氏　　　　名	SVADLENKA　KAREL
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第９６６号
学位授与の日付	平成 20 年 3 月 22 日
学位授与の要件	課程博士(学位規則第４条第１項)
学位授与の題目	Mathematical analysis and numerical computation of volume-constrained evolutionary problems, involving free boundaries （自由境界を含む体積保存条件つき発展問題の解析と数値計算）
論文審査委員（主査）	小俣　正朗（自然科学研究科・教授）
論文審査委員（副査）	宮川　鉄朗（自然科学研究科・教授），畑上　到（自然科学研究科・教授）， 長山　雅晴（自然科学研究科・准教授），小林　健太（自然科学研究科・准教授）

Abstract

The object of study of the present thesis are evolutionary problems satisfying volume preservation condition, i.e., problems whose solution have a constant value of the integral of their graph. In particular, the following types of problems with volume constraint are dealt with: parabolic problem (heat-type), hyperbolic problem (wave-type), parabolic free-boundary problem (heat-type with obstacle) and hyperbolic free-boundary problem (degenerate wave-type with obstacle). The key points are design of equations, proof of existence of weak solutions to them and development of numerical methods and algorithms for such problems. The main tool in both the theoretical analysis and the numerical computation is the discrete Morse flow, a variational method consisting in discretizing time and stating a minimization problem on each time-level. The volume constraint appears in the equation as a nonlocal nonlinear Lagrange multiplier but it can be handled elegantly in discrete Morse flow method by restraining the set of admissible functions for minimization. The theory is illustrated with results of numerical experiments.

本論文は、解のグラフの積分値が一定である（体積保存条件をみたす）ような時間発展問題を対象としている。具体的には、放物型問題（熱方程式）、双曲型問題（波動方程式）、放物型障害物問題、退化双曲型障害物問題を扱っている。こような問題に対して、体積保存条件を満たす方程式の導出、弱解の存在証明と数値アルゴリズムの提案をおこなっている。理論的解析と数値計算を行うために、離散勾配流法という変分法に基づいた方法を用いた。この方法は、時間を差分化したタイプの汎関数を構成し、各時間レベルで最小化問題を解いて行くものである。体積保存条件は方程式の記述において非局所的で非線形な項を生み出すが、離散勾配流法において最小化する許容関数に制限をかけることによって的確に処理できる。また、体積保存する基底関数を用いる新しい数値計算法の開発も行った。

体積保存問題（自由境界の無い場合） 本研究のきっかけとなったのは表面上に動く水滴のモデルを構成することであった。表面上に乗っている水滴の正の接触角や天井から垂れる水滴などを表現するために、我々は水滴をその表面に相当する膜と膜の中にある流体に分けて、連成モデルを考えることにした。外力と流体の運動による圧力の変化で運動する膜のモデルを考えるとき、体積保存条件を考慮しなければならない。本論文はこのような拘束がつくスカラー膜の運動の解析を目標としている。

論文の最初の3章は解析の対象となる方程式の導出、意味づけや定常問題との関連、そして方法論を中心としている。支配方程式はラグランジアンの停留点がシステムの挙動を表すという物理学の原理に基づいて導出される。膜の形を u というスカラー関数で表すことにすると、ラグランジアンは次のように書ける。

$$L(u) = \int_\Omega [\frac{1}{2}(u_t)^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)]\, dx$$

ここで、F は諸外力のポテンシャルである。体積が時間を通して一定である関数の中で停留点を探すことになるが、滑らかな停留点があるとすると、以下の方程式を満たすことがわかる。

$$u_{tt} = \Delta u + f(u) + \lambda \tag{1}$$

体積保存の拘束 ($\int_\Omega u\, dx = V$) がある場合に新しく現れる λ の項は

$$\lambda = \frac{1}{V}\int_\Omega [u_{tt}u + |\nabla u|^2 - f(u)u]\, dx$$

という形をしており、楕円型問題との類似をもとにラグランジュ乗数と呼ぶことにした。このラグランジュ乗数を用いて後述の通り波動型方程式以外に熱型やそれらに対応する障害物問題の解析を行っている。

理論的解析と数値計算を行うために変分法に基づいた方法を用いた。時間を差分化して、各時間レベルにおいて最小化問題に持ち込む、離散勾配流法といわれる方法である。体積保存条件は最小化する許容関数の集合を制限することによって満たされる。(1) の式に対する離散勾配流は

$$J_n(u) = \int_\Omega \Big[\frac{|u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2}{2h^2} + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\Big]\, dx \tag{2}$$

で定義される。ここで、h は時間の差分幅、u_k は k 番目の時間レベルでの近似解を意味する。時間上で近似解 u_k を補間した関数を表すために、$\bar{u}^h$（区分的定数関数）と u^h（区分的線形で連続な関数）という記号を導入する。

以上の汎関数 (2) を最小化し、$h \to 0$ とすることによって、外力つき波動方程式の弱解が得られる。体積保存条件を満たすために、通常の $H^1(\Omega)$ 空間の代わりに以下の関数集合の中で最小化関数を探す。

$$\mathcal{K} = \{u \in H^1(\Omega);\ u|_{\partial\Omega} = 0,\ \int_\Omega u\, dx = V\}$$

次に、離散勾配流法のアイデイアを体積保存膜のゆるやかな運動を記述する放物型方程式に応用してみよう。前述の方法論と類似の考察で次の方程式が導出され、

$$u_t = \Delta u + f(u) + \lambda, \qquad \lambda = \frac{1}{V}\int_\Omega [u_t u + |\nabla u|^2 - f(u)u]\, dx$$

離散勾配流法などにより弱解の存在が証明される。この場合、J_n の差分項は $|u - u_{n-1}|^2/(2h)$ となり、差分段階でのラグランジュ乗数は次のようになる。

$$\bar{\lambda}^h = \int_\Omega [u_t^h \bar{u}^h + |\nabla \bar{u}^h|^2 - f(\bar{u}^h)\bar{u}^h]\, dx$$

証明では、この $\bar{\lambda}^h$ の収束を示すことが重要なポイントとなる。これは近似解のエネルギー評価より得られる $\bar{\lambda}^h$ の一様有界性を用いて可能になる。さらに、弱解の Hölder 連続性がわかる。連続性の結果は De Giorgi クラスを利用する Ladyzhenskaya の方法に基づいたものである。このアプローチでは、解の有界性を予め示さないといけないが、本論文では近似解が一様有界であることを示す方式をとる。証明の要所は差分項の扱いとラグランジュ乗数の評価である。

論文の次の結果は問題 (1) の弱解の存在である。初期値の滑らかさが増すと、弱解の時間に関する正則性が上がることがわかった。初期値が H^1 関数のとき、放物型の場合に用いたラグランジュ乗数の弱収束は適応しないため、乗数を線形化できるという事実を利用した。すなわ

ち、体積保存条件を満たす任意の滑らかな関数 v に対し、

$$V\bar{\lambda}^h = \int_\Omega \frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h}\bar{u}^h + |\nabla \bar{u}^h|^2 - f(\bar{u}^h)\bar{u}^h \approx \int_\Omega \frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h} v + \nabla \bar{u}^h \nabla v - f(\bar{u}^h) v$$

が成り立つということである。

自由境界問題への応用 次に、以上の結果の自由境界問題への拡張を試みた。水滴が表面上を運動するという障害物のある現象を考え、膜に対するモデル方程式が形式的に導かれた。双曲型運動の場合、次の方程式を解くことになる。

$$\chi_{u>0} u_{tt} = \Delta u - \gamma \chi_\varepsilon'(u) + \chi_{u>0}\lambda, \qquad \lambda = \frac{1}{V}\int_\Omega [u_{tt} u + |\nabla u|^2 + \gamma \chi_\varepsilon'(u) u]\, dx \tag{3}$$

$\chi_{u>0}$ は u が正になる時空領域の特性関数で、χ_ε はそれを ε というパラメータを用いて滑らかにした関数である。その微分は表面張力を表す関数 γ が係数としてかかり、接触角の存在を表す項である。(3) の左辺の項は消える場合もあるので、退化型である。ε をゼロにしたとき、形式的な計算により解は自由境界上で $|\nabla u|^2 - u_t^2 = 2\gamma$ という関係式を満たすことがわかる。この問題に対し、離散勾配流法を用いて近似弱解を構成することができたが、一般次元での真の弱解への収束は得られていない。近似弱解 u^h は次のように定義される。

$$\int_h^T \int_\Omega \Big[\frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h}\varphi + \nabla \bar{u}^h \nabla \varphi + \gamma \chi_\varepsilon'(\bar{u}^h)\varphi\Big]\, dx\, dt = \int_h^T \int_\Omega \bar{\lambda}^h \varphi\, dx\, dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\{u^h > 0\})$$

離散勾配流の最小化関数は Hölder 連続であることが証明できるので、$\{u^h > 0\}$ は開集合になり、上式のテスト関数を選択することができる。空間 1 次元の場合、劣微分の概念を用いて、ある種の真の弱解が存在することを証明した。

放物型の場合は、次の式が得られる。

$$u_t = \Delta u - \gamma \chi_\varepsilon'(u) + \chi_{u>0}\lambda, \qquad \lambda = \frac{1}{V}\int_\Omega [u_t u + |\nabla u|^2 + \gamma \chi_\varepsilon'(u) u]\, dx$$

ε をゼロにしたとき、自由境界上で $|\nabla u|^2 = 2\gamma$ という条件が満足され、物理のヤングの方程式と一致していることが形式的に確かめられる。この問題の弱解の定義では、テスト関数を $\{u > 0\}$ にサポートをもつものに制限している。つまり、

$$\int_0^T \int_\Omega [u_t \varphi + \nabla u \nabla \varphi + \gamma \chi_\varepsilon'(u)\varphi]\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega \lambda \varphi\, dx\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\{u > 0\}) \tag{4}$$

弱解の存在はペナルテイ項を加えることで自由境界のない問題に還元し、離散勾配流法に基づいた前の結果を応用する順序で示される。ペナルテイつきの方程式は以下のようになる。

$$u_t^\delta = \Delta u^\delta - \gamma \chi_\varepsilon'(u^\delta) - \frac{1}{\delta}\min\{u^\delta, 0\} + (\tilde{\chi}_\delta(u^\delta) + u^\delta \tilde{\chi}_\delta'(u^\delta))\lambda^\delta$$

δ は小さいパラメータで、$\tilde{\chi}_\delta$ は $\{u > 0\}$ の特性関数を滑らかにしたものである。一様 Hölder 連続性より u^δ の一様収束が従い、弱解の定義 (4) で現れるテスト関数を用いることができることになる。

数値計算方法 論文の最後に数値計算のアルゴリズムと数値実験の結果を挙げている。空間を有限要素法に従って離散し、最小化では最急降下法を用いる。アルゴリズムの新しいところは体積に関する拘束の扱い方である。体積の保存は線形の制限なので、超平面に射影することになる。射影のアプローチに加えて、体積がゼロである基底関数に基づいた有限要素法を提案し、基本的な解析を行った。それぞれのタイプの問題に対し、現象と結びつけたモデル方程式を一つ以上選び、その数値計算の結果を解のグラフを通して紹介している。

学位論文審査結果の要旨

Svadlenka Karel 君は、平成１７年１０月に本学大学院博士後期課程に国費留学生として入学した。平成１９年１１月２１日に行われた早期修了審査により、在学期間を２年６ヶ月に短縮して修了申請することが認められた。同君は、入学後より放物型および双曲型の体積保存条件付き自由境界問題に取り組んできた。体積保存とは、関数の積分量（グラフの囲む体積）が保存する問題である。これらの問題について,放物型の場合では弱解の存在と解のヘルダー連続性を示した。また双曲型については、自由境界が無い場合には解の存在定理、自由境界付きの場合には、空間１次元の時にある種の弱解の存在を示した。これらの問題は、一般に取り扱いが難しいとされる自由境界問題である上に、方程式に非局所項を含むという難問であったが、同君は、これらのうち中心的問題と判断されるもののほとんどを解決した。さらに、数値解析方法の開発にも取り組み、最小化法に基づく離散勾配流法の整備、体積保存用の基底関数の開発などの成果を上げ、この方面でも大きな寄与をした。これらの結果を第一著者および単著の原著論文３編、第２著者以降の論文２編にまとめ、英文学術雑誌に掲載された（掲載決定も含む)。

以上のことをふまえ、平成２０年１月３０日に行われた学位論文審査会において審議した結果、本論文は博士（理学）の授与に相当すると判断した。