

氏名	児玉博明
生年月日	
本籍	岐阜県
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第353号
学位授与の日付	平成12年3月22日
学位授与の要件	課程博士(学位規則第4条第1項)
学位授与の題目	Application of Non-Perturbative Renormalization Group to Field Theory at Finite Temperature and Density (非摂動繰り込み群の有限温度有限密度の場の理論への応用)
論文審査委員(主査)	鈴木 恒雄(理学部・教授)
論文審査委員(副査)	久保 治輔(理学部・教授) 青木 健一(研究科・助教授) 末松大二郎(研究科・助教授) 寺尾 治彦(理学部・助教授)

学位論文要旨

(Wilsonian) Non-Perturbative Renormalization Group (NPRG) is examined to analyse finite temperature and density field theory.

First the chiral phase structure of the Nambu-Jona-Lasinio/Gross-Neveu model at finite temperature T and finite chemical potential μ is investigated using NPRG. In the large N_c limit, the solutions of NPRG with various cutoff schemes are shown. For a sufficiently large ultra-violet cutoff, NPRG results coincides with those of Schwinger-Dyson equation (SDE) and have little cutoff scheme dependence. Next, to improve the approximation, we incorporate the mesonic fluctuations. We introduce the auxiliary fields for mesons, and then derive NPRG equation for finite N_c . The chiral phase structure on (T, μ) plane beyond the leading of $1/N_c$ expansion is investigated in the sharp cutoff limit. N_c dependence of chiral phase diagram is obtained and found not to be small.

Second the chiral phase diagram of strong-coupling QED at finite temperature is explored using NPRG. SDE approach needs further approximation e.g. instantaneous exchange approximation (IEA) in addition to ladder approximation. On the other hand NPRG can be solved without IEA. The phase diagrams with and without IEA are obtained using NPRG and their difference is not small.

対称性の自発的破れはフェルミオンやゲージ場に質量を与える重要な機構である。それらの質量はスカラー場の真空期待値に比例する。しかし、十分高温(高密度)では真空期待値は零になり、対称性は回復する。この高温(高密度)の状況は初期宇宙で実現されていたと考えられている。宇宙が冷やされて相転移を通して今の対称性が自発的に破れた相になっている。その相転移には電弱相転移、クォーク・グルオンプラズマ(QGP)相転移などがある。大部分が物質で作られ、反物質がたいへん少ない(baryon asymmetry)現在の状況は電弱相転移の結果であると考えられている。電弱相転移の詳細(相転移の次数など)に、物質、反物質の生成が大きく依存する。また、現在はカイラル対称性が自発的に破れ、クォーク、グルオンは閉じ込められているが、高温(高密度)の初期宇宙では、カイラル対称で、クォーク、グルオンは非閉じ込めである。これは、クォーク・グルオンプラズマ相転移によって、クォーク・グルオンプラズマ相からハドロン相に移ったのである。QCDの格子モンテカルロ・シミュレーションではポリアコフープをオーダーパラメータとして有限温度非閉じ込め相転移が調べられていて、ゲージ場だけのシミュレーションでは相転移温度が200MeV程度で、1次相転移である。より現実に近いダイナミカルフェルミオンの効果も取り入れた計算では、相転移の次数はフレーバー数に依り、また現在の格子サイズではフェルミオン作用

の種類（ウィルソンフェルミオンか KS フェルミオン）にも依るが、相転移温度は 100MeV 程度である。また、重イオン衝突実験によって初期宇宙の高温度高密度の状態を作りだそうという試みが RHIC と LHC で計画されている。中性子星内部では高密度で、クォーク・グルオンプラズマ相になっている。最近、高いバリオン密度で、クォーク対の凝縮（カラー超伝導）相の可能性が提唱され、QCD の有限温度有限密度の相構造は変化に富んだものであることが予想されている。

このように、有限温度有限密度の相転移の理解は、電弱相転移とクォーク・グルオンプラズマ相転移の 2 点から重要である。理論的にこれらの相転移を解析する上で大切な事はこれらが非摂動的であるということである。カイラル対称性の自発的破れ、クォークの閉じ込め自体非摂動的な現象であり、電弱相転移も摂動計算で信頼できる解析は難しい。それでは、非摂動的手法に何があるかという、数は多くなく、最も強力であると思われる格子モンテカルロシミュレーションをはじめとして、 ϵ 展開、 $1/N$ 展開、シュウイングー・ダイソン方程式である。 ϵ 展開、 $1/N$ 展開のような次数展開は漸近級数となり収束しない。シュウイングー・ダイソン方程式による解析は、通常、 $1/N$ 展開の leading の解析が行われ、近似の系統的改良が難しい困難がある。格子モンテカルロ・シミュレーションは格子サイズの大きさに伴い計算機の性能に大きく頼ることになる。また、今回取り扱う有限密度の場合は、フェルミオンの行列式が複素数になり、通常のモンテカルロ・シミュレーションができない。これを回避するグラスゴウ法という方法があるが、これはフェルミオン行列式をオペレータの方に移して化学ポテンシャル 0 の作用で配位を生成するのであるが、化学ポテンシャル有限で大きく寄与する配位が、化学ポテンシャル 0 でのアップデートーションでは、生成確率が極端に小さくなり、現在の計算機の性能では定性的にも正しい結果が出せていない状況にある。有限温度では、多くのことが調べられているが、有限温度では時間方向の格子の長さを小さくするので時間方向は格子の数が多く取れない。多く取ると空間方向の格子数をそれ以上に多くする必要がある。カイラル極限ではフレーバー数に応じて相転移の次数はウィルソンフェルミオンと KS フェルミオンで結果が無矛盾であるが、ストレンジクォークを入れた現実の裸の質量でのシミュレーションによる相転移次数の結果は両者のフェルミオン作用で決着がついていない。

この論文では、非摂動繰り込み群の手法に注目する。非摂動繰り込み群も上にあげた非摂動的手法の範疇の中の一つである。直感的に言うと、ブロックスピン変換を連続的に行い、それに伴う作用の変化を見るものである。正確には、統計系での実空間でのブロックスピン変換でなく、運動領空間に赤外カットオフ Λ を導入し、カットオフを下げていき、少しずつ低運動量モードの経路積分を行うのである。非摂動繰り込み群方程式は、カットオフを無限小下げたときの作用の変化を記述するもので、カットオフの変化が無限小であるために、ファインマングラフでいうと経路積分における 1 ループグラフの寄与だけが作用のカットオフでの 1 階微分 $\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Gamma_\Lambda[\Phi]$ に寄与する。たとえば、非摂動繰り込み群方程式の一つである evolution 方程式は

$$\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \tilde{\Gamma}_\Lambda[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{str} \left[\Lambda \frac{d}{d\Lambda} \Delta^{-1} \left(\Delta^{-1} + \tilde{\Gamma}_\Lambda^{(2)} \right)^{-1} \right], \quad (1)$$

の表式であり、これで厳密である。2 ループ以上のグラフの寄与は非摂動繰り込み群方程式をカットオフ Λ について有限区間積分すると取り込まれる。非摂動繰り込み群方程式は汎関数偏微分方程式なので、実際に応用する時には近似が必要である。非摂動繰り込み群方程式は無次元の作用 $\Gamma_\Lambda[\Phi]$ の汎関数空間での繰り込み群 flow を記述するが、実際の解析ではこの無限次元汎関数空間を有限次元空間に制限して（射影して）行う。よく行われる近似のスキームは微分展開の方法である。これは作用 $\Gamma_\Lambda[\Phi]$ を場への微分の有限次までの相互作用に制限して解析するものである。その中でも微分相互作用への繰り込み群による補正を全て無視するものを局所ポテンシャル近似といわれる。この近似のもとで多くの解析がされていて、例えば 3 次元スカラー理論の解析では、臨界指数の評価が精度良く行われている。局所ポテンシャル近似を改良して微分の 2 次の補正も取り込むと、最も正しいと思われる格子モンテカルロ・シミュレーションの臨界指数の結果に、さらに近づく。非摂動繰り込み群の手法の長所の一つは、このようにして、理論空間を広げていく事によって近似の改良が系統的にでき、さらに、その過程において計算する物理量の収束がはやいことである。この論文で、有限温度有限密度の場の理論の解析に非摂動繰り込み群の手法を用いる理由の一つがこのことである。

この論文では、有限温度電弱相転移の解析への第一ステップとして、 $O(N)$ ϕ^4 理論を、QCD の有限温

度有限化学ポテンシャル相構造の解析への第一ステップとして Nambu-Jona-Lasinio/Gross-Neveu 模型を扱う。

有限温度の $O(N)$ ϕ^4 模型の解析はアイジーダイアグラムを取り込んだ (リング改良) 摂動計算による解析が行われてきた。そこでは、展開係数は、だいたい $\frac{\Lambda T}{m(T)}$ で、相転移温度 T_{cr} 近傍では $m(T_{cr}) \sim 0$ なので、計算が破綻してしまう。これは摂動計算における赤外発散の問題である。また、リング改良した 1 ループでの計算では ϕ^3 の項が有効ポテンシャルに現れ、相転移が 1 次相転移になってしまう。有限温度の $O(N)$ ϕ^4 模型の非摂動繰り込み群を用いた解析は数前行われている。非摂動繰り込み群では定式化において赤外カットオフ Λ が導入されているため、摂動計算で問題であった赤外発散は回避できる。非摂動繰り込み群の枠組みでは、有限温度 $O(N)$ スカラー理論を扱うときは、理論が実効的に零温度 4 次元理論から零温度 3 次元理論に移る事がみとれる。すなわち、非摂動繰り込み群方程式が $\Lambda \gg T$ では実効的に零温度 4 次元理論のもの、 $\Lambda \ll T$ では実効的に零温度 3 次元理論のものになる。そして、臨界現象は赤外極限の零温度 3 次元理論で支配される。零温度 4 次元理論での結合定数 $(\lambda, \frac{\rho_0}{\Lambda^2})$ に対応する零温度 3 次元理論での有効結合定数は $(\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa}) = (\frac{\lambda T}{\Lambda}, \frac{\rho_0}{T\Lambda})$ となる。零温度 3 次元スカラー理論は、零温度 4 次元スカラー理論と違い、非自明な固定点を持っていて、infrared free でない。したがって、臨界温度 T_{cr} では有効結合定数 $(\tilde{\lambda}, \tilde{\kappa})$ が赤外極限で固定点 $(\tilde{\lambda}_{fp}, \tilde{\kappa}_{fp})$ に近づく。摂動計算では展開係数が $\frac{\Lambda T}{m(T)}$ で、臨界温度近傍で展開係数が大きくなることを考えると非摂動繰り込み群での解析は興味深い。非摂動繰り込み群では λ の running を取り込んでいるのに対して、摂動計算ではリング改良で、質量項の改善はしているが、4 点結合定数 λ の running は取り込んでいない点も大きな違いである。解析において、理論空間を広げて行くにつれて計算された臨界指数は、同じユニバーサリティクラスの模型の格子モンテカルロ計算の結果の値に近い値が得られる。

前に述べたように、有限温度有限密度の QCD の相構造は変化に富んだものであることが予想されている。温度、密度が有限のフェルミオンの系への非摂動繰り込み群の応用の第一歩として Nambu-Jona-Lasinio/Gross-Neveu 模型を扱う。この内容がこの論文のオリジナルで、紙面を最も割いたところである。ここで、非摂動繰り込み群の手法を用いるのは、非摂動的手法が数えるほどしかないこと、そして、それらはどんな場合にも万能ではない事である。たとえば、最も強力と思われている格子モンテカルロ・シミュレーションは現在の段階では有限密度の系には適用できていない。また、シュウィンガー・ダイソン方程式による解析は近似の系統的な改良が難しく、通常 $1/N$ 展開の leading で解析されている。非摂動繰り込

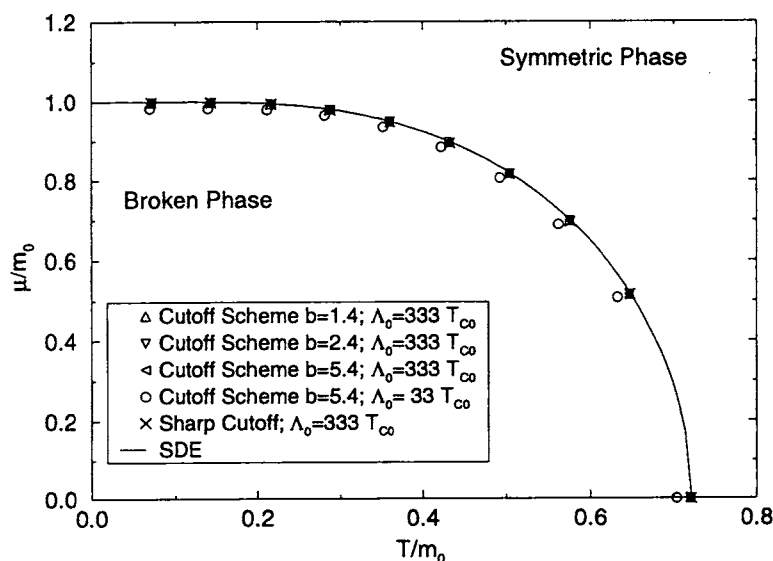


図 1: large N_c 極限での 3 次元 GN 模型の有限温度有限化学ポテンシャルカイラル相構造。温度と化学ポテンシャルは $T = \mu = 0$ のフェルミオンの力学的質量 m_0 で規格化した。非摂動繰り込み群方程式 (3.2) でのカットオフスキーム依存性と紫外カットオフ依存性、シュウィンガー・ダイソン方程式での結果を示す。臨界線上すべてで相転移は 2 次相転移。

み群の手法は有限密度の系にも応用でき、近似の系統的向上が行える。まずはじめに、 $1/N_c$ leading で解析を行い、非摂動繰り込み群の枠組みでどのようにシュウィンガー・ダイソン方程式の結果と無矛盾な結果が得られるかをみる。温度、化学ポテンシャルのような赤外カットオフ以外のスケールが入ると、それらの比が関係してくる。零温度零化学ポテンシャルでは紫外カットオフという概念はなかったが、温度、化学ポテンシャルといった参照できるスケールがあると、紫外カットオフをどのくらいとればいいのかの問題になってくる。 $1/N_c$ leading で解析では結果の紫外カットオフ依存性、そして、解析の信頼性を示すカットオフスキーム依存性を調べる。温度に比べて十分大きな紫外カットオフを用いれば、シュウィンガー・ダイソン方程式の結果を再現でき、そのとき、カットオフスキーム依存性がほとんどないことを示す(図1)。次に $1/N_c$ leading を越えた解析をメソン場 $\psi, \bar{\psi}, \gamma_5 \psi$ に対応する補助場 σ, π を導入して、メソンの fluctuation を取り込んだ解析を行う。これで $1/N_c$ 展開の任意のオーダーのグラフの寄与を部分的に取り込む事ができる。(T, μ) 平面でのカイラル相構造の N_c 依存性を計算し、 N_c 依存性が小さくないことを確かめた(図2)。

ゲージ理論への応用の第一歩として、最後にシュウィンガー・ダイソン方程式での解析における梯子近似と等価な近似で、非摂動繰り込み群の手法を使って QED を解析する。有限温度の QED の非摂動的解析は過去にシュウィンガー・ダイソン方程式を使って行われている。しかし、有限温度では離散的な松原があるので自己無撞着な方程式を解くには、さらに近似が必要で、ゲージ場のプロパゲータの運動量の第 0 成分を 0 とおいた近似 (Instantaneous exchange approximation) で解析されている。非摂動繰り込み群ではこのような IE 近似のような近似をしず、梯子近似に対応した近似で解析ができる。最近、零温度零密度での梯子近似でのシュウィンガー・ダイソン方程式の解析から得られるフェルミオンの力学的質量と同じ力学的質量が得られる非摂動繰り込み群方程式を導いている論文がある。この議論を有限温度の場合に拡張することは可能で、有限温度でのシュウィンガー・ダイソン方程式の梯子近似と同じ力学的質量を与える非摂動繰り込み群方程式を書き下すことができる。IE 近似と等価な非摂動繰り込み群方程式での解析結果と、IE 近似をしない場合の非摂動繰り込み群方程式の解析結果を比べ、それらの違いが小さくない事を確かめた。

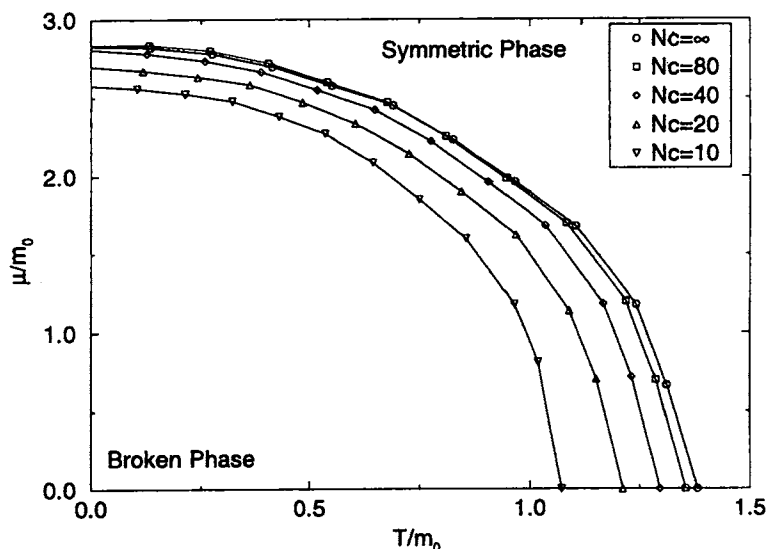


図 2: 有限温度有限化学ポテンシャルの 4 次元 NJL 模型のカイラル相構造の N_c 依存性。それぞれの N_c で臨界線上すべてで 2 次相転移または非常に弱い 1 次相転移。温度と化学ポテンシャルは $T = \mu = 0$ でのフェルミオンの力学的質量 m_0 で規格化した。

学位論文審査結果の要旨

本審査委員会は、審査の結果、上記学位論文に関して以下のように判定した。

有限温度、有限密度系の量子論的場の理論の解析は、宇宙の進化における重要な電弱相互作用の相転移、クォーク、グルオンプラズマ相からハドロン相へのQCD相転移などとの関連で極めて重要な問題となっている。これらの相転移の研究は、摂動論的な取扱はできず、どうしても強い相互作用系を取り扱う非摂動的な研究が必要である。しかし、非摂動的な研究手法は、それほど多くなく、いずれもそれぞれの困難を抱えている。例えば、格子上的計算は、クォークのようなフェルミオンを含むと非常に取り扱いが困難になるうえに、有限密度系は、作用が複素数化するため、いまだにどのようにとり扱えばよいのか分かっていない。

本論文は、非摂動的な取り扱いとして、近年有望視されてきている非摂動的繰り込み群を用いて、有限温度、有限密度系の量子論的場の理論の解析、特にカイラル対称性の自発的破れに関する相転移について研究を行い、以下のような興味ある結果を得た。1) まず、フェルミオンのみで構成された、有限温度、有限密度の南部-Jona-Lasino模型に適用し、 $1/N$ 近似の範囲で、十分大きな紫外発散のカットオフをとれば、Schwinger-Dyson方程式と矛盾しないことを確かめた。2) その結果は、カットオフスキームの選び方に依存しないことを確かめた。3) Schwinger-Dyson方程式の方法では、 $1/N$ 近似を改良することは、困難であるが、非摂動的繰り込み群方程式の方法では、系統的に改良できる。メソン場に対する集団座標を持ち込むことで、 $1/N$ 近似の改良を実際に行いN依存性がかなり大きいことを始めて明らかにした。4) ゲージ理論への応用の一歩として、有限温度QEDに適用した。Schwinger-Dyson方程式の方法では、instantaneous exchange(IE)近似とよばれる近似を行わなければ、解析が難しく、IE近似が採用されている。非摂動的繰り込み群方程式の方法では、IE近似なしで解析でき、実際に行った。その結果、IE近似は信頼できない事を始めて明らかにした。

以上の結果は、有限温度、有限密度系の量子論的場の理論の解析に非摂動的繰り込み群方程式の方法が極めて有効であることを明らかにしており、現実の電弱相転移、QCD相転移の研究への道筋を開くもので大変興味あるものである。更に、本論文は、参考論文や副論文の内容を中心に、関連する他の研究のレビューを含めてたいへん良く書かれている。

以上の点から委員会は本論文が博士論文として値すると結論した。