氏　　　名	沼 波 政 倫
生 年 月 日	
本　　　籍	岐阜県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第611号
学位授与の日付	平成16年3月25日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	繰り込み不可能理論における予言力と最大局所性
論文審査委員(主査)	鈴木　恒雄（総合メディア基盤センター・教授）
論文審査委員(副査)	末松大二郎（理学部・助教授）青木　健一（理学部・教授）
	寺尾　治彦（自然科学研究科・助教授）田村　博志（理学部・助教授）

学 位 論 文 要 旨

Nonrenormalizable theories contain infinitely many free parameters. Considering these theories in terms of the Wilsonian renormalization group (RG), the author suggests a method called "maximal locality method" to give more predictive power to these theories. The basic assumption is the existence of the maximal ultraviolet cutoff in a cutoff theory, and we require that the theory be so fine-tuned as to reach the maximal cutoff. The theory so optimized, behaves as a local continuum theory as much as possible.

In this thesis we considered higher dimensional scalar theories with compactified or uncompactified extra dimension, and apply this method to these theories. So we find that at least in a certain approximation to the Wilsonian RG, this requirement enable us to make unique predictions in the infrared regime in terms of a finite number of independent parameters. And if we assume that uncompactified D-dimensional theory is the low-energy effective theory of compactified $(D+1)$-dimensional theory, the predictions from both theories should agree with each other low energies. In this work, we find that this consistency requirement can strongly constrain the compactification scale R^{-1}.

素粒子物理学において、繰り込み不可能で自明な理論というのは、紫外領域に存在するであろう繰り込み可能で非自明な根底理論の赤外有効理論として捉えられ、非常に重要な役割を果たしている。量子重力理論や高次元ゲージ理論などは、負の正準次元を持つ結合定数などから、摂動的には繰り込み不可能であり、上記の様な捉え方の下で議論されてきた。つまり、高エネルギー領域には非自明で繰り込み可能な理論が存在しているのであるが、低エネルギー領域では繰り込み不可能に見えているだけであるということである。しかし、繰り込み不可能な理論には無限個の独立パラメータが存在し、そのために理論から直接予言を得ることは非常に難しい。そこで筆者は本論文において、繰り込み不可能理論から予言を得るため、"最大局所性の方法"を提案し、高次元スカラー理論を例に議論した。ここで紫外に存在する繰り込み可能な根底理論を考えてみる。S.Weinberg によると漸近的安全な理論は繰り込み可能である。ここで漸近的安全とは、理論に非

自明な紫外固定点が存在し、そこへ流れ込む繰り込み群の流れが有限次元の紫外臨界面を形成することである。即ちそのような紫外臨界面上に理論の結合定数が存在していれば必ず有限な量を保ったままで連続極限をとることができ、そのことが繰り込み可能性を保証するわけである。そこでその臨界面上の繰り込み群の流れに注目してみると、これらは無限大のスケールをかけて紫外固定点に到達することが分かる。実際、最も簡単な非自明理論として3次元スカラー理論を考えてみると、非自明な固定点に向かって無限大のスケールをかけて繰り込み群の流れが吸い込まれていくことが分かる。そういった根底理論の赤外有効理論として自明で繰り込み不可能な理論が存在しているのであれば、当然この紫外臨界面の情報を含んでいなければならない。ここで筆者は、理論の Running time というものに注目した。Running time T とは、理論の本質的な紫外カット・オフ Λ_0 を用いて $T \equiv \ln(\Lambda_0/\Lambda_R)$ と定義される。ここで Λ_R は繰り込み条件を課す赤外スケールである。非自明な根底理論においては、各パラメータをちょうど臨界面上に設定することにより、紫外固定点へ到達する流れに乗り、無限大の Running time をかけて発展する。一方、自明な理論は、その定義により有限の紫外カット・オフが存在するが、その中でも赤外でのパラメータの値をうまく選んでやることによりに最大のカット・オフ $\Lambda_{\max}$ が存在するはずである。即ち、最大の Running time $T_{\max}$ が存在するであろう。これを根底理論の場合と比較すると状況が非常に類似していることが分かる。つまり、無限大の Running time を持つ紫外臨界面上の流れを決定するためにパラメータの微調整が必要であったことと、最大の Running time を持つ流れを決定するために赤外でパラメータを調節していたという点についてである。そこで、次のような重要な仮定を行う。繰り込み不可能なものも含めた自明な理論において**最大の Running time を以て発展する繰り込み群の流れが紫外臨界面の最善の近似となっている**という仮定である。つまり、その詳細を知らない根底理論の情報を自明な有効理論における最大の Running time を以て決定する。これは理論を最も短距離 ($\sim \Lambda_{\max}^{-1}$) まで定義することに対応するため、最大の局所性を要請していることに等しい。このようにして繰り込み不可能な理論から予言を得る方法を最大局所性の方法 (Maximal Locality Method : 以降 MLM と略記) と呼ぶことにする。

ここで、MLM を定式化しておく。摂動的に繰り込み可能な理論には必ず無次元の結合定数が存在し、その結合定数を独立パラメータとして負の次元のパラメータは非独立と見なして計算を行う。しかし繰り込み不可能な理論には一般に無次元の結合定数が存在せず、無限個の負次元の独立パラメータが存在する。MLM は、その中で最大の正準次元 $d_{\max}$ を持つものを独立と見なし、それより小さな次元を持つものは非独立と見なす[1]。そして、独立パラメータを赤外で与えたときに、理論が最大の局所性を持つように非独立パラメータを精密調節する。即ち、Running time が最大になるように調節する。これが MLM の具体的方法である。

それではこの方法を高次元スカラー理論に適用する。ここで我々は非摂動的な解析法として Wilson 流繰り込み群の方法を用い、中でも Wegner-Houghton 方程式を使う。近似には局所ポテンシャル近似を用いた。まず次のような D 次元 $O(4)$ スカラー理論の有効作用を考える。

$$S_{\text{eff}} = \int d^D x \left(\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{4} (\partial_\mu \phi_a)^2 + V(\rho) \right) \tag{1}$$

ここで $\rho = (1/2) \sum_{a=1}^{4} \phi_a \phi_a$ である。すべてのパラメータを無次元化すると、このポテンシャルに対する次の Wegner-Houghton 方程式が得られる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\Lambda \frac{\partial V}{\partial \Lambda} = DV + (2-D)\rho V + \frac{A_D}{2} \Big[(N-1) \ln(1+V') + \ln(1+V'+2\rho V'') \Big] \tag{2}$$

$'$ は ρ による微分を表し、$A_D = 1/(2^{D-1}\pi^{D/2}\Gamma(D/2))$ である。次にポテンシャルを以下のように演算子展開する。

$$V(\rho, t) = v_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{f_n(t)}{(2A_D)^n} \Big[\rho - 2A_D f_0(t) \Big]^{n+1} \tag{3}$$

[1] この段階では実際に独立か非独立であるかは確かめられないが、後でその区別が妥当であることを見る。

これを (2) に代入することで各結合定数 f_n に対する β 関数が得られ、それらを用いて以下の解析を行う。

$D=4$ スカラー理論は摂動的に繰り込み不可能であるが自明であるため、我々の方法を適用するのに良い例であり、解析してみることにする。先程のパラメータの区別の仕方に従うと f_1 が独立パラメータで f_n $(n \geq 2)$ は非独立パラメータである[2]。そこで MLM により理論に最大の局所性 (最大の Running time) を要求すると、例えば $f_1(0) = 0.1$ と与えると、$n=2$ のときは $f_2(0) \simeq 0.000528$ と一意に決まる (図 1)。$n \geq 3$ のときも同様に決定でき、f_n は f_1 の関数としてプロットすることができる (図 2)。

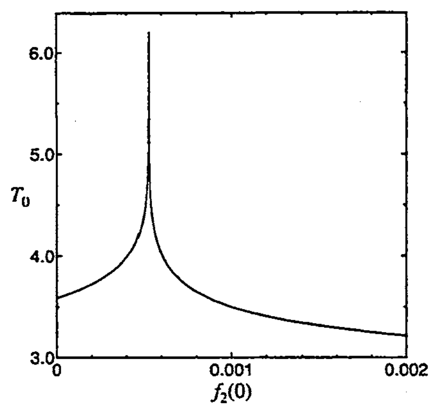

図 1: $n = 2$ のとき、$(f_0(0),\ f_1(0)) = (1/2A_4,\ 0.10)$ においての $f_2(0)$ の精密調整。

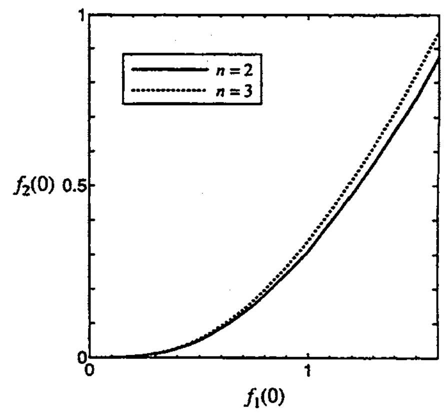

図 2: $f_1(0)$ の関数としての精密調整された $f_3(0)$ の値。$f_0(0) = 1/2A_4$ に対するもの。

このようにして非独立なパラメータ f_n を有限個の独立パラメータ f_1 で記述することができる。今の場合は摂動的には繰り込み可能であり、上の方法で決定せずとも計算できるが、理論の自明性に起因する非摂動的不定性を除去することはできない。このことについては後述することにする。

$D=5,6$ スカラー理論は摂動的に繰り込み不可能である。しかし、MLM は上の $D=4$ の場合と全く同様にして予言を得ることができる。各結合定数の正準次元を調べると先程と同様で f_1 が独立で f_n $(n \geq 2)$ は非独立のパラメータとなる。そして $f_1(0)$ を与えると他のパラメータを決定することができ、やはり f_n は f_1 の関数として記述することが可能となる (図 3)。

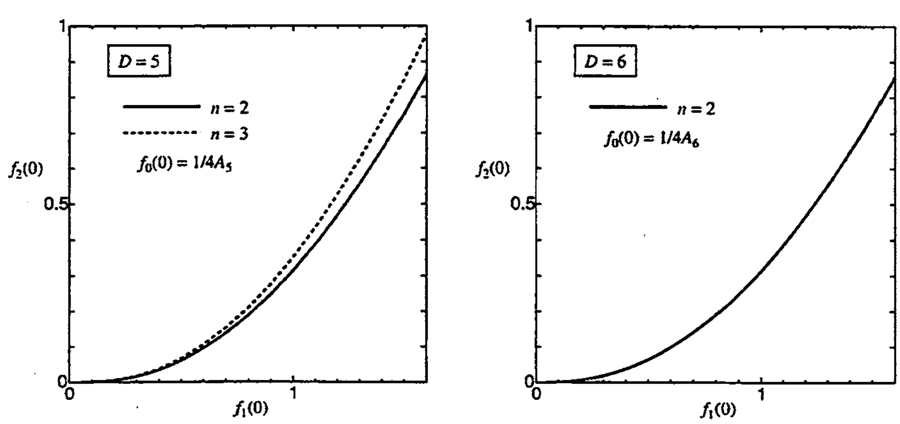

図 3: $D=5,6$ における $f_1(0)$ の関数としての精密調整された $f_2(0)$ の値。双方とも $f_0(0) = 1/2A_D$ に対するものである。

[2]正準次元が正の結合定数 (今の場合は f_0) は、理論に物理的スケールを持ち込むための繰り込み条件に必要であり、これも勿論独立パラメータである。

次に理論の自明性から伴う赤外領域での非摂動的な不定性について見ていきたい。$D=4$ の場合、β 関数を赤外固定点 ($f_0 = 3/4,\ f_n = 0\ (n \geq 1)$) の近傍で解くと、例えば f_2 に対して次の解が得られる。

$$f_2 = \frac{15}{4}f_1^3 - \frac{189}{8}f_1^4 + \frac{7479}{64}f_1^5 - \frac{12879}{32}f_1^6 + O(f_1^7) + C_2^{(4)} \exp\left(-\frac{2}{3f_1} - \frac{57}{4}f_1\right) f_1^{\frac{9}{2}} \tag{4}$$

上式から分かるように、この解は冪級数部分と指数関数部分に分かれており、赤外へ向かう程 f_1 が小さくなるため冪級数部分が支配的になる。この冪級数部分が摂動的な解に対応し、指数関数部分が非摂動的な解と解釈することができ、この指数関数の係数 $C_2^{(4)}$ の任意性が非摂動的な不定性として現われている。これは摂動計算では決定することができない。しかし、MLM を適用すると決定することができ、

$$C_2^{(4)} \simeq 7 \times 10^3 \tag{5}$$

と求められる。このように、MLM は非摂動的不定性を決定し除去することができる。

$D = 5, 6$ の場合も同様に赤外固定点近傍で β 関数を解くと、それぞれ

$$f_2 = f_1^3 \left(\frac{15}{2} + \left(54 \ln f_1 + C_2^{(5)}\right) f_1 + \left(81 \ln f_1 + \frac{3}{2}C_2^{(5)} - \frac{9315}{32}\right) f_1^2 + O\left(f_1^3 \ln f_1\right)\right) \quad (\text{for } D=5) \tag{6}$$

$$f_2 = f_1^3 \left(C_2^{(6)} - \frac{15}{4}\ln f_1 + \left(-\frac{135}{16}\ln f_1 + \frac{693}{32} + \frac{9}{4}C_2^{(6)}\right) f_1 + O\left(f_1^2 (\ln f_1)^2\right)\right) \quad (\text{for } D=6) \tag{7}$$

というように不定性として任意の係数 $C_2^{(D)}$ が現われるが、これも MLM によって決定することができる。

$$C_2^{(5)} \simeq 1.1 \times 10^2, \quad C_2^{(6)} \simeq -7.6 \tag{8}$$

次に、より現実的な模型として、1 つの余剰次元が半径 R の円にコンパクト化された $(D+1)$ 次元スカラー理論を考えていくことにする。この理論が赤外で D 次元理論になることは容易に想像でき、当然、2 つの理論からの赤外領域における予言は無矛盾であるべきである。一方、MLM はその背景に根底理論と有効理論の関係があった。つまり、今の場合の根底理論、$(D+1)$ 次元理論と有効理論である D 次元理論は、MLM による赤外での予言が無矛盾であるかを調べる必要がある。

まず、$(D+1)$ 次元理論に対する繰り込み群方程式を考える。$D+1$ 次元での有効ポテンシャルを今までと同様に以下のように展開する。

$$V_{D+1} = v_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+1} \frac{f_m(t)}{(2A_{D+1})^m} \left[\frac{1}{2}\sum_a \Phi_a \Phi_a - 2A_{D+1} f_0(t)\right]^{m+1} \tag{9}$$

これを余剰次元の座標のみについて積分し、場や結合定数を再定義することにより D 次元の立場でのポテンシャルを得る。($\phi^{(n)}$ は n 番目のカルーツァ・クライン・モードを表す。)

$$\begin{aligned} V &= {v_0}'(t) + \frac{1}{2}\left(f_0^2 f_2 - f_0 f_1\right) \sum_a \sum_n \phi_a^{(n)} \phi_a^{(-n)} \\ &\quad + \frac{1}{8A_D}\left(\frac{1}{2}f_1 - f_0 f_2\right) \sum_{a,b} \sum_{n_i} \phi_a^{(n_1)} \phi_a^{(n_2)} \phi_b^{(n_3)} \phi_b^{(n_4)}\ \delta_{n_1+n_2+n_3+n_4,\,0} \\ &\quad + \cdots \end{aligned} \tag{10}$$

そして、有効ポテンシャル V に対する繰り込み群方程式は、局所ポテンシャル近似を考慮に入れて次のように与えられる。(m_n はカルーツァ・クライン質量。)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = DV - \frac{D-2}{2}\sum_n\sum_a \phi_a^{(n)}\frac{\partial V}{\partial \phi_a^{(n)}} + \frac{A_D}{2}\mathrm{Tr}\ln\left(1 + m_n^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial\phi_a^{(n)}\partial\phi_b^{(-n)}}\right) \tag{11}$$

これら (10)、(11) より各結合定数の β 関数が得られる。

それでは解析結果を示す。図 4 は $4+1$ 次元理論において $10^{-2}\times\Lambda_R$ から $10^3\times\Lambda_R$ までの範囲のコンパクト化スケール R^{-1} に対する $f_2(0)$ を前章と同じように最大局所性を実現する値に決定していった結果である。また、点線は同一の独立パラメータの初期値のときの平坦な 4 次元理論からの MLM による予言値を示している。これより、コンパクト化スケールが

$$R^{-1} \gtrsim 10\times\Lambda_R \tag{12}$$

を満たす範囲では、双方の理論にほぼ差がないのが分かる。つまり、上の条件を満たしていれば、$4+1$ 次元理論と 4 次元理論からの MLM からの予言は、赤外スケール Λ_R で無矛盾に成立できるということを意味している。

さらに高次元の場合についても同様に解析することができ、MLM が赤外で無矛盾に機能するための条件として以下の結果を得た。

$$R^{-1} \gtrsim \begin{cases} 50\times\Lambda_R \\ 50\times\Lambda_R \\ 100\times\Lambda_R \end{cases} \text{for} \begin{cases} 5+1\text{-dim. theory} \\ 6+1\text{-dim. theory} \\ 7+1\text{-dim. theory} \end{cases} \tag{13}$$

最後に双方の理論の Running time の最大値 $T_{\max}$ を調べてみる。$(D+1)$ 次元理論の最大の Running time がコンパクト化スケール (の対数をとった量) より小さい場合、D 次元理論は Running の最中に $(D+1)$ 次元理論が発散するスケールを越えて発展するのにも関わらず平坦理論のままで

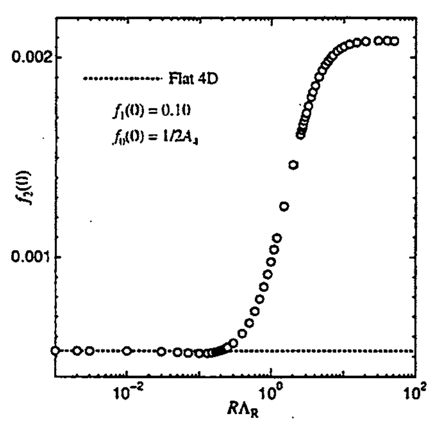

図 4: コンパクト化された 5 次元理論からの $(f_0(0),\ f_1(0)) = (1/2A_4,\ 0.10)$ に対する $f_2(0)$ の予言値とコンパクト化半径 R との関係。

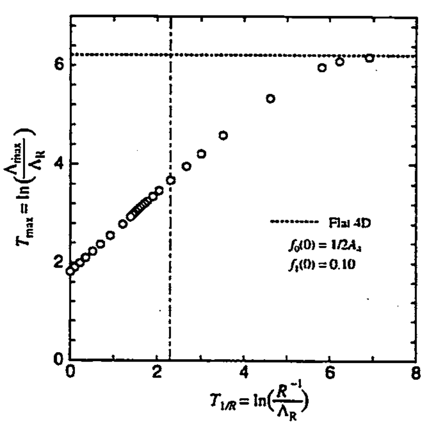

図 5: $4+1$ 次元における、$T_{1/R}$ と最大の Running time $T_{\max}$ との関係。点線は平坦な 4 次元理論における $T_{\max}$ の値。また点破線は先程求めた双方の理論の予言値が無矛盾であるための R^{-1} の下限 ($\sim 10\times\Lambda_R$) を $T_{1/R}$ に直した値。

最大のカット・オフまで行き着くことになる。そのような場合において MLM による予言が無矛盾であるかどうかは非自明である。

$4+1$ 次元理論における結果を図 5 に示す。この図より両者の $T_{\max}$ の値が分岐する $T_{1/R}$ の値 (~ 6) が最大局所性の方法で得られた $T_{1/R}$ の下限 ($T_{1/R}^{(\min)} \sim 2.3$) よりも大きな場所にあるということである。これは $T_{1/R}$ が 2.3 から 6 までの間では根底理論である $4+1$ 次元理論の方が小さな紫外カット・オフを持っているのにも関わらず結合定数の予言値は無矛盾であり続けているという

非自明な結果である。また、$T^{(\min)}_{1/R}$ とそのときの最大の Running time を比較すると、

$$T^{(\min)}_{1/R} \sim 2.3, \quad T_{\max} \sim 3.8 \quad \text{for } 4+1\text{-dim. theory} \tag{14}$$

となり $T^{(\min)}_{1/R} < T_{\max}$ である。。この事実は、最大局所性という性質が赤外領域まで永く残り続けている可能性を示唆している。

しかし、このような非自明な結果は D が小さいとき、若しくは f_1 が小さいときにのみ実現する。例えば上と同じ $f_1(0) = 0.1$ の場合で、より高次元のときでは $T^{(\min)}_{1/R}$ とそのときの最大の Running time を比較すると、

$$T^{(\min)}_{1/R} \sim \begin{cases} 3.9 \\ 3.9 \\ 4.6 \end{cases}, \quad T_{\max} \sim \begin{cases} 2.4 \\ 1.55 \\ 1.15 \end{cases} \text{for } \begin{cases} 5+1\text{-dim. theory} \\ 6+1\text{-dim. theory} \\ 7+1\text{-dim. theory} \end{cases} \tag{15}$$

となっており $4+1$ 次元とは異なり、いずれの場合も $T^{(\min)}_{1/R} > T_{\max}$ となっており、この場合、双方の MLM による予言値が無矛盾になることは自明であると言える。

学位論文審査結果の要旨

素粒子の標準理論は、その典型的エネルギー（100 GeV）とそれと桁違いに違うプランクエネルギー（$10∧|19|$GeV）がなぜ存在するのかという問いに答えてくれない。これが階層性の問題である。近年、時空の次元を増し、しかも、この余分な次元の大きさを有限であるが大きくすることで、階層性の問題を解決することができるという提案がなされた。（余分な次元を持つ理論は一般に Kaluza - Klein 理論と呼ばれている。）一般には、Kaluza - Klein 理論はくりこみ不可能である。くりこみ不可能な理論には、一般に無限個の独立なパラメータがあり、摂動論の枠組みでは予言力が著しく低い。沼波君はこのような理論を非摂動論的くりこみ群を使って解析し、その予言力について調べた。その結果、理論ができるだけ短い距離まで連続理論として振る舞うように要求すると、摂動論では独立なパラメータとして扱わなければならないものもの間に関係が生じ、その帰結として理論の予言力が向上することを見いだした。この結果は、先ず、4 次元以上の空間がコンパクト化されていない場合に得られた。その後、4 次元以上の空間がコンパクト化されている場合にも得ることが出来た。この結果、高次元スカラー場の理論で得られたものであるが、現実的な Kaluza - Klein 理論にも拡張することができ、今後の発展に大きな影響を与えるものであると期待できる。

以上の点から委員会は本論文が学位論文として値すると結論した。