氏　　　　名	住　　淳　一
生　年　月　日	
本　　　　籍	岐阜県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第199号
学位授与の日付	平成9年3月25日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	非摂動繰り込み群の定式化と素粒子物理への応用
論文審査委員	（主査）　青　木　健　一
	（副査）　鈴　木　恒　雄，末　松　大二郎
	久　保　治　輔，田　村　博　志

学位論文要旨

In this thesis the author discusses the non-perturbative analysis by using the so-called 'Wilson renormalization group' which was firstly formuleted by K. G. Wilson in '70s. It is sometimes called 'Exact renormalization group' or 'Non-perturbative renormalization group'. The reason why it's called 'exact' is that its RG flow equation can be written down 'exactly'. Its RG flow equation is a nonlinear functional differential equation for the effective action $S_\Lambda[\phi]$. Where Λ is the infrared cutoff.

We discuss the rapidly converging truncation of the Non-perturbative Renormalization Group Equation (NPRG) and the cutoff scheme dependence of the approximated solution. Now the cutoff scheme is nothing but the profile of the cutoff function which is the function to suppress the propagation of the low-energy mode ($p < \Lambda$). We evaluate the leading critical exponent of the three dimensional Z_2 scalar theory in the local potential approximation with various cutoff schemes. The cutoff scheme dependence of the exponent is found to be very small.

Next, we are also discuss the chiral critical behavior of QED with fixed, no running gauge coupling constant approximation, and compaire with the result of the Schwinger-Dyson equation with ladder approximation in Landau gauge. Taking account of the non-ladder contributions, our flow equations are free from the gauge parameter (α) dependence. We also calculate the anomalous dimension of $\bar{\psi}\psi$, which is enhanced compaired with ladder approximation. We find that the cutoff scheme dependence of the physical results is also very small.

筆者は本論文に於いて、非摂動繰り込み群の素粒子物理への応用について考察した。

素粒子物理で非摂動的な現象として知られているものは、QCD の color 閉じ込めを始めとして同じく QCD の Chiral 対称性の dynamical な破れから U(1)-Problem などがある。これらの現象に attack する時の研究者の武器は伝統的には次のようなものが主流である。まず color の閉じ込めに対しては Lattice Monte-Carlo Simulation であり、次の Chiral 対称性の

dynamical な破れに対しては Schwinger-Dyson 方程式である。最後に挙げた U(1)-Problem に関しては Instanton が重要な役割を演じていると考えられているが、未だに定量的な解析（η'-meason の質量の計算）には成功していない。ところで、非摂動的な現象には一口に非摂動と云っても摂動展開の無限次まで採り入れたという意味の非摂動からトンネル効果の時に現れるような essential singularity のようなものまであり様々である。非摂動繰り込み群の方法は前者のような効果は自明に取り込んでおり、おそらくは後者も取り込んでいると思われる。

さて、広く Wilson 流繰り込み群と呼ばれているものには Lattice Field Theory の Block Spin 繰り込み群も含まれる。しかしながらこの論文で議論するのは Wegner-Houghton '73, Polchinski '84, Wetterich-Bonini-D'Attanasio-Marchesini '93 によって書き下された連続版の Wilson 繰り込み群である。ここで言う連続の意味には時空が Lattice Field Theory の場合と違って連続であるという意味と cutoff Λの変化が連続的すなはち微分である事の２つの意味がある。後者は一般に Exact Renormalization Group と呼ばれ前者と区別される。'Exact' と呼ばれる理由は繰り込み群の beta-functional の exact な表式が書き下されているからである。これが可能となる理由は cutoff の変化分が無限小である事と関係している。すなわち cutoff をΛから$\Lambda-\delta\Lambda$へ下げる時に取り入れることになる correction は運動量$\Lambda-\delta\Lambda<p<\Lambda$を持つ mode から来るものであり、そのため 2-loop 以上の diagram から来る寄与は全て $O(\delta\Lambda^2)$ となり微分には効かないためである。それゆえ繰り込み群の beta-functional は 1-loop までで exact となり具体的に書き下すことが出来る。exact な方程式を書き下したことにより我々は perturbation や $1/N$-expansion、ϵ-expansion といった small parameter によるベキ展開とは本質的に異なる種類の系統的な近似法を採用することが可能となる。

次に近似法とその収束性について議論する。非摂動繰り込み群方程式は effective action $\Gamma_\Lambda[\phi]$ に対する非線形汎関数偏微分方程式として書かれている。$\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Gamma_\Lambda[\phi]=\cdots$ この微分方程式は理論空間（effective action $\Gamma_\Lambda[\phi]$ の汎関数空間）の中で繰り込み群の flow を定義する。我々の行なう近似法はこの無限次元空間中の繰り込み群方程式を適当な部分空間の上に射影することによって実行される。よく知られているものとして 'Derivative Expansion' と呼ばれるものがある。この近似法は理論空間を座標微分の有限次の相互作用までで切り詰める。具体的には、

$$\Gamma_\Lambda[\phi]=\int dx^4\left\{V_0(\phi)+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2V_2(\phi)+\frac{1}{2}(\Box\phi)^2V_4^1(\phi)+\cdots\right\} \tag{1}$$

の様に effective action を展開しておいて繰り込み群方程式を部分空間 $\{V_0,V_2,\cdots,V_k^i\}$ へ射影する。この近似によって我々の繰り込み群方程式は２次元の連立偏微分方程式に帰着する。$k=0$ の場合は特に Local Potential 近似 (LPA) と呼ばれ、多くの解析がなされてきた。３次元の Z_2 scalar 理論の critical behavior も盛んに解析されており定量的に見ても良い結果を出している。このことは一見すると大変驚くべきことの様に見える。なぜなら $k=0$ の case は全ての相互作用の運動量依存性を落すという近似であり、非常に radical な近似に見えるからである。ただ LPA は $1/N$展開との関係でいうと $1/N$ の leading+αに対応する Feynman Diagram を完全に取り込んだ近似になっていることが分かっており、従って相互作用の運動量依存性が計算出来ないということを除けば外見から想像されるほど radical な近似ではないと思われる。また、Derivative Expansion は（名前に展開という言葉が使われていることを除けば）その構成方法から明らかなように摂動論や $1/N$展開、ϵ展開のような意味での展開とは本質的に異なる。このため、摂動論などの '展開' で問題になる展開係数の爆発（級数の収束半径がゼロであることから来る問題）とは無縁である。さて、本論文で用いる近似

法では関数 $V_i(\phi)$ を更に field ϕのベキで展開し、その級数をϕの有限次 ($2N$次) まででで切り詰める。$V_i(\phi)=V_i(\rho)=\sum_{n=1}^{N} v_n(\rho-\rho_0)^n/n!$. ここで$\rho=\frac{1}{2}\phi^2$であり$\rho_0(t)$ は potential V_0の minimum である。ここまで来ると理論空間は有限次元の空間に近似され解析は極めて容易になる。近似の精密化は部分空間を step by step に拡大していくことによって容易に実行できる。いくつかの解析結果が示しているように、近似を上げると共に解析結果は収束する。ここで重要なことは、この近似法は収束した結果を得るために近似の精度を controle するような small parameter が必要ないという事である。このことは非摂動繰り込み群の方法の汎用性を示している。この様な近似法を採用できるのは他ならぬ繰り込み群方程式の exact な表式が分かっているからである。この点が同じ Wilson 流繰り込み群でも Block Spin 繰り込み群と違うところである。Block Spin 繰り込み群の場合は一回の繰り込み変換での cutoff の変化が有限であるために、その beta-function は無限 loop までの寄与を含んでおり厳密な評価は不可能である。この様な beta-function を系統的に評価するのは path-integral を評価するのと同じ位に困難である。

そのような収束性の例として 3 次元 Z_2 scalar 理論の臨界現象（特に臨界指数）の LPA での解析の結果を図 1に示す。

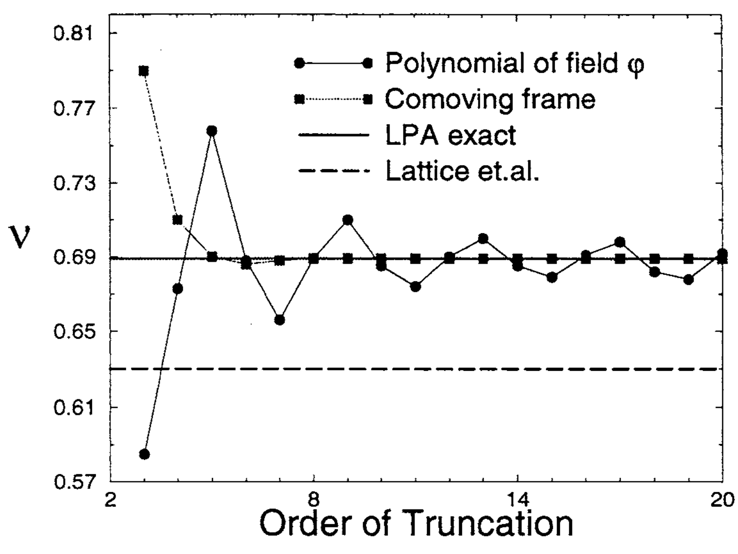

Figure 1: correlation length critical exponent νの truncation 依存性。

図中の 'truncation' は上述の Nである。理論空間の次元 Nを大きくするに共に、すみやかに exact value に収束する。この利点は、摂動論や他の非摂動的な展開 ($1/N$展開やε展開) と比較されるべき特徴である。$1/N$展開やε 展開などのいわゆる *series expansion* はことごとく漸近級数であり、展開の次数を上げると結果は発散する。このことは、近似の系統的な精密化を行なう時に致命的な障害となる。非摂動繰り込み群の方法が、これらのこのような問題から自由であるのは、繰り込み群の方法で採用される近似法が *series expansion* とは本質的に異なるものであるためである。つまり、full の理論空間を次元の低い (有限次元) 部分空間で近似し、次ぎにこの部分空間を step by step に拡大してゆく操作を何らかの *series expansion* として理解することは不可能である。また収束性については、部分空間を拡大して full の理論空間に近付けていった時解析結果が収束しない状況を想像することは難しい。

非摂動繰り込み群の方法を gauge 理論の解析に応用したときの利点について議論する。素粒子物理では興味ある問題では gauge 理論を避けることは不可能である。gauge 理論を非摂

動繰り込み群の方法で、どのように扱うか、ということは技術的な事柄なので深くは議論しないことにする。ただ、この問題のために我々の解析に対するコストが上昇することになる。むしろ、非摂動繰り込み群以外の方法との比較について議論したい。本論文では Schwinger-Dyson 方程式の ladder 近似の結果との比較を QED の chiral criticality を題材にして行なった。特に重要と思われるのは、SD 方程式と違い繰り込み群の方法には大きな gauge (α) 依存性が現れないことである。これには ladder diagram に加えて non-ladder diagram の寄与や field の anomalous dimension も採り入れたことが本質的である。これは ladder SD 方程式を non-ladder diagram を採り入れると言う意味で Improve をしたことを意味する。このように非摂動繰り込み群の方法は gauge 理論における chiral 対称性の dynamical な破れの解析において大きな可能性を示している。また、この解析の安定性も申し分ない。実際、結果 (critical exponent ν_4 と $\bar{\psi}\psi$ operator の anomalous dimension γ_m) の scheme 依存性は無視できる程度である。

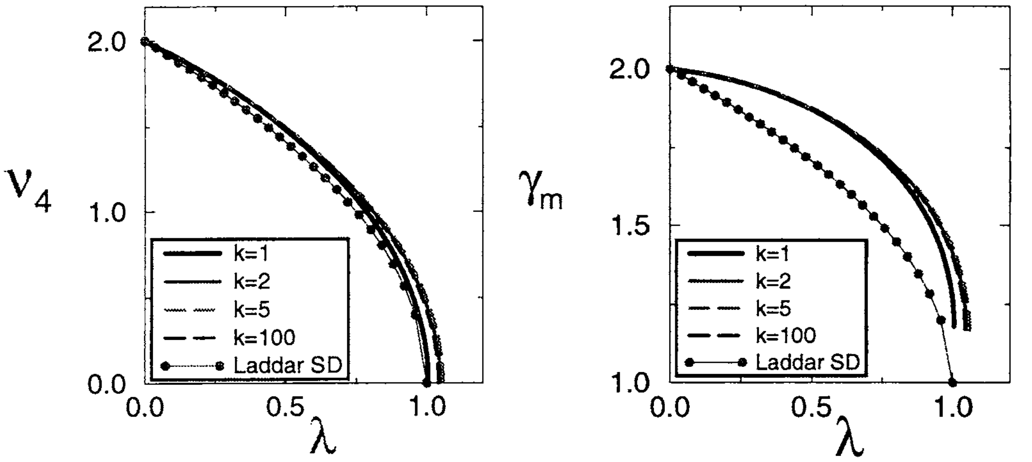

Figure 2: critical exponent ν_4 と anomalous dimension γ_m を cutoff schemes を変えてプロットした図。点線は Landau gauge の ladder SD 方程式の結果。

図 2は、critical exponent ν_4 と anomalous dimension γ_m を gauge coupling constant λ の関数として cutoff scheme を変えてプロットした結果である。criticality の位置は cutoff scheme に大きく依存したにもかかわらず、これらの exponent 及び anomalous dimension は殆んど cutoff scheme に依存していない。このことは本論文で採用した方法とその近似法が cutoff scheme 依存性に対して極めて安定であることを示唆している。

学位論文の審査結果の要旨

本論文は，非摂動繰り込み群の定式化とその素粒子物理への適用をテーマとしたものである。非摂動繰り込み群は70年代のウィルソンの仕事に遡るが，近年，実際に場の理論を解く手段として再評価されつつあり，解析的計算と数値的計算を結合させた新しい研究が進んでいる。級数展開を一切行わない近似が可能であるため，近似の系統的改善が予想され，同様な特徴を持つ数値シミュレーションの方法と相補的なアプローチとして期待されている。

本論文ではまず，非摂動繰り込み群全体の総合報告をかねて，既にいくつか知られている非摂動繰り込み群方程式の間の関係について詳細に調べている。それぞれの方程式の本質的な同等性は容易に予想されるが，その具体的な対応関係についてはこれまで不明なままであった。本論文によって，完全な対応関係が明確にされている。続いて，場の理論への適用に際しての実際的な問題として，近似に伴うカットオフ関数依存性が論じられている。問題の一般的な考察の後，３次元のスカラー場の理論について，その臨界指数を計算してカットオフ関数依存性が十分小さい事を導き，また，非摂動繰り込み群による系統的な近似が成功する例を与えた。

素粒子論の課題に進んで，量子電気力学で相互作用が非常に強い場合のカイラル対称性の自発的な破れのダイナミクスを解析し，相構造を求めて，臨界指数や異常次元などの物理量を計算している。これまでのシュウィンガー・ダイソン方程式による結果を完全に含み，しかも，シュウィンガー・ダイソン方程式での大きな弱点であったゲージ依存性を克服した結果を導いた。これは，この新しい非摂動繰り込み群の方法の強力さを示すもので，量子色力学での今後の解析の進展が展望される。

以上の研究は，共同研究に基づいてはいるが，本論文全体から容易に推察されるように，本人の理論的な理解は深く，視野は広い。また，具体的な解析や数値計算の部分も本人によって遂行されたものである。従って，本審査委員会は，本論文を学位論文として認定した。