限界分析と線型分析

——J. R. Hicks. の Linear Theory——

法文学部経済　前田敬四郎

線型理論の一般的手法としては，ヒックスの行なったようにWalras-Cassel体型に構成されないのに，何故彼は Walras-Cassel 型の prototype theory を作ったのであろうか。それは prototype theory と呼ばれるモデルが一度び設定されるや，限界分析から線型分析へのメタルホーゼが鮮明に映像され，限界理論 → prototype theory → 線型理論の直線的並びに線型理論→ prototype theory → 限界理論への逆行的コースの経済解釈が自由に出来ることになり，文字通りの基礎理論となる。一見しては抽象的で我々の現実の経済問題とは縁遠きものに感ぜられる prototype theory に，ヒックスが精魂を傾け，相当の紙面を割いている理由もそこにある。

さて，prototype theory の経済解釈の一つのコースである prototype theory →線型理論へと議論を進める前に，先稿(1)で取上げた prototype theory のモデルで，前提として或いはその他重要な役割を演じた二，三の数学的道具の側面に少し触れて行くことにしたい。先ず Wald rules と呼ばれる次に掲げる四つの制約条件から始めることにする。

Wald rule's

1. $b_i > o$:　b_i はすべて正でなければならぬ。
2. $a_{ij} \geqq o$:　技術係数 a_{ij} は負にはならない。
3. ある生産物に対し少なくとも一つの要因の若干量が必要である。i のすべてに対して $a_{ij} = o$ となる如き j はあり得ない。
4. P's $\geqq o$(2) :　P's は非負でなければならぬ。若干は零であっても全部が零となることは許されない。

この Wald rule's が前提条件になって prototype theory が構成されたのであったが，一体，このような常数 a_{ij}, b_i, P's に何故，制約を課さねばならなかったのであろうか。数学上は線型問題を解いて行くとき $a_{ij} \geqq o$, $b_i > o$, $P_j \geqq o$ という条件は必要でない(3)。しかし経済学上は Wald rule's を前提せずに線型理論を formulate して行くとき，途中で経済的に意味のないことや不都

合なことに遭遇することがある。そのとき経済的に不可として一々除去しなければならぬ。Wald rule's を前提に議論を進めれば，途中の斯様な労が省かれ，而も所期の目的に達することが出来る。

常数にどのような制限も課さないとしたならば，一体どんなことになるだろうか。そのとき feasible solution 又は feasible region が存在しないかも知れない。一つの output の集合 $(x_j = x_1, x_2, \cdots, x_N)$ が feasible であるためには

i) sign restraint $\quad x_j \geqq o$

ii) specific restraints.

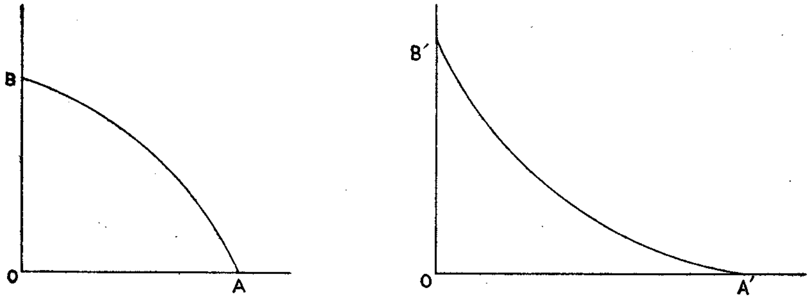
$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1N}x_N \leqq b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2N}x_N \leqq b_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{MN}x_N \leqq b_M
\end{aligned}
$$

の二種類の条件が必要であることは先稿において述べたが，常数に制限がおかれないとき，これ等の specific restraints と sign restraint が矛盾したり，specitic restraints がお互に矛盾することがある。一例を挙げれば $x_1 \leqq -6$ は一つの specific restraint であるが，$x_1 \geqq o$ なる sign restraints に矛盾する如きである。

第二には feasible region があるとしても，与えられた (P) について最適値があるとは限らない。P's が正であっても specific restraints がないときはVが無限に増加し得る。又 specific restraint があっても，ある方向に限定出来ないときは同様のことが起り得る。Wald rule を前提におくときはこの種の事柄が生ずることは避け得る。蓋し上記のことは primal が feasible であっても optimum を持たないならば，dual は feasible とならず，又，双対問題においては何れかが primal と考えられる理であるから両者に対応が成立する。なお primal と dual の両者が feasible とならない可能性もある。このことは稀であるが起り得る(4)。

扨，線型理論の土台ともなるべき convexity の性質に言及することにしよう。この convexity の性質は Wald rule's と関係なしに如何なる常数値に関しても成立するものであるから，Wald rule's と切離して別個に述べるのが当を得たものである。feasible region が存するためには，それが凸でなければならぬ。そして亦この convexity の性質が線型理論の適用分野にきびしい制約条件を課すことにもなる。

従来，経済学者に馴染まれてきた「限界概念」と「convexity の性質」の関係について調べてみよう。



〔Fig. 1〕

図１の AB の如き一曲線は，曲線に沿って下方に動きその傾斜が常に増加するならば，「上に凸である」と言われ，限界分析の際によく使い馴れた言葉である。蓋しそのときの凸は一曲線の性質であり，prototype theory で用いた convexity は region の性質であったから，それぞれ自ら異なる定義を持つ。新定義に従えば region OAB は convex であるが，O′A′B′ はそうはならない。このことから convexity region が「上に凸な曲線で bound されたもの」と曲線の「上に凸」という事柄は多少関係がある。曲線の凸性は，曲線上のある点の切線が接点以外の処では region OAB のほかにあるということで説明され，region OAB の凸性は，region 外のある点を通って一直線が描かれ，その全体が直線の一方の側にあるものとして定義される。region が凹であるならば凹内の点はこの条件を満たさない。所謂「no dent」の定義は prototype theory で用いた weighted avearage の定義と恒等であることは数学的に説明される(5)。

Linear theory で重要な役割を演ずる convexity は，従来の diminishing return と基本的には同じであるが，constant return をも含む利点を持っている。しかしながら Convexity の性質にも取扱い得ない分野がある。それは O′A′B′ の如き increasing return である。increasing return の下においては零の費用における零の産出物ということは feasible, C の費用で X の産出物も可能であるが ½c の費用で ½x の産出量は feasible とならない。それと共に increasing return 下では「optimum の持つ二つの意味」における対応を欠いておる。つまり数量的な意味で output を最大ならしめる位置（一定割合で商品の産出量が結合されるとき生ずる最大値)は，必ずしも生産物価格のある集合の産出量値を最大ならしめるものではない。この二つの意味の optimum が一致するのは convexity の性質の力を借りねばならぬ。constant return 並びに diminishing

の仮定においては，Convexity の性質を利用出来るが increasing return のときは適用出来ない。linear method (一曲線は常に一つの polygon で近似化し得る）で diminishing return の現象を取扱うにはさ程困難でないが，一度び increasing return の領域に入ろうとするや convexity の性質に禍されて一歩も踏み入れることが出来ない。このことは線型理論の発展限界を示しているのではないだろうか。

最後に方程式形態について少し述べることにしよう。最適値問題はヒックスが行なってきた不等式形態とは異なる方程式形態によっても表現することが出来る。諸要因の超過供給は(稀少要因のときは零，要因が稀少でないときは正) primal 問題の一部で，諸制限の下でVを最大ならしめるときに産出量 (x_j) と共に決定される。超過供給を明示的にするならば，primal 問題は産出量並びに超過供給の符号制限 ($x_j \geqq o$ $e_i \geqq o$)，方程式，$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{iN}x_N + e_i = b_i$ の下でVの最大値を求めるものとし表わされる。

q と q′ は重み付価格の集合とすれば，e'ₛ は与えられた方程式の助けで除去されるから，$\Sigma' q_j x_j + \Sigma p_i' e_i$ を最大ならしめることと同じである。それから P's は与えられた q, q′ 及び a'ₛ に依存するので，今迄用いてきた $\Sigma p_j x_j$ の形に還元する。最適値問題は t 個の方程式で連結され，非負なる s 個変数 ($t < s$)[6]の加重和の最大値を求めることになる。この方法は Linear Programming の研究に尤もよく利用される方法であるが，ヒックスが Linear Theory の展開に当って使用したのは他の方法であった。それは彼が伝統的経済学に忠実な解釈をしたかったことと説明を平易ならしめるために幾何学的方法に頼ったためである。

アクテイビイテイ　分析

数学的側面の解釈を離れて Wald rule's 下の prototype theory に戻り，その経済的解釈に一歩踏み入れることにしよう。ヒックスの prototype theory は Walras-Cassel 体系の限界を超えるものでなく，その体系の適用を著しく制限している「係数一定」や他の基本的諸制限をその儘に残しておった。しかし Von Neumann は斯かる諸制限を容易に緩和する方法があることを示した[7]。

Walrasian の仮定の中では各種の生産物の生産過程が independent であるこ

とを暗黙裡に認めておった。この独立性の仮定は現実の経済社会への接近方法として悪くはないが，普遍的に成立する仮定ではない。従ってこの仮定を設けずに接近し得るならば，よりよい方法であるということが出来る。例えば joint supply relations は各種の産出物（x）についての線型方程式に還元することが出来，その方程式を解く技術が存在する。prototype theory で用いた方法によって解を求めるときには，途中で変数除去の労を伴なうが，現実の商品生産とは違った生産係数の概念で出発するならばその労が省ける。この生産係数の概念が Activity Analysis のアイデァを生んだ。一つのアクティビイテイは，ある投入量が産出量に変形されるプロセスであると定義される。そして一つの Activityc は constant return to scale の下で，ある intensity を持って活動する。Activity Analysis において収益一定の仮定は欠くことの出来ないもので intensity の増加によってのみ投入物と産出物が同割合に増加し得る。

この仮定の下で1単位の intensity で行なわれるk番目のアクティビイテイは（a_{1K}, a_{2K} …… a_{MK}）の諸要因を（α_{1K}, α_{2K}, …… α_{NK}）の産出物に変換する。従って Activity が X_K の intensity であるならば ($a_{1K}X_K$, $a_{2K}X_K$, ……, $a_{MK}X_K$) の諸要因を ($\alpha_{1K}X_K$ …… $\alpha_{NK}X_K$) の産出物に変形することになる。

X_K の intensity を持つR個の Activity があるとき

i 番目要因の全投入量は $\sum_K a_{iK}X_K$

j 番目生産物の全産出量は $\sum_K \alpha_{jK}X_K$

価格 P_j のときの全産出価値をVとすれば

$$V = \sum_j \sum_K P_j \alpha_{jK} X_K$$

k番目の Activity が1単位の intensity で行なわれるときその Activity の産出価値は

$$\mathbf{P}_K = \sum_j P_j \alpha_{jK}$$

従って

$$V = \sum_K \mathbf{P}_K X_K$$

ここで **P's** は与えられた常数 P's と α's に依存するので常数となり，すべて **X's** によって決まる。

最大ならしめんとする総計は $\sum_K \mathbf{P}_K X_K$,

specific restraints は

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1R}X_R \leqq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2R}X_R \leqq b_2$$
$$a_{M1}X_1 + a_{M2}X_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{MR}X_R \leqq b_M$$

sign restraints $\quad a_{ij} \geqq o, \quad b_j \geqq o$

上に掲げた形態は prototype theory に全面的な変化を加えることなしに joint supply を許すことになった。この結果，上記モデルは Walras-Cassel 型のモデルより拡張された適用を持つことになる。prototype theory では技術係数一定という Walras-Cassel 型の仮定が残されておったが，Activity Analysis においては，この仮定から解放されることとなった。

prototype theory において，実際には生産されずとも生産出来る産出物の可能性を認めたが，それと同様なことが Activity Analysis においても許される。実際に使用されないかも知れないが使用可能な生産過程があり得て，そのプロセスの intensities (X) は零となる。これが起り得ることは prototype theory の産出量ゼロということから直ちに解るが，$P_K < \Sigma w_i a_{ij}$ ならばk番目 Activity の intensity は零である。その事柄は若干の不使用アクティビイティが生産しても引合わない生産物であり且つ用いるに値しない生産方法であることを示している。可能な Activities の範囲を拡大すれば，お馴染みの代替要因の導入ということになる。

上記のモデルは数学的に prototype model と同一であり，且つ Wald rule's が作用している。変った事柄と言えば，model の経済的衣裳替とでも言えるであろう。しかしこの経済的衣裳替こそ線型理論をして「Paretian theory の一般均衡」に比肩し得る「一般理論」へと変形する。ヒックスは Activity Analysis の方法が究極において Paretian method と大して異ならず，その長所，短所も同様に兼ね備えていると述べる。つまりパレートの方法で解決出来ない increasing return は Activity Analysis によっても解決出来ない事柄だし，この点では寧ろ Activity Analysis の方がパレート理論よりは収益一定の仮定に多く依存していると言い得る。Paretian には increasing return to scale の分野を開拓するのに疎げとなるものは存在せず，現に狭い領域については可能である。しかしながら Activity Analysis にとっては，それが convexity の仮定に基づく限り禁断の園となる。

Paretian method は完全競争の仮定に立ち，一方 Activity Analysis は convexity の仮定に縛られているが両者は共に price parameter を使い過ぎる嫌いがある。又，使用しない生産方法の存在をめぐる取扱いについては，何れの方法にても可能であるが，唯 Activity Analysis の方が使用に値しない方法，並

びに生産物を明示する点が有利である。

Paretian と Activity Analysis の長短所を比較してきたことからも解るように，何れの方法を用いても得られる結果は大して異なる処がない。それでは「古い方法」と「新しい方法」をはっきり別ける点は何処にあるのであろうか。ヒックスは「新しい方法」の最大の長所ともいうべきは「新しい方法が古い方法で理解するよりも，一層根本的なことに触れ得る」ことであると指摘する。その一つが Wald によって与えられた「競争均衡存在の証明」である。扨ヒックスの与えた「競争均衡存在の証明」(8) を概略することにしよう。

Activity Analysis の中に持込まれる常数 α'_{s}, b'_{R} と p'_{P} に関する Wald rules から prototype theory で求めたと同様に生産の optimum を求めることが出来る。つまり，与えられた生産物価格(P)に対して産出物の価値を最大ならしめる生産物の集合（X）があり且つその optimum に属する帰属要因価格の集合(W)がある。生産が完全競争下の諸企業に組織されて運営されるならば，諸要因の稼得分はこれ等の帰属要因価格に対応する。斯くして供給側に均衡が存在する。しかし生産物の需要の側については何もいうことが出来ない。これ等が導入されねばならぬが，この段階で仮定し得ることはある方法で需要が生産物価格（P）と要因の稼得分に依存しているということである。要因稼得分は生産物価格に依存するから生産物の需要（x'）と供給（x）の両者が生産物価格（P）に依存することが示される。しかし需要を供給に等しくする生産物価格の若干の集合が存在することを示さねばならぬ。このことは困難な仕事であるが次の方法で取組まれる。

今適当な生産物価格（P）の集合から出発するとき，需要函数で決定される(x')は feasible でないかも知れないし，又 feasible であっても optimum とはならないかも知れない。従って生産物数量の集合〔k(x')〕が feasible region の frontier に横たわるようになる迄，すべての(x')を同じ割合に増加又は減少する。そのときこの k(x') に対して価格集合(p')が対応する。そして(p')は k(x') が最適値となったときの価格集合である。これ等の価格集合(p')は「需要価格（P）に対して定められる供給価格」に対比される。依って一つの供給価格集合が与えられた需要価格に結びつけられる一法則が得られる。そのためには不動点定理の名で呼ばれる数学的道具の助けが必要であるが，それによれば上の方法で得られる(p')の集合の中に，少なくともそれ自身が含まれる一つの集合（P）がなければならぬ。その証明がなされるならば後は簡単である(9)。

Walras の法則によって消費される諸要因の稼得分の全体は産出量の全部に等しいから，この (P) において $\Sigma px' = \Sigma p(kx')$ を生じ，k_s' は全産物について同一であるので $k = 1$ となる。

需要量は最適数量であり，且つ供給と需要が等しい。斯くして競争均衡が存在することになる。

経済学者にとってこの証明の関心をそそる点は需要函数について仮定せねばならぬことが殆んどないことである。(P) と (W) によって生ずる若干の需要集合の存在することだけが必要で需要曲線の下方傾斜に対応すべきものもない。この驚く程簡略された説明は均衡のユニーク性についても言及せず完全に多数均衡が可能である。しかしながらサミエルソンの「顕示選好の弱い公理」と呼ばれるものがユニーク性を証明してくれる(10)。

投　入　一　産　出

Wald rules は諸要因と産出物，換言すれば投入と産出が異なった種類のものであることを示し，従って「Activity Analysis」においてもそのように取扱って議論がなされた。この種の分析では収益一定の下における静学体系の多くの局面を分析出来るけれども，一つの角度から眺めて産出物であり，他からは投入物となる中間生産物を取扱うことは出来ない。しかし現実に中間生産物は存在する。この関連から考案されたのが Leontief の Input–Output の理論である。

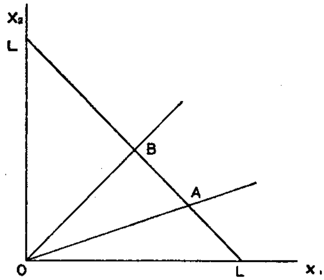
Leontiof model の特徴は primary factor（根源的要因）を唯一つの同質的労働に還元することと，各産業の投入物を他の産業の産出物と見做すことにある。x_i を i 番目商品の粗生産物と定義すれば，それは他の産業の投入物並びにx_i 自身の生産に投入されるものを含むことになる。prototype における係数と同様に（i 番目商品 1 単位について）j 番目の投入物として必要される i 番目商品の量は given として考えられ，それを a_{ij} と記す。そのとき他の商品生産の投入物としての x_i 産出物に対する需要は $\Sigma a_{ij}x_j$ となる。純生産物或いは最終生産物と呼ばれるものは，これと粗生産物の差で $x_i - \Sigma a_{ij}x_j$ と記される。（生産物 1 単位について）j 番目の生産物に必要とされる労働量を a_j とすれば，労働に対する需要は $\Sigma a_j x_j$ である。

斯かる体系の下で作用する制限条件は何か。第一に x_i のすべてが非負という符号制約は申すまでもない。労働供給（b）を given と仮定すれば，その要因の供給制限より生ずる specific restraints がある。これを記号で書けば $\Sigma a_j x_j \leqq b$ となる。各生産物の純産出量は非負でなければならぬが，特殊な生産物においてはその産出高の全部が他の生産物の生産の投入物として利用されることがある。しかしモデルは静学体系であるから，その産出高の全体を超えることは許されない。これを記号で示せば $\Sigma a_{ij} x_j \leqq x_i$ となり，specific restraints がもう一つ加わったことになる。$\Sigma a_{ij} x_j \leqq x_i$ を書き直せば

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots\cdots + (a_{ii} - 1) x_i \cdots\cdots + a_{in} x_n \leqq 0$$

これを Leontief restraints と呼び，労働制限と共にこれ迄考えてきた体系と Leontief 体系を区別する役割を果たす。a'_{g} は先に説明したと同じ理由から非負であると仮定することは出来るが，Leontief restraints の全係数が非負であるということは出来ない。若し全係数が非負であったとすれば，右辺がゼロであるから非零の係数を持つ産出量はゼロとならねばならぬ。故に Leontief 体系が完全に feasible となるためには feed back 係数 a_{ii} が 1 以下でなければならぬ。このことは Leontief 制限の中で一つの係数が負であることを意味する。Wald rules 並びにそれより生ずる成果を適用出来ない理由はここにある。

上に述べた条件より生ずる状態を図 2 に描き，粗生産高 x_1 と x_2 を二つの軸に沿って測れば労働制限は下方傾斜直線（LL）として示され，一方 Leontief 制限は原点を通って上方傾斜する直線として示される。諸制約を満たす feasible region は三角形 OAB へと狭ばめられる。二次元以上の場合においては原点に頂点を持つ cone 又はピラミッドの形態をとる。



〔Fig. 2〕

$a_{ii} < 1$ という条件は Leontief Line が上方傾斜することを示すだけでそこ

に feasible region が存することを保証はしない。直線OAが容易に上に吊し上げられ(又はOBが吊し下げられ)て feasible region は消失する。このことは二財の場合において，x_1 を作るために吸収される x_2 の数量が x_2 産業の内に吸収される x_1 数量より大きいことを意味する。純産出量 x_1 が零であっても，x_2 の純産出量が負となる。係数aがランダムに選択されるときに斯様なことが起こり体系は作用しなくなる。二財以上の場合においても同様なことが複雑化された形で起こってくる。これが起こらぬための（a係数に関する）条件を Hawkins-Simon の条件と呼ぶ(11)。それは直線OBの勾配がOAの勾配より大ということで

$$\frac{a_{21}}{1-a_{22}} < \frac{1-a_{11}}{a_{12}}\text{，}\quad \text{これを行列式の形に直して}\quad \begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

となる。Leontief 体系が feasible であるためには，この Hawkins-Simon 条件が充たされねばならぬ。

第二には，体系が feasible ならば選択される点は，効率の観点から労働制約直線の境界上になければならぬ。feasible region 内のある点から粗生産量は比例的に増加され同時に純生産も同比例で増加される。このことから最適値はその境界に存すると推定されるが検討を要する事柄である。

与えられた価格Pにおける最大値として純産出量を考えるが，容易に粗価格で測った純産出量の値が純価格での粗産出値に等しいことを示し得る。一生産物の純価格はその生産の産出物1単位の附加価値 (value added) として解される。

$$V = \Sigma p_i (x_i - \Sigma a_{ij}x_i) = \Sigma (p_j - p_i a_{ij})\, x_j = \Sigma \pi_j x_j$$

純価格 $\pi_j = p_j - \Sigma p_i a_{ij}$，$p's$ と $a's$ が与えられているから $\pi's$ も given である。故に諸制限の下で $\Sigma \pi_j x_j$ を最大にすればよい。

prototype theory の処で使ったお馴染みの方法を用いれば，optimum は頂点が各頂点間になければならぬ。つまり①，原点 ②図の A, B の如き点(労働制限と Leontief 制限の各直線の交点)。

原点ではVは必ず零となり，②の頂点では，Vは正となる。ここで考慮すべき点は②の頂点だけとなる。各頂点では一商品以外のすべての純産出量はゼロで，残りの一商品の純産出量が最適値となる。可能な最適値は労働制限の境界上にあって，各頂点の加重平均となる。

総計n個の商品の positive な純産出物があるならば，すべての頂点でVは等しい価値を持たねばならぬ。そのことから $\Sigma \pi_j x_j$ は平面 $\Sigma a_j x_j = b$ に関し

て，すべて等しくなければならぬ。全商品の π_j が a_j へ同割合を生ずるときにのみ起こり得る。これを $\pi_j = wa_j$ と記し，Wは労働の帰属価格とする。斯くして労働賃銀に関して粗価格（P）を決定する $p_j - \Sigma p_i a_{ij} = wa_j$ なる n 個の方程式を持つ。n 個の 商品のすべての 純産出量が 正となるのは，この 価格においてだけである。 この 方程式で 決定される 価格（P）が非負ということは Hawkin-Simon の条件によって保証される。

Leontief model の 代 替

Leontief model の代替性について述べよう。先に 決定された 価格は商品に対する需要とは何の関係もなく独立に決められた。需要が変化しようとも最適値点は労働制限平面上にあって価格は変らない。技術係数一定という仮定にもかかわらず，労働という唯一つの稀少要因があるという事実から体系を費用一定の下で作用させる。生産過程に再投入されるために生産される中間生産物となるように，若干の純産出量は零であってもその純価格は労働係数の価値に等しくならねばならぬ。$\pi_j = wa_j$ この条件から 純産出量はゼロであっても 粗産出量が正であればよい。

この 性質に 関しての 注目すべき Samuelson の代替定理がある。 Leontief model においては，これ迄仮定したように技術係数一定を持って出発する必要はない。其処では生産方法の選択ということはあり得るが，各生産物が採用する方法は一つしかない。そして選択される方法は生産物に対する需要とは独立に決まる。

原則として，方法は種々あっても実際に決まるのは一つで，Leontief 体系は費用一定の下で作用する。このことは，すべての労働が完成生産物の生産に直接適用されたとしても 同じことで，「効率」が最も有効な 生産工程を使用させるようにする。

これに対して一つの例外が存在する。若干の生産物が joint product であるとき，それ等の価格は 需要に 依存し，労働が 唯一の 根源的要因であっても，需要の変化は一生産方法の他者へと 代替に 導く 可能性がある。Leontief 体系は joint production を排除しているので 斯かる 面倒なことは 起こらないが，Samuelson の原理を joint production が許される場合に拡張したならばどう

なるであろうか。

Activity Analysis によって問題を次の形におく。N個の商品を生産し得るR個の Activities があり R＞N と仮定する。

α_{iK} : 単位密度で operating しておるときのk番目 Actiyity によるi番目商品の output.

α_{iK} : input も output と同記号で示されi番目商品が投入物のときは negative.

β_K : 労働の input.

X_K : k番目アクティビイテイの intensity.

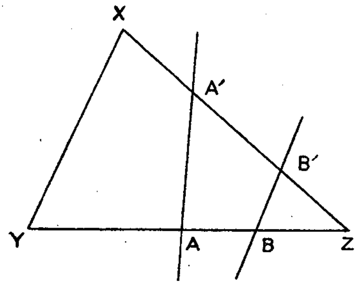
このとき全体系に関するi番目商品の純産出量は $\Sigma \alpha_{iK} X_K$. 従って求むる形態は $X_K \geq o$. (すべてのkに対し), $\Sigma \alpha_{iK} X_K \geqq o$. (すべてのiについて), の制限下で $\Sigma\Sigma p_i \alpha_{iK} X_K$ を最大ならしめることとなる。

ここで若干の α_o' は positive, 若干は negative であるから feasible region が存在するかどうかを決めなければならぬ。しかし α_s' がその条件に適したものであると仮定する。すべての Activities が利用されるならば，各アクティビイテイに対して $\Sigma p_i \alpha_{iK} = w\beta_K$, N個の価格を決めるのにR個の方程式が与えられる。

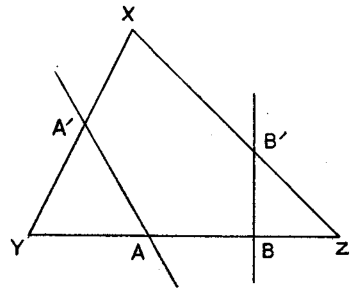
R＞N ならば体系は overdetermine され，N個以上のアクティビイテイが利用されないことになる。残りのアクティビイテイは $\Sigma p_i \alpha_{iK} < w\beta_K$ で intensity は零である。アクティビイテイの最適値集合は只今述べられた条件を充たさねばならぬから，optimisation はN個より多くないアクティビイテイからの選択を意味する。optimum 集合がN個のアクティビイテイから得られる価格は determine となる。従って体系を満足する最終生産物の需要は，これ等の価格とアクティビイテイによって充たされることになる。

joint supply がなければ，少なくともN個の商品を生ずるためにはN個のアクティビイテイが必要である。これが Samuelson の場合である。しかし joint supply があれば，N以下のアクティビイテイでN個の商品が正の数量で生産されることが可能である。そのとき価格は undeterminate で需要の変化につれて Activity が変化する。

図3の助けを借りてこのことを更に検討しよう。生産される二つの商品と三つのアクティビイテイがあると仮定する。N = 2, R = 3. 三つの軸に沿ってアクティビイテイの intensities を測るとき労働制限は一つの平面になる。求むる最適値はその平面上にあり，これを紙上の平面と仮定する。そのとき各座標



〔Fig. 3. 1〕



〔Fig. 3. 2〕

平面とこの平面の交りは三角形 XYZ として現われる。符号制約と労働制約は possible optima を各辺上，又は内に制限する。更に二つの Leontief restraints（労働平面と Leontief 平面の交り。これは直線で示される）は possible optima を制限する。これ等の制限が完全に作用するためには三角形と交らねばならない。その主要な場合は彼等が共に二辺に交る（Fig 3, 1）とき，他は共に交るのが一辺のとき（Fig 3, 2）の二つに分れる。

上に述べてきた理由から三つのアクティビイテイがすべて最適値の位置で使用されることは三角形 XYZ 内では存在せず，各辺の何れかである。(図3-1) では AB 或いは A′B′ に沿って最適値が横たわる。AB であるとすれば，一商品に対する需要が零であれば体系はAにあり，他の商品に対する需要がゼロであるときはBに存在する。そして AB に沿って動くことで如何なる割合にでも有効に結合され得る。このときは Samuelson の定理は証明され得るが(図3, 2) に目を移せばどうか。possible optima は AB に沿うか，折線 A′XB に沿って横たわる。ABが最適値ならば問題ないが他の A′XB′ にあるときは，需要が一端点から他に変化するときアクティビイテイの結合に一つの変化がある。この例外は二つの商品の正純産出量が唯一つのアクティビイテイを使用することによって得られるとき，つまり，点Xが最適経路にある場合に起こり得る。従って joint production は例外が起こるための必要条件である。

最後に2回にわたる「線型分析と限界分析」の稿を閉ずるに当って一言断っておく。最初に提起した「デービイド，リカード以来今日迄用いられてきた限界分析が，ここでコペルニクス的転回を行なって線型分析に移行するか」という問題に対して「正」，「否」の解答を明示すべきであったかも知れないが，私は敢えてそれをせずヒックスの Linear theory の粗述という形でその判断を各人に委ねることにした。蓋し彼の Linear theory が「限界分析から線型分析へ

の移行過程」をよく解明してくれると思うからである。

〔註並びに参考文献〕

① 限界分析と線型分析（I）金沢大学経済学会誌創刊号。拙稿.

② p_s', a_s', etc. の s' 記号は若干個の p, a, etc. を意味する。以下同様.

③ 二階堂副包. 線型数学. 140～141 pp

④ 同上. 現代経済学の数学的方法. 175～177 pp 〔双対定理〕

⑤ 同上. 同上. 185～200 pp 〔凸 集 合〕

⑥ $t > s$ で方程式が independent のとき，問題は overdetermine で解なし。
$t = s$, 方程式 independent ならば，一つの解を得る。それが符号制限を示せばよい。

⑦ J. Von. Neumann. A Model of General Economic Equilibrium. The Review of Economic studies 8 (1945～1946)

⑧ 詳しくは DOSSO. 366～375 pp.
cf. D. Gale. Theory of Linear Economic Model. (1960).

⑨ 二階堂副包. 現代経済学の数学的方法. 285～314 pp 〔不動点定理〕

⑩ DOSSO, 315 p.

⑪ 二階堂副包. op, cit. 11～19.

〔備考〕本稿は金沢大学経済論集第一号，「限界分析と線型分析（I）」の第II篇に属する。