

氏名	森川慶一
生年月日	
本籍	福井県
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第237号
学位授与の日付	平成10年3月25日
学位授与の要件	課程博士(学位規則第4条第1項)
学位授与の題目	非摂動くりこみ群による場の理論の解析
論文審査委員	(主査) 青木 健一 (副査) 寺尾 治彦, 鈴木 恒雄, 末松大二郎, 久保 治輔

## 学位論文要旨

In this thesis the author discusses the analysis of scalar field theory and gauge field theory by using non-perturbative renormalization group.

First the author investigates the truncation scheme dependence of the exact renormalization group equations for scalar field theory in three dimensions. The critical exponents are numerically estimated to the lowest order of the derivative expansion. It is found that the convergence property in various truncations in the number of powers of the fields is remarkably improved if the expansion is made around the minimum of the effective potential. It is also shown that this truncation scheme is suitable for evaluation of the infrared effective potentials. The physical ground of this improvement is discussed by considering the  $O(N)$  symmetric scalar theory in the large  $N$  limit.

And the author investigates the restoration of gauge invariance within the non-perturbative renormalization group framework. The author finds the subspaces which guarantee the gauge invariance of effective action by employing the modified Ward-Takahashi identities and fine tuning method, and compares beta function on the each subspace. It is obtained that the above two methods are effective in the weak coupling regions for QED.

筆者は本論文において、非摂動くりこみ群を用いて場の理論、特にスカラー場と  $U(1)$  ゲージ場の理論の解析を行なった。

素粒子の相互作用を記述する基礎理論は、場の理論である。過去における場の理論の成功は、主に摂動論にその基礎を置いてきた。摂動論は、理論を結合定数のべき定数として定義する。しかし摂動論は、あくまでも相互作用が弱い場合にのみ適用できる方法であり、これに基づく限り、場の理論の全内容を引き出すことは困難である。

素粒子物理において興味深い現象の多くは、理論の強結合性、非摂動的な性格が原因となっている。代表的な例としては、カラー閉じ込めや力学的カイラル対称性の破れなどが存在する。理論の強結合性や非摂動性は研究が難しく、摂動論に相当するような有効で確実な物理的方法は未だ構築されていない。しかし、様々な角度から多くの方法が提案され、場の理論の非摂動的定式化が試みられている。例えば、格子理論は、そのような定式化の一つである。これは Euclid 空間を有限間隔の格子に切ることにより紫外発散を回避し、連続無限重積分

である汎関数積分が有限重積分になる。これから物理量を評価するためには、モンテカルロシミュレーション等の数値計算を実行すればよく、現在のところ、最も信頼できる方法である。しかし、一方で、大型計算機資源が必要なことや、カイラルフェルミオンや超対称性を格子上に載せることが困難なため、標準模型への定式化が難しいことなどが挙げられる。格子理論の他にも Schwinger-Dyson 方程式による解析や  $1/N$ -展開法などが存在する。しかし、どれも部分的には成功をおさめているが、強結合性、非摂動的性質に対する有効で確実な物理的方法論であるとは言い難い。

本論文で扱っている非摂動くりこみ群も、場の理論の非摂動的定式化の1つである。この方法は、1970年代初頭に Wilson により開発されたくりこみ群の方法の場の理論版である。通常格子理論におけるブロックスピクリこみ群との違いをつける為に、上の「非摂動」や「連続的 Wilson 流」などと呼ぶことが多い。くりこみ群の教えるところは、経路積分で与えられる系に対する分配関数の非摂動的な評価である。それは、汎関数積分を高い運動量を持つ場から順々に積分することで実行される。この操作の意味は、物理的には非常に明瞭で、ミクロ (高エネルギー) での理論からマクロ (低エネルギー) での理論を導き出すことそのものに対応している。しかも、非摂動くりこみ群方程式は、この過程を閉じた微分方程式で、厳密に評価できる。その定式化は、鋭いカットオフに対しては Wegner と Houghton により、また、滑らかなカットオフに対しては Wilson と Kogut によりなされた。滑らかなカットオフに対する方程式は、その後 Polchinski により、理論のくりこみ可能性の証明に用いられたりした為に、Polchinski 方程式と呼ばれる。さらに、これらの方程式が、理論の連結 Green 関数の生成汎関数を扱っているのに対し、1粒子既約の Green 関数の生成汎関数である有効作用 (カットオフ有効作用) に対するくりこみ群方程式は Wetterich や Bonini 達により発見され、それらは Legendre フロー方程式と呼ばれる。このように非摂動くりこみ群に対しては種々の定式化方法がある。それらは、採用しているカットオフ処法や扱う汎関数の違いで分類されるが、どれも互いに等価であることは証明されている。

この初期値型の微分方程式の解である理論の有効作用は、系のパラメータで張られる空間 (理論空間) 中の軌跡によって描写される。くりこみ群の解析における近似法とは、一般には無限次元空間である理論空間を、有限次に制限することを意味する。従って、近似の精密化は、この次元を徐々にあげていくことで実行される。この系統的な近似の精密化が可能な点は、他の非摂動的方法より優れている点の1つである。もちろん部分空間の設定方法には、無数ある。実際の解析において、よく使われる制限としては、有限個数の微分を持つ相互作用で有効作用を近似する微分展開の方法がある。この近似によって元々のくりこみ群方程式は有限個の連立微分方程式に還元する。特に、この展開での最低次のみでの近似は、局所ポテンシャル近似と言われる。この近似法は、全く微分結合を無視するため場のくりこみを考えず、したがってかなり粗野な近似であると言える。しかし、本論文でも見たように3次元スカラー理論の臨界指数の定量的な評価においては、良い結果を与える。

本論文の前半部分では、この局所ポテンシャル近似されたくりこみ群方程式を用いてスカラー理論の解析を行なった。くりこみ群による結果の正しさは、この近似の次数すなわち部分空間の次元に対する収束性で判断する。近似の精密化が部分空間の拡張であることを考えると、得られる結果が  $1/N$ -展開や  $\epsilon$ -展開におけるような発散級数的振舞いを示すとは考えづらい。しかし、漸近的振舞いでなくとも、振動解の様な収束性を示さない結果となれば、その近似法の信頼性は低減される。実際、時空3次元のスカラー理論の有効ポテンシャルをくりこみ群で扱くと、その臨界指数などの物理量に振動解が発生することが知られている。この結果は有効ポテンシャルの原点周りでの場による整級数展開により評価されたものである。しかし、本論文でも扱ったように、「共動座標 (comoving frame)」と言われる有効ポテン

シャルの最小値まわりでの展開による結果は、劇的にこの周期性が改善されることを示す。高精度の数値解析で、わずかながら周期性が存在していることが見えたが、実用上なら問題のない精度であった。臨界指数の他に赤外での有効ポテンシャルの評価も行なったが、これに対しても共動座標が収束性を示す結果を与える展開法であることが分かった。次に、この収束性の向上の原因を  $O(N)$  対称なスカラー理論の large- $N$  極限を通じて解析を行なった。この理論を共動座標で扱くと、有限次で理論空間を制限したにもかかわらず、厳密な解が得られることが分かる。このことは、共動座標が、固定点に関するレバントオペレータを効率よく捉えているために、元々の解を正確に再現したと考えられる。逆に、 $O(N)$  対称なスカラー理論の large- $N$  極限だと、このレバントオペレータのベキ級数で有効ポテンシャルが展開できるように定式化できることも明らかになった。しかし、この定式化の有限の  $N$  の場合に対する評価は今後の課題である。

論文の後半は、非摂動くりこみ群のゲージ場の理論への適用について論じた。カットオフとゲージ対称性との整合性の無さから、非摂動くりこみ群のゲージ場の理論への適用について懐疑的に考えられてきた。理論の低エネルギー有効作用をくりこみ群により求めることは、くりこみ群方程式を解くことにより実行される。ゲージ理論の有効作用が BRS 不変であることは、理論のユニタリティーや物理的内容のゲージ固定条件の非依存性を保証する。したがって、上のように求められた有効作用は BRS 不変でなければならないが、そのためには微分方程式であるくりこみ群方程式を解く際に初期値をうまく与えないと達成されない。すなわち、赤外の極限で Ward-Takahashi 恒等式を満足すべしという、くりこみ条件を課してくりこみ群方程式を解かなければならない。このような初期値を満足する相互作用空間中の部分空間は、ゲージ不変理論空間と呼ばれ、これを見つけ出すことが、非摂動くりこみ群でゲージ理論を扱う際に最も重要となる。現在のところ、この初期値の張る部分空間を求める2つの方法が知られている。1つは、この部分空間を与える正確な関係式として知られる“変形された Ward-Takahashi 恒等式”を解くことである。しかし、くりこみ群による実際の解析においては、その基本方程式の複雑さゆえ、無限次元から有限次元の相互作用空間に制限して議論することが一般的である。変形された Ward-Takahashi 恒等式は無限次元の相互作用空間では、厳密に成立しているが、この近似の下で正確な部分空間を再現しない。2つ目の方法は、通常の Ward-Takahashi 恒等式を満たすように初期値を手で微調整することにより求める方法である。この方法は、電荷の不変性のようなゲージ不変性からの帰結を回復するためには必要であるが、漸近的自由な理論に適用する際に問題が生じる。このように両方の方法とも一長一短であるが、実際の理論を用いて制限された空間でこれらの方法が信頼できるものなのかどうかの数値解析まで含めた解析は行なわれていない。そこで本論文では、これらの方法が近似された空間で正しく機能し、ゲージ不変理論空間を与えるのかどうかを、 $U(1)$  ゲージ理論を用いて議論した。結果は、4体フェルミ相互作用までを含めても、2つの処法の違いによる物理量への影響は少ないことが分かった。この結果自体は、望むべきよい結果である。しかし、この結果だけで上の2つの方法が、どのようなゲージ理論に対しても万能であると結論づけることは出来ない。今回の解析では、上の2つの方法では処理できないタイプの問題の存在も明らかになった。この問題の解決策や、漸近自由性を持った理論を扱ったり、微調整するオペレータの個数が増加した時などの扱い方については、今後の課題である。

## 学位論文審査結果の要旨

本論文は、非摂動繰り込み群によって、場の理論・素粒子物理を解明することをテーマとしたものである。非摂動繰り込み群の基本的な方法論は70年代初めのウィルソンの仕事に遡るが、近年、実際に場の理論を解いていくための手段として再評価されつつあり、解析的計算と数値的計算を組み合わせた新しい研究が進んでいる。小さなパラメータを想定するいわゆる級数展開を一切行わない近似が可能であるため、近似の系統的改善が予想され、同様な特徴を持つ数値シミュレーションの方法と相補的なアプローチとして期待されている。

本論文ではまず、非摂動繰り込み群のレビューとして、種々の非摂動繰り込み群方程式の導出、その近似方法についてまとめている。特に、場の理論を解く他のいくつかの方法と比較して、非摂動性、系統的で安定した近似方法の存在が長所として強調されている。

次に、時空3次元のスカラー場の理論をとりあげて、いわゆる強磁性型の相転移の臨界現象を調べている。特に、局所ポテンシャルに制限した理論空間を更に多項式型のオペレータで展開する方法を詳しく調べ、物理量としての臨界指数を計算することにより、オペレータ展開の収束性の検討、収束の良し悪しの分析、その原因の分析を行っている。

素粒子物理学では、理論の持つゲージ対称性が本質的である。しかし一般に、非摂動繰り込み群をゲージ対称性が明白な形式で定式化する事はできていない。そこで、ゲージ不変な理論を捉えるために様々な工夫が要求されいくつかの方法が提案されている。これらの提案を量子電気力学の場合に適用し、それぞれの長所と短所を具体的に指摘している。また、実際の物理量の評価においては、いくつかの方法が同等な結果を与える事も確認している。

以上の研究は、当該テーマに関する認識を確実に進めたものであり、共同研究に基づいてはいるが、具体的な解析や数値計算の部分は本人によって遂行されたものである。従って本審査委員会は、本論文を学位論文として認定した。