二つの生産関数とその適用

前 田 敬 四 郎

I 生産関数の起源[1)]

今を溯ること約1世期半前の1815年にマルサス (T. R. Malthus)[2)]とウェスト(Sir Edward West)[3)]は殆んど時を同じくして,「与えられた土地に労働と資本をつぎつぎと結合して用いるならば,産出物の増加分は逓減的ではあるが全体として増加する」という事実を指摘した。この原理が分配論の基礎としてリカード (David Ricardo) の Principle Of Political Economy の中で採用されたのは,それから2年後であった。すなわち「労働と資本の結合された収益は労働と資本の最終結合単位によって附加される産出量に等しく,従って分配はこれによって決めらるべきであり,一方,土地の所有者はこれらの量を超過した分の総計を地代として受取るべきである」と宣言した。リカードにおいては労働と資本の結合割合が変動することを考慮せずに,唯一定割合を持って結合すると仮定しており,これら二要因の生産物への貢献度が賃銀,利子率を決定をするように分離されておらなかった。その代りこれらの率を決定するために供給の費用要因として「少くとも賃銀をして最低生活を維持するに足る程度に釘付し,貯蓄する人や投資を行う人には最低生活を保証するに必要な額に抑える」人口抑制のマルサス的力が作用すると仮定した。これが以後,数10年間に渡って勢力を得て来た古典派の分配理論であった。

資本と労働の結合関係に分離のメスを入れ,「諸要因はそれぞれ個別的に増加されるが,他の要因を一定に保つとき生産物は収益率を逓減しながら増加する」という関係は1840年代になって Von Thünen によって見出されたものである。[4)]そして賃銀率と利子率は,それぞれの最終附加分が生産物に与える附加産出量に等しいことを指摘した。斯様に限界生産力の真の発見者は Von Thünen であったが,当時のドイツにおいては歴史学派が隆盛で生産・分配の指導原理である Von Thünenの「収益逓減曲線」は注目されるところとならず,一方収益逓減の提唱国であったイギリスでは島国根性が強く欧州大陸の理論には耳を借さずという状態で,折角発見された理論も地下に眠って仕舞った。1888年 American Economic Assosiation の大会において John Bate Clark

が「純粋資本財の一定量に適用される労働の増加量は益々少さい収益率を生ずる。……そこに1万ドルの価値を持つ生産手段とそれを使用するために10人がおると仮定しよう。各人が操業によって一日3ドルに値する生産物を作るとき，労働者の数を20人に増加し，資本は元の儘に残しておけば，各人は以前よりも少く生産するであろう。一日の生産物は3－Xドルとなる。一定量の純粋資本量と関連して次ぎ次ぎに用いられる各労働単位は，その前任者の何れよりも少く生ずる。………一般賃銀は社会的労働力に附加される最終労働者によって創り出される生産物に等しくなる。

資本の稼得分は労働者のそれと同一法則性の下にある。つまりその分野に齐らす最終増加分の生産物で決められる。………労働供給を一定にして資本を増加しよう。それが生産分野に入るとき，後者の各増加分は前者の何れよりも少ししか作り出さないのを見出す。

収益逓減の一般法則は両面に働くものである」と述べ，限界生産力が再発見された[5]。このことはドイツ歴史学派の代表者クーニスの下に留学したClarkが知らないうちに Von Thünen の影響を受けて，斯る形になったものと考えられる。

然しながら Clark 以後の経済学者は諸要因の限界生産力曲線が負に傾くと確心して，下方且右に傾く曲線を描くことで満足し，これらの曲線の位置や傾斜が実際にどうであったかということには殆んど関心が払らわれなかったが，これらに目をつけたのは外ならぬダグラス (Paul H. Douglas)であった。

〔補註〕

1) Paul H, Douglas, Are There Laws of Production?
2) T. R. Malthus, Nature and Progress of Rent. p. 61.
3) Edward West, The Application of Capital to Land.
4) J.H. Von Thünen, Der Isolirte staat; Zweiter Teil.
5) John Bates Clark, "The Possibility of A Scientific Law of Wages" American Economic Association vol. IV. (March, 1889).

II　コブーダグラス生産関数[6]

ダグラスは1928年頃に1899—1922年間のアメリカ製造工業の雇傭労働者指数と固定資本指数を完成し，これらを製造工業の物理的産出量と共に対数目盛上にプロットして，生産物曲線が常に生産要因の二つの曲線間に存在することを見出した。その生産物曲線は最小増加を示す労働指数曲線と大きな増加を示す資本指数曲線間の約$\frac{1}{4}$距離にあった。その当時 Amherst College で教鞭を

とっておった Douglas は同僚の Charles W. Cobb に計って生産物に及ぼす資本並びに労働の相対的効果を測る公式を展開することにした。Cobb は Euler の定理に精通しておったので次の様な Cobb-Douglas 型生産関数と呼ばれるものを作り出した。

$$P=bL^kC^{1-k} \qquad (1)$$

指数の和は仮りに1となされたので，bとkの値を見出すことだけが必要となり，それに最小二乗法を適用した結果kの値は.75であった。そして，この値は二要因の曲線と生産物曲線の相対距離で予想した値とほぼ一致した。資本指数$1-k$の値は物論，.25であった。次にこれらの値を公式に代入して理論的に生産物の数量を計算し，理論値と実際の値を比較したが，そのうち一年のみが11パーセントの喰違を生じたが，残りは大きなものでなく二年を除外すれば，資本や労働指数の不完全性から予想される偏差となった。Douglasの資本指数は使用した度数からでなく利用可能な数量を測ったので，不況期間の遊休資本や好況のインテンスイブな資本使用に許容 (allowace) を与えなかった。このことは労働指数についても同様であり，繁栄の年には産出物の実際値（P）が理論値（P′）を超え，不況の年には逆の現象が起きた。従って Douglas達はこれらの偏差は上の公式に一般的妥当性の根拠を与えるものと見做した。更に注目すべき事は完全競争下においてこの型の生産関数を持つものは，一要因がその指数で示される割合を生産物のシエアとして受取るということであった。ダグラスはNational Bureau of Economic Research の研究から，1909～1918年間の製造工業純生産物の値で，労働シエアが74.1パーセントであると推定し，その値がほぼ労働指数に等しいことを発見した。

その後1937年に David Durand という若い経済学者がDouglas 達の資料について批判論文を発表し[7]，その中で「Douglas 達の資本指数は独立に決定されたのであるから，$P=bL^kC^{1-k}$ という制約関数は放棄さるべきである」と指摘した。ダグラスはテストすべき一つの経済法則である「収益一定という」仮定を設けておった。資本指数が独立に決定されることを認めるとき，指数の和は1より大又は小さくなる可能性があり，収益一定と同様に，逓増，逓減を示し得る。そこでDurand の助言を容れて次の公式で実証を試みることに決めた。

$$P=bL^kC^j \qquad (2)$$

その後この公式の下で Time Series から Cross-Section, Inter-Industry

へと，更に他の国家の生産関数分析へと研究は拡大されて行った。そして Cobb-Douglas 生産関数が統計的に実証され，生産の法則を見出さんと試みて遂に彼の生涯を閉じた。

Cobb-Douglds 関数の重要なテストは利用し得る労働と資本数量から理論的に得られる生産物の価値がどの程度各種産業の実際値に実現されているかということである。そのためまず各研究値に対する標準誤差の推定値（S）を計算した。理論値と実際値の乖離が測定並びにサンプリング（Sampling）に伴

表I　特定年に対する英領の製造工業生産量の理論値と実際値の偏差度合

国並びに年	産業数 (N)	標準誤差推定値(σ)による理論値(P′)からの実際値(P)の偏差					
		数			パーセント		
		1σ以下	1-2σ	2σ以上	1σ以下	1-2σ	2σ以上
カナダ							
1923	167	116	41	10	69.0	25.0	6.0
1927	163	115	40	8	71.0	24.0	5.0
1935	165	113	45	7	69.0	27.0	4.0
1937	164	122	33	9	74.0	20.0	6.0
オーストラリヤ共和国							
1912	85	66	13	6	78.0	15.0	7.0
1922-23	87	66	15	6	76.0	17.0	7.0
1926-27	85	65	17	3	76.0	20.0	4.0
1934-35	138	110	23	5	80.0	17.0	3.0
1936-37	87	70	9	8	81.0	10.0	9.0
オーストラリヤ聯邦 ニユ，サウス，ウエルス							
1933-34	125	98	22	5	78.0	18.0	4.0
ヴィクトリヤ							
1910-11	34	26	7	1	76.0	21.0	3.0
1923-24	38	32	4	2	84.0	11.0	5.0
1927-28	53	26	6	3	74.0	17.0	9.0
総計	1,373	1,025	275	73	—	—	—
平均	—	—	—	—	74.7	20.0	5.3

出所：Douglas, Are There Law of Production より。

うランダム誤差の正規分布の場合に，実際値の68.3パーセントは理論値から(1S)内にあり，95パーセントは（2S）内にあり，唯1パーセントが（3S）範囲外にある。また大英帝国の領土内になされた30個のクロスセクション分析における理論値と実際値の偏差関係はI表の如くであった。表から解る如く1373個の観察値のうち，1025個(74パーセント)が1標準偏差内に，94～95パーセントが2標準偏差内にある。この標本観察値分布はランダム誤差の正規状態下で予想されるものよりは若干よい。斯くして Cobb-Douglas 生産関数の信頼性が一層強められたと Douglas は考えた。

次にもう一つ重要なことは，資本と労働が生産物から受取るシエアが生産関数値から期待する割合にどの程度近似化するかということである。

(1) 指数の和が1に等しい ＝ 収益一定。(2) 完全競争の条件下で，各生産要因はその指数で示される部分を全生産物から受取ると期待し得る。賃銀及びサラリーの純生産物価値における現実のシエア（W/P）とkの値をダグラスは比較した。後者は純残差の得失を除外して全生産物が労働，資本に分割されたとき生ずると期待し得る測度であるから W/P と$\frac{k}{k+j}$の比率を比較することは有益なことである。これをアメリカのクロスセクション研究に行った分析が表IIに示される。

表II　労働者によって受取られた未加重平均（W/P）とアメリカ製造工業の生産関数における労働，資本指数の年次別比較

年	N	k	j	$\frac{k}{k+j}$	$\frac{W}{P}$	標準誤差で測って W/P が k 及び $\frac{k}{k+j}$ と異る度合	
						$\frac{W/P-k}{\sigma_k}$	$\frac{\frac{W}{P}-\frac{k}{k+j}}{\sigma_k}$
1889	363	.51	.43	.54	.60	＋ 3	＋ 2
1899	332	.62	.33	.65	.58	－ 2	−3−4
1904	336	.65	.31	.68	.64	−0−1	－ 2
1909	258	.63	.34	.65	.63	0	－ 1
1914	340	.61	.37	.62	.59	−0−1	－ 1
1919	556	.76	.25	.75	.59	−8−9	－ 8
平均	—	.63	.34	.65	.605	—	—

出所：Douglas, Are There Law of Production より。

この表から6年間のうち5つにおいて，k と W/P の値は常に密接な関係にあったことが解る。1909年には二つの間に正確な一致，1904～1914のそれらにおいては，差は標準誤差だけ，1889と1899においては 2～3 標準偏差で，W/P が8標準偏差低い1919年が最大であった。6年全体の平均をとれば k は平均，.63，$\frac{k}{k+j}$ は，.65に等しく'実際の労働シェア W/P は，.605であった。完全競争下の理論値と実際値の間では，その期間に密接に一致した。このことは生産関数により一層力のを与えたことになる。

〔補註〕

6) Douglas, Are There Laws of Production.

7) David Durand, "Some Thoughts On Marginal Productivity With Special Reference to Professor Douglas' Analysis" Jour. Pol. Econ. Vol. XLV, pp 740–58.

III CES 生産関数[8]

Cobb-Douglas 生産関数は Cobb と Douglas が1928年に作り出して以後今日迄たいした競争者もなく長い間その生命を保って来た。然し最近 Arrow' Chenery, Minhas, Solow の共同研究によって作り出された新関数 CES 生産関数によって強く挑戦されて来た。また CES 生産関数は Brown と de Cani の共同によっても独立的にほぼ時を同じくして開発されている[10]。それでは CES 生産関数とはどの様にして作られ，如何なる性質を持っておるかを調べてみよう。

従来の生産関数と CES 生産関数の基本的変化は代替の弾力性 σ が1又は0より他の常数であるのを認めることにある。Cobb-Douglas 生産関数は上述した如く資本と労働の代替弾力性を1と考え，W. Leontief の投入—産出分析ではそれを0と仮定する。

A.C.M.S 達は CES 生産関数導出の出発にあたって先づ「与えられた産業内の使用された労働一単位当りの附加価値は賃銀率と共に国家間で変動する」ということの分析を行った。

すべての国家に対して1個の生産関数を仮定する。そのことは単位当り労働投入の附加価値と賃銀率の間に決定的関係があることを示す。彼等はこの関数の導出にあたって先づ V. L. W. の三変数間の統計的関係をテストした。

V: U. S. 千ドル単位の附加価値

L:　man-years 単位の労働投入量

W:　man-yearsについてのドル単位の貨幣賃銀率（全労働費をLで割ったもの）

その際に次の 4 つの準備的仮定を設けた。

(1)　生産物並びに原料投入物の価格は賃銀率と体系的に変動しない。

(2)　工場規模の平均における変動は投入要因に影響を与えない。

(3)　同一技術がすべての国家に利用される。

これらの仮定に立って

$$\frac{V}{L}=C+dW+\eta \qquad (1a)$$

$$\log\frac{V}{L}=\log a+b\log W+\in \qquad (1b)$$

のテストを行ったが両関数とも観察値によいフイットを得た。標本の国家，平均賃銀率，産業の数は表 Ⅲ に示され，線型対数関数の回帰結果は表 Ⅳ に示す如くなった。b の小さな標準誤差と R^2 の高いことからフイットがよいことは明きらるである。24産業のうち20においては，労働生産性の85パーセント以上が賃銀率だけで説明される。

表Ⅲ　　標　本　の　国

	国	調査年	平均賃銀（ドル）	使用された産業数
1	アメリカ	1954	3841	24
2	カナダ	1954	3226	23
3	ニュージランド	1955/56	1980	22
4	オーストラリヤ	1955/56	1926	24
5	デンマーク	1954	1455	24
6	ノールウエー	1954	1393	22
7	プエリト，リコ	1952	1182	17
8	英国	1951	1059	24
9	コロンビヤ	1953	924	24
10	アイルランド	1953	900	15
11	メキシコ	1951	524	21
12	アルゼンティン	1950	519	24
13	日本	1953	476	23
14	エルサルバドル	1951	445	16
15	ブラジル	1949	436	10
16	南，ローオデシヤ	1952	384	6
17	セイロン	1952	261	11
18	インド	1953	241	17
19	イラク	1954	213	2

出所：A. C. M. S, Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency より。

表IV　　　　　　　　回帰分析結果

ISIC No.	産業	回帰方程式		標準誤差	決定係数	b の有意テスト	
		$Log a$	b	S_b	R^2	自由度	1と異る b の信頼水準
202	乳製品	.419	.721	.073	.921	14	99%
203	果樹，野菜かん詰	.355	.855	.075	.910	12	90
205	製粉，精穀	.429	.909	.096	.855	14	*
206	パン製造	.304	.900	.065	.927	14	80
207	砂糖	.431	.781	.115	.790	11	90
220	タバコ	.564	.753	.151	.629	13	80
231	紡織	.296	.809	.068	.892	16	98
232	編機械	.270	.785	.064	.915	13	99
250	木材	.279	.860	.066	.910	16	95
260	家具	.226	.894	.042	.952	14	95
271	パルプ，紙	.478	.965	.101	.858	14	*
280	印刷，出版	.284	.868	.056	.940	14	95
291	皮製品	.292	.857	.062	.921	12	95
311	基礎化学品	.460	.831	.070	.898	14	95
312	油脂	.515	.839	.090	.869	12	90
319	各種化学品	.483	.895	.059	.938	14	90
331	粘土製品	.273	.919	.098	.878	11	*
332	ガラス	.285	.999	.084	.921	11	*
333	陶磁器	.210	.901	.044	.974	10	95
334	セメント	.560	.920	.149	.770	10	*
341	鉄鋼	.363	.811	.051	.936	11	99
342	非鉄金属	.370	1,011	.120	.886	8	*
350	金属	.301	.902	.088	.897	11	*
370	電力機械	.344	.870	.118	.804	12	*

*　80%あるいはそれ以上の高い水準では有意でない。

出所：　A. C. M. S, Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency より。

上の回帰分析はより一般的生産関数の導出に対する重要な基礎を与えた。線型対数関数は賃銀と労働投入の観察値に前者より若干よいフイットを得たので理論的分析は対数線型関数より出発することにした。係数 b が労働と資本間の代替弾力性に等しいことは理論的分析で示される。b に関する t テストの結果は表IV に示されているが，すべての場合 b の値は 90 パーセント の信頼水準で 0 とは異なり，24産業中14では，90パーセントあるいはそれ以上の高い信頼水準で 1 と大いに異っている。従って各産業で 0 又は 1 と異った弾力性を認める生産関数を求めんとした。

特定産業の生産関数が $V=F(K,L)$ で一次の同次と仮定されるならば，$V/L=(K/L,1)$，$V/L=y$，$K/L=x$ とおけば $y=f(x)$ と書き得る。これらの条件によって資本と労働の限界生産力はそれぞれ $f'(x)$，$f(x)-xf'(x)$ となる。単位としての産出量についての賃銀率を w とすれば，労働並びに生産

物市場が競争的のときに

$$w=f(x)-xf'(x) \tag{2}$$

これを逆転すれば x と w 間の関数関係を得る。$y=f(x)$ であるから y と w 間の単調増加関数である。逆に，y と w 間の一つの観察された関係式 $y=\phi(w)$ から出発すると仮定せよ。(2)式から

$$y=\phi(y-x\frac{dy}{dx}) \tag{3}$$

それは $y(x)$ の微分方程式で

$$y=f(x;A) \tag{4a}$$

なる解を持つ。ここで A は積分常数

これを原変数に戻せば一つのパラメータを持つ生産関数群を得る。

$$V=Lf(K/L;A) \tag{4b}$$

(4)が生産関数としての役目を果すためには，両投入物に対し正の限界生産力を持つべきであり，要因割合が変動する時は普通の収益逓減下にある。基本的計算を行えば，これらの条件は $f'(x)>0$，$f''(x)<0$ と同値であることが解る。後者の条件は(2)の逆転を許せば充分である。幾何学的には，労働一単位当りの産出量が労働一単位当り資本投入量の増加関数で，普通描かれる曲線と同様に上に凸であることをこれらの条件が示している。加うるに $x>0$ に対して $f(x)>0$ を要求するであろう。少くともこれら総ての条件はAのある値に成立すべきである。

生産関数を創出するこの方法は，余り今迄注目されなかった代替弾力性についての一関連を明かるみにもたらした。S が K と L 間の限界代替率（K の限界生産物に対する L の限界生産物の比率）を示すとすれば，代替の弾力性 σ は等高線に沿った S に関しての K/L の弾力性として定義される。収益規模一定に対して σ は次の如くなる[9]。

$$\sigma=-\frac{f'(f-xf')}{xff''} \tag{1}$$

y と w 間の関係は暗黙的に(2)で決定されておると考え，w に関して微分すれば

$$1=f'\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dw}-xf''\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dw}-f'\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dw}$$

を得る。そして

$$\frac{dx}{dx}=\frac{1}{f'}\ \text{であるから}\ \frac{dy}{dw}=-\frac{f'}{xf''}$$

斯くして(2)から w に関する y の弾力性は

$$\frac{w}{y}\cdot\frac{dy}{dw}=-\frac{f'(f-xf')}{xff'}=\sigma \qquad (6)$$

V/L と w との関係が収益規模一定の生産関数に沿った利潤最大化過程より生ずるならば，それより生ずる曲線の弾力性は代替の弾力性である。これらの仮定の下では，σ についての情報は労働一単位当り産出量と実質賃銀の結合変動の観察値から得られる。

我々は一次同次の生産関数と結びついたもう一つの単純且つ興味ある関係を観察し得る。求められた如く労働の限界生産力は増加関数であるが，資本の限界生産力は資本一労働比率 x の減少関数である。競争市場に対して，単位として産出量を持って測られた粗使用料 r は賃銀率の減少関数である。更に $r=f'(x)$，並びに(2)式を微分すれば

$$\frac{dr}{dx}=f''(x)\ ;\qquad \frac{dw}{dx}=f'-xf''-f'=-xf''$$

従って

$$\frac{dr}{dw}=\left(\frac{dr}{dx}\right)\Big/\left(\frac{dw}{dx}\right)=-\frac{1}{x}=-\frac{L}{K}$$

然るに賃銀率に関する収益率の弾力性は

$$\frac{w}{r}\cdot\frac{dr}{dw}=-\frac{wL}{rK} \qquad (7)$$

すなわち，附加価値における資本シエアに対する労働シエアの比率である。

先に準備的段階として $V.W.L.$ の三変数間の統計的テストを行った時に，V/L と w の対数値の線型関係式

$$\log y=\log a+b\log w \qquad (8)$$

が可成りよいフイットを与えたことを見出した。斯る一曲線に沿った w に関

する y の弾力性は一定で b に等しい。暗示される生産関数は b に等しい代替の弾力性を持ち，それを演繹すれば Cobb-Douglas 関数の本質的一般化を与え得ると予想した。Cobb-Douglas 群は (8) において $b=1$ という特殊な場合である。A.C.M.S 達の経験結果は代替弾力性が 1 以下になることを示している。そのことは Cobb-Douglas の世界観と鋭く対立する。この結論が分配や他の事柄について暗示するものへ戻ることにしよう。微分方程式 (3) は

$$\log y=\log a+b\log\left(y-x\frac{dy}{dx}\right) \tag{9}$$

反対数を取って $\frac{dy}{dx}$ を解けば

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^{1/b}y-y^{1/b}}{a^{1/b}\cdot x}=\frac{y(1-\alpha y^{\rho})}{x}$$

便宜上ここで $\alpha=a^{1/b}$, $\rho=\frac{1}{b}-1$ と定める。

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y(1-\alpha y^{\rho})}$$

なる方程式は次の部分分数に分解する。

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}+\frac{\alpha y^{\rho-1}dy}{1-\alpha y^{\rho}}$$

これを積分すれば

$$\log x=\log y-\frac{1}{\rho}\log(1-\alpha y^{\rho})+\frac{1}{\rho}\log\beta$$

又は

$$X^{\rho}=\frac{\beta y^{\rho}}{1-\alpha y^{\rho}}$$

先づ y^{ρ}，次いで y について解けば

$$y=x(\beta+\alpha x^{\rho})^{-1/\rho}=(\beta x^{-\rho}+\alpha)^{-1/\rho} \tag{10}$$

完全な生産関数に書き直せば

$$V=L(\beta K^{-\rho}L^{\rho}+\alpha)^{-1/\rho}$$

$$=(\beta K^{-\rho}+\alpha L^{-\rho})^{-1/\rho} \tag{11}$$

生産関数の形に関する要求としては $\alpha>0$ 且つ $\beta>0$ である限り，$x>0$ に対して $y>0$ ということは明きらかである。(10) 式を微分すれば，限界生産力

が正である唯一の条件は $\beta>0$ であることが解る。第二次微分は収益逓減の条件 $\rho+1>0$ を生ず。そのことは $b>0$ に等しく A.C.M.S. の経験結果と一致する。

⑽，⑾で示される生産関数群はすべての K/L の値に対して代替弾力性一定をあらわすものを全部含む。確かに代替弾力性 $\sigma=1/1+\rho=b$。この理由で⑽又は⑾式を代替の弾力性が一定なる生産関数，略して CES 生産関数と呼んでいる。ρ の許容値は-1から∞にわたり，σ が$+\infty$からゼロの範囲にある。b の経験的結果は殆んど1以下であるから，それは正の ρ と各産業の代替の弾力性が一般に1以下であることを暗示する。

扨，斯くして得られた CES 生産関数の性質について A.C.M.S 達の研究の跡を見てゆこう。

$\alpha+\beta=\gamma^{-\rho}$ 且つ $\beta\gamma^{\rho}=\delta$ とおけば⑽，⑾式が対称的に書き得る。

$$y=\gamma[\delta x^{-\rho}+(1-\delta)]^{-1/\rho}$$

$$V=\gamma[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho} \qquad (12)$$

パラメータ γ の変化は与えられた投入物集合に対して産出量を同割合で変化する。それは (Neutral) Efficiency Parameter と呼ばれ，代替弾力性を変換したパラメータ ρ は Substitution Parameter, σ の与えられた値（ρ の与えられた値）に対して所得の機能的分配を決定する δ はDistribution Parameter と呼ばれる。（産出単位の適当な選択で1に等しく出来る）Efficiency Parameter を離れて，⒀式は“$-\rho$ 次の平均値”として知られる集合関数である。

ρ の最低許容値は-1で，これは代替弾力性が無限なる直線等高線を示す。⒀式に $\rho=-1$ を代入すれば証明し得る。

-1と0間の ρ 値に対して，-1より大きい代替弾力性を持つ。(12)式から $x\to\infty$ になるにつれ $y\to\infty$, $x\to 0$ の時は $y\to\gamma(1-\delta)^{1/\rho}$。労働と資本の比率が増加するにつれ労働一単位当り産出量は無限に大きくなるが，資本/労働比率が零に接近すれば労働の平均生産量はより低い正の限界に接近する。

$\rho=0$ ときは代替弾力性1を生じ，Cobb-Douglas 関数に戻る。$\rho\to 0$ のとき右辺は type 1^{∞} の未定形であるので，⒀式からは明きらかでないが限界は Cobb-Douglas 関数である。これは⒀式に（a） L'Hôpital's Rule を適用，（b）$b=1$ を持つ⑼式の積分，（c）零次の平均値は幾可平均であるという数学理論に訴えれば求めることが出来る。$\rho=0$ の⒀式の制限形は $V=\gamma K^{\delta}L^{1-\delta}$。

経験的に興味ある $0<\rho<\infty$ のケースでは $\sigma<1$。その動きは $-1<\rho<0$

のケースと全く異り，$x\to\infty$ のとき$y\to\gamma(1-\delta)^{-1/\rho}$，$x\to 0$ なれば$y\to 0$。労働の一定分が資本によって飽和するとき，労働一単位当りの産出量は上限に達する。資本の一定分が労働で飽和すれば労働の生産性はゼロとなる。

$\rho>-1$ のときは等高線が直角のカーブを持つ。($\rho=-1$ は直線等高のケースで等高線が誤ったカーブを持つという理由で $\rho<-1$ は除かれる。) $\rho<0$ のときは等高線が K, L 軸に交わり，$\rho\geqq 0$ のときは等高線のみが漸近的に軸に接近。ρ の起り得る値の調査は二つの最終的注意を持って終る。$\rho=1$，$\sigma=\frac{1}{2}$は通常の調和平均。$\rho\to\infty$ なれば代替弾力性はゼロで，一定割合のケースに接近。(13) に適当な制限過程を設けてこれを証明し得る。$-\infty$次の平均値として

$$\lim_{\rho\to\infty}\gamma[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

$$=\gamma\ \min(K,\ L)=\min\left(\frac{K}{\gamma^{-1}},\ \frac{L}{\gamma^{-1}}\right) \qquad (14)$$

を持つことを平均値の一般理論が保証する。

これは原点から発する 45° 線上にコーナを持った直角等高線体型を示している。

〔補註〕

8) Arrow, Chenery, Minhas and Solow, Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics. August 1961.

9) R. G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists (London, 1938)

10) Brown, M. and J. S. De Cani, Technological Change and Distribution of Income (Manuscript) 1962.

IV CES 生産関数の1批判

Arrow, Chenery, Minhas, Solow 達が導出した CES 生産関数のもっとも重要な結論の一つは，製造工業における資本と労働の代替弾力性が一般に1以下であるということであった。表IVにも示した如く調査した24産業のうち，23ケースは代替の弾力性が1以下で，14産業は1よりも相当小さかった。

最近 Victor R. Fuchs[11] は，A.C.M.S 達によって使用されたデータは代替の弾力性が1以下であるという結論を支持しておらず，寧ろ反対にそのデータは代替弾力性1という Cobb-Douglas 仮定と本質的に一致するものであると反証を試みた。それでは Fuchs の反論を見てゆくことにしよう。

A.C.M.S は次の関数を諸国家の各産業にフイットして弾力性を推定した。

$$\log\frac{V}{L}=\log a+b\log W+E \qquad (\mathrm{I})$$

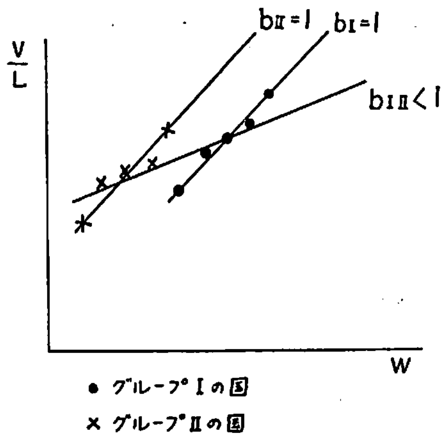
V＝U.S 千ドル単位の附加価値
L＝man-year の労働投入量
W＝man-year のドルで測った貨幣賃銀率 (wage bill L)
b＝代替の弾力性

そこで使用された国は U. S, Canada のようにもっとも進んだ国から India と Iraq の如き未開発経済の国迄と多岐に及んでいる。これに対して Fuchs は斯様に異質的国家群に対して単一の生産関数が妥当かということに疑問を持って出発する[12]。

弾力性は1だが，異った期間についての二つ或はそれ以上の異質な人口を取扱うことは可能である。それらが結合されるときには，1以下の傾斜を生む一つの下方 bias がある。Chart Ⅰ はこれが如何にして生ずるかという仮定上の説明を与える。

このバイアスが A.C.M.S. データにあらわれるかどうかをテストするために，A.C.M.Sの表から適当に最初9つを選んでグループⅠとし，次に選んだ10をグループⅡに割当てた。無理に云えばグループⅠは開発された国でⅡが未開発のものである。それらを表に示せば次の如きものとなる。

CHART Ⅰ. 労働投入と賃銀率の仮定された散らばり（対数グラフ）



グループ Ⅰ	グループ Ⅱ
アメリカ	コロンビヤ
カナダ	ブラジル
	メキシコ
ニュージランド	アルゼンチン
オーストラリヤ	エルサルバドル
デンマーク	南ローウデシア
	イラク
ノールウエ	セイロン
英国	日本
プエルトリコ	インド

表V　　　回帰分析結果

#	産業	1個の方程式 b.	1個の方程式 S_b	ダミ変数を持つ一個の方程式 b	ダミ変数を持つ一個の方程式 S_b	ダミ変数を持つ一個の方程式 β	ダミ変数を持つ一個の方程式 Sβ	"F"比率[a] A/C	"F"比率[a] B/C	"F"比率[a] A/B
202	乳製品	.721	.073	.902	.080	−.132	.048	1.47	1.04	1.42
203	果樹，野菜かん詰	.855	.075	1.086	.098	−.219	.060	2.03	.95	2.14
205	製粉，製穀	.909	.096	1.323	.167	−.426	.144	2.09	1.06	1.98
206	パン製造	.900	.065	1.065	.105	−.123	.072	1.14	.87	1.30
207	砂糖	.781	.115	.898	.183	−.124	.149	.98	71.0	.91
220	タバコ	.753	.151	1.215	.208	−.369	.134	1.50	1.06	1.42
231	紡織	.809	.068	.976	.104	−.147	.073	1.20	.94	1.28
232	編機械	.785	.064	.948	.083	−.120	.046	1.45	1.04	1.39
250	木材	.860	.066	1.083	.141	−.185	.106	1.12	1.05	1.07
260	家具	.894	.042	1.430	.090	−.108	.056	1.45	.94	1.53
271	パルプ，紙	.965	.101	.912	.175	.045	.122	.94	1.08	.86
280	印刷，出版	.868	.056	1.02	.085	−.110	.050	1.27	1.06	1.20
291	皮製品	.857	.062	1.975	.100	−.109	.074	1.08	.92	1.18
311	基礎化学品	.831	.070	1.113	.104	−.238	.074	1.68	1.09	1.55
312	油脂	.839	.090	1.058	.181	−.217	.157	1.08	1.05	1.02
319	各種化学	.895	.059	1.060	.088	−.137	.059	1.31	.99	1.32
331	粘土製品	.919	.098	.658	.197	.252	.168	1.12	1.10	1.02
332	ガラス	.999	.084	1,269	.096	−.265	.074	2.07	.82	2.51
333	陶磁器	.901	.044	1.078	.125	−.145	.087	1.29	1.08	1.19
334	セメント	.920	.149	1.308	.217	−.331	.141	1.38	1.08	1.28
341	鉄鋼	.811	.051	·.756	.112	.049	.083	.94	1.03	.92
342	非鉄金属	1,011	.120	.935	.197	.073	.147	.90	1.13	.80
350	金属	.902	.088	1.006	.166	−.091	.123	.95	1.01	.94
370	電力，機械	.870	.118	1.026	.214	−.119	.135	.98	1.06	.92

a：　説明されざる分散比率，A＝1個の方程式，B＝二つの方程式，C＝ダミ変数を持つ1個の方程式

出所：　Victor R. Fuchs, Capital-Labor Substitution より。

(1)式に似た方程式をそれぞれ各群にフイットして，弾力性が1のまわりに可成り平等に分布するのを見出した。b の中央値はグループⅠで1.02，グループⅡに対し1.15である。ほとんどの場合 b は1と大して異ならない。然しそのことは各方程式が非常に少ない観察値しか持たないということで制約を受ける。

Fuchs は以下に述べる如く二つの国家グループの差を測定するのにダミ変数を持ち，全ての国の各産業に一個の方程式をフイットするより強いテストを行った。

$$\log\frac{V}{L}=\log a+b\log W+\beta\log D+E \qquad (\text{II})$$

V, L, W, b は（I）式と同様，

グループI　国家に対し　$D=10$

グループII　国家に対し　$D=1$

β＝シフト係数

方程式（II）が各産業にフイットされたとき代替弾力性は体系的に約1であった。（表Vを参照）中央値は1.04。80%の信頼水準でも，1より可成り低い弾力性を持つものは二産業だけで，1より相当大きい値を持つものは二つである。シフト係数 β は24産業のうち17が Chart I に仮定された方向のなかにあってゼロとは有意的に異る。β の中央値は－.135で大部分の産業は－.135と大して異ならない。

代替の弾力性を測定するのに三つの異った方法を持つことになった。それは（a）すべての国に対し一個の方程式。（b）各グループの国に対する個別方程式。（c）ダミー変数を持った一個の方程式，何れが最善の方法であろうか。一つの合理的テストは各々の場合に失われるそれぞれの自由度の許容値と未説明変数を比較することである。その結果はダミー変数を持った一個の方程式が best fit で，二つの個別方程式がそれにつぎ，すべての国に一個の方程式の方法が尤も悪い。F比率は表Vに示されている。

Fuchs の言い分を要約すれば，統計的証拠は Chart 1 で仮定された形態を確認し，A.C.M.Sの結論に支持を与えぬ。Fuchsは「1というCobb-Douglas仮定が正しいと云うのではないが，唯 A.C.M.Sのデータがそれを打破する論拠を持たない」と主張する。

シフト係数は何を説明出来るであろうか。「データ源を注意深く検討せずして思案することは出来ないが，一つの可能性は述べ得る」と Fuchs は言う。すなわち賃銀率を計算するのに使用された俸給支払データは国家を超えては比較出来ない。特にグループIIの国が支払として報告されない fringe benefit の形のものが労働費用の大きなパーセントを占めるならば，その結果は上に示した通りとなる。これを説明とすれば，－135というシフト係数の中央値ば，グ

ループII国家の賃銀率に1.35を乗じたとき，実際にすべての国家を一つの生産関数にシフトし得ることを示す。

〔補註〕

11) Victor R. Fuchs, Capital-Labor Substitution : A Note, The Review of Economics and Statics, November 1963.

12) Fuchs はその儘では駄目であるが，修正すれば，代替弾力性に関する結論を本質的に変えなくて済むと考える。

V　生産関数のアグリゲーション[13)]

生産関数は一企業に直面する技術関係であり，要因割合や産出水準を決定するのは企業家である。そのとき一産業，或は工業，農業部門全体に対する有用な生産関数を構成することが出来るであろうか。個々の企業に対して一定と見做す要因が，その産業，企業能力に対して必ずしも一定ではないという一つの困難な問題が生ずる。亦，個々の企業に一定でない熟練労働の質の如き他の要因も，その産業に対し重大な制限を課す。すべての企業が収益逓増を享受しておっても，全体として産業が規模節約を経験しておるということにならない。産業の拡大は屡々，より不適な位置，原料供給の制限に遭遇する。アグリゲート(Aggregation)の問題を論ずるとき，これらの外部的節約，非節約の困難を別にしておくのは便利なことである。特に企業の個々の生産関数が産業のアグリゲートな生産関数に依存しないと仮定する。

生産関数における一般的アグリゲーション問題の体系的取扱いは Klein によって先鞭をつけられた[14)]。彼はミクロ関数とアナロガスなアグリゲート生産関数並びにアグリゲートな限界生産関係を得るために，ウエートが各企業の弾力性に比例する重みつき微視変数の幾何平均を作らねばならことを示した。マクロ収入は（マクロ価格×マクロの量）それがミクロ収入の算術平均として定義される。諸企業についてのクライン的アグリゲーションはある不思議な結果を持つ。例えば巨視的賃銀 W の定義は

$$WL=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}W_iL_i$$

W_i, L_i は i 番目企業で雇傭される賃銀と（同質的）労働者数を示す。

$$L=\prod_{i=1}^{n}L_i^{a_i/\Sigma a_i}$$

は巨視的労働投入量の定義で，α_i は i 番目企業の労働弾力性である。競争条件下では，すべての企業が，同一賃銀率 $W^*=W_i$（すべての i に対し）を持つ。それを代入すれば

$$W=W^*\Sigma L_i/n\prod_{i=1}^{n}L_i^{\alpha_i/\Sigma\alpha_i}$$

斯くして巨視的賃銀率は殆んどの場合常に企業の共通賃銀率とは異る。この単純なケースでは，W が W^* と如何なる理由で異るかを求め意味付けることは困難である。

アグリゲーションに関する公式的理論は大部分が Nataf によって解明された[15]。気の利いたアグリゲーションのためには，生産関数が加法的に分離し得るものでなければならぬことを証明した。そのとき産出量が（労働の構成分＋資本構成分）に等しい。これは高い制限条件である。投入・産出モデルは明きらかに加法的に分離し得るものである。Cobb-Douglas 関数はその条件を充さないが，対数に変換するとき加法的に分離し得る。これはクラインが使用した幾何平均値の合理化である。確かに Cobb-Douglas は特に諸企業内のアグリゲーションにうまくゆくことが示された。

この質が CES 生産関数に対しても要求される。

$$\gamma^{\rho}X^{-\rho}=\delta L^{-\rho}+(1-\delta)K^{-\rho}$$

これは加法的に分離することが出来るので Nataf 条件を充す。

主要なアグリゲーションに関する実際問題の一つは，データは一般に算術平均の形で発表されているが，アグリゲーションの体系は幾何平均を要求するということである。この近似化によって導入されて来る誤差は何であるか。平均値からの偏差が比較的小さいならば，幾何平均 G はその公式で算術平均に近似的に結びつけられる。

$$G=X\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{X^2}\right)$$

この場合，算術値は近似的に相対的分散の半分である相対的上方偏りを与える。この結果は産出量，資本，労働変数の相対分散が等しいならば，相対的偏りも殆んど等しくなることを示す。然しこの事は平均値からの偏差が比較的小さいという仮定に依存しており，多くの実際的研究においてこの条件は充たされておらない。

リニア・アグリゲーションに関する統計的処理は Theil によって研究されて来た[16]。与えられた微視関係とアグリゲーションの形態について，Theil はアグリゲートの値えマクロ関係をフイットするのが合理的かどうかを考える。

$$x_i=\alpha_i l_i+\beta_i k_i+a_i \quad (i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$x_i=\log X_i$, $l_i=\log L_i$　$k_i=\log K_i$, これらから時系列に対するアグリゲートの観察値に対してマクロ・生産関数を求める

$$x=\alpha L+\beta k+a+\varepsilon$$

先づ時系列観察値に対してアグリゲート労働投入量とアグリゲート資本投入量に関する i 番目企業の労働投入回帰を検討する。すなわち，

$$l_i=B_{li}+C_{li}k+D_{li}+U_{li}$$

同様に資本回帰が計算される。

$$k_i=B_{ki}l+C_{ki}k+D_{ki}+U_{ki}$$

回帰係数 B, C は巨視・数量が変化するときの微視・変数の体系的動きを叙べる。U は普通の性格を持つランダム変数である。これ等の方程式を微視方程式に代入すれば，

$$x=\alpha l+\beta k+a$$

ここで，

$$\alpha=\bar{\alpha}+n\{\mathrm{cov}(\alpha_i B_{li})+\mathrm{cov}(\beta_i B_{ki})\}$$

$$\beta=\bar{\beta}+n\{\mathrm{cov}(\alpha_i C_{li})+\mathrm{cov}(\beta C_{ki})\}$$

$$a=n\{\bar{a}+\mathrm{cov}(\alpha_i D_{li})+\mathrm{cov}(\beta_i D_{ki})\}$$

マクロ・パラメータのアグリゲーション・バイアスは，これらの方程式では Covariance（共分散）で測られる。不幸にも，共分散値に先験的制限を容易に示し得ないので，これらの結果を一層押し進めることは出来ない。バイアスの数量化は統計的研究を待たねばならぬ。

アグリゲーションの問題を概観した結果，一つのアグリゲート生産関数という様な概念を用いるときは多くの問題点を持つことが解り，各種の競争形態や技術条件を持つ現代経済においては，恐らく同一産業，又は狭い経済局面を超えた場合にはアグリゲーションの基本的条件に近似化することが出来ないことを知る。

〔補註〕

13) A. A. Walter, Production and Cost Function. Econometrica, April, 1963.
14) Klein, L. R. Remarks on the Theory of Aggregation, Econometrica, Vol. 14, 1946.
15) Nataf, A. Sur La Possibitité de Construction de Certains Macromodeles, Econometrica, vol. 25, 1957.
16) Theil, H. Linear Aggregation of Economic Relations, Amsterdam, 1954

VI CES 生産関数の適用

Cobb-Douglas 生産関数や CES 生産関数を現実の問題に応用して，経済成長や技術変化等を測定せんとする研究が行われて来たが，此処ではその一例として CES 生産関数を用いて「技術変化の雇傭に及ぼす効果を分離測定せん」と試みた Brown と de Cani の野心的労作の跡を見てゆくことにしよう[17)]。

技術変化の雇傭に及ぼす効果を測定するには，伝統的に用いられて来た労働投入一単位当りの産出量という生産性比率の方法は適用出来ない。生産性比率は資本変化，収益規模，中立的・非中立的技術変化，要因価格の相対的変化などの効果を分離しない儘で含んでいるからである。技術変化の雇傭効果を得るためには，最低限度，技術変化を他の諸力から分離せねばならぬ。このため Brown と de Canl の二人は（a）産出規模，（b）資本と労働の相対価格，（c）収益規模，（d）中立並びに非中立的技術変化の 4 つが雇傭に及ぼす諸効果を分離するモデルを作り，1890—1958 年間のアメリカにおける私的国内非農業部門のデータを用いてテストを行った。

先づ上記 4 つの効果を分離する手段として労働需要，労働需要と他の変数間の関係に注意を向けた。微視的経済理論によれば「企業が費用を最小にせんと作用するとき，労働の雇傭は産出規模と要因の相対価格に依存する」と規定されている。幾何学的に説明すれば，資本一労働平面上に一つの等産出曲線を作り，産出曲線の傾斜（限界生産力条件）を等支出曲線の切線に等しくする生産関変を仮定する。技術や要因の相対価格を不変にして規模を変動するとき，等支出線変化は各産出水準の企業で需要される労働の変化を示す。

規模節約並びに非節約の変化は (1) 企業の産出量変化，(2) 新技術の二つの理由から生ずる。Brown と de Cani は後者に注意を集中する。そして技術変化は 4 つの方法で等生産曲線に影響を与えると仮定する。

(1) 等生産曲線をねち曲げる。つまり資本と労働のコンビネーションで資本に

対する労働の限界代替率を変える。(2)資本と労働の結合並びにその限界代替率が与えられるとき，より多く，より少ない産出量が得られるように等産出直線の測定単位を変える。(3) 資本と労働の代替弾力性を変える。(4) 等生産曲線をより近ずけたり，離らかしたりする。前者のときは規模節約を生じたことを意味する。

労働需要関数は一義的に生産関係に依存するから(1)—(4)の各技術変化と一致した変化をする。従って先づ労働需要関係を導出する一つの生産関数を選択する。それから労働需要に与える技術進歩の衝撃を測定する。労働需要の変数として産出量と要因の相対価格を持つから，他の要因と分離して技術進歩に帰属する雇傭変化を測定する。

この目的のために技術変化は時間に関してどの様に測定されるべきか。技術変化は新しい投入・産出の構造を生ずる生産関数の変化で示される。それで代替弾力性（σ）と労働のウエート（r_2）が不変であるとき，一つの Technological Eopch（技術時代）が定義される。r_2 と σ が変化するとき，非中立的技術変化が生じ新技術時代に入る。企業又は産業は各技術時代内に修正された技術を導入することが出来る。それは中立的技術変化として定義される。最後に規模節約があれば，企業又は産業はそれを利用し得る。その測定問題は各技術時代を分離することになる。各時代内において，産出量変化，規模節約の利用，中立的技術変化，要因価格の相対変化が労働需要に及ぼす効果は，非中立的技術変化の効果と分離して数量化され得る。時代の変化は産出量変化，規模節約，中立的技術変化，要因価格の相対変化の効果と分離してσ，r_2 変化（非中立的技術変化）の労働需要に及ぼす衝撃を測定させる。

各技術時代を分離するために恣意の小観察標本（1890—1900）に対して労働需要関数を推定する。1890—1902 に対して第二の推定値を導出し，二つの附加された観察値が標本1890—1900 から導出された構造と一致するかどうかをテストする。一致するならば標本1890—1904に関する労働需要関数を推定し，4つの附加的観察値が1890—1900 の標本を生じた同一構造から導出されるかどうかをテストする。この様な方法を続けてゆくとき労働需要関係（基本的生産関数）の中に構造的き裂を発見し得る。構造的き裂を生じない標本の集りでは，非中立的技術変化が起らなかったと推論する。斯くして一つの時代を孤立化する。

各時代はそのパラメータの推定値で一義的である労働需要関数で性格付けられる。各時代のパラメータ推定値の変化は技術変化の測度並びに労働需要の効

果を示す。産出量（X），要因の相対価格（P_k/w 賃銀率に対する資本用役価格），技術効率を示す係数（r_1），収益規模を示す係数（v），非中立的技術を示す係数（r_2，σ）について労働需要関数の全微分を考え得る。

労働需要関数を導出するために C.E.S 生産関数を利用する。それはパラメータ r_1，r_2 と同様に代替弾力性 σ，同次性の度合 v を陽表的に含む。

$$X=r_1(K^{-a}+r_2N^{-a})^{-\frac{v}{a}} \qquad a=\frac{1-\sigma}{\sigma} \qquad (1)$$

X：産出量，K：利用し得る資本，N：利用し得る労働用役。

(1)式から労働需要関係を導出するために限界生産力条件を必要とする。「資本と労働の限界生産力の比は要因価格の比に等しい」ということは，競争が全市場を支配するとき要因価格を与えられたものとすれば，要因の相対投入量の変化は代替の弾力性で決定される。記号でこれを示せば，

$$\frac{\partial X/\partial K}{\partial X/\partial N}=\frac{P_k}{w} \qquad \begin{array}{l} P_k：資本収益 \\ w：賃銀率 \end{array}$$

利用度 λ_1/λ_2 を導入すれば不完全競争は次の様に一般化し得る。

$$\frac{\partial X/\partial K}{\partial X/\partial N}\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{P_k}{w}$$

競争が労働並びに資本市場で大凡そ同程度に不完全と仮定すれば，資本と労働の限界代替率は要因の相対価格に等しい。

$$\frac{\partial X/\partial K}{\partial X/\partial N}$$

C.E.S 生産関数 (1) から必要な偏微係数をとれば，

$$\frac{P_k}{w}=\frac{1}{r_2}\left(\frac{N}{K}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (2)$$[18]

$\rho=\frac{P_k}{w}$として(2)を解けば

$$K=N(r_2\rho)^{-\sigma} \qquad (3)$$

(1) と (3) 式を結合して労働需要を解けば

$$N=\left(\frac{X}{r_1}\right)^{\frac{1}{v}}\left[(r_2\rho)^{1-\sigma}+r_2\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \qquad (4)$$

(4) 式が労働需要関係式で技術変化と他の要因の雇傭に関する効果を測定する

のに使用する基本方程式である。変数に関する労働需要関係(4)式の性質は，他の条件が変らないものとするとき，産出量が増加すれば労働需要が増加する。他の条件が等しければ P_k も労働需要を増加する。パラメータに関しては，収益規模の度合 v の増加は技術効率 r_1 の増加と同様に労働需要を減少する。単純化のため(2)によって r_2 の行動を規定するとき，他の条件にして等しければ，r_2 のトウ貴は資本，労働の各結合における資本と労働の限界代替率を減ずる。従って r_2 のトウ貴はヒックスアンの意味で労働使用的である。r_2 は Labor Intensity Parameter と呼ばれる。

雇傭変化は構成分の変化に分解され，第一近似として全微分で示される。

$$dN=\frac{\partial N}{\partial X}dX+\frac{\partial N}{\partial \rho}+\frac{\partial N}{\partial v}dv+\frac{\partial N}{\partial r_1}dr_1$$

$$+\frac{\partial N}{\partial r_2}dr_2+\frac{\partial N}{\partial \sigma}d\sigma \qquad (5)$$

右辺第一項は雇傭変化に対する産出変化の貢献を示し，第二項は雇傭変化えの要因の相対価格変化の貢献，第三，第四項は中立的技術進歩の貢献として分類される。最後の二項は非中立的技術変化の雇傭変化えの貢献で，これらの諸力は労働需要関係式にフイットし得る程度の正確さで測定し得る。

(2) で示される限界生産力条件は労働需要関係式導出において有用である許りでなく，(4) のパラメータ推定でも有用である。(2) を対数に変換後，最小二乗法でパラメータ σ と r_2 を推定し，それから (4) にこのパラメータを代入し，対数変換して第二回の最小二乗法を適用すれば残りのパラメータを推定出来る。

方程式 (2) は一つの均衡関係式である。すなわち，ある定められた期間内では要因の相対価格における与えられた変化は，要因の相対投入量を代替弾力性 σ となる迄誘発すると仮定する。然し短期では現実に資本と労働の代替は制約される。現行の労働一資本投入率に現在の労働価格率と過去の労働一資本価格率が影響を与えると仮定して，モデルの中に解析的時間元を導入する。彼等は Koyck が展開した lag分布を用いて，

$$\rho=\rho_0\rho_{-1}^{\lambda}\rho_{-2}^{\lambda_2}\cdots\cdots\cdots\rho_{-n}^{\lambda_n}, \qquad 0<\lambda<1$$

λ 係数は現行要因価格率の変化に対応する設備施設代替の硬直度として解されている。企業が要因相対価格で要因の割合を決めると仮定し，$\frac{N}{K}$ に対し (2) を解き，この仮定に要因価格率の分布された遅れを結びつける

$$\frac{N}{K}=r_2\,(\rho_0\,\rho_{-1}^{\lambda}\,\rho_{-2}^{\lambda_2}\cdots\cdots\rho_{-n}^{\lambda_n})^{\sigma} \qquad (6)$$

この方程式に一期の lag を設け，λ べきに高めその結果を(6)で割れば

$$\frac{N}{K}=r_2^{\sigma(1-\lambda)}\;\rho_0^{\sigma}\left(\frac{N}{K}\right)_{-1}^{\lambda} \qquad (7)$$

$\lambda\approx 0$ のとき (7) は均衡限界生産力条件 (2) に還元する。(7) を対数に変換して次の推定方程式を得る。

$$\log\frac{N}{K}=\sigma(1-\lambda)\log r_2+\sigma\log\rho_0+\lambda\log\left(\frac{N}{K}\right)_{-1} \qquad (8)$$

$\left(\frac{N}{K}\right)$ と $\left(\frac{N}{K}\right)_{-1}$ の自己相関係数が高ければ，(8) の推定値 σ は短期の推定値，$\frac{\sigma}{1-\lambda}$ は長期の推定値，$r_2^{(1-\lambda)}$ の推定値は短期の Labor Intensity Estimate，r_2 は長期のそれである。

Brown と de Cani は斯様にモデル，ビルディングをなし，それに統計的操作を加える。

先づ時代 (Epoch) を導出するために，(8)の構造変化が起る迄最小二乗法で推定した。その結果 1890 — 1958 の期間に対し三つの Epoch を導出した。$r(1)=1890—1918$，$r(2)=1919—1937$，$r(3)=1938—1958$。方程式 (8) の Epochal Estimates (時代推定値) は σ，r_2 の推定値を与える。その結果は表Ⅰに示す如くであった。(4) 式を対数変換して，それ等の値を挿入し，第二回の最小二乗法の適用でr_1，v の推定値を得た。労働需要関係をフイットする前に，中立技術の連続的変化を反映する $\log t$ の一項を加える。労働需要関係の推定形は

$$\log N-\frac{\hat\sigma}{1-\hat\sigma}\log\left([\hat r_2\rho]^{1-\hat\sigma}+\hat r_2\right)=$$

$$-\frac{1}{v}\log r_1+\frac{1}{v}\log X+\beta\log t \qquad (9)$$

$\wedge$ の符号は(8)式の最小二乗回帰から推定されたパラメータの値を意味する。(9)式のパラメータの推定結果が表Ⅱに与えられる。

それで表 VI と VII を利用して屈伸に影響を与える諸力を数量化することになる。然し労働需要関係の推定形(9) はトレンド項を含むように修正されたから，それには方程式(5)の各項のコンビネーションを推定せねばならぬ。従ってパラメータ推定値を(9) の偏微係数だけで評価することは出来ない。それでこれらを産出量，相対価格，中立・非中的技術を示すパラメータ推定値などの対数値に

おける時代変化と結びつける。

表VI　三つの Epoch に対する方程式(8)のパラメーター推定値

Epoch	1 $\log \bar{r}_{2},r$ (a)	2 σ_r	3 $\frac{\sigma}{1-\lambda_1}$	4 λ_r	5 $\bar{R}^2$
r (1) : 1890 - 1918	−0.8865 (0.437)	0.3453 (0.123)	0.55	0.3764 (0.169)	0.8472
r (2) : 1919 - 1937	−7.1660 (5.360)	0.0779 (0.098)	0.31	0.7462 (0.221)	0.7300
r (3) : 1938 - 1958	−2.9275 (1.450)	0.1112 (0.038)	0.47	0.7623 (0.159)	0.8606

(a) : Log r_2 は比率推定値の偏りに対し修正された。P_k と w は指数。
Kは1929の百万ドル単位，Nは働いた man-hours の百万単位。

表VII　1890-1958の期間内の三つの Epoch に対する労働需要関係(9)の残余パラメータ推定値

Epoch	1 $-\frac{1}{v}\text{Log}\, r_1$	2 $-\frac{1}{v}$	3 v	4 β^a	5 $\bar{R}^2$
r (1)	0.9912 (0.0481)	0.5867 (0.0420)	1.7044	0.1091 (0.1186)	0.9893
r (2)	1.9863 (0.0931)	0.6393 (0.0531)	1.5642	−0.0406 (0.00989)	0.9053
r (3)	0.6196 (0.0991)	1.2456 (0.1673)	0.8028	−0.1873 (0.0539)	0.9506

(a) β は logt に関するパラメータの推定値，中立的技術変化は資本と同様，労働を displace するから β は負であると期待する。それは r(2) と r(3) にある。r(1) においては，それは大してゼロと異ならない。N は million of man-hous workes の単位，Xは1929の百万ドル単位，Pk/w は二つの指数の比率。t は1890, 1919, 1938において1で出発した時間変数。

変化の各効果を分離するためには偏微分の有限差法を適用する。一般に有限差法は二変数の関数 $Z=f(x, y)$で説明される。x と y の推定値 (x_1, y_1),

(x_2, y_2) を得たと仮定する。1，2，は時期を示す。そのとき

$$\triangle Z = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \tag{10}$$

これは二つの異った方法に書き換えうる。

$$\triangle Z = [f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2)] + [f(x_1, y_2) - f(x_1, y_1)] \tag{11}$$

或は

$$\triangle Z = [f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)] + [f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)] \tag{12}$$

(11), (12) の角弧の最初の項は $(\partial z/\partial x)\,dx$ の有限差推定値で，これらの推定を値計算して，平均する。同様にして角弧の第二項も平均される。原のフィットされた関数 $Z_1 = f(x_1, y_1)$, $Z_2 = f(x_2, y_2)$ が各時期内の原データに近似化するにつれて，$\triangle Z$ は Z における期間から期間えの現実の変化に近似する。すなわち，(4) からの推定値 N が現実の値 N に近づくにつれて，推定値 dN は現実値 dN に接近する。

1890—1958年のアメリカにおける私的国内非農業部門の技術的雇傭に有限定差法を使用した結果は第 Ⅷ 表の如くであった。

表Ⅷ　　雇傭の対数値における変化の源泉　1890-1958

時間区間	(1) 産出量の対数	(2) 相対価格の対数	(3) 中立的技術	(4) 非中立的技術	(5) 推定された △log N (1)+(2)+(3)+(4)	現実の △log N
	下の百分率変化の △ log N えの貢献					
Epoch 1 ≀ Epoch 2	0.0944	−0.1193	0.8834	−0.8956	−0.0371	−0.0457
Epoch 2 ≀ Epoch 3	0.4094	0.0027	−0.0945	−0.1319	0.1857	0.2088

〔補註〕

17) Murray Brown and John S, de Cani. A Measure of Technological Employment. The Review of Economics and Statistics. November 1963.

18) Brown and de Cani は $\frac{P_k}{w} = \frac{1}{r_2}\left(\frac{N}{K}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ を $\frac{P_k}{w} = \frac{1}{\lambda_2}\left(\frac{N}{K}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ と誤っておるため (3) 式でも λ_2 と r_2 を混同する。