I., Effects of ions on whistler-mode ray tracing, *Radio Sci.*, 1 (3), 269–283, 1966.
- [5] Pitteway, M. L. V., The numerical calculation of wave-fields, reflexion coefficients and polarizations for long radio waves in the lower ionosphere I, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A257, 219, 1965.
- [6] Price, G. H., Propagation of electromagnetic waves through a continuously varying stratified anisotropic medium, *Radio Sci.*, 68D (4), 407–418, 1964.
- [7] Nagano, I., M. Mambo, and G. Hutatsuishi, Numerical calculation of electromagnetic waves in an anisotropic multilayered medium, *Radio Sci.*, 10 (6), 611–617, 1975.
- [8] Price, G. H., Propagation of electromagnetic waves into anisotropic media from an external point-dipole source, *Radio Sci.*, 2 (6), 607–618, 1967.
- [9] Nunn, D., Transmission of ELF pulses to the GEOS satellite, *ESRO Report*, 1975.
- [10] 長野 勇, 北岸陽一, 八木谷聡, 満保正喜, 木村磐根, ダイポール波源による電離層上部のVLF波電磁界マッピング, 電子情報通信学会論文誌, J74-B-II (5), 285–293, 1991.
- [11] Sonwalkar, V. S., U. S. Inan, T. F. Bell, R. A. Helliwell, O. A. Molchanov, J. L. Green, DE 1 VLF observations during Activny wave injection experiments, *J. Geophys. Res.*, 99 (A4), 6173–6186, 1994.
- [12] James, H. G., R. L. Dowden, M. T. Rietveld, P. Stubbe, and H. Kopka, Simultaneous observation of ELF waves from an artificially modulated auroral electrojet in space and on the ground, *J. Geophys. Res.*, 89 (A3), 1655–1666, 1984.
- [13] Einaudi, F., and J. R. Wait, Analysis of the excitation of earth-ionosphere waveguide by a satellite-borne antenna, *Canadian J. Phys.*, 49 (4), 447–457, 1971.

- [14] Ginzburg, V. L., *The propagation of electromagnetic waves in plasmas*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [15] Galejs, J., Excitation of the terrestrial wave guide by sources in the lower ionosphere, *Radio Sci.*, 6 (1), 41–53, 1971.
- [16] Tripathi, V. K., C. L. Chang, and K. Papadopoulos, Excitation of the earth-ionosphere waveguide by an ELF source in the ionosphere, *Radio Sci.*, 17 (5), 1321–1326, 1982.
- [17] Pappert, R. A., Excitation of earth-ionosphere waveguide by point dipoles at satellite heights, *Radio Sci.*, 8 (6), 535–545, 1973.
- [18] Wang, T. N. C., T. F. Bell, VLF/ELF radiation patterns of arbitrarily oriented electric and magnetic dipoles in a cold lossless multicomponent magnetoplasma, *J. Geophys. Res.*, 77 (7), 1174–1189, 1972.
- [19] Kondrat'ev, I. G., A. V. Kudrin, and T. M. Zaboronkova, Radiation of whistler waves in magnetoactive plasma, *Radio Sci.*, 27 (2), 315–324, 1992.
- [20] Habashy, T. M., S. M. Ali, J. A. Kong, and M. D. Grossi, Dyadic Green's functions in a planar stratified, arbitrarily magnetized linear plasma, *Radio Sci.*, 26 (3), 701–715, 1991.
- [21] 長野 勇, 宮村和俊, 八木谷聡, 木村磐根, 岡田敏美, 橋本弘藏, 電離層中のダイポール波源による VLF 波の強度計算 —HIPAS-あけぼの共同実験の解析—, 電子情報通信学会論文誌, *J76-B-II* (7), 615–624, 1993.
- [22] Yagitani, S., I. Nagano, and K. Miyamura, Full wave calculation of ELF/VLF propagation from a dipole source located in the lower ionosphere, *Radio Sci.*, 29 (1), 39–54, 1994.
- [23] Zhang, D. Y., and K. K. Tschu, Propagation of electromagnetic pulse with a Gaussian envelope through an inhomogeneous anisotropic plasma layer, *Radio Sci.*, 22 (4), 635–642, 1987.
- [24] Yee, K. S., Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-14 302–307, 1966.
- [25] Hunsberger, F., R. Luebbers, and K. Kunz, Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media—I: Magnetized plasma, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 40 (12), 1489–1495, 1992.

- [26] Young, J. L., A full finite difference time domain implementation for radio wave propagation in a plasma, *Radio Sci.*, 29 (6), 1513–1522, 1994.
- [27] Nagano, I., M. Mambo, and I. Kimura, Rocket measurements of lower ionospheric electron density by propagation characteristics of VLF waves, *Planet. Space Sci.*, 26, 219, 1978.
- [28] Neubert, T., E. Ungstrup, and A. Bahnsen, Observations of the GEOS 1 satellite of whistler mode signals transmitted by the Omega navigation system transmitter in northern Norway, *J. Geophys. Res.*, 88 (A5), 4015–4025, 1983.
- [29] Sonwalkar, V. S., T. F. Bell, R. A. Helliwell, and U. S. Inan, Direct multiple path magnetospheric propagation: A fundamental property of nonducted VLF waves, *J. Geophys. Res.*, 89 (A5), 2823–2830, 1984.
- [30] Sonwalkar, V. S., U. S. Inan, T. F. Bell, and R. A. Helliwell, Simultaneous observations of VLF ground transmitter signals on the DE 1 and COSMOS 1809 satellites: Detection of a magnetospheric caustic and a duct, *J. Geophys. Res.*, 99 (A9), 17,511–17,522, 1994.
- [31] Mielke, T. A., C. J. Elkins, R. A. Helliwell, and U. S. Inan, Excitation of whistler mode signals via injection of polarized VLF waves with the Siple transmitter, *Radio Sci.*, 27 (1), 31–46, 1992.
- [32] Nagano, I., P. A. Rosen, S. Yagitani, M. Hata, K. Miyamura, and I. Kimura, Full wave analysis of the Australian Omega signal observed by the Akebono satellite, *IEICE Trans. Commun.*, E76-B (12), 1571–1578, 1993.
- [33] Stratton, J. A., *Electromagnetic theory*, 577–578, McGraw-Hill, 1941.
- [34] Rachidi, F., and R. Thottappillil, Determination of lightning currents from far electromagnetic fields, *J. Geophys. Res.*, 98 (D10), 18,315–18,321, 1993.
- [35] Cooray, V., and R. E. Orville, The effects of variation of current amplitude, current risetime, and return stroke velocity along the return stroke channel on the electromagnetic fields generated by return strokes, *J. Geophys. Res.*, 95 (D11), 18,617–18,630, 1990.
- [36] Rafalsky, V. A., A. P. Nickolaenko, and A. V. Shvets, and M. Hayakawa, Location of lightning discharges from a single station, *J. Geophys. Res.*, 100 (D10), 20,829–20,838, 1995.

- [37] Helliwell, R. A., S. B. Mende, J. H. Doolittle, W. C. Armstrong, and D. L. Carpenter, Correlations between $\lambda 4278$ optical emissions and VLF wave events observed at $L \sim 4$ in the Antarctic, *J. Geophys. Res.*, *85* (A7), 3376–3386, 1980.
- [38] Helliwell, R. A., J. P. Katsufakis, and M. L. Trimpi, Whistler-induced amplitude perturbation in VLF propagation, *J. Geophys. Res.*, *78* (22), 4679–4688, 1973.
- [39] Kelley, M. C., J. G. Ding, and R. H. Holzworth, Intense ionospheric and magnetic field pulses generated by lightning, *Geophys. Res. Lett.*, *17* (12), 2221–2224, 1990.
- [40] Sentman, D. D., and E. M. Wescott, Observation of upper atmospheric optical flashes recorded from an aircraft, *Geophys. Res. Lett.*, *20* (24), 2857–2860, 1993.
- [41] Fukunishi, H., Y. Takahashi, M. Kubota, K. Sakanoi, U. S. Inan, W. A. Lyons, Eleves: Lightning-induced transient luminous events in the lower ionosphere, *Geophys. Res. Lett.*, *23* (16), 2157–2160, 1996.
- [42] Inan, U. S., W. A. Sampson, and Y. N. Taranenkov, Space-time structure of optical flashes and ionization changes produced by lightning-EMP, *Geophys. Res. Lett.*, *23* (2), 133–136, 1996.
- [43] Greifinger, C. G., and P. Greifinger, Transient ULF electric and magnetic fields following a lightning discharge, *J. Geophys. Res.*, *81* (13), 2237–2247, 1976.
- [44] Baginski, M. E., L. C. Hale, and J. J. Olivero, Lightning-related fields in the ionosphere, *Geophys. Res. Lett.*, *15* (8), 764–767, 1988.
- [45] Sukhorukov, A. I., Lightning transient fields in the atmosphere–low ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, *58* (15), 1711–1720, 1996.
- [46] 宮村和俊, 長野 勇, 八木谷聡, 雷放電から放射される VLF 電磁界波形の Full wave 計算, 電子情報通信学会論文誌, *J80-B-II* (5), 387–396, 1997.
- [47] Uman, M. A., *The lightning discharge*, Academic Press, Orlando, 1987.
- [48] Warber, C. R., and E. C. Field Jr., A long wave transverse electric-transverse magnetic noise prediction model, *Radio Sci.*, *30* (3), 783–797, 1995.
- [49] Thottappillil, R., and M. A. Uman, Comparison of lightning return-stroke models, *J. Geophys. Res.*, *98* (D12), 22,903–22,914, 1993.
- [50] 佐尾和夫, 空電, 成山堂書店, 1981.

- [51] Bilitza, D., International Reference Ionosphere 1990, National Space Science Data Center, NSSDC/ WDC-A-R&S 90-20, Greenbelt, Maryland, 1990.
- [52] Thrane, E. V., and W. R. Piggott, The collision frequency in the E and D region of the ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, *28*, 721, 1966.
- [53] Nagano, I., M. Mambo, and I. Kimura, Estimation of collision frequency in the upper D and E regions from LF wave by mean of a rocket experiment, *J. Geomag. Geoelectr.*, *34*, 27–38, 1982.
- [54] Nicolet, M., The collision frequency of electrons in the ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, *3*, 200, 1953.
- [55] Hanson, W. B., Structure of the ionosphere, in satellite environment handbook, edited by F. S. Johnson, Stanford Univ. Press, 1965.
- [56] IAGA Division V, Working Group 8, International Geomagnetic Reference Field, 1995 Revision, *J. Geomag. Geoelectr.*, *47*(12), 1257–1261, 1995.
- [57] Krider, E. P., On the electromagnetic fields, Poynting vector, and peak power radiated by lightning return strokes, *J. Geophys. Res.*, *97*(D14), 15,913–15,917, 1993.
- [58] Holzworth, R. H., M. C. Kelley, C. L. Siefring, L. C. Hale, J. D. Mitchell, Electrical measurements in the atmosphere and the ionosphere over an active thunderstorm: 2. Direct current electric fields and conductivity, *J. Geophys. Res.*, *90*(A10), 9824–9830, 1985.
- [59] Kelley, M. C., C. L. Siefring, R. F. Pfaff, P. M. Kintner, M. Larsen, R. Green, R. H. Holzworth, L. C. Hale, J. D. Mitchell, and D. L. Vine, Electrical measurements in the atmosphere and the ionosphere over an active thunderstorm: 1. Campaign overview and initial ionospheric results, *J. Geophys. Res.*, *90*(A10), 9815–9823, 1985.
- [60] Franz, R. C., R. J. Nemzek, J. R. Winckler, Television image of a large upward electrical discharge above a thunderstorm system, *Science*, *249*, 48–51, 1990.
- [61] Boeck, W. L., O. H. Vaughan, Jr. and R. Blakeslee, B. Vonnegut, M. Brook, Lightning induced brightening in the airglow layer, *Geophys. Res. Lett.*, *19*(2), 99–102, 1992.
- [62] Lyons, A. L., Characteristics of luminous structures in the stratosphere above thunderstorms as imaged by low-light video, *Geophys. Res. Lett.*, *21*(10), 875–878, 1994.

- [63] Boccippio, D. J., E. R. Williams, S. J. Heckman, W. A. Lyons, I. T. Baker, R. Boldi, Sprites, ELF transients, and positive ground strokes, *Science*, *269*, 1088–1091, 1995.
- [64] Sentman, D. D. and E. M. Wescott, Red sprites and blue jets: High-altitude optical emissions linked to lightning, *EOS, Trans., American Geophys. Union*, *77* (1), 1–4, 1996.
- [65] Rairden, R. L. and S. B. Mende, Time resolved sprite imagery, *Geophys. Res. Lett.*, *22* (24), 3465–3468, 1995.
- [66] Sentman, D. D., E. M. Wescott, D. L. Hampton, and M. J. Heavner, Preliminary results from the Sprites94 aircraft campaign: 1. Red sprites, *Geophys. Res. Lett.*, *22* (10), 1205–1208, 1995.
- [67] Wescott, E. M., D. D. Sentman, D. L. Hampton, and M. J. Heavner, Preliminary results from the Sprites94 aircraft campaign: 2. Blue jets, *Geophys. Res. Lett.*, *22* (10), 1209–1212, 1995.
- [68] Pasko, V. P., U. S. Inan, Y. N. Taranenko, and T. F. Bell, Heating, ionization and upward discharges in the mesosphere due to intense quasi-electrostatic thundercloud fields, *Geophys. Res. Lett.*, *22* (4), 365–368, 1995.
- [69] Pasko, V. P., Dynamic coupling of quasi-electrostatic thundercloud fields to the mesosphere and lower ionosphere: Sprites and jets, Ph.D. thesis, Stanford University, 1996.
- [70] Papadopoulos, K., G. Milikh, A. Gurevich, A. Drobot, and R. Shanny, Ionization rates for atmospheric and ionospheric breakdown, *J. Geophys. Res.*, *98* (A10), 17,593–17,596, 1993.
- [71] Taranenko, Y. N., U. S. Inan, and T. F. Bell, The interaction with the lower ionosphere of electrostatic pulses from lightning: Excitation of optical emissions, *Geophys. Res. Lett.*, *20* (23), 2675–2678, 1993.
- [72] Rowland, H. L., R. F. Fernsler, and P. A. Bernhardt, Breakdown of the neutral atmosphere in the D region due to lightning driven electromagnetic pulses, *J. Geophys. Res.*, *101* (A4), 7935–7945, 1996.
- [73] 国立極地研究所編, 南極の科学 2: オーロラと超高層大気, p.61, 古今書院, 1983.
- [74] Inan, U. S., T. F. Bell, J. V. Rodriguez, Heating and ionization of the lower ionosphere by lightning, *Geophys. Res. Lett.*, *18* (4), 705–708, 1991.

付録 A

球面波の平面波展開の手法に関する考察

ここでは γ - β 法の式(2.20)における離散化のパラメータである N_{γ_r} と N_{γ_i} , N_β と数値積分によって得られる電磁界強度分布の精度との関係について検討する. ここでは, 計算によって得られる電磁界分布へのこれらのパラメータの影響を単純に評価できるように, 問題を単純化して式(2.4)の数値積分の評価を行うことにする. 式(2.4)の積分変数の1つである α を γ_r および γ_i に置き換えると

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{r} = -\frac{jk_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_r^2}(x \cos \beta + y \sin \beta) - jk_0 \gamma_r z} d\gamma_r - \int_0^{-j\infty} e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_i^2}(x \cos \beta + y \sin \beta) - jk_0 \gamma_i z} d\gamma_i \right\} d\beta \quad (\text{A.1})$$

になる. ただし, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である. これを数値積分のために離散化すると

$$\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \simeq -\frac{jk_0}{2\pi} \sum_{n_\beta=0}^{N_\beta-1} \left\{ \sum_{n_{\gamma_r}=0}^{N_{\gamma_r}-1} e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_r^2}(x \cos \beta + y \sin \beta) - jk_0 \gamma_r z} \Delta\gamma_r - \sum_{n_{\gamma_i}=1}^{N_{\gamma_i}} e^{-jk_0 \sqrt{1-\gamma_i^2}(x \cos \beta + y \sin \beta) - jk_0 \gamma_i z} \Delta\gamma_i \right\} \Delta\beta \quad (\text{A.2})$$

となる. γ_r や γ_i , β については, 式(2.21)に従う.

周波数 $f = 10$ kHz, $y=0$ km, $z=2\lambda_0 (=60$ km) とし, N_{γ_i} と N_β を固定して N_{γ_r} を変化させた場合の $-80 \leq x/\lambda_0 \leq 80$ 上での数値積分結果を図 A.1に示した. 積分値の小さい $|x/\lambda_0| > 20$ の領域において特に, N_{γ_r} を大きくするにしたがって真値との誤差が減少していることが分かる.

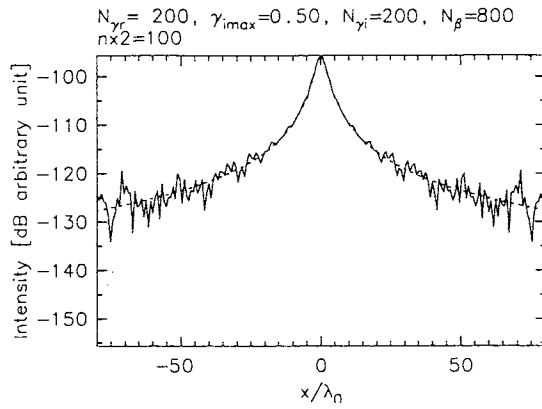
次に, N_{γ_r} と N_β を固定して N_{γ_i} を変えた場合を図 A.2に示した. (a)の $N_{\gamma_i} = 10$ では誤差が大きく, N_{γ_i} を大きくすれば誤差が減少する結果となっている. (b)と(c)では誤差がほとんど変わっていないので. この場合 $N_{\gamma_i}=50$ 程度で十分であると言える.

次に, N_{γ_r} と N_{γ_i} を固定して N_β を変えた場合の積分値の変化を図 A.3に示した. 同図(a)では $|x/\lambda_0| > 30$ から, (b)では $|x/\lambda_0| > 60$ から誤差が急激に大きくなっている. これは, 離散フーリエ変換においてサンプリング間隔が小さすぎることによって生じるエリアシン

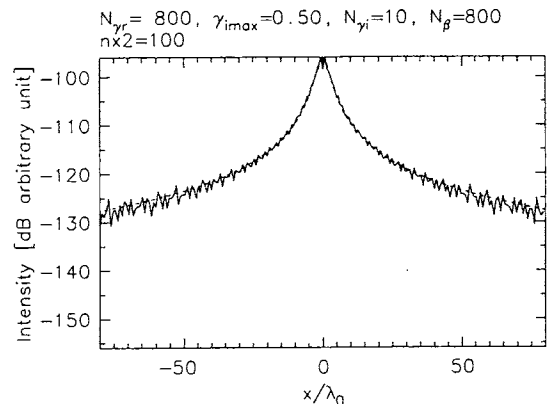
グに相当するものと考えられる。この結果から、 $-80 \leq x/\lambda_0 \leq 80$ の領域内の強度分布を数値積分によって得ようとする場合には $N_\beta = 800$ が必要であると言える。

上記の結果をまとめると次のようになる。得ようとする電磁界分布の領域の大きさによって必要な N_β の値はほぼ明確に決まる。ただし、ここでは特に示さないが、必要な N_β の値は波源高度と求めたい電磁界分布の高度にも依存する。高度が高いほど必要な N_β の値は大きくなる。そして、レベルの低いところの誤差を小さくするためには、 N_{γ_i} 、特に N_{γ_r} の値を大きくしなければならないと言える。

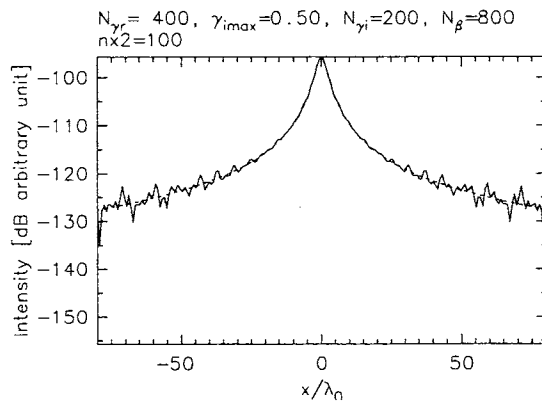
実際の電磁界の計算では均質多層分割法による電離層中の伝搬が含まれるので必要な N_β や N_{γ_r} 、 N_{γ_i} のパラメータの具体的な値は変わってくるが、傾向として同様のことが言える。



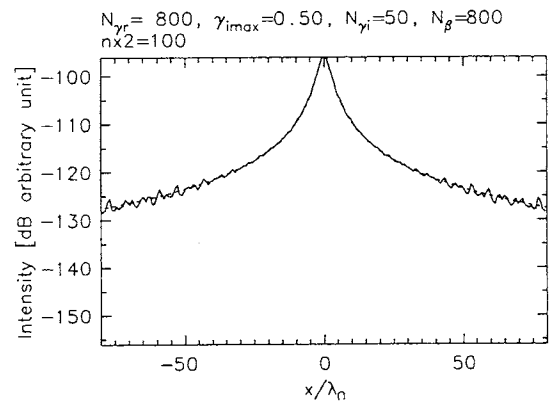
(a) $N_{\gamma r} = 200$



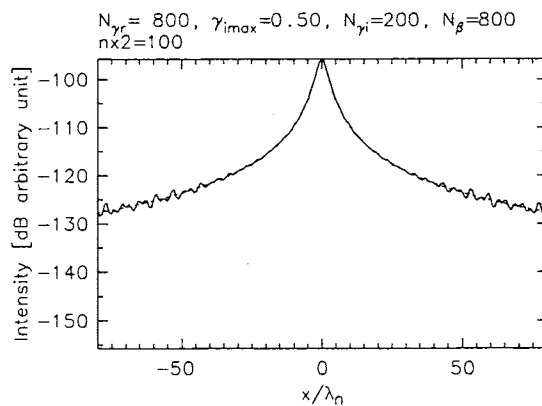
(a) $N_{\gamma i} = 10$



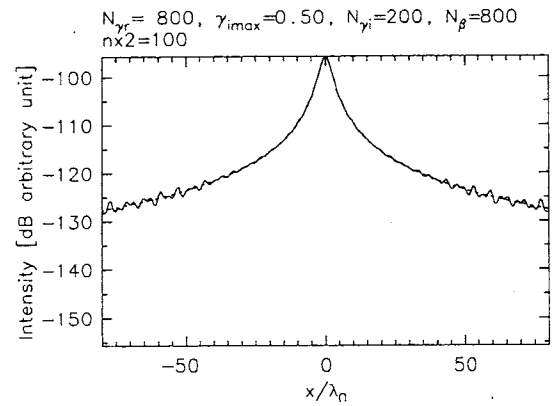
(b) $N_{\gamma r} = 400$



(b) $N_{\gamma i} = 50$



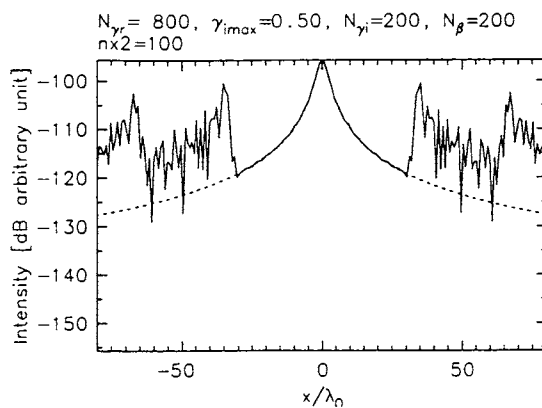
(c) $N_{\gamma r} = 800$



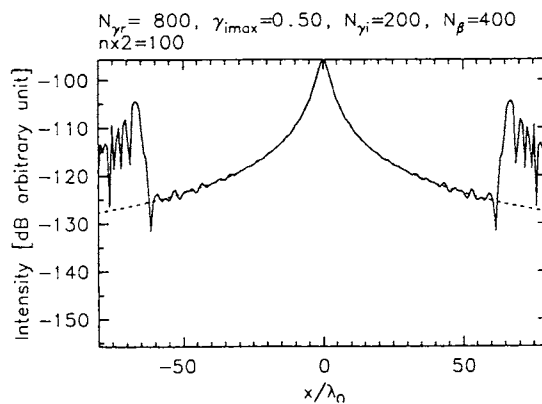
(c) $N_{\gamma i} = 200$

図 A.1 $N_{\gamma r}$ による数値積分結果の変化。
($N_{\gamma i}=200$, $N_{\beta}=800$ で固定, 実線が数値積分
結果, 破線が $e^{-jk_0 r}/r$ の値.)

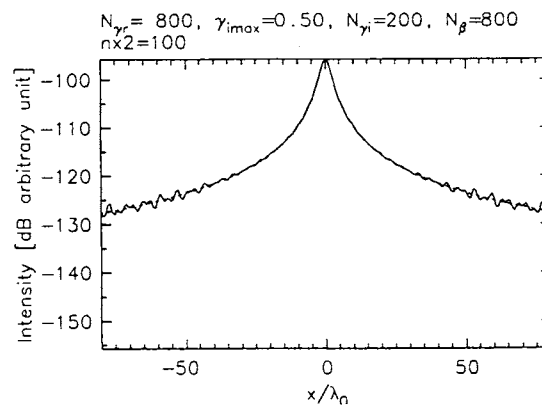
図 A.2 $N_{\gamma i}$ による数値積分結果の変化,
($N_{\gamma r}=800$, $N_{\beta}=800$ で固定. 実線が数値積
分結果, 破線が $e^{-jk_0 r}/r$ の値.)



(a) $N_{\beta} = 200$



(b) $N_{\beta} = 400$



(c) $N_{\beta} = 800$

図 A.3 N_{β} による数値積分結果の変化, ($N_{\gamma_r}=800, N_{\gamma_i}=200$ で固定. 実線が数値積分結果, 破線が $e^{-jk_0 r}/r$ の値.)

付録 B

中間圏および電離層における電界と大気発光との関係

以下の計算モデルの多くの部分は文献 [69] に基づいている。

中間圏および下部電離層における大気発光強度 I_k [Rayleigh] は,

$$I_k = 10^{-6} \int_L A_k n_k dl \quad (\text{B.1})$$

で表される [69]。ここで、 n_k は励起状態 k にある大気分子の密度 [cm^{-3}], A_k は遷移放射率 (radiation transition rate) [1/s], L 上の積分は水平な線上の積分を表している。また、添字 k は大気発光に寄与する主要な大気構成分子 (ここでは N_2 , N_2^+ , O_2^+) の許容線 (permitted lines) を表すインデックスである。ここでは、 N_2 の 1st positive ($k=1$), N_2 の 2nd positive ($k=2$), N_2^+ の 1st negative ($k=3$), O_2^+ の 1st negative ($k=4$), N_2^+ の Meinel ($k=5$) の 5 つを取り扱う。

n_k には次の関係が成り立つ [69]。

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = -\frac{n_k}{\tau_k} + \sum_m n_m A_m + \nu_k N_e \quad (\text{B.2})$$

ここで、 $\tau_k = [A_k + \alpha_{1k} N_{\text{N}_2} + \alpha_{2k} N_{\text{O}_2}]^{-1}$ は状態 k の全寿命 (total lifetime) [s], α_{1k} および α_{2k} はそれぞれ N_2 および O_2 分子への衝突による消滅率 (quenching rate) [cm^3/s], N_{N_2} および N_{O_2} はそれぞれ N_2 および O_2 分子の密度 [cm^{-3}], $n_m A_m$ 項の和はエネルギー状態 k より高いエネルギー状態 m からの降下 (cascading) による n_k の増加率である。また、 ν_k は励起係数 (excitation coefficient), N_e は電子密度 [cm^{-3}] である。遷移放射率 A_k および消滅率 α_{1k} , α_{2k} はそれぞれ表 B.1 のとおりである。

さらに、励起係数 ν_k は一般的に

$$\log \left(\frac{\nu_k N_0}{N} \right) = \sum_{i=0}^3 a_{ik} x^i \quad (\text{B.3})$$

$$\nu_k = \frac{N}{N_0} \exp \left(\ln 10 \sum_{i=0}^3 a_{ik} x^i \right) \quad (\text{B.4})$$

表 B.1 各励起状態の分子の遷移放射率と N_2 , O_2 への衝突による消滅率

k	Band	A_k	α_{1k}	α_{2k}
1	1st pos. N_2	1.7×10^5	10^{-11}	0
2	2nd pos. N_2	2×10^7	0	3×10^{-10}
3	1st neg. N_2^+	1.4×10^7	4×10^{-10}	0
4	1st neg. O_2^+	8.5×10^5	2×10^{-10}	0
5	Meinel N_2^+	7×10^4	5×10^{-10}	0

表 B.2 励起係数 ν_k と電界 E との関係式における近似係数

k	Band	a_{0k}	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}
1	1st pos. N_2	-1301.0	563.03	-80.715	3.8647
2	2nd pos. N_2	-1877.1	814.70	-117.46	5.6554
3	1st neg. N_2^+	-1760.0	724.7	-99.549	4.5862
4	1st neg. O_2^+	-1802.4	750.91	-104.28	4.8508
5	Meinel N_2^+	-2061.1	870.25	-122.43	5.7668

と表される [69]. ここで N は中性大気密度 [cm^{-3}], $N_0 = 2.688 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, $x = \log(EN_0/N)$, E は電界強度 [V/m], 係数 a_{0k} , a_{1k} , a_{2k} , a_{3k} はそれぞれの許容線ごとに表 B.2 の値をとる [69].

つまり, 式 (B.1) より大気発光の強度を決めるのは n_k であると言え, n_k は式 (B.2) の時間に関する微分方程式を解くことで得られる. そして, 式 (B.2) に含まれる ν_k の時間変化は, 電界強度の時間変化を反映することになる.

ただし, これらのモデルの適用範囲は $EN_0/N < 1.6 \times 10^7 \text{ V/m}$ である. 電界がこの値を超えると電子の平均エネルギーが電離エネルギーに近づき, 電離プロセスが nonstationary になる [69].

$k=1 \sim 5$ のなかでエネルギー準位が連続しているのは 2nd pos. N_2 ($k=2$) \rightarrow 1st pos. N_2 ($k=1$) なので, $k=1$ のときに $A_2 n_2$ の項を含めればよい. ゆえに, それ以外の $k=2 \sim 5$ の場合, 式 (B.2) は

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = -\frac{n_k}{\tau_k} + \nu_k N_e \quad (\text{B.5})$$

となり, これを解くと

$$n_k = e^{-t/\tau_k} \int e^{t'/\tau_k} \nu_k N_e dt \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} &= \tau_k \nu_k N_e - \tau_k e^{-t/\tau_k} \int e^{t'/\tau_k} (\nu_k N_e)' dt \\ &= \tau_k \nu_k N_e - \tau_k^2 (\nu_k N_e)' + \tau_k^2 e^{-t/\tau_k} \int e^{t'/\tau_k} (\nu_k N_e)'' dt \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

が得られる。しかし、 e^{t/τ_k} と $\nu_k N_e$ の時間変化率を比べると、 e^{t/τ_k} の方が十分大きいので

$$n_k \approx \tau_k \nu_k N_e \quad (\text{B.8})$$

と近似することができる。

同様に $k=1$ の場合、式 (B.2) は

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{n_1}{\tau_1} + A_2 n_2 + \nu_1 N_e \quad (\text{B.9})$$

となり、これを近似的に解くと

$$n_1 \approx \tau_1 (A_2 n_2 + \nu_1 N_e) \quad (\text{B.10})$$

が得られる。